Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня
на тему:

Методика розв’язування стереометричних задач у класах профільного рівня

Виконала:
студентка II курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Оксана Олегівна Пасічник

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент
Ольга Миколаївна Павелків

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад. Степана Дем’янчука
Юрій Георгійович Лотюк

Рівне – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Стереометрія у шкільному курсі математики посідає вагоме місце. Зміни в науці, техніці й виробництві висувають нові вимоги до математичної підготовки компетентного випускника. На сьогоднішній день одним із ключових завдань геометрії в старшій школі є розвиток просторової уяви та формування вміння виконувати операції з просторовими тілами.

Стереометрія є завершальним етапом шкільного курсу геометрії. Цей розділ є найскладнішим та водночас найважливішим серед усіх тем геометрії.

Стереометрія сприяє формуванню в учнів наукового світогляду, оволодінню системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, розвитку логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури.

Даною проблематикою займались математики-методисти: З.І. Слєпкань, М.І. Башмаков, Г.П. Бевз, А. Г. Мерзляк, М.І. Бурда та інші. Можна зазначити, що проблемою стереометрії є питання розвитку просторового уявлення учнів.

Стереометрія відкриває широкі перспективи у формуванні особистості учня. Метою вивчення стереометрії на сьогоднішній день є не лише навчання учнів розв'язувати задачі з просторовими тілами, а й використовувати знання та навики у повсякденному житті. Такі задачі сприяють формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

Розділ стереометрії включає велику кількість математичних завдань, графічних робіт, завдань для проєктної діяльності, які потребують побудови малюнка. Побудова малюнка залишається важливою складовою частиною розв'язування будь-якої стереометричної задачі. Розв'язування таких завдань часто викликають труднощі в учнів, оскільки потребують не лише знань теоретичного матеріалу, а й добре розвинутого просторового мислення і уяви. Проте у класах профільного рівня, використання завдань із побудовою малюнка є дуже ефективним для формування предметної та ключової компетентності учнів.

Методом унаочнення геометричного матеріалу є використання прикладного програмного забезпечення. Розробка комп'ютерних моделей дозволяє зробити навчальний процес більш захопливим, зрозумілим та динамічним.

Мета дослідження – дослідити методику вивчення стереометрії в класах профільного рівня.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів розв'язувати стереометричні задачі.

Предмет дослідження – стереометричні задачі та способи їх розв'язування.

Відповідно до поставленої мети слід виконати такі **завдання**:

- проаналізувати науково-методичну літературу з теми дослідження;
- з'ясувати суть основних методичних підходів до розв'язування стереометричних задач;
- підібрати стереометричні задачі, які вивчаються у профільних класах;
- розробити практичні та теоретичні матеріали для вчителів з теми дослідження;
- показати використання програми GeoGebra 3D Calculator до розв'язування стереометричних задач.

Гіпотеза. Застосування прикладного програмного забезпечення на уроках геометрії до розв'язування стереометричних задач сприятиме підвищенню розвитку просторового уявлення та результативності навчання.

У магістерській роботі застосовували емпіричні та теоретичні **методи дослідження**.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що матеріали магістерської роботи можуть бути використані учнями та вчителями під час вивчення розділу «Стереометрія», підібрані задачі можна застосовувати для перевірки та контролю знань учнів у профільних класах.

Апробація. Результати дослідження були представлені на звітних наукових конференціях студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2024 – 2025 роках.

Опубліковано тези у збірнику матеріалів XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Наука, освіта, суспільство очима молодих», яка відбулася 17 травня 2024 р. у РДГУ.

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатків.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМИ

1.1. Історичні факти та пропедевтика вивчення стереометрії

Розв'язування задач є найхарактернішим і специфічним різновидом вільного мислення. [32]

Вільям Джеймс

Геометрія є однією із ключових складових частин математики. Вона бере свій початок багато тисячоліть тому. У ті роки людство намагалося відшукати способи обчислювати об'єми та площі різних тіл, що було необхідно для практичних потреб, таких як землемірство, будівництво тощо.

Стереометрія – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі. Дане слово складається із двох грецьких слів: stereos, що означає просторовий і metron - міра. З'явилася та розвивалася стереометрія за потреб практичної діяльності людства.

Як наука стереометрія була започаткована у Стародавній Греції. Даний розділ був розроблений вченими, які прагнули описати та зобразити тривимірні об'єкти та їх властивості. Властивості геометричних фігур були винайдені методом дослідження. Незабаром дані твердження вчені довели.

Одним з найперших вчених, який досліджував стереометрію був грецький вчений Архімед. Він дослідив декілька теорем, які стосуються площ геометричних тіл, а також винайшов основний закон гідростатики та аеростатики. Також Архімед вивів формули для обчислення об'ємів кулі, циліндра, конуса. Значний внесок також залишив за собою відомий всіма Евклід. Він сформулював аксіоми, постулати, намагався дати означення основним просторовим об'єктам. Вченого цікавив реальний простір, де сформульовані аксіоми були очевидні.

У Стародавньому Єгипті теж займалися дослідженнями в області стереометрії. Основна праця у цій галузі Папірус Московський та Ріндський. Вони містять основні відомості про геометричні формули та їх методи обчислення.

Давньоіндійські вчені також намагалися досліджувати стереометрію, розробляючи методи для обчислення об’ємів і площ поверхонь різних геометричних тіл. Проте їхні праці залишилися менш відомими поза межами Індії.

Стереометрія є однією з важливих галузей геометрії. На сьогоднішній день велика кількість формул, теорем, математичних моделей, що засновані на принципах стереометрії, широко застосовуються у різних галузях діяльності пов’язаних із тривимірним простором, що мають велике значення для сучасних технологій. Стереометрія включає в себе розгляд таких геометричних концепцій, як:

- геометричні величини, наприклад, довжини, площі, об’єми, міри кутів тощо;
- геометричні перетворення - паралельні перенесення, різні симетрії, повороти, перетворення подібності тощо;
- вектори;
- геометричні відношення - перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо. [5]

Розділ «Стереометрія» включає в себе велику кількість тверджень, які необхідно доводити. Це можуть бути як теореми, так і різні задачі. Розв’язування задач цього типу часто викликає в учнів найбільше труднощів. Це пов’язано з необхідністю володіти не лише теоретичним матеріалом, а й розвинутим логічним мисленням та просторовою уявою.

Вперше з просторовими фігурами діти зустрічалися ще в дитячому садку та в початковій школі. Наприклад, просторові фігури у формі куба, кулі тощо.

У 2-3 класі учні здійснюють вимірювання та побудову відрізків, обчислюють площі фігур за допомогою підрахунку. Значним етапом вивчення курсу математики у початковій ланці є ознайомлення здобувачів освіти з основними величинами та вимірюванням, наприклад, площі фігур, довжин відрізків, формування просторових уявлень про різні геометричні фігури.

На відміну від початкової школи у основній школі теоретичний матеріал з геометрії є більш ширшим. Починаючи з 5-6 класу, здобувачі освіти вивчають куб та прямокутний паралелепіпед, а також обчислюють їх площі, об'єми. Знайомляться з геометричною фігурою – кулею, пробують знаходити її об'єм.

Навчальний матеріал 7-9 класів з геометрії побудований на вивченні властивостей фігур на площині.

Починаючи з 10-го класу, учні розширюють та поглиблюють знання про геометричні фігури в просторі. В стереометрії з'являється новий вид взаємного розміщення прямих: мимобіжні прямі. Це один з прикладів відмінностей стереометрії від планіметрії. Так як деякі задачі із стереометрії розв'язуються шляхом розгляду різних площин, в яких виконуються планіметричні закони. Багато стереометричних задач розв'язуються за допомогою координатного, векторного методів та їх поєднання – координатно-векторного методу.

У курсі геометрії профільного рівня вивчення стереометрії охоплює такі теми: «Вступ до стереометрії», «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі», «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми многогранників», «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання».

Методика розв'язування стереометричних задач профільного рівня є складною та об'ємною у шкільному курсі. Таким чином, дана тема залишається актуальною.

1.2. Поняття «задача» в контексті психолого-педагогічних досліджень

У психолого-педагогічних дослідженнях поняття «задача» може мати різні значення залежно від контексту. Цей термін досить часто використовується для опису навчальних ситуацій або проблем, які потребують вирішення учнями, що сприяє розвитку їхніх умінь, навичок та критичного мислення.

Процес розв’язування задач розглядають як аналітико-синтетичну діяльність, що виявляється в цілеспрямованій взаємодії суб’єкта навчання з об’єктивним змістом задачі, що розв’язується. [22]

Таким чином розрізняють чотири основні функції задач у навчанні, а саме:

- Навчальна функція.

Дана функція спрямована на формування геометричних знань, умінь та навичок учнів на різних етапах дослідження. Застосувати цю функцію можна до задач на обчислення, побудови та доведення.

- Виховна функція.

Ця функція на відміну від навчальної спрямована на формування та розвиток наукового світогляду, культури мислення, екологічного, патріотичного, економічного виховання учнів.

- Розвивальна функція.

Дана функція цілеспрямована на розвиток уяви учнів, пам’яті, уваги, логічного мислення, старанності в роботі тощо.

- Контролююча функція.

Контролююча функція сконцентрована на встановленні рівня знань здобувачів освіти. Доцільно використовувати задачі на побудову для встановлення рівня математичної компетентності учнів.

Вперше в історії математики поняття «задача» ввів український математик Самуїл Шатуновський. Він говорив, що кожна задача поділяється на два класи речей, а саме: конкретних та абстрактних. У задачах конкретного класу – дані задачі відомі, ми їх можемо уявити. Проте речі абстрактного класу навпаки, не відомі, не дані, їх потрібно знайти.

Задача – це об’єктивне явище, яке для вчителів математики існує у матеріалізованій формі, наприклад, записана на дошці, і стає суб’єктивним, перетворюючись на навчальну проблему лише тоді, коли буде зрозуміла ними та прийнята як особистісна.

Аналізуючи методичну літературу, можна дійти до висновку, що поняття «задача» є важливим для кожного, особливо для майбутніх фахівців з математики. Це поняття є базовим інструментом для вирішення різноманітних проблем і завдань, як у навчанні, так і в професійній діяльності. З іншого боку, задача виступає, як логіко-психологічна категорія, яка наводиться суб’єкту та приймається до розв’язання. Прийнявши задачу до розв’язання, суб’єкт переписує, шукає способи її розв’язування, все це зумовлює розвиток критичного мислення.

«Мислення, як правило, починається з проблеми або запитання, або нерозуміння чи протиріччя» наголошував на цьому Сергій Рубінштейн. [30] Те, що для однієї людини є проблемою, для іншої може не становити труднощів. Чим ширші знання людини, тим більше нерозв’язаних проблем вона помічає. При вивченні математики здобувачі освіти усвідомлюють проблему, зазвичай, під настановою вчителя.

Яку користь дає проблемна ситуація при розв’язуванні задачі? Насамперед, проблемні ситуації змушують здобувачів освіти аналізувати умови, шукати різні способи для вирішення даної проблеми та робити висновки. Також це значно підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює значну допитливість в учнів. Варто відзначити те, що проблемні ситуації сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу, оскільки школярі застосовують свої знання на практиці.

Отже, проблемні ситуації не виникають спонтанно, а під керівництвом вчителя. Тому, доцільно їх називати навчальними проблемними ситуаціями, які створюються вчителем і спонукають учнів до активної розумової діяльності.

1.3. Особливості викладання стереометрії у профільних класах за новими освітніми вимогами та шкільними підручниками

Згідно з чинною програмою математики для 10-11 класів профільного рівня, головна мета навчання полягає у засвоєнні математичних знань, умінь та навичок, які є достатніми та необхідними для подальшого вивчення математики для повсякденного життя. [23]

Профільне навчання – це диференційоване навчання, яке враховує освітні потреби, здібності здобувачів освіти і створює умови для старшокласників відповідно до їхнього професійного вибору через зміни у цілях, змісті та організації навчання.

Мета профільного навчання – забезпечити рівний доступ здобувачів освіти до якісної загальноосвітньої профільної підготовки, а також сприяти професійному зростанню учнів.

У навчальній програмі з математики для учнів 10-11 класів (профільний рівень) відведено на тиждень таку кількість годин: геометрія – 3 години, алгебра і початки аналізу - 6. Загалом на геометрію відводиться 105 годин і курс геометрії 10 та 11 класу включає курс стереометрії.

Навчальна програма спрямована на структурування процесу вивчення математики та розроблена відповідно до Державного стандарту базової та повної середньої освіти з урахуванням різних напрямів навчання.

У навчальній програмі з математики для 10-го класу першою темою є «Вступ до стереометрії», зміст якої - вивчення просторових фігур, таких як піраміда, призма, прямокутний паралелепіпед та виконання найпростіших побудов перерізів даних фігур. Наступними темами є «Паралельність прямих і площин у просторі» та «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». У даних двох темах учні знайомляться з ознаками та властивостями паралельних та перпендикулярних прямих і площин у просторі, розв'язують задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів.

«Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі» остання тема у 10 класі.

В 11 класі учні вивчають теми: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми многогранників» і «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання». Учні формулюють і доводять теореми та наслідки, проводять дослідження та аналізують многогранники та їх складові, розв'язують задачі. Також зображують фігури з використанням властивостей паралельного проектування та їх перерізи, виконують завдання щодо визначення та побудови видимих та невидимих елементів вивченого многогранника.

Учень повинен засвоїти такі нові знання і навички з розділу стереометрія, а саме:

- зображати піраміди та призми, їх перерізи та перерізи прямокутних паралелепіпедів;
- розв'язувати задачі на доведення;
- зображати фігури на площині, а саме плоскі та просторові;
- обґрунтовувати методи слідів;
- знати, що таке двогранний кут, лінійний кут двогранного кута;
- класифікувати взаємне розміщення декількох векторів у просторі;
- розв'язувати задачі на знаходження довжин відрізків, векторів, кута між векторами;
- класифікувати многогранники;
- знаходити площі бічної та повної поверхонь;
- класифікувати геометричні тіла за видами;
- обчислювати об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, зрізаного конуса, конуса, об'єм кулі, площу сфери;
- обчислювати площі бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса. [23]

Отже, можна зробити висновок, що на профільному рівні учні мають більше шансів реалізувати свій науковий та дослідницький потенціал.

Стереометрія містить у собі чотири основні змістові лінії, а саме:

- просторові геометричні фігури, їх властивості;
- геометричні перетворення;
- координати і вектори у просторі;
- геометричні величини.

Аналізуючи основні змістові лінії курсу стереометрії важливо відзначити, що ключовою лінією є «Просторові геометричні фігури, їх властивості». На її вивчення припадає найбільший обсяг навчального часу, оскільки геометрія вивчає властивості геометричних фігур. Основною метою вивчення цієї лінії у профільній школі є збагачення знань учнів про розміщення фігур у просторі та тіла обертання. З цієї змістової лінії виділяється інша лінія – «Геометричні величини».

У цій змістовій лінії вивчають теми: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об’єми тіл, площа сфери». Ці три великі теми охоплюють такий теоретичний матеріал, який важливо подати учням чітко та зрозуміло. Адже, вивчення цих тем допомагає учням розвинути абстрактне та логічне мислення. Знання геометричних фігур є необхідним у таких сферах, наприклад, інженерія, архітектура, географія тощо. Вони допомагають розуміти форми об’єктів навколишнього середовища та використовувати ці знання на практиці.

Змістова лінія «Геометричні перетворення» охоплює такі види перетворень просторових фігур, як паралельне перенесення, симетрія відносно точки, центральна симетрія, паралельне проектування. Причиною вивчення даної лінії є вміння застосувати знання у реальному житті, розв’язувати різні математичні головоломки, створювати дизайн тощо. Отже, геометричні перетворення є важливим елементом у геометрії, який сприяє розвитку різних творчих, когнітивних навичок учнів, а також має практичне застосування у реальному житті.

Тема «Координати і вектори у просторі» є також важливою у математиці. Проаналізувавши задачі з різних підручників геометрії профільного рівня 10 класу, можна побачити, що вивчення координат та векторів у просторі допомагає учням розвивати просторову уяву та здатність уявляти об’єкти та їх розташування у тривимірному просторі. Також розуміння даної теми дозволяє учням використовувати аналітичні методи для вирішення геометричних проблем. Знання координат та векторів у просторі має безліч практичних застосувань у різних галузях, наприклад, у геодезії. Увесь матеріал даної теми майже аналогічний матеріалу з планіметрії. Основною відмінністю стереометрії є додання третьої осі аплікат Qz, дві координатні площини з xz та yz. Також вводяться поняття «компланарні вектори» та розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.

Наступною змістовою лінією стереометрії, яка вивчається впродовж усього курсу стереометрії є «Геометричні величини». У 10-му класі геометричними величинами є відстані між прямими, прямою і площиною, двома площинами та величина кута між ними. Новим для учнів є поняття лінійного та двогранного кута, а також відстань між мимобіжними прямими.

У 11-му класі важливими та основними геометричними величинами є площа та об'єм. Обчисленням цих величин властиве для многогранників та тіл обертання. У курсі стереометрії профільного рівня старшої школи в учнів формується розуміння про площу поверхні, а також кривої, наприклад, площі бічної поверхні циліндра та конуса, площа сфери.

Перед початком вивчення стереометрії учні мали поверхневе розуміння про об'єм. Вивчаючи планіметрію, вони дізналися, що об'єм плоских фігур дорівнює 0. У стереометрії навпаки, просторову фігуру або ж тіло розуміють як фігуру з ненульовим об'ємом. Об'єм тіла розглядається як частина простору, яку займає дана фігура. [2]

Отже, кожна змістова лінія стереометрії відіграє важливу роль у курсі геометрії старшої школи. Оскільки лінія «Просторові геометричні фігури, їх властивості» збагачує знання учнів про розміщення фігур у просторі та розуміння тіл обертання. Інші лінії, такі як геометричні величини, геометричні перетворення та координати і вектори, сприяють розвитку логічного мислення та просторової уяви учнів і мають практичні застосування у реальному житті.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Задачі на паралельність та перпендикулярність прямих і площин у просторі та їх методи розв'язування

Аналізуючи навчальну програму з математики, важливо відзначити, що: «Геометрія, як у основній школі, так і у старшій школі, має навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу». [23] Проблема стереометрії полягає в тому, що розв'язуючи стереометричні задачі, учні не завжди виконують правильно побудову малюнка. Оскільки такі задачі вимагають не лише знання теорії, але й розвинутого просторового мислення. У цьому аспекті стереометрія відіграє важливу роль. Мова йде про розвиток логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок застосування геометрії до розв'язання практичних завдань.

З одного боку, матеріал зі стереометрії складно засвоюється учнями, а з іншого боку, він відкриває широкі перспективи у формуванні особистості учня. Завданням стереометрії на даний час є навчити учнів не тільки оперувати просторовими образами і формами, розв'язувати задачі з просторовими фігурами, а й застосовувати набуті знання та навики при розв'язуванні задач прикладного змісту. Такі задачі створюють додаткову мотивацію в учнів як приклад застосувань математичних знань в реальному житті. У курсі стереометрії профільного рівня задачі суттєво відрізняються за своєю складністю.

Учень, виконуючи задачу, інтуїтивно намагається знаходити зв'язок між шуканою величиною задачі та вже відомими величинами. Класифікуючи за основними критеріями види задач стереометрії, можна виділити такі, а саме:

- за типом об'єкта (многогранники, тіла обертання);
- за відносним розташуванням елементів (задачі на взаємне розташування прямих і площин, задачі на кути);

- за вимірюваннями (обчислення відстаней, площ та об’ємів);
- за методами розв’язання (аналітичний, графічний, аналітично-геометричний метод);
- за практичним застосуванням.

