РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та методики її навчання

«До захисту допущено»
Завідувачка кафедри
________ Наталія Генсіцька-Антонюк
«______»___________________2025р.
протокол №

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВІДШУКАННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ

Виконала:
здобувачка другого (магістерського)
рівня вищої освіти
групи М-М-21 спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Богдана ПРИМАК

Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Наталія СИНІЦЬКА

Рівне – 2025

АНОТАЦІЯ

Примак Б. Методика розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого. – Кваліфікаційна робота на правах рукопису.

Кваліфікаційна (магістерська) робота на здобуття освітнього ступеня «магістр» за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). – Рівненський державний гуманітарний університет, Кафедра математики та методики її навчання. Рівне, 2025 р.

У роботі розглянуто методичну характеристику для шкільного курсу стереометрії та методи розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень; методику використання інтернет сервісу $Math10$ для розв’язування стереометричних задач. Теоретично обгрунтовано методи розв’зування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень. Розроблено варіативний курс «Розв’зування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень». Проведено аналіз результатів педагогічного експерименту.

У висновках представлені підсумки дослідження. Отримані результати педагогічного експерименту, що підтверджують ефективність запропонованої методики, можуть бути використані вчителями математики, студентами – практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами математичного факультету під час самостійної роботи.

Результати дослідження пройшли апробацію на науково-практичних конференціях і висвітлені у публікаціях.

Ключові слова: задача, стереометричні задачі, найбільше та найменше значення.

ANNOTATION

Primak B. Methodology for solving stereometric problems to find the largest and smallest. – Qualification work in the form of a manuscript.

Qualification (Master's) thesis for the degree of "Master" in the specialty 014 Secondary Education (Mathematics). - Rivne State Humanitarian University, Department of Mathematics and Methods of Its Teaching. Rivne, 2025.

The paper considers a methodological characteristic for a school course in stereometry and methods for solving stereometric problems to find the largest and smallest values; a methodology for using the $Math10$ Internet service for solving stereometric problems. The methods of solving stereometric problems for finding the largest and smallest values are theoretically substantiated. A variational course "Solving stereometric problems for finding the largest and smallest values" is developed. The results of a pedagogical experiment are analyzed.

The conclusions present the results of the study. The obtained results of the pedagogical experiment, confirming the effectiveness of the proposed methodology, can be used by mathematics teachers, student interns in preparation for lessons, and students of the Faculty of Mathematics during independent work.

The results of the study were tested at scientific and practical conferences and published.

Keywords: problem, stereometric problems, largest and smallest value.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Щорічні звіти результатів проведення державних підсумкової атестації у формі НМТ зазначають дуже низький рівень знань стереометричних задач. Мало хто взагалі береться розв'язувати такі завдання, більшість вважає їх нерозв'язуваними. Це свідчить про серйозні проблеми у навчанні стереометрії в школі.

Вивчення стереометрії має ряд особливостей: учням потрібно запам'ятати багато фактів, які потребують детального формулювання; освоїти математичну мову і символіку; оформляти розв'язки задач, спираючись на лаконічні пояснення і грамотні посилання на означення та теореми; малювати малюнки до задач.

Виходячи із сутності стереометричних задач, навчання їх розв'язувати - це узагальнення і систематизація навчального досвіду учнів. Методам і прийомам розв'язування геометричних задач присвячені дослідження В. Г. Бевз, М. Я. Ігнатенка, Ю. І. Мальованого, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця та ін. Одним із засобів цілеспрямованої організації цього процесу є планомірне знайомство учнів з системою методів вирішення завдань.

Однією з найцінніших сторін таких завдань є те, що вони розвивають пошукові вміння вирішення практичних проблем, залучають до важких самостійних досліджень, сприяють виробленню конкретних геометричних уявлень, а також ретельнішій обробці умінь і навичок. А це у свою чергу посилює політехнічну та прикладну спрямованість навчання геометрії. Завдання на побудову не допускають формального до них підходу, є якісно новою ситуацією застосування вивчених теорем і таким чином дають можливість здійснювати проблемне повторення. Такі задачі є причиною для близьких стосунків між новими ідеями шкільного курсу геометрії (перетвореннями, векторами).