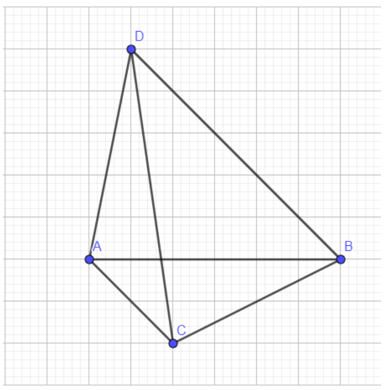
Отже, вивчення стереометрії у старшій профільній школі є складним та об'ємним процесом.

Розв’язування стереометричних задач розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі», вона є однією з базових тем стереометрії. Саме в ній закладається основа для вивчення курсу стереометрії – геометрія простору. Починаючи вивчати тему, потрібно виокремити для учнів підпункти, що дано у змісті навчального матеріалу, а саме:

- паралельність прямих у просторі, мимобіжні прямі;
- паралельність прямої і площини;
- паралельність площин у просторі;
- паралельне проектування, зображення просторових фігур на площині.

Новизною для учнів 10-го класу є поняття «мимобіжні прямі». У курсі планіметрії учні вивчали: якщо дві прямі лежать в одній площині, то вони або перетинаються, або паралельні. Стереометрія наводить і третій випадок про існування мимобіжних прямих. Наведемо приклад на малюнку.

Приклад.



Мал. 2. 1

Дано тетраедр – $ABCD$. Бачимо, що AB і CD не лежать в одній площині. Вони не перетинаються і не паралельні. Отже, вони є мимобіжними – дві прямі, що не лежать в одній площині.

Вивчаючи поняття «мимобіжні прямі», доцільно провести фронтальне опитування щодо паралельних і мимобіжних прямих, виділити спільне та відмінне. Оскільки мимобіжні прямі, так як і паралельні, не перетинаються.

Фронтальне опитування

1. Які прямі називаються мимобіжними? *(Відповідь: Дві прямі у просторі, що не перетинаються і не лежать в одній площині.)*
2. Які прямі називаються паралельними? *(Відповідь: Дві прямі, що лежать на площині і не перетинаються.)*
3. Що спільного між мимобіжними та паралельними прямими? *(Відповідь: Мимобіжні та паралельні прямі не перетинаються.)*
4. Що відмінного між мимобіжними та паралельними прямими? *(Відповідь: Паралельні прямі лежать в одній площині, мимобіжні прямі – ні.)*
5. Як визначити, чи дві прямі є мимобіжними у просторі? *(Відповідь: Якщо одна з двох прямих лежить в площині, а друга пряма перетинає цю площину у точці, що не лежить на першій прямій, то ці прямі мимобіжні.)*
6. Чи можуть мимобіжні прямі бути паралельними до однієї і тієї ж площини? *(Відповідь: Так, оскільки кожна з них не перетинає площину, але вони не лежать в одній площині і не перетинаються між собою.)*

Отже, за даним фронтальним опитуванням, можна відслідкувати, чи учні розуміють, що таке мимобіжні прямі.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що існування мимобіжних прямих у просторі змінює визначення ознак паралельності з теоремами, що подано у планіметрії. Для прикладу можна взяти одну з ознак паралельності прямих на площині, яка звучить так: «Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні». [24] Однак у стереометрії такого твердження не існує, тому що ці прямі можуть бути перпендикулярні до третьої і бути мимобіжними між собою.

При вивченні паралельності прямих і площин у просторі учні знайомляться з наступними властивостями та ознаками:

- **Взаємне розміщення прямих у просторі**
  - *Властивості паралельних прямих*

1. Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну. [11]
2. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину. [11]

  - *Ознаки паралельності прямих*

1. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою. [11]
2. Дві прямі, перпендикулярні третій прямій, - паралельні. [33]

- **Взаємне розміщення прямої і площини**
  - *Властивості паралельності прямої і площини*

1. Всі паралельні між собою прямі, які перетинають задану пряму, лежать в одній площині. [33]
2. Якщо через пряму, яка паралельна площині, проходить інша площина, що перетинає дану, то пряма перетину площин паралельна першій прямій. [33]

  - *Ознака паралельності прямої і площини*

1. Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині. [11]

- **Взаємне розміщення площин**
  - *Властивості паралельних площин*

1. Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні між собою. [33]
2. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні. [33]

  - *Ознака паралельності площин*

1. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні. [11]

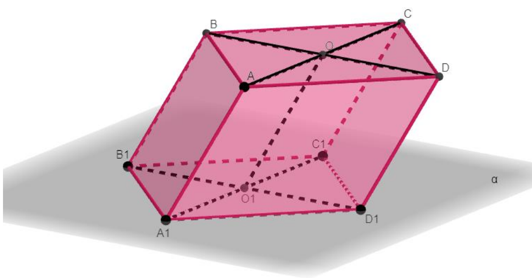
На перших уроках, коли вивчаються аксіоми стереометрії, важливо звернути увагу учнів на введення позначень у геометрії, а саме:

- «∈» - належить;
- «∉» - не належить;
- «∩» - перетин.

Різні автори підручників геометрії для 10 класу профільного рівня наводять на перших уроках безліч задач на доведення. Розв'язуючи задачі на доведення, можна учням запропонувати побудувати малюнок, який дозволить довести існування того чи іншого об'єкта. Але, важливо відмітити, що найпростіші задачі з теми є важкими для учнів. Оскільки, не всі учні вміють користуватися малюнком або ж правильно його побудувати. Неправильно побудований малюнок може ввести в оману і призвести до помилок при розв'язуванні задачі.

Наведемо задачі на ознаки та властивості паралельності прямих і площин. Скористаємося умовою задачі №4.27 (Геометрія: профільний рівень 10 клас автор А. Г. Мерзляк) та сформулюємо власну задачу:

Задача 1. Паралелограм $ABCD$ не має спільних точок з площиною α. Через точки A, B, C, D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, C_1 і D_1. Знайдіть відрізок DD_1, якщо $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.



Мал. 2. 2

Дано: $ABCD$ – паралелограм,

$AA_1 = a,$

$BB_1 = b, CC_1 = c.$

Знайти DD_1.

Розв'язання

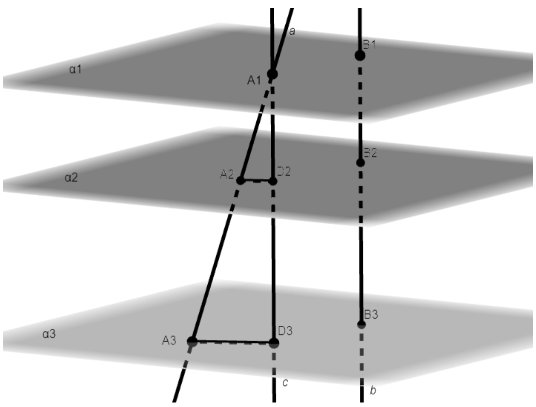
Проведемо діагоналі паралелограма AC і BD, точку перетину їх позначимо O. Проведемо через точку O пряму, паралельно прямій AA_1. За властивістю паралельних прямих площина α перетинає пряму, паралельно прямій AA_1. Нехай O_1 – точка перетину площини α з цією прямою.

За теоремою Фалеса O_1 – середина A_1C_1 і B_1D_1, оскільки O – середина діагоналей AC і BD. Отже, OO_1 – середня лінія трапеції ACC_1A_1 та трапеції DBB_1D_1, тому $OO_1 = \frac{AA_1+CC_1}{2}$ і $OO_1 = \frac{DD_1+BB_1}{2}$ (за властивістю середньої лінії трапеції). Прирівняємо праві частини даних рівностей: $\frac{a+c}{2} = \frac{DD_1+b}{2}$. Звідси $DD_1 = a + c - b$.

Відповідь: $DD_1 = a + c - b$.

Для застосування властивості про паралельність площин скористаємося умовою задачі №195 (А. П. Єршов. Геометрія 10 клас, профільний рівень).

Задача 2. Дано три паралельні площини α_1, α_2, α_3. A_1, A_2, A_3 – точки перетину цих площин з прямою a. Доведіть, що відношення довжин відрізків $A_1A_2 : A_2A_3$ не залежить від прямої, тобто однаково для будь-яких двох прямих.



Мал. 2. 3

Дано: $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \parallel \alpha_3$.

Довести $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$.

Доведення

Проведемо пряму b, яка перетинає площини α_1, α_2, α_3 у точках B_1, B_2, B_3 та через точку A_1 пряму c, паралельну прямій b. Нехай c перетинає α_2 і α_3 у точках D_2, D_3 відповідно.

За властивістю паралельних площин, площина, у якій лежать прямі a і c, що перетинаються, перетинає паралельні площини α_2 і α_3 по паралельних прямих A_2D_2 і A_3D_3. $\Delta A_2A_1D_2 \sim \Delta A_3A_1D_3$ (за двома рівними кутами: $\angle A_1$ –

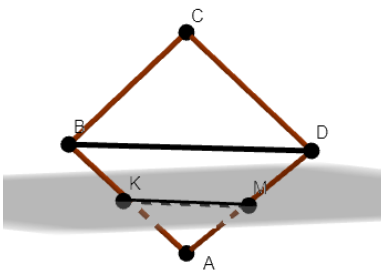
спільний, $\angle A_2 = \angle A_3$ – як відповідні). З подібності трикутників випливає, що $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A_1D_2}{D_2D_3}$.

За властивістю паралельних площин $B_1B_2 = A_1D_2$, $B_2B_3 = D_2D_3$. Отже, $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$. Таким чином, відношення довжин відрізків $A_1A_2 : A_2A_3$не залежить від обраної прямої, що і треба було довести.

Доведене твердження називають теоремою Фалеса у просторі.

Для застосування властивості про паралельність прямої і площини скористаємося умовою задачі №4.23 (О.С. Істер. Геометрія 10 клас, профільний рівень).

Задача 3. Площина, паралельна діагоналі BD квадрата $ABCD$, перетинає сторони AB і AD у точках K і M відповідно, $AC = 8$ см. Знайти довжину відрізка KM, якщо площі ΔAKM і п’ятикутника $BCDMK$ відносяться як $3:5$.



Мал. 2. 4

Дано: $ABCD$ – квадрат,

$\alpha \parallel BD$, $AC = 8$ см,

$\frac{S_{\Delta AKM}}{S_{BCDMK}} = \frac{3}{5}$.

Знайти KM.

Розв’язання

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$ см². За властивістю прямої, паралельної площини: $BD \parallel \alpha$, $\alpha \cap (ABCD) = KM$, тому $BD \parallel KM$.

$S_{BCDMK} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKM} = 32 - S_{\Delta AKM} \cdot \frac{S_{\Delta AKM}}{32 - S_{\Delta AKM}} = \frac{3}{5}$;

$5S_{\Delta AKM} = 96 - 3S_{\Delta AKM}$;

$8S_{\Delta AKM} = 96$;

$S_{\Delta AKM} = 12$ см².

$\Delta AKM \sim \Delta ABD$ – за двома рівними кутами ($\angle A$ – спільний, ($\angle K = \angle B$ – як відповідні при $BD \parallel KM$ і січній AB).

З подібності трикутників: $\frac{S_{\Delta AKM}}{S_{\Delta ABD}} = k^2, \frac{KM}{BD} = k$, k – коефіцієнт подібності.

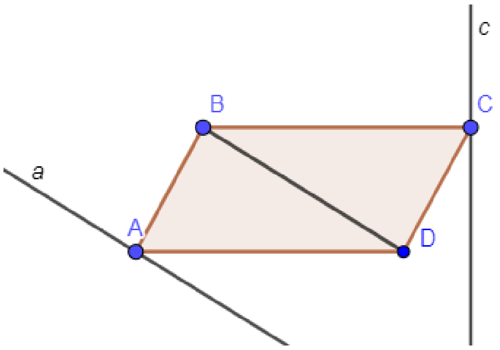
$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$ см². $k^2 = \frac{12}{16}$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. За властивістю діагоналей квадрата: $BD = AC = 8$ см. $\frac{KM}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$KM = 4\sqrt{3} \text{ см.}$$

Відповідь: $KM = 4\sqrt{3}$ см.

Наведемо задачу на застосування мимобіжних прямих (Г.П. Бевз. Геометрія 10 клас, профільний рівень).

Задача 4. Через вершину C ромба $ABCD$ проведено пряму c, що не належить площині ромба. Через вершину A даного ромба проведено пряму a, паралельно діагоналі BD. Довести, що прямі c і a є мимобіжними.



Мал. 2. 5

Дано: $ABCD$ – ромб, $c \cap (ABCD) = C$, $A \in a$, $a \parallel BD$.

Довести, що a і c мимобіжні.

Розв'язання

$A \in a$, тому $a \in (ABCD)$. $C \in (ABCD)$, $C \notin a$, за ознакою мимобіжних прямих випливає, що a і c мимобіжні. Доведено.

Тему «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» умовно поділимо на три підпункти:

- перпендикулярність прямих у просторі;
- перпендикулярність прямої та площини;
- перпендикулярність площин;

Методична схема вивчення кожного підпункта є досить громіздка та кожна з цих тем переплітається з іншою. При вивченні даної теми необхідно звернути особливу увагу на вивчення поняття похилої та перпендикуляра до площини та проекції похилої на площину.

Ще з курсу планіметрії учні розуміли під перпендикулярністю прямих на площині - прямі, що перетинаються під прямим кутом. Однак, у стереометрії існує інше означення. Новизною для учнів виступає те, що перпендикулярними можуть бути не лише ті прямі, які перетинаються під кутом 90°, а й мимобіжні прямі.

Також важливо звернути увагу учнів на означення перпендикулярності прямої та площини. Вони помилково визначають пряму як перпендикулярну до площини, якщо вона перетинає її під прямим кутом. Однак, це означення неправильне, оскільки проекція такої прямої на площину є точка.

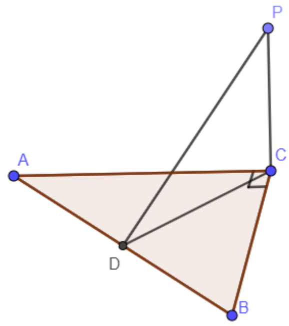
Щодо означення перпендикулярності площин учні часто проводять аналогію з прямими, вважаючи перпендикулярні площини такими, що перетинаються під прямим кутом. Щоб уникнути цієї помилки, деякі підручники спочатку вводять поняття двогранного кута перед означенням перпендикулярності площин.

Основною теоремою даної теми є теорема про три перпендикуляри. Теорема відіграє важливе значення у математиці, оскільки є основою при розв'язуванні задач із стереометричними фігурами, при побудові малюнків, найбільше її застосовують у задачах з многогранниками, наприклад, пірамідою. Основною помилкою, яку допускають учні, є відсутність уявлення просторової фігури на площині. Таким чином, важливо приділити достатньо уваги для вивчення даної теореми, оскільки вона не є легкою.

Також необхідно при вивченні даної теми звернути увагу на такі поняття: кут між мимобіжними прямими, кут між прямою та площиною, кут між площинами, двогранний та лінійний кут та відстань. Автори підручників наводять безліч задач на знаходження відстані, а саме: знаходження відстані від точки до прямої, від точки до площини, від прямої до площини та між двома площинами. Дане поняття має чітко асоціюватися в учнів з поняттям «перпендикуляр».

Наведемо приклади розв'язування задач.

Задача 5. У ΔABC: $\angle C = 90°$, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см, D – середина AB. З точки P через вершину C проведено перпендикуляр, довжина якого дорівнює 12 см. Знайти довжину відрізка PD.



Мал. 2. 6

Дано: ΔABC- прямокутний ($\angle C = 90°$),

$AC = 8$ см, $BC = 6$ см, $AD = DB$, $PC = 12$ см.

Знайти PD.

Розв'язання

$AD = DB$ => CD – медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи. Отже, $CD = \frac{1}{2}AB$.

З ΔABC ($\angle C = 90°$): $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ (см) – за теоремою Піфагора.

$CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см).

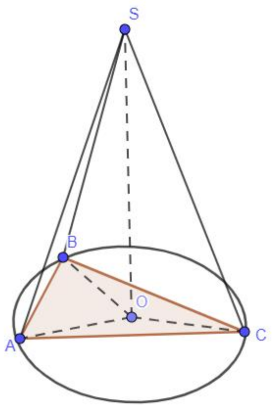
За властивістю перпендикулярності прямої і площини: $PC \perp (ABC)$, то $PC \perp CD$.

З ΔPCD ($\angle C = 90°$): $PD = \sqrt{PC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ см.

Відповідь: 13 см.

Розгляд даної задачі є важливим при подальшому вивченні курсу стереометрії, а саме при розв'язуванні задач на комбінацію геометричних тіл – конуса та піраміди.

Задача 6. Довести, що коли точка, яка лежить поза площиною многокутника, рівновіддалена від усіх його вершин, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, описаного навколо многокутника.



Мал. 2. 7

Дано: $S \notin (ABC)$, $SA = SB = SC$,

$SO \perp (ABC)$.

Довести: O – центр кола, описаного навколо ΔABC.

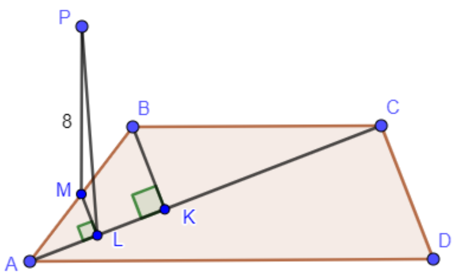
Розв'язання

$SO \perp (ABC)$, тому $SO \perp OB$, $SO \perp OA$, $SO \perp OC$ – за властивістю перпендикулярності прямої та площини. Отже, OB, OA, OC – проекції похилих SB, SA, SC відповідно на площину ABC.

$SA = SB = SC$, тому $OA = OB = OC$ – як проекції рівних похилих, проведених з однієї точки. Отже, O – центр кола, описаного навколо ΔABC. Доведено.

Дане твердження було доведено для трикутника, аналогічно можна довести для будь-якого іншого многокутника.

Задача 7. Точка M – середина бічної сторони рівнобічної трапеції $ABCD$. З даної точки до площини трапеції проведено перпендикуляр MP, довжина якого 8 см. Визначити відстань від точки P до діагоналі AC, якщо $AB = BC = 24$ см, $\angle ABC = 120°$.



Мал. 2. 8

Дано: $ABCD$ – рівнобічна трапеція,

$AM = MB$,

$AB = BC = 24$ см,

$PM = 8$ см,

$\angle ABC = 120°$,

$PM \perp (ABCD)$.

Знайти $\rho(P; AC)$.

Розв'язання

Оскільки $AB = BC$, то ΔABC – рівнобедрений з основою AC. Проведемо в даному трикутнику висоту BK, за властивістю рівнобедреного трикутника BK – висота, медіана, бісектриса. З точки M опустимо перпендикуляр на AC.

$PM \perp (ABCD)$, тому $PM \perp ML$ – за властивістю перпендикулярності прямої та площини.

$PM \perp ML$, $ML \perp AC$, отже, $PL \perp AC$ – за теоремою про три перпендикуляри.

$\rho(P; AC) = PL$.

За властивістю бісектриси BK: $\angle ABK = \angle CBK = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$.

З ΔAKB $(\angle K = 90°)$: $\angle BAK = 90° - \angle ABK = 90° - 60° = 30°$.

$AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ см.

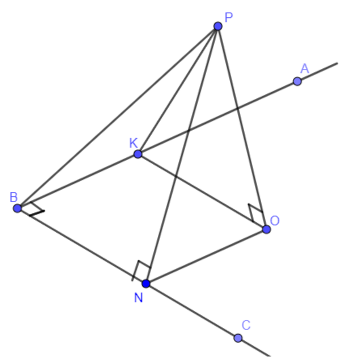
З ΔALM $(\angle L = 90°)$: $ML = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см.

З ΔPML $(\angle M = 90°)$: $PL = \sqrt{PM^2 + ML^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ см.

Отже, $\rho(P; AC) = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Задача 8. Точка P, яка лежить поза площиною прямого кута, віддалена від вершини кута на 10 см, а від його сторін – на 8 см. Знайти відстань від точки P до площини кута.



Мал. 2. 9

Дано: $P \notin (ABC)$, $\angle ABC = 90°$,

$PB = 10$ см, $PK = PN = 8$ см.

Знайти $\rho(P; (ABC))$.

Розв'язання

Опустимо з точки P перпендикуляр на площину ABC.

$PO \perp (ABC)$, тому $PO \perp OK$, $PO \perp ON$ – за властивістю перпендикулярності прямої та площини.

$PK \perp AB, PO \perp OK$, тому $OK \perp AB$ – за теоремою про три перпендикуляри.

$PN \perp BC, PO \perp ON$, тому $ON \perp BC$ – за теоремою про три перпендикуляри.

$AB \perp BC$, $ON \perp BC$, тому $ON \parallel AB$ – за ознакою паралельності прямих.

$BC \perp AB$, $OK \perp AB$, отже $OK \parallel BC$ – за ознакою паралельності прямих. Таким чином $BKON$ – паралелограм, а оскільки $\angle B = 90°$, то $BKON$ – прямокутник, звідси $OK = BN$.

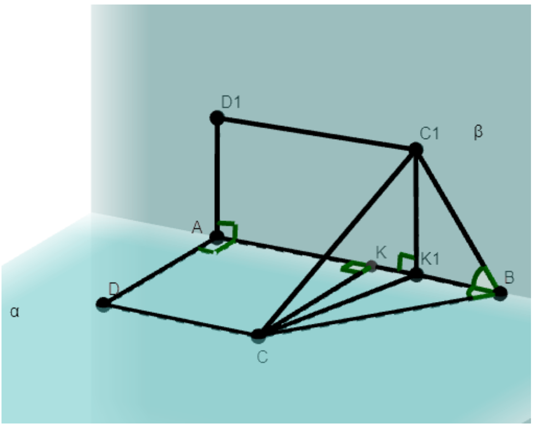
З ΔPNB $(\angle N = 90°)$: $BN^2 = PB^2 - PN^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ см^2.

З ΔPOK $(\angle O = 90°)$: $PO = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{PK^2 - BN^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ см.

$\rho\big(P; (ABC)\big) = PO = 2\sqrt{7}$ см.

Відповідь: $2\sqrt{7}$ см.

Задача 9. Дві прямокутні трапеції $ABCD$ і ABC_1D_1 і з кутами $60°$ лежать у перпендикулярних площинах α і β відповідно. Відомо, що $DA \perp AB$, $D_1A \perp AB$, $BC = 8$ см, $BC_1 = 4$ см. Визначити відстань між вершинами C і C_1 тупих кутів даних трапецій, якщо вершини гострих кутів трапецій збігаються.



Мал. 2. 10

Дано: $ABCD$, ABC_1D_1 – прямокутні трапеції, $ABCD \in \alpha$, $ABC_1D_1 \in \beta$, $\alpha \perp \beta$, $\angle CBA = C_1BA = 60°$, $DA \perp AB$, $D_1A \perp AB$, $BC = 8$ см, $BC_1 = 4$ см.

Знайти CC_1.

Розв'язання

У площині α проведемо висоту трапеції CK, а у площині β - C_1K_1.

З ΔC_1K_1B $(\angle K_1 = 90°)$: $C_1K_1 = C_1B \sin\angle C_1BA = 4 \sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см.

$BK_1 = C_1B \cos \angle C_1BA = 4 \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ см.

З ΔCKB $(\angle K = 90°)$: $CK = CB \sin \angle CBA = 8 \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ см.

$BK = CB \cos \angle CBA = 8 \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ см.

$KK_1 = KB - K_1B = 4 - 2 = 2$ см.

З ΔCKK_1 $(\angle K = 90°)$: $CK_1 = \sqrt{CK^2 + KK_1{}^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{48 + 4} =$ $= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ см.

Оскільки $\alpha \perp \beta$, $C_1K_1 \perp AB$, то $C_1K_1 \perp \alpha$. Тоді $C_1K_1 \perp CK_1$.

З ΔC_1K_1C $(\angle K_1 = 90°)$: $CC_1 = \sqrt{C_1K_1{}^2 + CK_1{}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{13})^2} =$ $\sqrt{12 + 52} = \sqrt{64} = 8$ см.

Відповідь: 8 см.

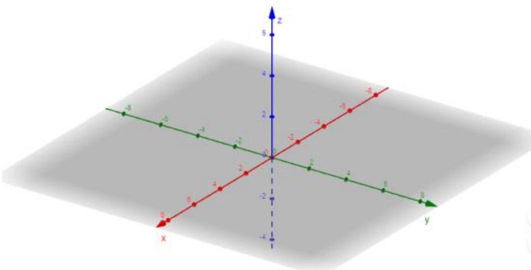
2.2. Метод координат та векторний метод розв’язування задач

У 10 класі за навчальною програмою передбачено розгляд теми «Координати і вектори у просторі». Метою вивчення даної теми є повторення та збагачення знань про координати, вектори та вміння застосовувати їх на практиці. Разом із координатами та векторами вивчаються геометричні переміщення, а саме: осьова і центральна симетрія, симетрія відносно площини та паралельне перенесення.

Тема «Координати, вектори у просторі» вивчається так само, як і в планіметрії. На площині, так і в просторі: вектор – це напрямлений відрізок. Всі означення, що вивчаються у планіметрії даються і в стереометрії. Тому ця тема досить легко засвоюється учнями.

Проте у просторі дається не дві координати, а три - (x, y, z) та система координат із трьох попарно перпендикулярних осей координат, що мають спільний початок. Це має значний вплив на всі аспекти вивчення, зокрема на методи розв'язання задач, уявлення об'єктів та застосування математичних операцій. Оскільки, учні повинні чітко уявляти систему координат, як саме ділиться координатний простір та які знаки мають координати точок у кожній з частин простору.

Проблемою при вивченні теми може бути побудова точки за трьома координатами. Слід учням показати на малюнку як виглядає система координат (мал. 2.2.1), навести приклад про побудову однієї з точок. Для кращого засвоєння даної теми необхідно виконати велику кількість відповідних задач.



Мал. 2.2. 1

Новизною для учнів є означення про компланарні вектори та теорема про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами:

- Вектори називають компланарними, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї самої точки вони будуть лежати в одній площині. [11]
- Три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, серед яких немає жодної пари колінеарних, є компланарними тоді і тільки тоді, коли існують числа α і β такі, що справджується рівність $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. [11]
- **Теорема.** Будь-який вектор можна розкласти за трьома некомпланарними векторами, причому коефіцієнти цього розкладання визначаються єдиним чином. [11]

Вище було сказано, що відмінністю вектора на площині та у просторі є задання вектора трьома координатами. Таким чином новим для учнів є означення про координати та модуль вектора, а також дії над векторами. Доцільно підготувати для учнів порівняльну таблицю про координати вектора та дії над векторами на площині та у просторі.

Таблиця 2.2. 1

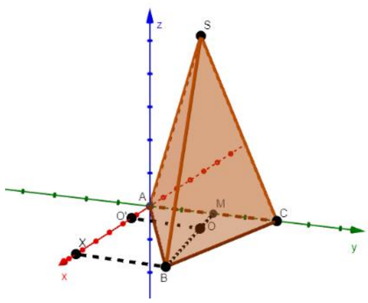
Координати вектора та дії над векторами у просторі

На площині	В просторі
Координати та модуль вектора	
1. Координати вектора $\overline{AB}(x; y)$ з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1$.	Координати вектора $\overline{AB}(x; y; z)$ з початком $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1, z = z_2 - z_1$. [11]
2. Модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.	Модуль вектора $\overline{AB}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Дії над векторами	
3. Сумою векторів $\bar{a}(x_1; y_1)$ і $\bar{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\bar{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.	Сумою векторів $\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\bar{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z + z_2)$.
4. Різницею векторів $\bar{a}(x_1; y_1)$ і $\bar{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\bar{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.	Різницею векторів $\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\bar{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z - z_2)$.
5. Добутком вектора $\bar{a}(x; y)$ на число λ називають вектор $\bar{b} = (\ \lambda x;\ \lambda y)$.	Добутком вектора $\bar{a}(x; y; z)$ на число λ називають вектор $\bar{b} = (\ \lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$.

У 11 класі приділяється велика кількість годин для розв’язування задач на просторові тіла. Одним з поширених методів розв’язування даних задач є координатний метод. Наприклад, для знаходження довжин певних елементів просторових тіл, можна використати модуль вектора, формулу відстані між двома точками, скалярний добуток для знаходження кута та координати середини відрізка.

Наведемо приклади задач.

Задача 1. У правильній піраміді $SABC$ сторони основи дорівнює 4, а бічні ребра дорівнюють 3. Точка M – середина ребра AC. Знайти кут між прямими MB і AS.



Мал. 2.2. 2

Дано: $SABC$ – правильна піраміда, $AB = BC = AC = 4$, $AS = SC = SB = 3$.

Знайти $\angle(MB; AS)$.

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат (мал. 2.2.2) і запишемо координати вершин піраміди і точки M.

$A(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $M(0; 2; 0)$.

У рівносторонньому трикутнику $\angle SAB = 60°$, тому $\angle XAB = 90° - 60° = 30°$.

З ΔAXB $(\angle X = 90°)$: $AX = AB \cos \angle XAB = 4 \cdot \cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Отже, $B(2\sqrt{3}; 2; 0)$.

$BO : OM = 2 : 1$ – за властивістю медіан трикутника. Тому $XO' : O'A = 2 : 1$.

Нехай $XO' = 2k$, $O'A = k$, тоді $XO' + O'A = 2k + k = 3k$.

$XO' + O'A = XA$, $3k = 2\sqrt{3}$ => $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$O'A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, тому $O'(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0; 0)$, отже $O(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2; 0)$.

Знайдемо координати вершини піраміди, обчисливши висоту піраміди. $BM = AX = 2\sqrt{3}$, $BO = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

З ΔSOB $(\angle O = 90°)$: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3^2 - (\frac{4\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{9 - \frac{16 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{27}{3} - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}}$. Отже, $S(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2; \sqrt{\frac{11}{3}})$.

Знайдемо координати векторів: $\overline{MB}(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $\overline{AS}(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2; \sqrt{\frac{11}{3}})$.

Нехай $\angle(MB; AS) = \alpha$. $\cos\alpha = \frac{\overline{MB}\cdot\overline{AS}}{|\overline{MB}|\cdot|\overline{AS}|}$.

$\overline{MB} \cdot \overline{AS} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot 2 + 0 \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} = 4.$

$|\overline{MB}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$

$|\overline{AS}| = \sqrt{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 2^2 + (\sqrt{\frac{11}{3}})^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 4 + \frac{11}{3}} = \sqrt{9} = 3.$

$\cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{3}\cdot 3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$

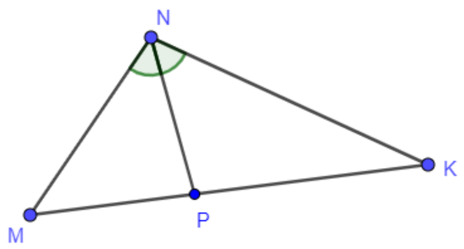
$\alpha = arccos\frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Відповідь: $arccos\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Для розв’язування наступної задачі скористаємося висновком опорної задачі №600 з підручника Геометрія 10 клас профільний рівень автор А. П. Єршов та сформулюємо задачу.

- Якщо точка $C(c_1; c_2; c_3)$ ділить відрізок з кінцями $A(a_1; a_2; a_3)$ у відношенні $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, то $c_i = \frac{n}{m+n}a_i + \frac{m}{m+n}b_i$, де $i = 1,2,3$. [9] (*)

Задача 2. Знайти координати точки P, яка є основою бісектриси, проведеної у трикутнику MNK з вершини N. Відомо, що $MN = 6$ см, $NK = 12$ см, $M(-6; 1; 2)$, $K(3; -5; -1)$.



Мал. 2.2. 3

Дано: ΔMNK, $MN = 6$ см, $NK = 12$ см, $M(-6; 1; 2)$, $K(3; -5; -1)$.

Знайти $P(x; y; z)$.

Розв’язання

За властивістю бісектриси трикутника: $\frac{MP}{PK} = \frac{MN}{NK} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Для знаходження координат точки P скористаємося формулою (*):

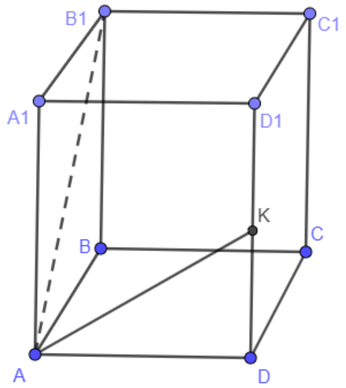
$x = \frac{2}{1+2} \cdot (-6) + \frac{1}{1+2} \cdot 3 = \frac{2}{3} \cdot (-6) + \frac{1}{3} \cdot 3 = -4 + 1 = -3.$

$y = \frac{2}{1+2} \cdot 1 + \frac{1}{1+2} \cdot (-5) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$

$z = \frac{2}{1+2} \cdot 2 + \frac{1}{1+2} \cdot (-1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Отже, $P(-3; -1; 1)$.

Відповідь: $P(-3; -1; 1)$.

Задача 3. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K середина ребра DD_1. Знайти кут між прямими AB_1 і AK.



Мал. 2.2. 4

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Знайти $\angle(AK; AB_1)$.

Розв'язання

$\angle(AK; AB_1) = \angle(\overline{AK}; \overline{AB_1})$.

За теоремою про скалярний добуток векторів:

$\overline{AK} \cdot \overline{AB_1} = |\overline{AK}| \cdot |\overline{AB_1}| \cos\angle(\overline{AK}; \overline{AB_1})$;

$\cos\angle(\overline{AK}; \overline{AB_1}) = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{AB_1}}{|\overline{AK}| \cdot |\overline{AB_1}|}$.

За правилом паралелограма: $\overline{AB_1} = \overline{AA_1} + \overline{AB}$.

За правилом трикутника: $\overline{AK} = \overline{AD} + \overline{DK} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DD_1}$.

$\overline{AK} \cdot \overline{AB_1} = \left(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DD_1}\right) \cdot (\overline{AA_1} + \overline{AB}) = \overline{AD} \cdot \overline{AA_1} + \overline{AD} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DD_1} \cdot \overline{AA_1} + \frac{1}{2}\overline{DD_1} \cdot \overline{AB}$.

$\overline{AD} \perp \overline{AA_1}$, тому $\overline{AD} \cdot \overline{AA_1} = 0$. Аналогічно, $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$, $\overline{DD_1} \cdot \overline{AB} = 0$. $\overline{AA_1} = \overline{DD_1}$.

Нехай ребро куба дорівнює a. $\overline{AK} \cdot \overline{AB_1} = \frac{1}{2}\overline{DD_1} = \frac{1}{2}a^2$.

З ΔABB_1 $(\angle B = 90°)$: $AB_1 = \sqrt{AB^2 + {BB_1}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

$|\overline{AB_1}| = a\sqrt{2}$.

З ΔADK $(\angle D = 90°)$: $AK = \sqrt{AD^2 + DK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\cos\angle(\overline{AK}; \overline{AB_1}) = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

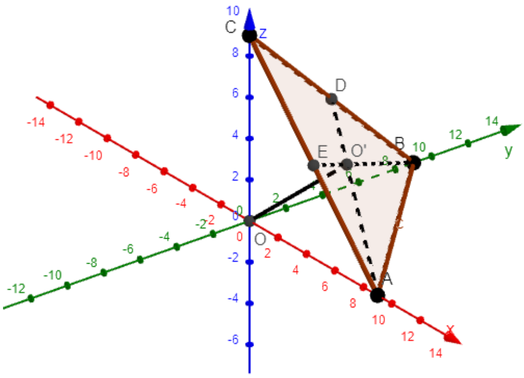
$\angle(\overline{AK}; \overline{AB_1}) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Відповідь: $\angle(AK; AB_1) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Якщо $A(x_a; y_a; z_a)$, $B(x_b; y_b; z_b)$, $C(x; y; z)$ і точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC: CB = \lambda$ від точки A, то:

$$x = \frac{x_a+\lambda x_b}{1+\lambda},\ y = \frac{y_a+\lambda y_b}{1+\lambda},\ z = \frac{z_a+\lambda z_b}{1+\lambda}.$$ [5] (**)

Задача 4. Через точки $A(9; 0; 0)$, $B(0; 9; 0)$, $C(0; 0; 9)$ проведено площину. Знайти відстань від початку координат до даної площини.



Мал. 2.2. 5

Дано: $A(9; 0; 0)$, $B(0; 9; 0)$, $C(0; 0; 9)$.

Знайти: $\rho(O; AB)$.

Розв'язання

З'єднаємо точки A, B і C. Трикутник ABC – рівносторонній. $OA = OB = OC$, тому ортогональною проекцію точки O на площину (ABC) буде точка, яка є центром вписаного (описаного) кіл, що є точкою перетину медіан ΔABC.

Проведемо медіану трикутника AE і BD. $\rho(O; AB) = OO'$.

Нехай $O'(x; y; z)$, $D(x_c; y_c; z_c)$. Знайдемо координати точки D за формулами координат середини відрізка.

$$x_c = \frac{9+0}{2} = \frac{9}{2}; y_c = \frac{0+0}{2} = 0; z_c = \frac{0+9}{2} = \frac{9}{2}.$$

Отже, точка $D(\frac{9}{2}; 0; \frac{9}{2})$.

За властивістю медіан трикутника: $BO':O'D = 2:1 = 2$. Скористаємося формулами (**):

$$x = \frac{0+2\cdot\frac{9}{2}}{1+2} = 3; y = \frac{9+2\cdot 0}{1+2} = 3; z = \frac{0+2\cdot\frac{9}{2}}{1+2} = 3.$$

Отже, точка $O'(3; 3; 3)$.

Скориставшись формулою відстані між двома точками, знайдемо довжину відрізка OO': $OO' = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{3\cdot 9} = 3\sqrt{3}$. Отже, $\rho(O; AB) = 3\sqrt{3}$.

Відповідь: $\rho(O; AB) = 3\sqrt{3}$.

Нехай площина α задана рівнянням: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, а площина β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Якщо $\alpha \parallel \beta$, то $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. [5] (***)

Задача 5. Записати рівняння площини, яка є образом площини $3x - y + {}$ ${}+4z - 6 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\bar{a}(-1; 2; -2)$.

Розв'язання

Нехай площина α задана рівнянням: $3x - y + 4z - 6 = 0$.

Запишемо формули паралельного перенесення на вектор $\bar{a}$:

$$x' = x - 1; y' = y + 2; z' = z - 2.$$

Скориставшись твердженням (***), запишемо рівняння площини β: $3x - {}$ ${}-y + 4z + d_2 = 0$.

Врахувавши формули паралельного перенесення, підставимо у рівняння площини β: $3(x-1) - (y+2) + 4(z-2) + d_2 = 0$;

$3x - 3 - y - 2 + 4z - 8 + d_2 = 0$;

$3x - y + 4z + (-13 + d_2) = 0$;

$-13 + d_2 = -6$;

$d_2 = 7$.

Отже, рівняння площини β: $3x - y + 4z + 7 = 0$.

Відповідь: $3x - y + 4z + 7 = 0$.

2.3. Розв'язування задач на знаходження площ поверхонь та об'ємів многогранників та тіл обертання

Курс стереометрії 11 класу є дуже насиченим та цікавим для вивчення. Навчальна програма побудова так, що однією з перших тем вивчення є тема «Многогранники». Теорія про многогранники є основною у курсі стереометрії. Починаючи вивчати дану тему, учні відкривають для себе дивовижний світ геометричних тіл. Вивчають нові тіла: призму, піраміду, паралелепіпед, зрізану піраміду.