Мета дослідження: розроблення ефективної методики розв'язання стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень.

Відповідно до даної мети дослідження сформулювати такі **завдання**:

1. Визначити теоретичні засади вивчення стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень.

2. Провести аналіз підручників, наукових робіт за тематикою стереометричні задачі на відшукання найбільшого і найменшого значень.

3. Дослідити особливості навчання стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень.

4. Розробити програму варіативного курсу «Розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень».

5. Здійснити аналіз експериментальної перевірки ефективності використання розробленої методики.

Об'єкт дослідження: процес навчання учнів розв'язуванню стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень.

Предмет дослідження: методи розв'язання стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень.

Відповідно до мети та завдань дослідження було використано комплекс **методів дослідження:**

– *теоретичних:* аналіз першоджерел з проблеми дослідження навчальних програм, підручників і посібників; проектування навчального процесу, орієнтованого на формування компетентностей учнів; з'ясування педагогічних умов, що забезпечать ефективність розробленої методики;

– *емпіричних:* вивчення та аналіз; спостереження за дітьми на уроках математики, анкетування, опитування, діагностування, проведення педагогічного експерименту для перевірки ефективності розробленої методики;

– *статистичних:* статистична оцінка ефективності впровадженої методики.

Практичне значення: кваліфікаційної роботи полягає в тому, що складено систему прикладних стереометричних задач, які можуть бути корисними вчителям математики під час проведення уроків геометрії, а також викладачам закладів вищої та фахової передвищої освіти під час викладання математичних дисциплін, студентами – практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами математичного факультету під час самостійної роботи.

Апробація результатів дослідження. Результати кваліфікаційної роботи пройшли апробацію на 3 Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції IMPACT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND OTHER TECHNOLOGIES ON SUSTAINABLE DEVELOPMENT листопад 2025 р. м. Дніпро (Додаток В).

Структура та обсяг роботи: визначена логікою та послідовністю вирішення поставлених завдань у дослідженні. Кваліфікаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (50 найменувань) та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВІДШУКАННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ

1.1 Методична характеристика стереометрії для шкільного курсу геометрії.

Вирішення будь-якої стереометричної задачі вимагає не лише логічних навичок, вміння зображати просторову фігуру на площі, просто обчислювати на аркушах паперу та класних дошках, які, по суті, тісно пов'язані з темою «Геометрія на площині», стереометрія задач для обчислень та доказів вимагає вирішувати приклади за допомогою правильних малюнків просторових фігур або ІКТ-засобів.

1. Більшість завдань курсу зводиться до розв'язання задач з планіметричному рішенню, відповідно, всі недоліки в планіметричному рішенні відчуваються і по стереометричному рішенню. Таким чином, щоб успішно вивчити стереометрію, вчителю потрібно постійно повернутися до планіметричного матеріалу; Перед дослідженням цієї чи іншої теореми необхідно повторювати необхідні планіметричні дані.

2. Стереометрія має інший підхід до геометрії. якщо планіметрія використовує креслення, які показують явне уявлення про об'єкт, стереометрія не використовує креслярських інструментів, які дозволяють малювати просторову фігуру. Тут йдеться не про сам об'єкт, а просто про його зображення. Кожна стереометрія - одночасно завдання побудови образу фігури за допомогою властивостей паралельних проекцій. Для цього у учнів потрібно набагато більше зусиль, ніж їх вимагають при вирішенні завдань планування.

3. Цей курс стереометрії розглядає логічну сторону виконуваних умов, потрібно доводити кожне своє висловлювання, чітко встановивши причини цього.