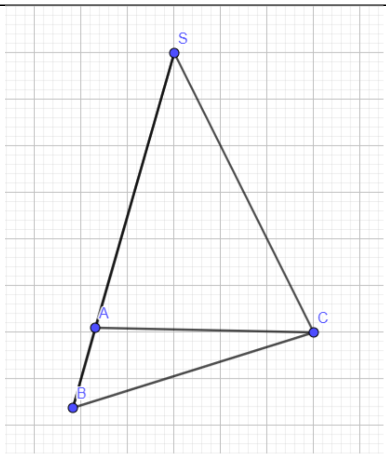
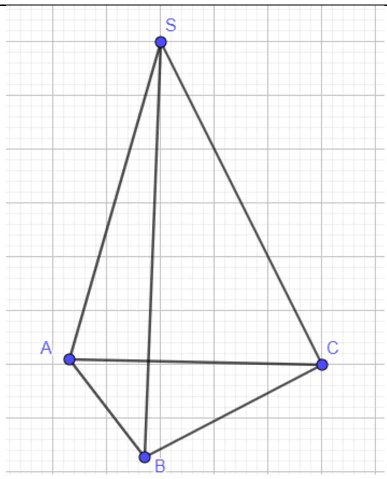
Тема «Многогранники» є однією з основних тем шкільної геометрії. У профільному класі на вивчення даної теми виділено 24 години згідно навчальної програми. На профільному рівні, на відміну від рівня стандартна, учні вивчають многогранні кути, а також і тригранний кут, розглядається зрізана піраміда та формули для обчислення бічної та повної поверхонь многогранників. Дана тема має невеликий теоретичний матеріал за обсягом, оскільки значну увагу приділено розв'язуванню задач. Учні вчаться формулювати та доводити теореми, виконувати завдання підвищеної складності, зображувати перерізи многогранників.

На початку вивчення теми слід наголосити учням, що в стереометрії користуються не многокутниками, а так званими многогранниками або багатогранниками. Для введення означення многогранника необхідно нагадати означення многокутника та його елементів, а також опуклого многокутника. Нагадавши перелічені означення, вчителю слід навести означення многогранника та багатогранника:

- Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників. [26]
- Багатогранник – це частина простору, обмежена скінченною кількістю багатокутників. [31]

Важливим етапом є правильна побудова геометричного тіла. Доцільно наголосити учням на тому, щоб всі ребра, грані многогранника були видимі та ребра не збігалися. Такі правила-орієнтири значно спростять роботу в майбутньому.

Таблиця 2.3. 1

Не правильно	Правильно
	

Вивчаючи тему «Многогранники», потрібно виокремити для учнів підпункти, а саме:

- призма;
- паралелепіпед;
- піраміда, зрізана піраміда;
- площі поверхонь подібних многогранників.

Також важливо перед вивченням означень многогранників нагадати теоретичний матеріал, а саме про властивості плоских многокутників.

Вивчаючи види многогранників, учні знайомляться із призмою, досліджують елементи призми та її види. Аналізуючи різні статті, автори наводять означення призми Погорєлова О. В.: «Призмою називають багатогранник, що складається з двох плоских багатокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що з'єднують відповідні точки цих багатокутників». [31] Однак у актуальних підручниках це означення уже дається значно спрощено.

Призмою називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах, а всі інші грані – паралелограми. [12]

На основі засвоєння даного означення призми, наступним важливим етапом є вивчення її видів. Доцільно надати схему учням, для чіткого розуміння на які види поділяється даний многогранник.

Схема 2.3. 1

Дана схема допоможе швидше засвоїти поняття кожного виду призм та відтворити на уроці.

Після означення та розгляду видів призм, важливо приділити велику увагу кутам між діагоналями та з кожною гранню, ребром окремо. Оскільки, чим більше учні розглядають кути призми, тим більше розвивається їхня просторова уява.

Аналізуючи підручники з геометрії 11 класу профільного рівня, можна побачити, що найбільше задач на паралелепіпед та трикутну піраміду. Перед розв'язуванням задач, необхідно повторити властивості паралелограма, формулу обчислення площі паралелограма, властивості різних видів трикутників та формули для обчислення площ трикутників.

Ознайомлюючи учнів з пірамідою, слід дати її означення, а саме:

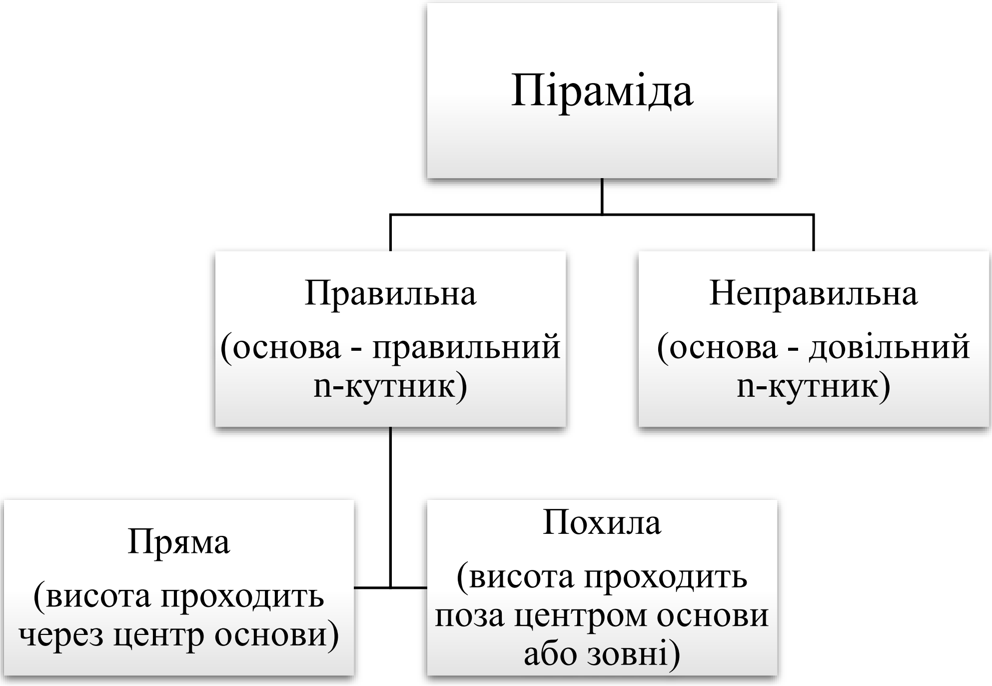
- Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многогранник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. [4]

Дане означення надає уявлення про форму граней піраміди та значно полегшить школярам сприймати форму самої піраміди.

Також важливим етапом при вивченні піраміди є побудова. Слід відзначити, що висота може мати різне положення. Вона може бути в середині, лежати в площині однієї або кількох гранях, або ж бути зовні піраміди. Існують піраміди, грані яких перпендикулярні до основи, що значно впливає на властивості висоти піраміди.

Засвоївши означення піраміди, вивчають її види.

Схема 2.3. 2



Як правило, класифікація пірамід за видами не викликає в учнів труднощів. У підручнику геометрія 11 клас профільного рівня автор Г. П. Бевз значна кількість задач саме на правильну трикутну або чотирикутну піраміду. Слід виділити час на повторення властивостей рівностороннього трикутника і квадрата. Домогтися правильного засвоєння побудови даних видів многогранників.

Наступним етапом вивчення теми «Многогранники» є обчислення площ та об'ємів даних багатокутників. При знаходженні величини піраміди, ми користуємося теорією вимірювання площ многокутників. Так як, бічними гранями піраміди є трикутники, то можна знайти площу бічної поверхні як суму площ усіх бічних граней. Проте, для правильної піраміди та прямої призми існують інші формули для обчислення.

- Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.

$$S_{\text{бічне прямої призми}} = P \cdot h,$$

де P – периметр основи, h - висота (бічне ребро).

- Площа бічної правильної піраміди дорівнює півдобутку периметра основи на висоту піраміди.

$$S_{\text{бічне правильної піраміди}} = \frac{1}{2} P \cdot h,$$

де P – периметр основи, h - висота.

Необхідно також звернути уваги учнів на формулу площі бічної поверхні зрізаної правильної піраміди. Оскільки, вона найчастіше застосовується при розв’язуванні задач.

- Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів нижньої та верхньої основ на апофему піраміди.

$$S_{\text{бічне зрізаної прав.піраміди}} = \frac{1}{2}(P + p) \cdot l,$$

де P – периметр нижньої основи піраміди, p – периметр верхньої основи піраміди, l – апофема піраміди.

Кожне тіло можна задати як фігуру, яка має свій об’єм. Об’єм завжди повинен бути ненульовим, тобто додатнім. Вивчаючи параграф «Об’єми тіл», учні знайомляться із формулами для обчислення об’єму призми та піраміди.

- Об’єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} \cdot h.$$

Для зрізаної піраміди формула обчислення об’єму дещо інша, а саме:

$$V_{\text{зрізаної піраміди}} = \frac{1}{3} h(S_{\text{верхньої основи}} + S_{\text{нижьої основи}} + \sqrt{S_{\text{в}} \cdot S_{\text{н}}}).$$

Також є другий варіант знаходження об’єму зрізаної піраміди. Кожну зрізану піраміду можна доповнити до повної. Не складає труднощів в учнів це зрозуміти.

Оскільки об’єм зрізаної піраміди ми отримаємо, якщо візьмемо різницю об’ємів повної піраміди та доповненої.

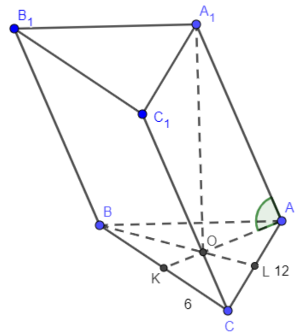
Варто зазначити учням, що об’єм вимірюється у кубічних одиницях.

- Об’єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту.

$$V_{\text{призми}} = S_{\text{основи}} \cdot h.$$

На основі вище сказаного, наведемо приклади задач.

Задача 1. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник, сторона якого дорівнює 12 см. Вершина призми A_1 проектується на площину ABC у центр основи призми, а бічне ребро призми утворює з площиною основи кут $60°$. Знайти висоту призми.



Мал. 2.3. 1

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – похила призма,

ΔABC – правильний,

$AC = BC = AB = 12$ см,

$\angle KAA_1 = 60°$.

Знайти OA_1.

Розв’язання

AK – висота, медіана, бісектриса.

З ΔAKC $(\angle K = 90°)$: $KC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см.

$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ см.

За властивістю медіан трикутника: $AO: OK = 2: 1$.

Нехай $AO = 2x$, $OK = x$, тоді $AO + OK = AK$;

$$2x + x = 6\sqrt{3};$$

$$3x = 6\sqrt{3};$$

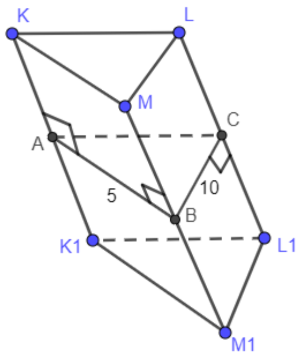
$$x = 2\sqrt{3}.$$

$AO = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ см.

З ΔA_1OA $(\angle O = 90°)$: $A_1O = AOtg\angle OAA_1 = 4\sqrt{3}tg60° = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

Задача 2. Дві бічні грані похилої трикутної призми утворюють кут $60°$, а відстані від їх спільного ребра до прямих, які містять два інших ребра, дорівнюють 10 см і 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 8 см. Знайти площу бічної поверхні призми.



Мал. 2.3. 2

Дано: $\angle\big((KK_1MM_1);(MM_1L_1L)\big) = 60°$

$AB = 5$ см, $BC = 10$ см,

$MM_1 = 8$ см.

Знайти $S_б$.

Розв'язання

Побудуємо перпендикулярний переріз призми – це переріз площиною, яка перетинає всі бічні ребра (або їх продовження) і перпендикулярна до них.

$AB \perp MM_1$, $BC \perp MM_1$, тоді $\angle\big((KK_1MM_1);(MM_1L_1L)\big) = \angle(AB;BC) = \angle ABC = 60°$

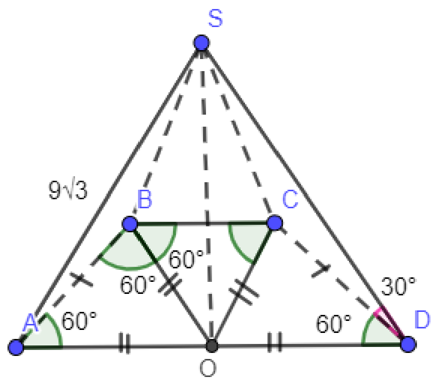
З ΔABC за теоремою косинусів знайдемо: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10\cos 60° = 25 + 10 - 100 \cdot \frac{1}{2} = 125 - 50 = 75$, $AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ см.

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 5 + 10 + 5\sqrt{3} = 15 + 5\sqrt{3}$ см.

$S_б = P_{\Delta ABC} \cdot MM_1 = \big(15 + 5\sqrt{3}\big) \cdot 8 = 120 + 40\sqrt{3}$ см^2.

Відповідь: $120 + 40\sqrt{3}$ см^2.

Задача 3. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, у якої бічна сторона дорівнює меншій основі і дорівнює $9\sqrt{3}$ см. Кут при більшій основі трапеції дорівнює $60°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайти висоту та бічні ребра піраміди.



Мал. 2.3. 3

Дано: $SABCD$ – піраміда,

$ABCD$ – рівнобічна трапеція,

$AB = CD = BC = 9\sqrt{3}$ см,

$\angle BAD = \angle CDA = 60°$,

$\angle SDC = \angle SAB = 30°$.

Знайти SO, SA, SD, SC, SB.

Розв'язання

Доведемо, що центр кола, описаного навколо даної трапеції лежить на середині більшої основи.

Розглянемо ΔAOB: $AO = OB$ – як радіуси. Звідси $\angle BAO = \angle ABO = 60° => \angle AOB = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$. Отже, ΔAOB – рівносторонній ($AB = AO = 10$ см).

$\angle A + \angle B = 180° => \angle B = 180° - 60° = 120°$.

$\angle CBO = \angle B - \angle ABO = 120° - 60° = 60°$.

Розглянемо ΔBOC: $BO = OC$ – радіуси. Звідси $\angle CBO = \angle BCO = 60° => \angle BOC = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

Аналогічно доводиться, що $\angle COD = 60°$. $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 60° + 60° + 60° = 180°$.

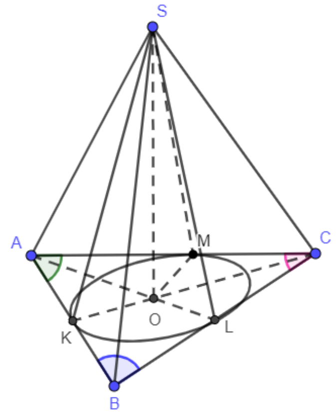
Отже, точка O належить більшій основі трапеції і є її серединою.

З ΔSOA $(\angle O = 90°)$: $SO = AO\ tg\angle SAO = 9\sqrt{3}\ tg30° = 9\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$ см.

$SA = 2 \cdot SO = 2 \cdot 9 = 18$ см (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

Відповідь: 9 см, 18 см, 18 см, 18 см, 18 см.

Задача 4. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 10 см, 14 см, а всі двогранні кути при основі дорівнюють по 60°. Знайти висоту піраміди та площу повної поверхні.



Мал. 2.3. 4

Дано: $SABC$ – піраміда,

$AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см,

$\angle SKO = \angle SMO = \angle SLO = 60°$.

Знайти $SO, S_{пов}$.

Розв'язання

Якщо в деякій піраміді всі бічні грані утворюють із площиною основи один і той самий кут, то основою висоти такої піраміди є центр кола, вписаного в її основу.

Точка O – точка перетину бісектрис ΔABC.

$OK = OM = OL = r$ – радіуси, вписаного кола.

$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p_{\Delta ABC}}$;

$p_{\Delta ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{6+10+14}{2} = 15$ (см).

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p_\Delta (p_\Delta - AB)(p_\Delta - BC)(p_\Delta - AC)}$ – формула Герона.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{15(15-6)(15-10)(15-14)} = \sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ (см^2).

$r = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$ (см)

З ΔSOM ($\angle O = 90°$): $SO = OM\, tg\angle SMO = \sqrt{3}\, tg60° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ (см);

$\angle OSM = 90° - 60° = 30°$;

$SM = 2OM = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см) – за властивістю катета, що лежить навпроти кута 30°.

$S_{пов} = S_{біч} + S_{\Delta ABC}$;

$S_{біч} = \frac{1}{2}SM \cdot AC + \frac{1}{2}SK \cdot AB + \frac{1}{2}SL \cdot BC$;

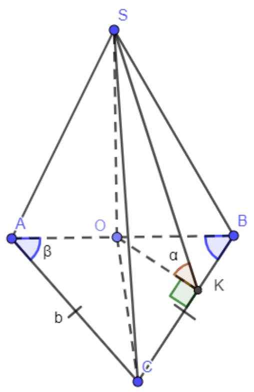
$SM = SK = SL$ – як похилі у яких рівні проекції.

$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}(AC + AB + BC) \cdot SM = p_{\Delta ABC} \cdot SM = 15 \cdot 2\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{\text{пов}} = 30\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: 3 см, $45\sqrt{3}$ (см^2).

Задача 5. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною b і кутом β при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайти об'єм піраміди.



Мал. 2.3. 5

Дано: $SABC$ – піраміда,

ΔABC – рівнобедрений, $AC = BC = b$,

$\angle A = \angle B = \beta$, $(SAB) \perp (ABC)$,

$\angle\big((SBC);(ABC)\big) = \alpha$.

Знайти $V_{\text{піраміди}}$.

Розв'язання

$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO$;

З ΔABC: $\angle C = 180° - 2\angle A = 180° - 2\beta$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin\angle C = \frac{1}{2} b \cdot b \sin(180° - 2\beta) = \frac{1}{2} b^2 \sin 2\beta$ (кв. од)

Проведемо $OK \perp BC$.

$SO \perp OK, OK \perp BC$ => $SK \perp BC$ – за теоремою про три перпендикуляри.

$\angle\big((SBC);(ABC)\big) = \angle(SK;OK) = \angle SKO = \alpha;$

OC – висота, бісектриса, медіана – за властивістю рівнобедреного трикутника.

З ΔBOC $(\angle O = 90°)$: $OB = BC \cos\angle B = b\cos\beta$.

З ΔOKB $(\angle K = 90°)$: $OK = OB \sin\beta = b\cos\beta\sin\beta = \frac{1}{2} b \cdot 2\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2} b \sin 2\beta$.

З ΔSOK $(\angle O = 90°)$: $SO = OK\, tg\angle SKO = \frac{1}{2} b \sin 2\beta\, tg\alpha$.

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b^2 \sin 2\beta \cdot \frac{1}{2} b \sin 2\beta\, tg\alpha = \frac{1}{12} b^3 sin^2 2\beta tg\alpha \text{ (куб. од)}$$

Відповідь: $\frac{1}{12} b^3 sin^2 2\beta tg\alpha$ (куб. од)

Тема «Тіла обертання» є однією з найважливіших тем стереометрії. Безліч реальних об'єктів у навколишньому середовищі мають форму кулі, конуса, циліндра та сфери. Тому багато вчених цікавилися і цікавляться тілами обертання.

При вивченні даної теми, вчитель має звернути увагу учнів на поняття тіла обертання. Оскільки учні часто думають, що тіло обертання – тіло, яке має властивість обертатися навколо осі симетрії. Насправді, тілом обертання називають тіло, яке можна отримати шляхом обертання певної плоскої фігури навколо прямої, яка містить якийсь елемент даної фігури. Тому, доцільно провести фронтальне опитування серед учнів, щоб домогтися більшого засвоєння поняття тіл обертання.

Фронтальне опитування

1. Чому деяке тіло називають тілом обертання? *(Тілом обертання називають тіло, що можна отримати шляхом обертання плоскої фігури навколо прямої).*
2. Що таке циліндр? Перерахуйте його елементи. *(Циліндром називають тіло, яке отримане внаслідок обертання прямокутника навколо однієї зі сторін. Елементи: верхня та нижня основа, твірні, висота, вісь циліндра).*
3. Що таке конус? Назвіть його елементи. *(Конусом називають тіло, яке отримане внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо катета. Елементи: основа конуса, вершина конуса, твірні).*
4. Поясніть, що таке куля та сфера. *(Кульою називають тіло, що утворене обертанням круга навколо його діаметра. Сфера – геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки, що є центром сфери).*
5. Що є осьовими перерізами вище названих тіл обертання? *(Осьовими перерізами даних тіл є: циліндра – прямокутник, конуса – трикутник, кулі та сфери – коло).*

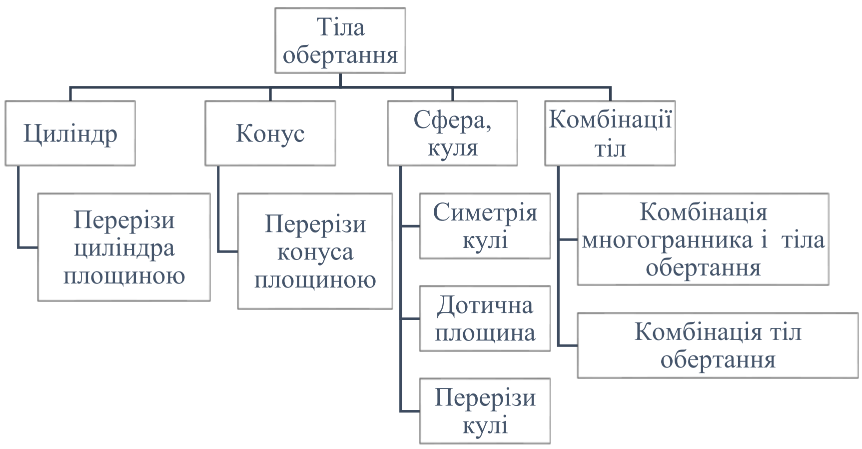
Необхідно запропонувати учням виготовити просторові фігури з розгорток. Для початку можна надати школярам заготовки, а потім самостійно виготовити розгортки, яких не вистачає для побудови певного тіла. Таким чином учитель може домогтися від учнів більш чіткого уявлення про кожне тіло обертання.

У підручнику з геометрії 11 клас профільний рівень тему розбито на підпункти, а саме:

- циліндр, комбінації циліндра та призми;
- конус, зрізаний конус;
- комбінації конуса та піраміди;
- куля, взаємне розміщення сфери та площини.

Логіко-структурну модель вивчення даної теми можна представити у вигляді схеми.

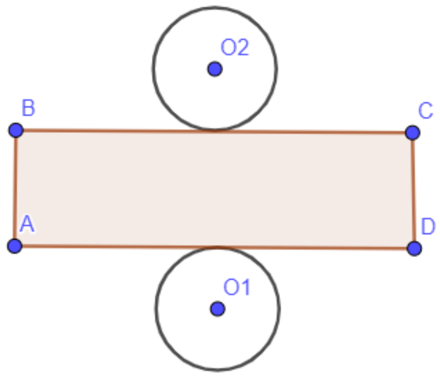
Схема 2.3. 3



Спочатку необхідно повторити увесь навчальний матеріал, що пов’язаний з поняттями кола та круга: радіус кола, діаметр кола, хорда кола, дотична до кола, довжина кола, площа круга і т.д.

Перед вивченням означення циліндра, доречно учням показати розгортку даного тіла, щоб мати уявлення про нього (мал. 2.3.6). Також важливо ознайомити учнів з правилами побудови. Адже, основну увагу при вивченні даного розділу приділено розв’язуванню задач. Побудова правильного малюнка вимагає в учнів точності, розвиває уважність та акуратність у виконанні роботи.

Неправильно побудований малюнок може привести до хибного розв’язання задачі.



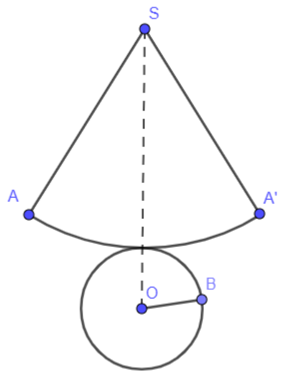
Мал. 2.3. 6

Розглянемо побудову рисунка геометричного тіла – циліндра.

1. Проводимо довільно вертикальну пряму та відмічаємо на ній проекції центрів основ – O_1 і O_2.
2. Будуємо нижню та верхню основу циліндра за допомогою шаблона еліпса так, щоб центри еліпсів співпадали з позначеними точками O_1, O_2.
3. Будуємо малу вісь еліпсів вздовж проекції циліндра.
4. З’єднуємо відповідні кінці великих осей еліпсів, які зображають основи. Отримали твірні циліндра.
5. Циліндр побудовано.

Аналізуючи підручник з геометрії для 11 класу профільний рівень автор О. С. Істер, можна побачити, що велика кількість задач на циліндр пов’язана з осьовим перерізом. Для кращого засвоєння практичних навичок при розв’язуванні задач з осьовим перерізом циліндра, рекомендується проводити його під деяким кутом до основи циліндра. Адже, це допомагає швидше побачити та знайти певні елементи циліндра та надає об’ємності малюнку.

Тема «Конус» перекликається досить часто з темою «Прямокутний трикутник». Доцільно нагадати учням про властивості прямокутного трикутника, метричні співвідношення, теорему Піфагора та різні формули трикутника. Так само як при вивченні циліндра необхідно показати учням розгортку конуса (мал. 2.3.7).



Мал. 2.3. 7

Розглянемо побудову конуса.

1. Для того, щоб конус виглядав більш наочно, потрібно будувати в основі еліпс. Будуємо основу у вигляді еліпса, користуючись шаблоном.
2. На продовженні меншої осі еліпса, відмічаємо вершину конуса точку S.
3. Проводимо дотичні вершини конуса до побудованого еліпса. Відрізки, що сполучили дані точки – твірні.
4. Конус побудовано.

Також важливо зазначити учням, щоб правильно побудувати осьовий переріз конуса, необхідно провести діаметр основи даного конуса та з’єднати кінці з вершиною конуса.

Доцільно приділити деякий час на детальну побудову кулі та сфери, щоб учні в подальшому виконували без труднощів задачі на побудову.

Розглянемо побудову тіла обертання – кулі.

1. Зображуємо великий круг кулі –еліпс.
2. На більшій осі еліпса, як на діаметрі, проводимо коло з деяким центром O.
3. Через один з кінців малої осі еліпса, проводимо промінь до перетину з колом.
4. На малій осі по обидві сторони від центра еліпса відкладаємо рівні відрізки. Утворені точки є точками зображення полюсів кулі.
5. Менший круг кулі зображуємо за допомогою шаблона еліпса.
6. Кулю побудовано.

Як і для многогранників, так і для тіл обертання є формули знаходження площі поверхонь, об'ємів тіл обертання. Для кращого засвоєння даних формул слід використовувати розгортки даних тіл обертання. Наприклад, для того, щоб знайти площу поверхні циліндра, необхідно додати площу прямокутника до площ двох рівних кругів. Таким чином, щоб легко обчислити площу поверхні потрібно знати формули: довжина кола, площа прямокутника та площа круга. При обчисленні площі поверхні конуса в учнів, зазвичай, не виникає труднощів. Оскільки для обчислення площі необхідно знати одну єдину формулу – довжина кола та радіус основи конуса.

Тема «Об'єми тіл обертання» є легкою для засвоєння. Оскільки, включаючи логіку при розв'язуванні задач на знаходження об'ємів геометричних тіл, можна досить легко запам'ятати дані формули. Наприклад, формула об'єму циліндра складається лише з добутку площі основи циліндра та висоти. Так як у циліндра основа це круг, то формула буде виглядати так:

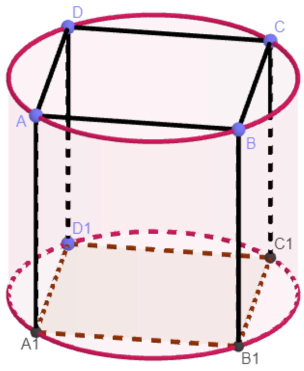
$$V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H,$$

де R – радіус основи циліндра, H – висота циліндра.

Найскладнішими задачами у даному розділі є задачі на комбінацію многогранників та тіл обертання. Доцільно при розв'язуванні задач наголосити учням на правильній побудові малюнка. Розглянемо алгоритм побудови правильної призми, яка вписана у циліндр.

Комбінація циліндра і правильної призми

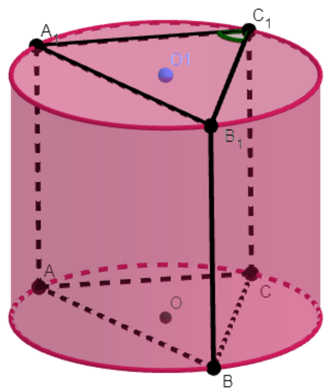
1. Побудуємо циліндр;
2. У верхню основу циліндра впишемо правильний чотирикутник – квадрат.
3. Через вершини даного квадрата $ABCD$ проведемо твірні циліндра.
4. Сполучаємо послідовно кінці твірних.



Мал. 2.3. 8

Розглянемо задачі з даного розділу.

Задача 6. У циліндрі через твірну CC_1 проведено перерізи AA_1C_1C і BB_1C_1C, площі яких відповідно дорівнюють 42 см² і 32 см². Кут між площинами перерізів становить 60°. Знайти площу перерізу AA_1B_1B.



Мал. 2.3. 9

Дано: $S_{AA_1C_1C} = 42$ см², $S_{BB_1C_1C} = 32$ см²,

$\angle\big((AA_1C_1C);(BB_1C_1C)\big) = 60°$.

Знайти $S_{AA_1B_1B}$.

Розв'язання

AA_1C_1C, BB_1C_1C, AA_1B_1B – прямокутники.

$A_1C_1 \perp CC_1, B_1C_1 \perp CC_1$, звідси випливає $\angle\big((AA_1C_1C);(BB_1C_1C)\big) = \angle(A_1C_1;B_1C_1) = \angle A_1C_1B_1 = 60°$.

$S_{AA_1B_1B} = A_1B_1 \cdot BB_1 = A_1B_1 \cdot CC_1$, так як $BB_1 = CC_1$ – як твірні циліндра.

$S_{AA_1C_1C} = A_1C_1 \cdot CC_1 = 42$ см², $S_{BB_1C_1C} = B_1C_1 \cdot CC_1 = 32$ см².

З $\Delta A_1C_1B_1$ за теоремою косинусів: $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 - 2A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cos\angle A_1C_1B_1$;

$A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 - 2A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cos 60°$;

$A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 - A_1C_1 \cdot B_1C_1 \mid \cdot\, CC_1{}^2$

$A_1B_1{}^2 \cdot CC_1{}^2 = A_1C_1{}^2 \cdot CC_1{}^2 + B_1C_1{}^2 \cdot CC_1{}^2 - A_1C_1 \cdot CC_1 \cdot B_1C_1 \cdot CC_1;$

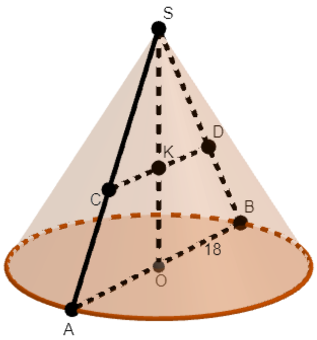
$(A_1B_1 \cdot CC_1)^2 = (A_1C_1 \cdot CC_1)^2 + (B_1C_1 \cdot CC_1)^2 - (A_1C_1 \cdot CC_1)(B_1C_1 \cdot CC_1);$

$S_{AA_1B_1B}{}^2 = S_{AA_1C_1C}{}^2 + S_{BB_1C_1C}{}^2 - S_{AA_1C_1C} \cdot S_{BB_1C_1C} = 42^2 + 32^2 - 42 \cdot 32 =$
$= 1764 + 1024 - 1344 = 1444$ см^4.

$S_{AA_1B_1B} = \sqrt{1444} = 38$ см^2.

Відповідь: 38 см^2.

Задача 7. У конусі точка K ділить його висоту у відношенні $4:5$, починаючи від його вершини. Через точку K паралельно основі конуса проведено пряму, яка перетинає твірні конуса в точках C і D. Знайти відстань між точками C і D, якщо радіус основи конуса дорівнює 18 см.



Мал. 2.3. 10

Дано: $CD \parallel AB$, $SK:KO = 4:5$, $OB = 18$ см.

Знайти $\rho(C;D)$.

Розв'язання

$AB = 2OB = 2 \cdot 18 = 36$ см. Оскільки $CD \parallel AB$, то $\angle SCD = \angle SAB$ – як відповідні кути при паралельних прямих і січній SA.

Розглянемо ΔSCD і ΔSAB, у них: 1) $\angle S$ – спільний;

2) $\angle SCD = \angle SAB$.

Отже, $\Delta SCD \sim \Delta SAB$ – за двома рівними кутами. З подібності трикутників випливає: $SK:SO = CD:AB$.

Нехай k – коефіцієнт пропорційності, тоді $SK = 4k$, $OK = 5k$.

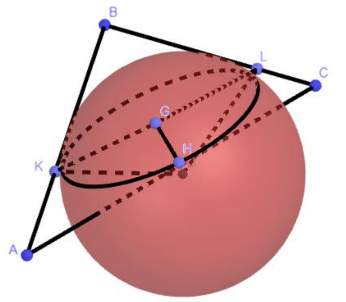
$SO = SK + KO = 4k + 5k = 9k$.

$\frac{4k}{9k} = \frac{CD}{36};$

$CD = \frac{4k \cdot 36}{9k} = 16$ см.

Відповідь: 16 см.

Задача 8. Сторони трикутника, які є дотичними до кулі, дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см. Знайти відстань від центра кулі до площини трикутника, якщо радіус кулі 10 см.



Мал. 2.3. 11

Дано: $AC = 36$ см, $AB = 29$ см, $BC = 25$ см, $OL = 10$ см.

Знайти $\rho(O;(ABC))$.

Розв'язання

$\rho\big(O;(ABC)\big) = OG$, де G – центр вписаного кола в трикутник ABC.

$KG = LG = HG = r$;

$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p_{\Delta ABC}}$;

$p_{\Delta ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{29+25+36}{2} = 45$ см;

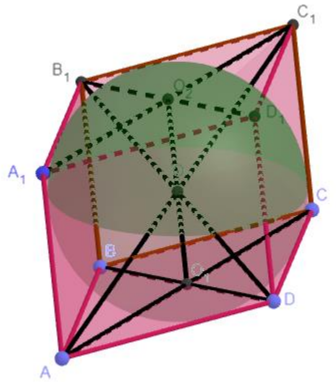
$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p_{\Delta ABC}(p_{\Delta ABC} - AB)(p_{\Delta ABC} - BC)(p_{\Delta ABC} - AC)} =$ $\sqrt{45(45-29)(45-25)(45-36)} = \sqrt{45 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 9} = 4 \cdot 3 \cdot 30 = 360$ см^2;

$r = \frac{360}{45} = 8$ см.

З ΔOGL $(\angle G = 90°)$: $OG = \sqrt{OL^2 - GL^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100-64} = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

Задача 9. Навколо кулі описано прямий паралелепіпед, діагоналі якого дорівнюють $\sqrt{10}$ см і 4 см. Знайти радіус кулі.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед,

$AC_1 = 4$ см, $B_1D = \sqrt{10}$ см.

Знайти OO_1.

Мал. 2.3. 12

Розв'язання

Кулю можна вписати в паралелепіпед тоді, коли в його основу можна вписати коло. Звідси випливає, що $ABCD$ – ромб.

Нехай $AC = d_1$, $BD = d_2$. O_1O_2 – діаметр вписаної кулі, висота паралелепіпеда.

$O_1O = 2R$, де R – радіус вписаної кулі.

З ΔACC_1: ${CC_1}^2 = {AC_1}^2 - AC^2$;

$$(2R)^2 = 16 - {d_1}^2;$$

$$d_1 = \sqrt{16 - 4R^2}.$$

З ΔDBB_1: ${BB_1}^2 = B_1D^2 - BD^2$;

$$(2R)^2 = 10 - {d_2}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{10 - 4R^2}.$$

З ΔAO_1D ($\angle O_1 = 90°$): $AD^2 = {AO_1}^2 + {DO_1}^2$;

$$AO_1 = \frac{AC}{2} = \frac{d_1}{2};$$

$$DO_1 = \frac{BD}{2} = \frac{d_2}{2};$$

$$AD = \sqrt{\frac{{d_1}^2}{4} + \frac{{d_2}^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{16 - 4R^2 + 10 - 4R^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26 - 8R^2}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}{d_1}^2 \cdot {d_2}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4R^2} \cdot \sqrt{10 - 4R^2}.$$

$S_{ABCD} = AD \cdot h$, де h - висота ромба $ABCD$.

$h = 2R$;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{26 - 8R^2} \cdot 2R.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(16 - 4R^2)(10 - 4R^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{26 - 8R^2} \cdot 2R;$$

$$(16 - 4R^2)(10 - 4R^2) = 4R^2(26 - 8R^2);$$

$$160 - 64R^2 - 40R^2 + 16R^4 = 104R^2 - 32R^4;$$

$48R^4 - 208R^2 + 160 = 0;$

$3R^4 - 13R^2 + 10 = 0;$

$R^2 = t;$

$3t^2 - 13t + 10 = 0;$

$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 169 - 120 = 49;$

$t_1 = \frac{13-7}{6} = 1;$

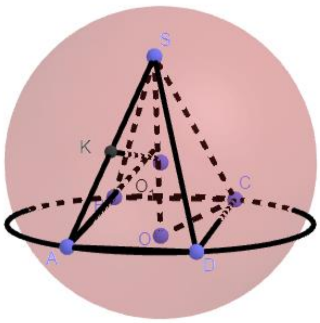
$t_2 = \frac{13+7}{6} = \frac{10}{3}$ – не задовольняє умову задачі, бо $4 \cdot \frac{10}{3} + {d_2}^2 > 10.$

$R^2 = 1;$

$R = 1$ см.

Відповідь: $OO_1 = 1$ см.

Задача 10. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом α. Знайти площу поверхні кулі.



Мал. 2.3. 13

Дано: $SABCD$ – правильна чотирикутна піраміда,

$AD = a, \angle(SA; (ABCD)) = \alpha.$

Знайти: $S_{\text{кулі}}$.

Розв'язання

$S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2.$

Якщо бічне ребро піраміди і перпендикуляр, проведений до її основи через центр описаного кола, не є мимобіжними прямими, то центр описаної кулі є точкою перетину даного перпендикуляра із серединним перпендикуляром до бічного ребра піраміди, проведеним у площині, що проходить через бічне ребро і зазначений перпендикуляр до основи піраміди. [14]

$SO_1 = R.$

$\angle(SA; (ABCD)) = \angle SAO = \alpha.$

$AC = AD\sqrt{2} = a\sqrt{2}$; $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $SO = AO\ tg\angle SAO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot tg\ \alpha$;

$$SA = \frac{AO}{\cos\angle SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}.$$

$\Delta SKO_1 \sim \Delta SOA$ – за рівним гострим кутом ($\angle S$ – спільний). З подібності трикутників випливає: $\frac{SK}{SO} = \frac{SO_1}{SA}$.

$SK = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha}$.

$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha}}{\frac{a\sqrt{2}\ tg\ \alpha}{2}} = \frac{R}{\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}}$;

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$.