4. Програма стереометрії дозволяє подолати матеріал швидше, ніж планіметрія. У цьому вся періоді вирішення завдань вимагає значно більше, і, суттєве місце займає і

самостійна робота школярів. Необхідно ретельно підібрати завдання на занятті – включити найнеобхідніше.

5. Практика стереометрії побудована аксіоматично. Для вивчення стереометрії аксіоми необхідно вирішити два основні методичні завдання:

1) переформулювати планіметрію простору, деякі з яких потрібно уточнити. Тут, фактично, під дією домовленості між викладачем та учнем, буде запроваджено нову асоціацію: «Всі аксіоми Планіметрії виконуються в будь-якій площині простору».

2) Наводити нові спеціальні аксіоми простору, що на перших стадіях дослідження ілюструються моделями, стереометричними ящиками, малюнками, геометрією класних кімнат. У цьому з'являється можливість ефективніше з'ясувати учням сутність аксіоми та її у побудові геометрії [11,15,21].

Формування просторового уявлення відбувається у кількох етапах і складається з:

- здатності уявити цілісний образ геометрії, взаємне становище елементів її;
- здібності подумки змінювати стан геометрії - дивитися на інший бік
- здібності подумки розчленовувати фігуру, створити новий предмет;
- здатності зображати фігуру малюнку, відповідним чином відбивати відносини;
- здатності зображати фігуру малюнку, відповідним образам відбивати взаємовідносини;
- вміння подати фігуру на основі її словесного опису тощо.

На I етапі на наочній основі формуються передумови створення цілісного образу фігури із її істотних ознак. На цьому етапі вчитель повинен широко використовувати моделі, реальні об'єкти навколишнього світу. Після цього будується креслення, яке закріплює розгляд відповідної геометричної конфігурації.

Наприкінці I етапу та на II у школярів формуються образи фігур та їх комбінацій, які вони можуть уявити у майже незмінених умовах.

На II етапі роль моделей дещо зменшується, тому що в іншому випадку у школярів буде гальмуватися розвиток здібностей уявно уявляти особливостірозташування фігури та її елементів.

При побудові креслення на цих етапах вчителю годі відразу демонструвати готовий креслення, а намагатися його виконувати поступово разом із учнями з метою поетапного сприйняття чи просторових образів.

III етап оволодіння вмінням оперувати образами у змінених умовах. Школярі спочатку працюють з основним кресленням, який однак часто не дає змоги побачити особливості розташування фігури з різних позицій. Тому креслення, зазвичай, має підкріплюватися розглядом відповідної моделі. Демонстрація супроводжується спеціально підібраними питаннями [32].

Наприклад: Які фігури можуть вийти при перетині тетраедра площини? Покажіть на моделях та кресленнях різні ситуації. Відповідь - обґрунтуй. Схема створення просторового уявлення на етапі: модель уявлення креслення. III етап. Учасники повинні самостійно збудувати стереометрію об'єктів з урахуванням раніше сформульованих уявлень про стереометрію. У цьому випадку немає креслення та заздалегідь підготовленої моделі, і можна ставити лише вчителям питання щодо уточнення розташування фігур. Схема IV етапу: представлення схеми. Уявна побудова є формальним логічним методом побудови простору, відмовившись від реальної побудови за допомогою інструментів, виконаних хіба що свідомо, малюнок супроводжується ними суто ілюстративним характером. На математичному рівні стереометрія сприймається як завдання доказу існування фігур щодо деяких певних умов. Сам доказ у тому, щоб звести процес побудови постатей та його поєднань до кінцевого числа основних конструкцій, визначених аксіомічно. І тут рішення докази може бути супроводжена малюванням. Вчитель вчить учнів ряд проблем, які виникають при виконанні будівель у просторі, не можна будувати площини, багатогранники тощо. Таким чином, потрібно точно погодитися, що означає виконання тієї чи іншої будівлі. На малюнку проекційного чорта задаються точки, прямі разом з їхньою проекцією на якусь площину, яку називають основним. Проекційний малюнок дозволяє конструктивним засобам будувати точку та лінію перетину фігур, зображених на ньому. Вони дуже важливі для того, щоб розвивати просторову уяву школярів. Рекомендується знайомити школярів 10 класу із паралельним проекційним малюнком його властивості. Тут викладач підводить учнів до висновку, що фігура малюнку може задатися її проекціями малюнку. Причому, якщо точки чи фігури збігаються з їхніми проекціями, то точка чи фігурка знаходиться на проекціях. Проекційне зображення можна ілюструвати моделлю паралельного типу, в якій проекційна основа є площиною нижньої основи, напрямок проекту визначається ребрами бічного кріплення, проекційна основа є нижньою основою [5].