$S_{\text{кулі}} = 4\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{2a^2}{4sin^2 2\alpha} = \frac{2\pi a^2}{sin^2 2\alpha}$.

Відповідь: $\frac{2\pi a^2}{sin^2 2\alpha}$.

2.4. Задачі для підготовки до НМТ

Підготовка до Національного мультимедійного тесту (НМТ) має на меті забезпечити учнів необхідними знаннями та навичками, щоб успішно скласти тест і вступити до закладів вищої освіти.

У першому розділі було зазначено, що стереометрія є важливим розділом геометрії. Проаналізувавши щорічні завдання НМТ з математики, можна зробити висновок, що серед складних завдань є стереометричні задачі. Тому, підготовка до НМТ з розв’язування стереометричних задач потребує окремого підходу.

Підготовка до НМТ включає опрацювання задач на обчислення площ поверхонь і об’ємів просторових фігур, знаходження відстаней між точками, прямими і площинами, а також кутів між різними елементами геометричних тіл.

Особливу увагу приділяють методам перетворення просторових фігур, використанню координатного методу та властивостей векторів у просторі, що дозволяє розв’язувати більш складні задачі стереометрії.

Наведемо завдання для підготовки до НМТ з курсу стереометрії.

Тестові завдання

1. Скільки різних площин можна провести через дві бісектриси трикутника? [15]

А	Б	В	Г
Тільки одну	Тільки дві	Жодної	Безліч

2. Скільки всього різних площин можна провести через усі три вершини трикутника? [15]

А	Б	В	Г
Одну	Дві	Жодної	Безліч

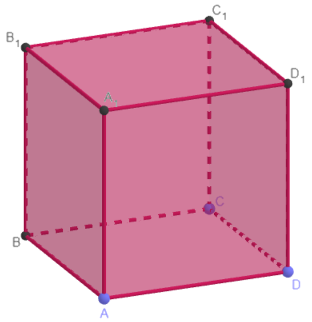
3. Скільки всього різних площин можна провести через дві протилежні вершини паралелограма і точку перетину його діагоналей?

А	Б	В	Г
Одну	Дві	Жодної	Безліч

4. Скільки всього різних площин можна провести через дві протилежні сторони паралелограма?

А	Б	В	Г
Одну	Дві	Жодної	Безліч

5. На мал. 2.4.1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть площину, яку задають точка C і пряма BB_1.



Мал. 2.4. 1

А	BCD
Б	BCC_1
В	ABB_1
Г	$A_1B_1C_1$

6. На мал. 2.4.1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Скільки всього різних площин можна провести через прямі BB_1 і A_1D_1?

А	Б	В	Г
Одну	Дві	Жодної	Безліч

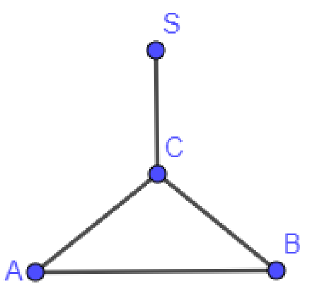
7. На мал. 2.4.1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з наведених прямих паралельна площині ABC_1?

А	Б	В	Г
BC	B_1C_1	A_1B_1	CC_1

8. Укажіть усі правильні твердження.
   I. Якщо точка B не лежить у площині α, то через точку B можна провести тільки одну площину, паралельну площині α.
   II. Через будь-яку точку простору, яка не лежить на прямій a, можна провести безліч прямих, паралельних прямій a.
   III. $SABC$ – трикутна піраміда. Через точку S можна провести безліч різних прямих, паралельних площині ABC.

А	Б	В	Г
I,II,III	II	I, III	III

9. Точка S лежить поза площиною ΔABC (AB – гіпотенуза), $\angle BCS = 90°$ (див. мал. 2.4.2). Укажіть усі правильні твердження.

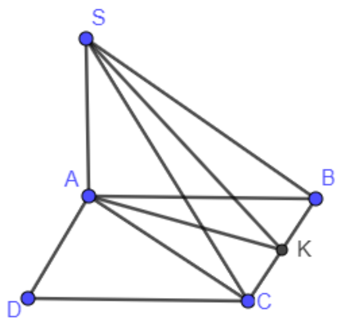


Мал. 2.4. 2

I. Пряма AC перпендикулярна до площини BCS.
II. Пряма BC перпендикулярна до площини ACS.
III. Пряма SC перпендикулярна до площини ABC.

А	Б	В	Г
I,II	II	III	I,II,III

10. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SA. Якому з наведених кутів дорівнює кут між площинами ABC і BCS? (мал. 2.4.3)



Мал. 2.4. 3

А	SKA
Б	ABS
В	BCS
Г	ACS

11. Знайдіть відстань від точки $A(-4; 12; -1)$ до координатної площини xOy.

А	Б	В	Г
8	12	1	4

12. Знайдіть відстань від точки $A(-1; 4; -3)$ до осі Ox.

А	Б	В	Г
$\sqrt{10}$	1	$\sqrt{17}$	5

13. При якому значенні m вектори $\bar{a}(m^2; 2; -4)$ і $\bar{b}(2; 1; m)$ колінеарні?

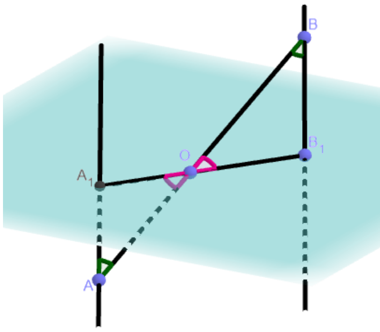
А	Б	В	Г
$-2; 2$	-2	2	$-0{,}5; 0{,}5$

14. При якому значенні n вектори $\bar{a}(-1; n; 2)$ і $\bar{b}(2; 4; -4)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г
2,5	4	16	-2

Розрахункові задачі

1. Площина α перетинає відрізок AB у точці O, (див. мал. 2.4.4), $AO: OB = 2: 3$. Через точки A і B проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках A_1 і B_1 відповідно. Знайдіть площу ΔBB_1O, якщо $S_{\Delta AA_1O} = 36$ см^2.



Мал. 2.4. 4

Розв'язання

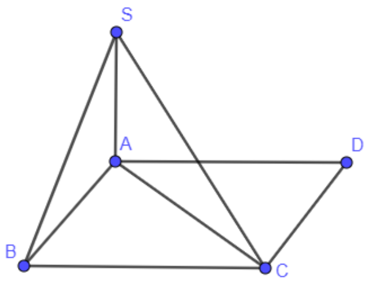
$\Delta AA_1O \sim \Delta BB_1O$ – за двома рівними кутами ($\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ – як вертикальні , $\angle A_1AO = \angle B_1BO$ – як внутрішні різносторонні при $AA_1 \parallel BB_1$ і січній AB).

$k = \frac{AO}{OB} = \frac{2}{3}$; $\frac{S_{\Delta AA_1O}}{S_{\Delta BB_1O}} = k^2$; $\frac{36}{S_{\Delta BB_1O}} = \frac{4}{9}$; $S_{\Delta BB_1O} = 81$ (см^2).

Відповідь: 81.

2. Площини прямокутника $ABCD$ і прямокутного трикутника ABS ($\angle BAS = 90°$) перпендикулярні, $AB = 2$ см, $AD = 6$ см, $SA = 2\sqrt{15}$ см. Знайдіть довжину відрізка CS.

Розв'язання



Мал. 2.4. 5

$SA \perp AB, AB \perp BC => SB \perp BC$ – за теоремою про три перпендикуляри.

З ΔSAB ($\angle A = 90°$): $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{15})^2 + 2^2} = \sqrt{64} = 8$ см.

$SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ см.

Відповідь: 10.

3. Знайдіть значення z, якщо $A(-1; 3; 1)$, $B(0; 1; z)$, $C(0; 1; -2)$, $AB = AC$. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь; якщо більше одного, то у відповідь запишіть їх добуток.

Розв'язування

$AB^2 = \left(0 - (-1)\right)^2 + (1-3)^2 + (z-1))^2 = 1 + 4 + (z-1)^2 = 5 + (z-1)^2.$

$AC^2 = \left(0 - (-1)\right)^2 + (1-3)^2 + (-2-1)^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$

$$AB^2 = AC^2$$

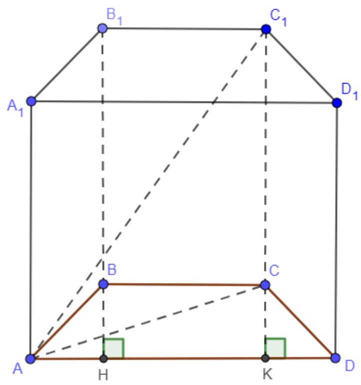
$5 + (z-1)^2 = 14$; $(z-1)^2 = 9$; $z = 4$ або $z = -2$.

$$4 \cdot (-2) = -8.$$

Відповідь: -8.

4. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з тупим кутом $120°$ і меншою основою 12 см. Діагоналі трапеції є бісектрисами її гострих кутів. Діагональ призми утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні. Відповідь запишіть у вигляді $S_{біч.}: \sqrt{3}$ см^2.

Розв'язання



Мал. 2.4. 6

$\angle C_1AC = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$, $BC = 12$ см.

Знайти $S_{біч.}$.

$$S_{біч.} = S_{ABCD} \cdot CC_1$$

$\angle BAC = \angle CAD$ – за властивістю бісектриси.

$\angle CAD = \angle BCA$ – як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC. $\angle BAC = \angle BCA => \Delta ABC$ – рівносторонній $=> AB = BC = 12$ см.

$\angle A = 180° - \angle B = 180° - 120° = 60°$.

З ΔBHA ($\angle H = 90°$): $BH = AB sin\angle A = 12 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

$AH = AB cos\angle A = 12 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (см).

$AD = BC + 2AH = 24$ (см). $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BH = \frac{12+24}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ (см^2).

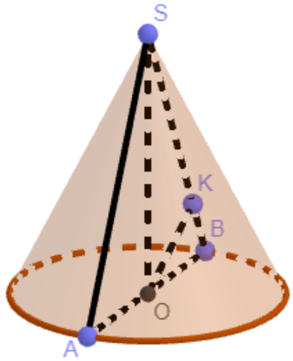
З ΔAKC ($\angle K = 90°$): $AC = \frac{CK}{\sin\angle CAK} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 30°} = 12\sqrt{3}$ (см).

З ΔC_1CA ($\angle C = 90°$): $CC_1 = AC tg\angle C_1AC = 12\sqrt{3} \cdot tg 60° = 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 36$ (см).

$S_{біч.} = 108\sqrt{3} \cdot 36 = 3888\sqrt{3}$ (см^2). $3888\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3888$.

Відповідь: 3888.

5. Площа осьового перерізу конуса дорівнює $12\sqrt{3}$ см^2, а твірна конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть відстань від центра основи конуса до його твірної.



Мал. 2.4. 7

Розв'язання

$S_{\Delta SAB} = 12\sqrt{3}$ см^2.

$\angle SAO = \angle SBO = 60°$. $OK-?$

ΔSAB – рівносторонній ($SA = SB = AB = a$).

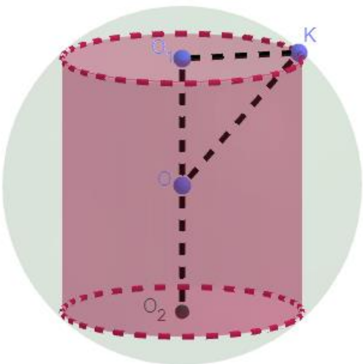
$S_{\Delta SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$; $a^2 = 48$; $a = 4\sqrt{3}$ см.

$OB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ см.

З ΔOKB ($\angle K = 90°$): $OK = OB \sin \angle SBO = 2\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ (см).

Відповідь: 3.

6. У кулю вписано циліндр з радіусом основи 3 см і твірною 8 см. Знайдіть радіус кулі.



Мал. 2.4. 8

Розв'язання

$O_1O_2 = 8$ см, $O_1K = 3$ см. Знайти OK.

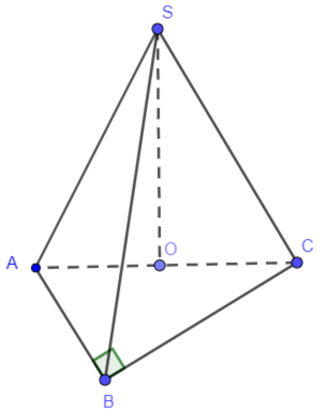
$OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см).

З ΔOO_1K ($\angle O_1 = 90°$): $OK = \sqrt{{OO_1}^2 + O_1K^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ (см).

Відповідь: 5.

7. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 16 см і 12 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює $5\sqrt{5}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання



Мал. 2.4. 9

Дано: $AB = 12$ см, $BC = 16$ см,

$SA = SB = SC = 5\sqrt{5}$ см.

Знайти $V_{піраміди}$.

$$V_{піраміди} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO$$

З ΔABC ($\angle B = 90°$): $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ (см).

$OA = OB = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ (см) – як радіуси, описаного кола.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ (см^2).

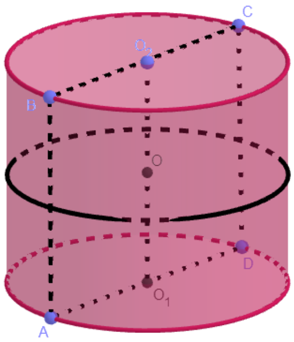
З ΔSOC ($\angle O = 90°$): $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{125 - 100} = \sqrt{25} = 5$ (см).

$V_{піраміди} = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 5 = 160$ (см^2).

Відповідь: 160.

8. У циліндрі площа осьового перерізу дорівнює 30 см^2, а площа перерізу, перпендикулярного до твірної - 25π см^2. Знайдіть об’єм цього циліндра. Відповідь запишіть у вигляді $V_{циліндра} : \pi$ см^3.

Розв’язання



Мал. 2.4. 10

Дано: $S_{ABCD} = 30$ см^2, $S_{пер.} = 25\pi$ см^2.

Знайти $V_{циліндра}$.

$$V_{циліндра} = S_{осн.} \cdot H$$

$S_{осн.} = S_{пер.} = 25\pi$ см^2.

$S_{осн.} = \pi R^2$.

$\pi R^2 = 25\pi$;

$R^2 = 25$;

$R = 5$ см.

$AD = 2R = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

$S_{ABCD} = AB \cdot AD;$

$10AB = 30 => AB = 3$ (см).

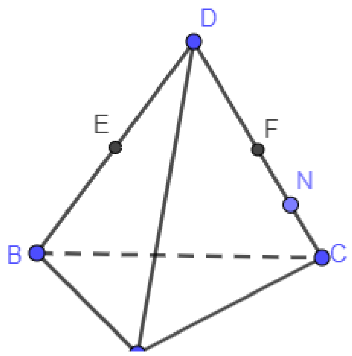
$V_{\text{циліндра}} = 25\pi \cdot 3 = 75\pi.$

$\frac{V_{\text{циліндра}}}{\pi} = \frac{75\pi}{\pi} = 75$ см^2

Відповідь: 75.

Встановлення відповідності

1. На мал. 2.4.11 зображено тетраедр $SABC$, точки E і F – середини ребер SB і SC відповідно, точка N належить відрізку CF. Установіть відповідність між прямими (1-3) та їх взаємним розміщенням (А-Д).

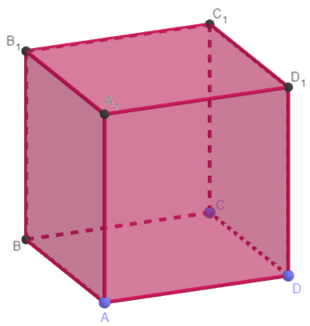


Мал. 2.4. 11

1.	BC і EF	А	Перетинаються
2.	AB і SC	Б	Мимобіжні
3.	EN і BC	В	Паралельні
		Г	Перпендикулярні
		Д	Визначити не можливо

Відповіді: 1-В, 2-Б, 3-А.

2. На мал. 2.4.12 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою площин (1-3) та прямою перетину (А-Д) цієї пари площин.

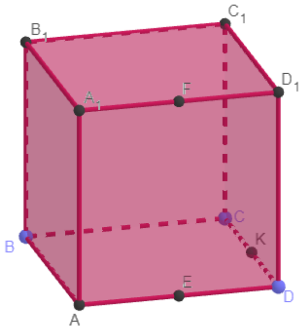


1.	$A_1B_1C_1$ і ADD_1	А	BC
2.	ABB_1 і ADD_1	Б	CD
3.	$A_1B_1C_1$ і CC_1D	В	C_1D_1
		Г	AA_1
		Д	A_1D_1

Відповіді: 1-Д, 2-Г, 3-В.

Мал. 2.4. 12

3. На мал. 2.4.13 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки E, F, K – середини відповідно ребер AD, A_1D_1, CD. Установіть відповідність між площинами (1-3) та площинами, які паралельні вказати (А-Д).

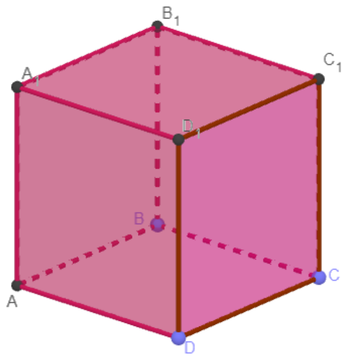


Мал. 2.4. 13

1.	CDD_1	А	ACC_1
2.	EFK	Б	BB_1C_1
3.	BDA_1	В	B_1D_1C
		Г	ABB_1
		Д	BDC_1

Відповіді: 1-Г, 2-А, 3-В.

4. На мал. 2.4.14 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB = \sqrt{3}AA_1$, $ABCD$ – квадрат. Установіть відповідність між кутом (1-3) та його градусною мірою (А-Д).



Мал. 2.4. 14

1.	Кут між прямими CD і BB_1	А	30°
2.	Кут між прямими BC і AD_1	Б	90°
3.	Кут між прямими A_1D і BC_1	В	45°
		Г	60°
		Д	0°

Відповіді: 1-Б, 2-А, 3-Г.

5. На мал. 2.4.14 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB = 3, BC = \sqrt{3}, AA_1 = 1$. Установіть відповідність між кутом (1-3) і його градусною мірою.

1.	Кут між прямою B_1D_1 і площиною ABC.	А	30°
2.	Кут між прямою CC_1 і площиною ABC.	Б	90°
3.	Кут між прямою A_1C і площиною ABC.	В	0°
		Г	45°
		Д	$arctg\frac{\sqrt{3}}{6}$

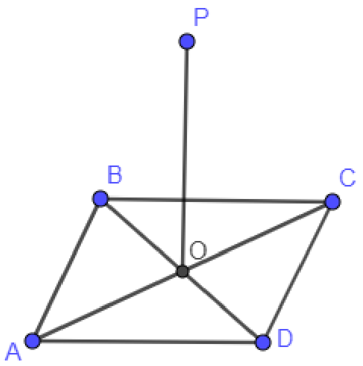
Відповіді: 1-В, 2-Б, 3-Д.

6. На мал. 2.4.14 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $AB = AA_1 = \sqrt{3}$ см, $AD = 1$ см. Установіть відповідність між кутами (1-3) і градусними мірами (А-Д).

1.	Кут між площинами BCC_1 і CDD_1.	А	$0°$
2.	Кут між площинами $A_1B_1C_1$ і A_1BD_1.	Б	$30°$
3.	Кут між площинами ABB_1 і A_1B_1C.	В	$45°$
		Г	$60°$
		Д	$90°$

Відповіді: 1-Д, 2-В, 3-Б.

7. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр PO, де O – точка перетину діагоналей квадрата. $AB = 8$ см, $PO = 3$ см (мал. 2.4.15). Установіть відповідність між відстанями (1-3) і їх величинами (А-Д).



Мал. 2.4. 15

1.	Відстань від точки P до сторони AB квадрата $ABCD$.	А	4 см
2.	Відстань між прямими AB і PO.	Б	$4\sqrt{2}$ см
3.	Відстань від точки P до площини квадрата $ABCD$.	В	5 см
		Г	$\sqrt{41}$ см
		Д	3 см

Відповіді: 1-В, 2-А, 3-Д.

8. Сфера із центром у точці B задана рівнянням $(x+1)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 25$. Установіть відповідність між точкою (1-3) та її координатами (А-Д).

1.	Точка, симетрична точці B відносно початку координат.	А	$(1; 6; -2)$

2.	Точка, симетрична точці B відносно осі Oz.	Б	$(1; -6; 2)$
3.	Точка, симетрична точці B відносно площини yOz.	В	$(-1; -6; -2)$
		Г	$(1; -6; -2)$
		Д	$(-1; 6; -2)$

Відповіді: 1-Б, 2-Г, 3-А.

2.5. Застосування програми GeoGebra та практична перевірка ефективності дослідження

У сучасному світі навчальні заклади значно змінили свої підходи щодо надання знань здобувачам освіти. Кожен освітній заклад шукає спеціалістів, які прагнуть крокувати в ногу з освітніми інформаційними технологіями. У нинішньому світі вчителі математики повинні не тільки досконало володіти знаннями математики, а й розумітися на інформатиці, адже сьогодні існує багато електронних програмних інструментів, що застосовуються для викладання математики. Серед подібних програм, які застосовуються для пояснення та розв'язання стереометричних задач у школах, використовують такі педагогічні програмні засоби: Gran 3D, DG, GeoGebra, Stearometry, Geometry 3D тощо.

Програма GeoGebra – це підпрограмне забезпечення, яке розраховане для вивчення математики. Воно містить в собі геометрію та алгебру. Дана програма користується попитом у всьому світі та локалізована понад 50-ма мовами, зокрема і українською. Програма Geogebra дозволяє керувати малюнками у своєму середовищі, за одним кліком будувати геометричні тіла, фігури, кола тощо, знаходити площі геометричних фігур та об'єми тіл обертання.

Ця програма доступна як в онлайн-версії, так і для встановлення на комп'ютер та телефон. Використовуючи надане посилання, можна перейти до онлайн-ресурсу програми та користуватися нею, не встановлюючи на комп'ютер:

Онлайн-версія програми GeoGebra.

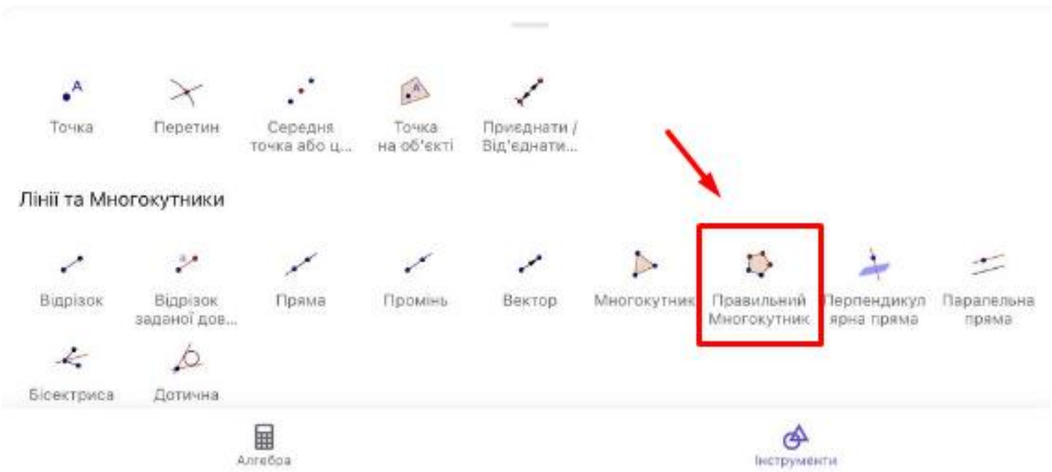
Розв'яжемо стереометричну задачу з детальним поясненням, використовуючи мобільний додаток GeoGebra 3D Calculator.

Задача. Дано правильну чотирикутну піраміду, ребро основи якої дорівнює 3 см. Бічне ребро з площиною основи утворює кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання

Для побудови правильного малюнка у застосунку необхідно проаналізувати задачу. З умови задачі відомо, що в основі піраміди лежить квадрат, сторони якого дорівнюють 3 см. Також відомо кут між площиною основи та бічним ребром. Побудуємо правильну піраміду. Для цього:

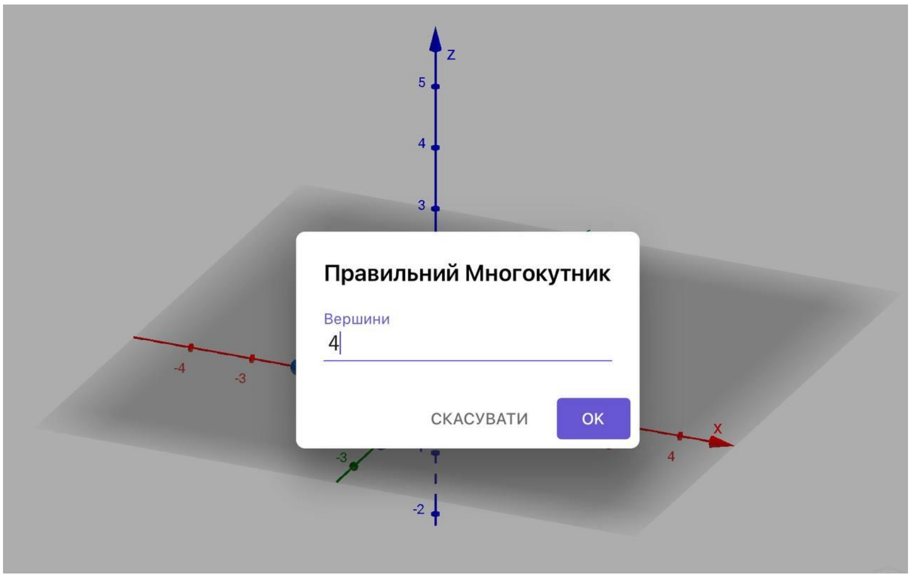
- заходимо у мобільний додаток GeoGebra 3D Calculator;
- у нижній панелі обираємо функцію «Інструменти» та функцію «Більше…»;
- шукаємо функцію «Правильний многокутник» (мал. 2.5.1);



Мал. 2.5. 1

- будуємо на координатній площині дві точки з *(найкраще взяти точки на осі Oy з координатами* $(0; 2; 0)$ *та Ox з координатами* $(-2; 0; 0)$*).*

Побудувавши точки, з'являється вікно (мал. 2.5.2).

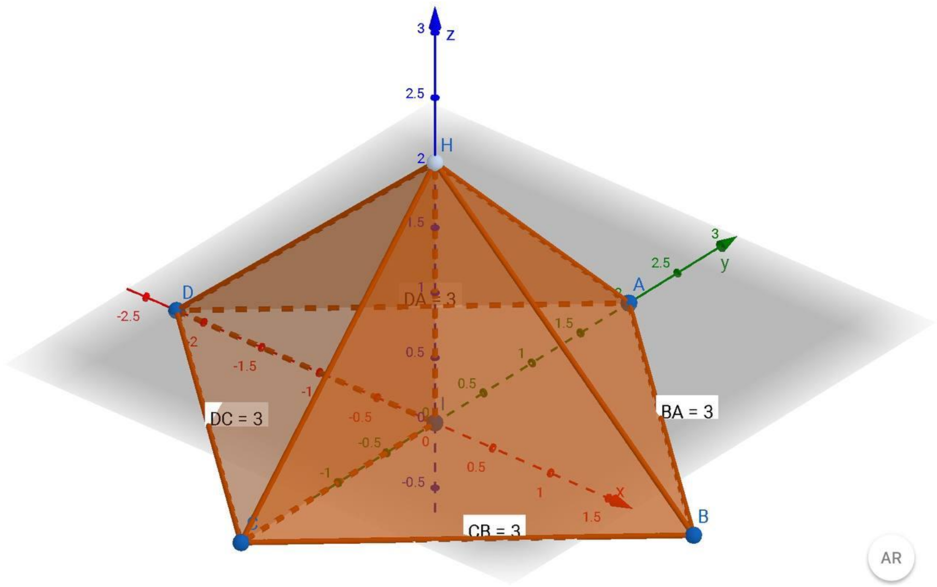


Мал. 2.5. 2

- з клавіатури вказуємо необхідну кількість вершин, що є в основі. У нашому випадку 4 вершини;
- отримали квадрат;

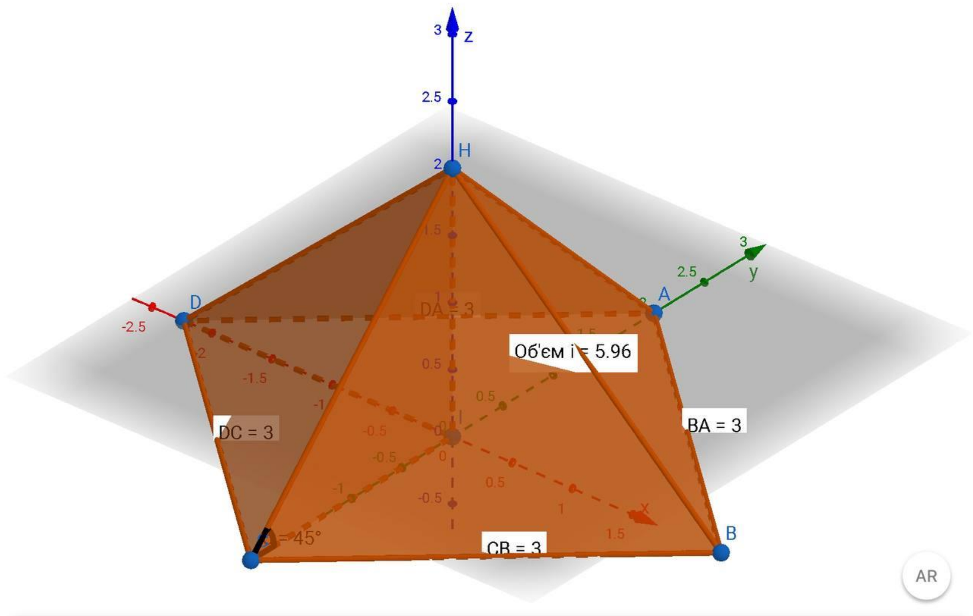
Для побудови кута, необхідно побудувати грані піраміди:

- будуємо піраміду, обираючи функцію «Піраміда». Нехай вершина піраміди знаходиться у точці $H(0;0;2)$;
- послідовно з'єднуємо точки A, B, C, D, H. Таким чином побудували піраміду (мал. 2.5.3).



Мал. 2.5. 3

- з точки C будуємо кут 45°, для цього обираємо функцію «Кут» та послідовно обираємо точки H, C, O, де точка O – точка перетину діагоналей;
- утворився кут 45°;
- щоб знайти об’єм піраміди, необхідно клікнути на функцію «Об’єм» та клікнути по побудованій піраміді;
- отримали шукане значення (мал. 2.5.4).



Мал. 2.5. 4

Відповідь: 5,96 см^3.

Для перевірки ефективності дослідження ми проводили уроки в 11 класі з вивчення теми «Піраміда» із застосуванням ППЗ GeoGebra 3D Calculator. Це відбувалося на базі Корецького ліцею Корецької міської ради Рівненської області впродовж жовтня і листопада 2024 року. Освітній процес Корецького ліцею відбувається в режимі офлайн.

Перевірка включала такі етапи:

1) аналіз підручників з геометрії профільного рівня для 11 класів, методичних рекомендацій;
2) аналіз успішності здобувачів освіти за результатами I чверті 2024-2025 навчального року;

3) проведення уроків по темі «Піраміда» із застосуванням ППЗ GeoGebra 3D Calculator для учнів 11 класу;
4) проведення контрольної роботи з теми «Піраміда»,
5) порівняння результатів контрольної роботи з результатами успішності здобувачів освіти за підсумками *I* чверті 2024-2025 навчального року;
6) висновки про ефективність та доцільність застосування методики розв’язування стереометричних задач з використанням ППЗ GeoGebra 3D Calculator.

Рівень успішності з геометрії за підсумками *I* чверті 2024-2025 навчального року наведено в таблиці 2.5.1.

Таблиця 2.5. 1

Клас	К-сть.	Високий рівень			%	Достатній рівень			%	Середній рівень			%	Початковий рівень			%
		12	11	10		9	8	7		6	5	4		3	2	1	
11	30		2	5	23,3	8	7	2	56,6	6			20				

За результатами успішності учнів за *I* чверть маємо:

- достатній рівень - 56,6 %;
- високий рівень – 23,3%.

Для одинадцятикласників застосовувалася методика розв’язування стереометричних задач на тему «Піраміда» з використанням програми GeoGebra 3D Calculator в освітньому процесі.

Під час вивчення теми «Піраміда» мобільний додаток GeoGebra 3D Calculator спрощував роботу учням, дозволяв виконувати креслення більш чіткіше, точно та акуратно. Також заощаджував час для розв’язування більшої кількістю задач різних типів і рівнів складності, підвищуючи інтерес учнів до вивчення даного матеріалу.

У таблиці 2.5.2 представлено результати контрольної роботи учнів 11 класу після використання розробленої методики.

Таблиця 2.5. 2

Клас	К-сть учнів	Високий рівень			%	Достатній рівень			%	Середній рівень			%	Початковий рівень			%
		12	11	10		9	8	7		6	5	4		3	2	1	
11	30		2	6	26,7	10	4	4	60	4			13,3				

За результатами успішності учнів після контрольної роботи маємо:

- достатній рівень - 60%;
- високий рівень – 26,7%.

Підсумовуючи дані з таблиць, бачимо, що використання програмного забезпечення сприяло підвищенню рівня успішності учнів 11 класу.

Порівнюючи результати контрольної роботи та підсумки *I* чверті 2024-2025 навчального року, можна зробити висновок, що високий рівень збільшився на 3,4% з 23,3% до 26,7% і достатній рівень збільшився на 3,4% з 56,6% до 60%;

ВИСНОВКИ

Магістерська робота присвячена дослідженню методики розв'язування стереометричних задач у профільних класах.

Розділ стереометрія є важливим і складним розділом у геометрії. Оскільки розв'язування стереометричних задач потребує розвиненої просторової уяви, креслярських навичок та знань з курсу планіметрії.

Тема магістерської роботи є актуальною у шкільному курсі геометрії. Розв'язуючи стереометричні задачі, в учнів розвивається просторове мислення, математична компетентність, уява. Володіючи стереометричними знаннями, учні можуть легко вирішити повсякденні проблеми, перетворюючи їх на математичні моделі. Отже, розділ «Стереометрія» повинен бути досконало опрацьований у курсі геометрії 10-го та 11-го класу.

Перевірка ефективності дослідження, що проводилась серед учнів 11-го класу показала позитивний результат запропонованої методики викладання стереометрії, спрямованої на формування у здобувачів освіти навичок та вмінь розв'язувати стереометричні задачі.

Для досягнення поставленої мети було проведено аналіз науково-теоретичної літератури, підручників, посібників та статей по темі дослідження. Проаналізовано програму з математики профільного рівня щодо вивчення розділу стереометрія та частково у середній та початковій школі. Підібрано і розв'язано безліч задач по темі дослідження. Розроблено конспекти уроків для 10-го, 11-го класу профільного рівня, підготовлено контрольну роботу, яка може бути використана для контролю знань.

На прикладі задач, показано практичне використання мобільного застосунка GeoGebra 3D Calculator.

Підсумувавши результати виконаної магістерської роботи, можна використати вислів Ж. Пуанкаре: «*Стереометрія вчить нас бачити світ об'ємним, мислити в трьох вимірах і знаходити рішення там, де на перший погляд немає можливостей*».

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабенко С. П. Усі уроки геометрії. 11 клас. Академічний рівень. Харків: Вид. група «Основа», 2012. 299 с.

2. Барболіна А. С. Вивчення «Стереометрії» у старшій школі на профільному рівні. Івано-Франківськ: ХДУ, 2022. 71. URL: https://ekhsuir.kspu.edu/bitstream/handle/123456789/16721/Barbolina_fknfm_2022.pdf?sequence=1

3. Бевз Г. П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

4. Бевз Г. П. Геометрія: підруч. для учнів 10-11 класів з поглибленним вивченням математики. Київ: Освіта, 2000. 239 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2018. 272 с.: іл.

6. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 11 кл. для загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2011. 336 с. : іл.

7. Віршики до початку уроку. URL: https://vseosvita.ua/library/embed/01001l3t-7fcb.docx.html

8. Долюк Д. А., Порхун А. О. Створення інтерактивних моделей у середовищі GeoGebra. 62 с. URL: https://likt.edu.vn.ua/uploads/user/files/instructions/geogebra_doluk_porhun.pdf

9. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 288 с. : іл.

10. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2020. 240 с. : іл.

11. Істер О. С. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 368 с. : іл.

12. Істер О. С. Геометрія: (проф. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 288 с. : іл.

13. Капіносов А. М., Білоусова Г. І., Гап'юк Г. В., Кондратьєва О. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА. Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. 528 с.

14. Каплун О. І. Математика: навчально-практичний довідник. Харків: Торсінг плюс, 2012. 256 с.

15. Карпік В. В. Геометрія. 10 клас: Профільний рівень. І семестр. Харків: Вид. група «Основа», 2017. 104 с.

16. Карпік В. В. Геометрія. 10 клас: Профільний рівень. ІІ семестр. Харків: Вид. група «Основа», 2017. 120 с.

17. Карпік В. В. Геометрія. 11 клас: Профільний рівень. І семестр. Харків: Вид. група «Основа», 2019. 104 с.

18. Карпік В. В. Геометрія. 11 клас: Профільний рівень. ІІ семестр. Харків: Вид. група «Основа», 2020. 122 с.

19. Концепція профільного навчання в старшій школі. *Освіта України*. 2003. № 42-43. С. 8-9.

20. Корнієнко Т. Л., Фіготіна В. І. Геометрія. 10 клас. Профільний рівень: розробки уроків. 2-ге вид., переробл. і доп. Харків: Ранок, 2011. 496 с.

21. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посіб. для вчителів і студентів. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.

22. Ленчук І. Г. Працьовитий М. В. Психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач. Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні науки. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Вип. 141. 113-121 с. URL: https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/24884/Lenchuk_Pratsovytyi.pdf?sequence=1&isAllowed=y

23. Міністерство освіти і науки України. URL: https://mon.gov.ua/ua

24. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Вид. 2, переробл. Харків: Гімназія, 2020. 240 с. : іл.

25. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.: іл.

26. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 204 с.: іл.

27. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 240 с. : іл.

28. Петренко С. В. Особливості навчання математики в профільній школі / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції / Петренко С. В., Мартиненко О. В. Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. 173 с.

29. Прохорова О. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи. *Математика в школах України*: *науково – методичний журнал*. 2006. №14. 213 с.

30. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 410 с.

31. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. Вид. 2, допов. і переробл. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

32. Танник Н. А. Цитати про математику / Світ математики. URL: http://matematukan.blogspot.com/p/blog-page_5.html

33. Чекова А. М. Геометрія. 7-12 класи: навч. посіб. Вид. 5, випр. і допов. Харків: Країна мрій, 2010. 120 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Конспект уроку для 10-го класу

Тема: Поняття про координатний метод. Розв'язування задач

Мета:

- *формування предметних компетентностей:* сформувати поняття про координатний метод, удосконалити вміння розв'язувати задачі координатним методом;
- *формування ключових компетентностей:* формувати вміння виділяти головне, розвивати в учнів математичну компетентність, логічне та просторове мислення, розвивати особисту думку, уяву;
- виховувати патріота України, самостійність, культуру мовлення, кмітливість, формувати інтерес до дисципліни.