У той час як геометрія в цілому переживає певний кризис, пов’язаний з глибокою перебудовою всієї математичної науки, один досить вузький розділ елементарної геометрії безперечно находиться сьогодні на підйомі - це вчення про так званих «геометричних «екстремальних задачах», тобто про задачах пов'язаних із відшуканням найбільших та найменших значень геометричних величин і зі знаходженням чисельних. Тобто відмінним нестандартністю умов задач і методів їх вирішення (упорядники запропонованих на математичних змаганнях завдань повинні прагнути виключити можливість того, що хтось із учасників змагання вже раніше зустрічався зі подібним завданням або з міркуванням, близьким до міркування, що приводить до вирішення задачі).

Математичний термін «екстремум» поєднує поняття найбільшого значення, або «максимуму», та найменшого значення, або «мінімуму»; тому «екстремальні завдання» - це завдання на відшукання максимумів і мінімумів (тобто найбільших n найменших значень), оцінок, що ставлять за мету розпізнавання в будь-якому сенсі «вигідних» чи «економічних» геометричних змін.

Тематика цього роду породила у повоєнні роки навіть цілі великі напрямки, свого роду науки, такі як «дискретна геометрія» або «комбінаторна геометрія», яку сміливо можна назвати «елементарною геометрією другої половини XX століття». Інтерес до геометричних екстремальних завдань природно пов'язати з розквітом тих напрямів математики, які належать до пошуку оптимальних чи економічних режимів роботи певних механізмів чи складних систем. В останні десятиліття оформився цілий ряд наукових напрямів (лінійне програмування, динамічне планування, теорія ігор, дослідження операцій, оптимальне управління, теорія інформації» тощо), які спеціально займаються завданнями такого роду; у деяких із них знаходить пряме застосування дискретної геометрії. Таким чином, збірники геометричних завдань можна було зробити яскравішими і навіть, у певному сенсі, більш науково «актуальними, різко збільшивши у них частку «екстремальних» завдань. Однак при переробці «Вибраних завдань та теорем» ряд «екстремальних» геометричних завдань, стає досить складно.

Ця обставина тісно пов'язана з зростанням роллю завдань на оцінки геометричних величин та геометричні нерівності, що кількість геометричних екстремальних завдань, що заслуговують на увагу, така, що їх доцільно розбити на два окремих розділи [34].

Формулювання деяких завдань збірника (наприклад, задач 38-42) якоюсь мірою навіяні новими напрямками математики; однак поряд з цим тут є велика кількість «класичних завдань на геометричні екстремуми», історія яких перегукується з XX столітті чи є ще давнішою (такі, зокрема, багато завдань циклу).

Добре відомо, що розв'язання «екстремальних» завдань, не в залежності від того, чи відносяться вони до арифметики, алгебри, геометрії або математичного аналізу, можуть будуватися двома принципово різними шляхами. Прямим називається такий доказ будь-якої екстремальної властивості, в якому, скажімо, певна фігура безпосередньо порівнюється з довільною іншою фігурою, що задовольняє всім умовам поставленого завдання, і показується, що перша фігура краще (або не гірше) кожної іншої.