Тип уроку: узагальнення і вдосконалення знань і вмінь.

Обладнання: набір для креслення.

Підручник: Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. Освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с. : іл.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Вітання вчителя з учнями:

Вчитель: Любі діти, добрий день!
Зичу праці і старання!
А ще, друзі, всім бажаю
Сил, натхнення на весь день! [7]

Підготовка до уроку, перекличка присутніх на уроці.

II. Перевірка домашнього завдання

1. Перевірка домашньої роботи за підручником.

№18.19. [27]

Розв'язування

За умовою задачі $B(x;y;z)$. Знайдемо координати кінця відрізка за формулами:

$$x_c = \frac{x_1+x}{2};\ y_c = \frac{y_1+y}{2};\ z_c = \frac{z_1+z}{2}.$$

Підставимо наші значення у дані формули:

$$1 = \frac{2+x}{2};\ 1 = \frac{3+y}{2};\ 1 = \frac{-1+z}{2}.$$

Звідси маємо:

$$2 = 2 + x;\ 2 = 3 + y;\ 2 = -1 + z.$$

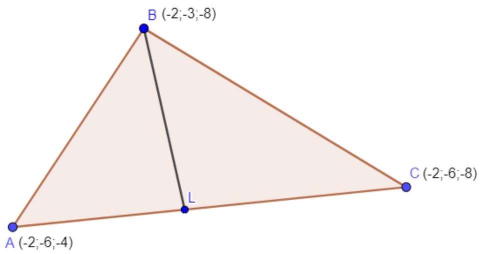
$$x = 0;\ y = -1;\ z = 3.$$

Отже, координати кінця відрізка $B(0;-1;3)$.

2. Виконайте завдання:

№1. Знайдіть довжину бісектриси BL трикутника ABC, якщо $A(-2;-6;-4), B(-2;-3;-8), C(-2;-6;-8)$.

Розв'язування



Мал. А. 1

За властивістю бісектрис трикутника: $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$

$AB = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-3-(-6))^2 + (-8-(-4))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$BC = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-6-(-3))^2 + (-8-(-8))^2} = \sqrt{9} = 3.$

$\frac{AL}{LC} = \frac{5}{3}.$

Нехай $L(x;y;z)$.

$x = \frac{-2+\frac{5}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = -2;\ y = \frac{-6+\frac{5}{3}\cdot(-6)}{1+\frac{5}{3}} = \frac{-16}{\frac{8}{3}} = -6;\ z = \frac{-4+\frac{5}{3}\cdot(-8)}{1+\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{52}{3}}{\frac{8}{3}} = -\frac{13}{2}.$

$L(-2;-6;-\frac{13}{2}).$

$BL = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-3-(-6))^2 + (-8-\left(-\frac{13}{2}\right))^2} = \sqrt{9+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

Відповідь: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

III. Актуалізація опорних знань

Учні відповідають на запитання вчителя.

Фронтальне опитування

1) Що таке прямокутна система координат у просторі? *(Це три взаємно-перпендикулярних координатних площини, утворених трьома координатними прямими Ox, Oy, Oz).*
2) Як визначити координати точки у просторі? *(Координати точки в просторі визначаються трьома числами (x, y, z), які відповідають її положенню вздовж осей X, Y і Z в декартовій системі координат).*
3) Запишіть формули для координат середини відрізка через координати його кінців. ($x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_c = \frac{y_1+y_2}{2}$; $z_c = \frac{z_1+z_2}{2}$).

IV. Узагальнення та поглиблення знань

Бесіда вчителя з учнями.

Фронтальна бесіда

1) Поняття про координатний метод розв'язування задач.

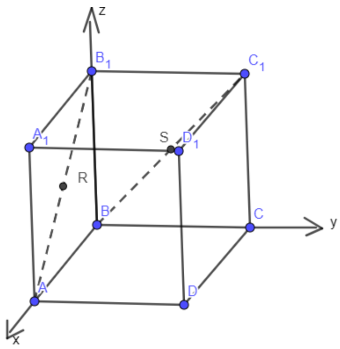
Координатний метод розв'язування задач полягає у використанні системи координат для алгебраїчного опису геометричних об'єктів і відношень між ними, що дозволяє перетворювати геометричні задачі на алгебраїчні, розв'язуючи їх за допомогою рівнянь і координат точок.

Координатний метод особливо ефективний, коли фігура містить прямі кути або може бути легко приведена до такої форми. Це пояснюється тим, що прямі кути спрощують обчислення відстаней, кутів і координат точок, оскільки координати стають орієнтованими вздовж осей, що значно полегшує розв'язування задач.

V. Застосування знань і вмінь

Робота в малих групах

№1. Точки P і Q – середини відповідно ребер AB і B_1C_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки R і S – середини відповідно діагоналей AB_1 і BC_1 граней AA_1B_1B і BB_1C_1C цього паралелепіпеда, $AB = BC = l$, $AA_1 = 2AB$. Довести, що відрізки PQ і RS перетинаються і точкою перетину ділять навпіл.



Мал. А. 2

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед,

$$AB = BC = l, AA_1 = 2AB.$$

Довести, що PQ і RS перетинаються і точкою перетину ділять навпіл.

Доведення

Побудуємо прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у прямокутній системі координат з вершиною B у початку відліку. Запишемо координати точок: $A(l;0;0), B(0;0;0), B_1(0;0;2l), C_1(0;l;2l)$.

Знайдемо координати точок за формулою координат середини відрізка: $P\left(\frac{l}{2};0;0\right), Q\left(0;\frac{l}{2};2l\right), R\left(\frac{l}{2};0;l\right), S\left(0;\frac{l}{2};l\right)$.

Знайдемо координати середини відрізка PQ: $O_1(\frac{l}{4};\frac{l}{4};l)$.

Знайдемо координати середини відрізка RS: $O_2(\frac{l}{4};\frac{l}{4};l)$.

Отже, відрізки PQ і RS мають спільну точку з координатами $O(\frac{l}{4};\frac{l}{4};l)$ в якій перетинаються.

Знайдемо довжини відрізків:

$$PO = \sqrt{\frac{l}{4}^2 + \frac{l}{4}^2 + l^2} = \frac{l}{4}\sqrt{21};$$

$$QO = \sqrt{\frac{l}{16}^2 + \frac{l}{4}^2 + l^2} = \frac{l}{4}\sqrt{21}.$$

Отже, $PO = QO$.

$$RO = \sqrt{\frac{l}{4}^2 + \frac{l}{16}^2 + 0} = \frac{l}{4}\sqrt{5};$$

$$SO = \sqrt{\frac{l}{16}^2 + \frac{l}{4}^2 + 0} = \frac{l}{4}\sqrt{5}.$$

Отже, $RO = SO$.

Відрізки PQ і RS перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Доведено.

VI. Підсумки уроку

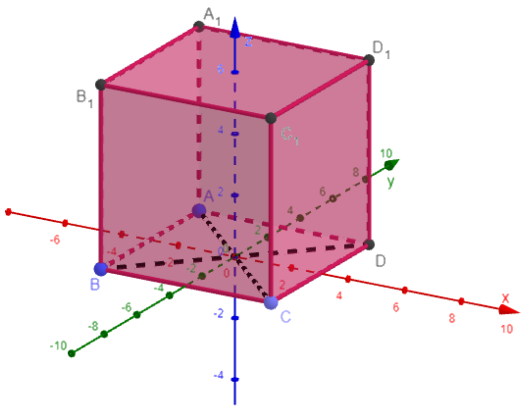
Дайте відповідь на запитання

1. Яка система координат найчастіше використовується? *(Декартова система координат $(x; y; z)$).*
2. Які задачі найзручніше розв'язувати координатним методом? *(Задачі, що включають фігури з прямими кутами або простими симетріями).*

VII. Домашнє завдання

1) Повторити теоретичний матеріал за параграфом 18.
2) Виконати вправу №18.26.

Відповідь:



Мал. А. 3

Запишемо координати вершин куба: $B(-3; -3; 0)$, $D(3; 3; 0)$, $C(3; -3; 0)$.

Знайдемо довжину ребра куба:

$$AD = \sqrt{(-3-3)^2 + (3-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6.$$

Запишемо координати наступних вершин куба: $C_1(3; -3; 6), B_1(-3; -3; 6), A_1(-3; 3; 6), D_1(3; 3; 6)$.

ДОДАТОК Б

Конспект уроку для 11-го класу

Тема: Об’єм циліндра

Мета:

- *формування предметних компетентностей:* домогтися засвоєння формули для обчислення об’єму циліндра;
- *формування ключових компетентностей:* розвивати в учнів математичну компетентність, логічне та просторове мислення, розвивати особисту думку, уяву;
- виховувати патріота України, самостійність, культуру мовлення, кмітливість, формувати інтерес до дисципліни.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Обладнання: моделі циліндрів.

Підручник: Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 204 с. : іл.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Привітання вчителя з учнями, перекличка присутніх у класі. Підготовка учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання

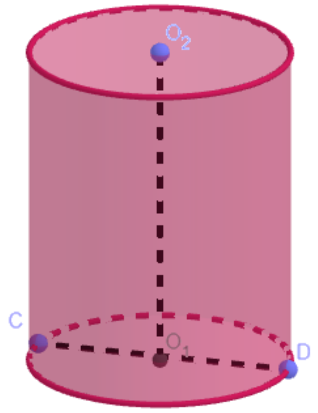
Вчитель збирає зошити деяких учнів для перевірки й оцінювання домашньої самостійної роботи. У разі необхідності здобувачі освіти отримують правильно виконані вправи для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Щоб спонукати учнів усвідомити важливість вивчення нового матеріалу, можна запропонувати їм розв'язати задачу практичного характеру.

Задача. Силос для зберігання піску має форму циліндра. Його висота становить 6,5 м, а діаметр основи – 3,2 м. Скільки тонн піску може вмістити силос, якщо маса 1 м^3 піску дорівнює 1,4 т?

Розв'язування



Мал. Б. 1

Дано: $O_1O_2 = H = 6{,}5$ м, $CD = d = 3{,}2$ м, $m_1 = 1{,}4$ т.

Знайти m.

Розв'язування

$$V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H$$

$R = \frac{d}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$ (м).

$V_{\text{ц}} = 3{,}14 \cdot 1{,}6^2 \cdot 6{,}5 \approx 52{,}25$ м^3.

$m = m_1 \cdot V_{\text{ц}} = 1{,}4 \cdot 52{,}25 = 73{,}15$ (т).

Відповідь: $73{,}15$ т.

Після розв'язування задачі, здобувачі роблять висновок, що, для того щоб дати відповідь на запитання задачі, необхідно обчислити об'єм циліндра. Таким чином, основним завданням уроку – засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1) Як називається многокутник, вписаний у коло? *(Якщо його вершини лежать на колі).*
2) Як називається многокутник, описаний навколо кола? *(Існує коло, що дотикається до всіх сторін многокутника).*
3) Яку призму називають вписаною у циліндр та описаною навколо циліндра? *(Вписаною призмою в циліндр називають, коли площини основ призми є площинами основ циліндра, а бічні ребра призми – твірними циліндра. Описаною - площини основ призми є площинами основ циліндра, бічні грані дотикаються до даного циліндра).*
4) Напишіть формулу для обчислення об'єму призми. ($V_{\text{призми}} = S_{\text{основи}} \cdot H$).

Виконання усних вправ

1) Висота прямої призми, яка вписана у циліндр – 6 см. Знайдіть висоту циліндра. *(Їхні висоти рівні –* 6 *см).*
2) Чому дорівнює об’єм правильної чотирикутної призми, яка вписана в циліндр, радіус основи якого – 1 см, а висота дорівнює – 4 см? *(*8 *см*^{2}*).*

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1) Виведення формули для обчислення об’єму циліндра

Площа поверхні циліндра складається з площі бічної поверхні та площі двох основ. Нагадаємо, що площа бічної поверхні циліндра шукається за формулою: $S_{\text{біч.цил.}} = 2\pi RH$, де R – радіус основи циліндра, H – висота циліндра.

Об'єм циліндра можна знайти, як добуток площі основи на висоту. Це узагальнена формула для об'ємів призматичних тіл:

$$V_{\text{циліндра}} = S_{\text{основи}} \cdot H = \pi R^2 H.$$

VI. Формування вмінь

Виконання письмових вправ з підручника

№16.2 [26]

Розв’язування

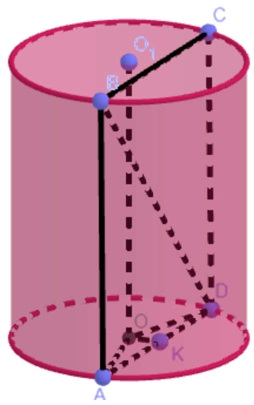
За умовою задачі, відомо, що $V_{\text{ц}} = 98\pi$ см^3, $R = 7$ см. Знайти висоту - H. Запишемо формулу для обчислення об’єму циліндра: $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$. Підставимо відомі значення у формулу:

$$98\pi = 49\pi H;$$

$$H = \frac{98\pi}{49\pi} = 2 \text{ см}.$$

Відповідь: 2 см.

№16.30 [26]



Мал. Б. 2

Дано: $OK = 12$ см, $BD = 10\sqrt{5}$ см, $OA = 13$ см.

Знайти $V_ц$.

Розв'язування

$$V_ц = \pi R^2 H$$

ΔAOD – рівнобедрений ($OA = OD$ – як радіуси кола).

За властивістю рівнобедреного трикутника: OK – висота, медіана, бісектриса.

З ΔAKO ($\angle K = 90°$): $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ см.

$$AD = 2AK = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см.}$$

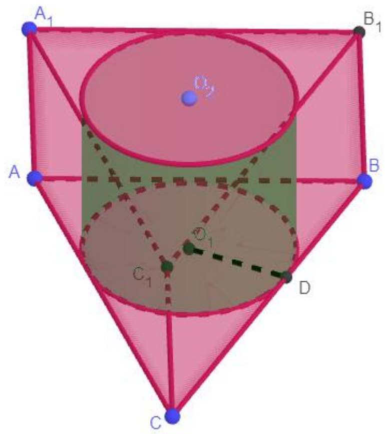
З ΔABO ($\angle A = 90°$): $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 10^2} = \sqrt{500 - 100} = \sqrt{400} = 20$ см.

$H = AB, R = OA.$

$V_ц = \pi \cdot 13^2 \cdot 20 = 3380\pi$ см^3.

Відповідь: 3380π см^3.

№16.59 [26]



Мал. Б. 3

Дано: $V_{призми} = V$.

Знайти $V_ц$.

Розв'язування

Нехай $AC = a$.

$$V_{призми} = S_{\Delta ABC} H$$

ΔABC – рівносторонній, $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H \Rightarrow a^2 = \frac{4V}{\sqrt{3}H} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4V}{\sqrt{3}H}}$.

$$S_{\Delta ABC} = pr = 3a \cdot r.$$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a \cdot r \Rightarrow r = \frac{a^2\sqrt{3}}{12a} = \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{\frac{4V}{\sqrt{3}H}} \cdot \sqrt{3}}{12}$.

$$V_ц = \pi r^2 H = \pi \left(\frac{\sqrt{\frac{4V}{\sqrt{3}H}} \cdot \sqrt{3}}{12} \right)^2 H = \pi \cdot \frac{\frac{4V}{\sqrt{3}H} \cdot 3}{12^2} \cdot H = \pi \cdot \frac{4V \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 12 \cdot 12} = \frac{V}{12\sqrt{3}} \pi.$$

Відповідь: $\frac{V}{12\sqrt{3}}\pi$.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1) Запишіть формулу для обчислення об’єму циліндра.
2) Сформулюйте правило обчислення об’єму циліндра.

VIII. Домашнє завдання

1) Повторити параграф 3.
2) Виконати вправи №16.3, №16.60.

Відповіді: 6 см, 28π см^3.

ДОДАТОК В

Контрольна робота для 11 класу

Тема. Об'єми многогранників

ВАРІАНТ 1

1. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 1000 см^3.

А	Б	В	Г
600 см^2	200 см^2	400 см^2	100 см^2

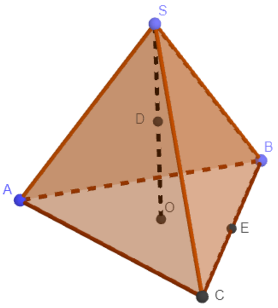
2. Сторони прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють 5, 6, 7 см. Знайдіть його об'єм.

А	Б	В	Г
18 см^3	210 см^3	154 см^3	72 см^3

3. Основою піраміди є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота її – 5 см.

А	Б	В	Г
20 см^3	60 см^3	30 см^3	120 см^3

4. На мал.В.1 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, сторона основи якої дорівнює $\sqrt{3}$, а бічне ребро – 2. Точки D і E є серединами висоти SO і ребра BC відповідно. Установіть відповідність між пірамідою (1-4) та її об'ємом.



Мал. В. 1

1	$DCEO$	А	$\frac{1}{4}$
2	$DABC$	Б	$\frac{3}{8}$
3	$SBCO$	В	$\frac{1}{8}$

4	$SBEO$	Г	$\frac{1}{16}$

Відповіді: 1-Г, 2-Б, 3-А, 4-В.

5. Діагоналі основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і $8\sqrt{3}$ см відповідно. Одна з бічних граней піраміди утворює з площиною більшої основи кут $45°$. Знайдіть об'єм цієї зрізаної піраміди.

ВАРІАНТ 2

1. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 384 см^3.

А	Б	В	Г
512 см^2	64 см^2	24 см^2	128 см^2

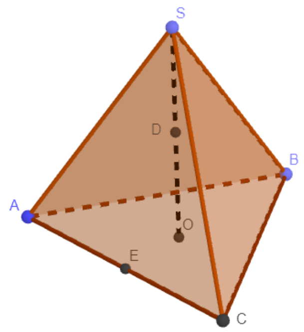
2. Сторони прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють 3, 8, 10 см. Знайдіть його об'єм.

А	Б	В	Г
84 см^3	268 см^3	240 см^3	21 см^3

3. Основою піраміди є трикутник, одна зі сторін становить 6 см, висота, проведена до даної сторони – 4 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота її – 4 см.

А	Б	В	Г
56 см^3	84 см^3	168 см^3	28 см^3

4. На мал.В.2 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, висота дорівнює $\sqrt{3}$, а бічне ребро – 3. Точки D і E є серединами висоти SO і ребра AC відповідно. Установіть відповідність між пірамідою (1-4) та її об'ємом.



Мал. В. 2

1	$SACO$	А	$\frac{3}{4}$
2	$DABC$	Б	$\frac{3}{8}$
3	$SAEO$	В	$\frac{9}{4}$
4	$DCEO$	Г	$\frac{3}{2}$

Відповіді: 1-Г, 2-В, 3-А, 4-Б.

5. Діагоналі основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють $\sqrt{6}$ см, проведена апофема – 6 см. Одна з бічних граней піраміди утворює з площиною більшої основи кут $30°$. Знайдіть об'єм цієї зрізаної піраміди.

ДОДАТОК Г

Контрольна робота для 11 класу

Тема. Піраміда

ВАРІАНТ 1

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 6 см. Довжина кожного бічного ребра становить 5 см. Знайти висоту піраміди.
2. У правильній чотирикутній піраміді кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайти висоту піраміди, якщо сторона основи дорівнює 12 см.
3. Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 4 см і 3 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнюють 10 см. Знайти площу діагонального перерізу цієї піраміди.

ВАРІАНТ II

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 10 см. Довжина кожного бічного ребра становить 13 см. Знайти висоту піраміди.
2. У правильній чотирикутній піраміді кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайти висоту піраміди, якщо сторона основи дорівнює 6 см.
3. Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 см і 5 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнюють 20 см. Знайти площу діагонального перерізу цієї піраміди.