Навпаки, непрямий доказ зводиться до міркування, показує, що це фігури, крім однієї (чи кількох), що неспроможні бути рішенням завдання, оскільки кожної такої постаті можна знайти іншу, найкращу; чим вона, звідки вже й робиться висновок про те, що розв'язанням задачі є та єдина фігура, яку ми не можемо «поліпшити» (або одна чи більше з тих кількох фігур, які не можуть бути покращені). Однак міркування такого роду містить суттєву прогалину, яка полягає в тому, що якщо наше завдання зовсім не має рішення, то отриманий цим шляхом висновок може бути помилковим; доказ існування рішення завдання вимагає використання зовсім інших міркувань, які природно віднести до топології. «молодшій сестрі» геометрії, що виникла у XX столітті і сьогодніуспішно конкурує з класичною геометрією, з якої вона виділилася [50].

Силу непрямих методів у геометричних екстремальних задачах вперше повною мірою оцінив чудовий швейцарський геометр першої половини X*I*X століття Якоб Штейнер; велике місце займали вони і у творчості сучасника Штейнера, видатного німецького аналіста Лежена Діріхле.

У другій половині X*I*X століття із різкою критикою Штейнера і Діріхле виступив знаменитий Карл Вейєрштрас; його конструктивна критика та пов'язані з нею дослідження з'явилися тим зерном, з якого згодом виросла топологія одночасно вони настільки сильно скомпрометували непрямі методи розв'язання. екстремальних геометричних проблем, що у першій половині нашого століття останні повсюдно вважалися «ненауковими» (або, у всякому разі, недостатньо суворими).

Якщо мати на увазі лише визначення поки що невідомої екстремальної фігури, то природно відкласти на подальше питання про неї існуванні; Насамперед слід поставитися. питанням у тому, у яких випадках (і як) задана постать то, можливо поліпшена. При цьому непрямий метод доказу не є цілком елементарним і чисто геометричним.

Звернемося тепер до прямого методу доказу, який у силу те, що він є прямим, представляється більш переконливим. Тут питання існування годі ставити окремо, оскільки вони автоматично вирішуються у процесі докази. Крім того, прямий доказ часто вдається звести до найпростіших пропозицій елементарної геометрії, тоді як у непрямому методі це принципово неможливо. Зате прямий доказ часто потребує більшого мистецтва; тому історично такі докази знаходилися, як правило, пізніше, коли вже були відомі менш витончені непрямі розв'язки відповідних завдань [41].

Ми настільки докладно відтворили різні думки про співвідношення прямих і непрямих методів вирішення завдань на максимум і мінімум, тому що вважаємо це питання принциповим. При цьому нам здається, що якщо говорити про майбутнє, то воно безперечно висловиться на користь непрямих методів (значення яких у сучасній прикладній математиці значно перевищує роль прямих способів). Ті міркування естетичного порядку, в яких багато авторів бачать додаткові аргументи на користь прямих методів, у жодному разі не слід брати до уваги: прямі методи «красивіші» за непрямі лише через свою більшу складність, подібно до того як старовинні, дуже вишукані методи знаходження площ криволінійних фігур здаються більш красивими, ніж автоматична процедура вирішення відповідних завдань, що витіснила їх, за допомогою інтегрального обчислення. Звичайно, складні методи, що вимагають відточеної майстерності, здаються нам красивішими за прості прийоми, пов'язані з використанням у вирішенні завдання адекватного математичного апарату; однак вони неминуче поступаються місцем цим простим прийомам.

1.2. Методи розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень.

Основне завдання стереометричного побудови на проекційних кресленнях – побудова багатогранних перерізів. Школа розглядає два методи створення перерізів: Один метод слідів, другий метод внутрішніх проектів, іноді використовується їхня комбінація.. Основний мінус цього полягає в тому, що сліди січної поверхні можуть бути віддалені від основних частин креслення, тому необхідно зменшити креслення, яке небажане. Метод зовнішнього проектування ґрунтується на відповідності точки перерізу з точки основи багатокутника. Усі конструкції всередині них, але пояснювати логіку конструкції складніше, а креслення – захаращені. Вирішення будь- якоїстереометричної задачі вимагає не просто обчислювальної та логістичної підготовки та навичок, а також умінь намалювати просторові фігурки на площині, наприклад на аркушах паперу та класних дошках, які, по суті, тісно пов'язані з темою «Геометрична побудова на площині». Стереометрія для обчислень та доказів легко вирішується за допомогою правильного малюнка просторової фігурки. Для вивчення тем «Паралельні прямі та площини у просторі», «Перпендикулярні прямі та площини», «Кути між прямими та площинами, між двома прямими, серед двома та площинами» та інших тим прекрасний ілюстративний матеріал – вирішення завдань позиційного та метричного рішення побудови просторової фігури та перерізу цих площин. Основні методи побудови багатогранних перерізів такі:

Метод сліду. Суть цього методу полягає у створенні допоміжного прямокутника, який є лінією перетину площини січної та площини будь-якої грані тіла. Найкраще побудувати зображення перетину площини січної та площини нижньої основи. Ця лінія називається слідом площини січної. За допомогою сліду можна легко будувати зображення точки сіючої площини, розташованих на бічних ребрах або гранях зображення. Після з'єднання образів цих пунктів ми отримаємо образ точки, що розшукується.

Метод додаткового перерізу. Цей спосіб побудови багатогранних перерізів є досить універсальним. У разі виявлення потрібного сліду або сліду січної поверхні за межею цей метод має певні переваги. Водночас варто пам'ятати про те, що проекти, виконані під час використання, часто виявляються «нудними». Втім, у ряді випадків метод допоміжного перерізу виявляється найоптимальнішим.

Комбінований спосіб побудови секцій. Суть комбінованої методики побудови багатогранних перерізів полягає у використанні теорем паралельності прямої та площини у просторі у поєднаннях з методом спостережень та сплесків.

Координатний спосіб побудови секцій. Суть методу координат у тому, щоб обчислити координати точок перехрестя ребер і багатогранників з рівною площею, заданої рівнянням поверхні. Рівняння перерізу площини обчислюється залежно та умовами завдання [19,27,35].

З усіх перерахованих вище методів створення перерізу найприйнятнішим є метод координат, оскільки він пов'язаний з великою кількістю обчислень, має прості алгоритми реалізації, які бажано реалізувати з використанням ВМ. Досить дізнатись координати вершини кожної грані багатогранника, а також три точки для завдання площини перерізу.

Завдання для побудови дуже складні. Є безліч алгоритмів розв'язання таких завдань. Кожен із них унікальний і кожен вимагає індивідуального погляду на рішення. Таким чином, навчитися вирішити завдання для побудови дуже складно, а може, й непросто. Однак ці завдання надають унікальну матеріальну базу для індивідуального творчого пошуку учнів шляхів для вирішення власними інтуїцією та підсвідомістю. Завдання будувати перерізи, багатогранники, вивчені на початку стереометрії у середній школі, – важливий додатковий матеріал до теоретичних матеріалів. Вирішення цих завдань сформує просторове уявлення учнів, розвиває конструктивну та логічну думку. Багаторазове використання аксіоми і теореми у процесі формування сприяє неформальному їхньому освоєнню.

Запишемо задачу методом побудови перерізів.

Задача 1. Дано куб $ABCDEFGH$. Розріжте куб площиною PQR, якщо точки P, Q, R є серединами ребер AE, AB, BC відповідно.

Цей тип завдань із позиційної стереометрії є серйозною проблемою для студентів із слабким просторовим уявою. Учні будують відрізки $PQ, QR,$ які знаходяться в січній площині, але не можуть продовжити і знайти повне рішення.

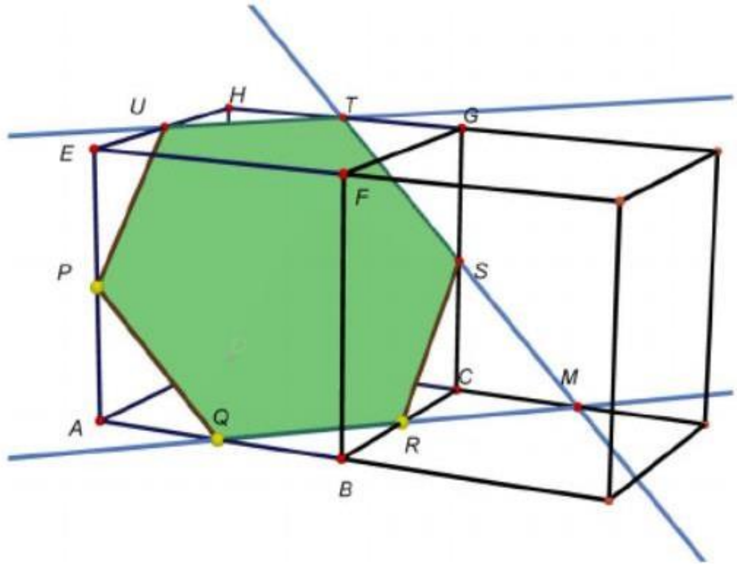


Рис.1.1

Причина проста. Точка перетину М є точкою площини CDH, але не лежить в грані куба, і учні не можуть визначити її положення. Метод «додати куб» за допомогою відповідного програмного забезпечення (наприклад, $Cabri$ $3D$ або $math10$), дозволяє нам об'єднати наступний куб з гранню падіння (мал. 1). Задача спрощується завдяки легкому локалізації точки M. Подальший крок побудови для студента простий, оскільки лінія перетину MT у задній грані $CDHG$ паралельна PQ.

<u>Задача 2.</u> Дано куб (мал.2) $ABCDEFGH$. Обчисліть відстань від точки B до площини AFH, якщо $AB = 1$.

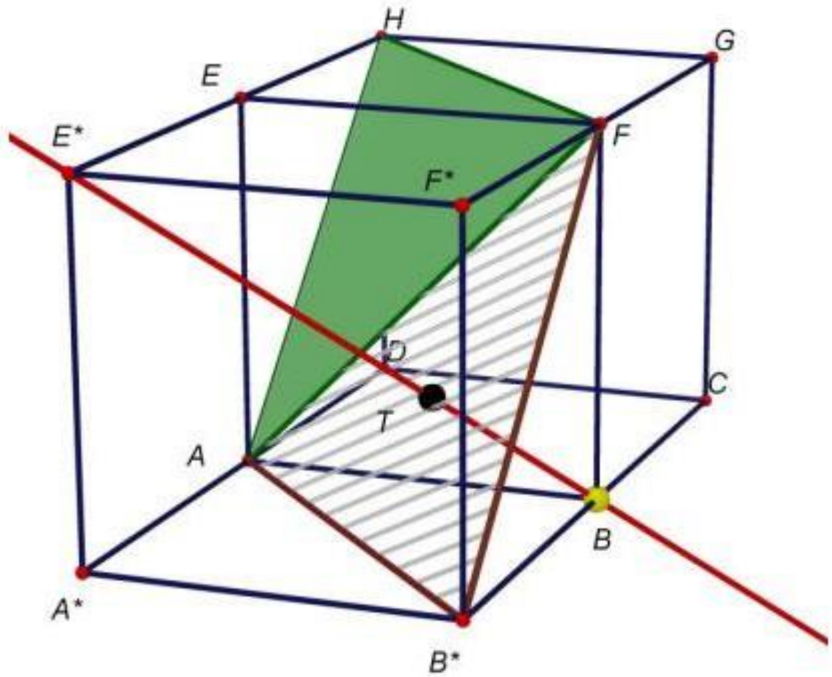


Рис.1.2

Цей вид метричних завдань можна віднести до учнів з низьким рівнем просторової уяви як най терплячий. Необхідно побудувати перпендикуляр від точки B до площини AFH. Учень повинен побудувати перетин куба – трикутника AFH і основа перпендикуляра знаходиться зовні. На основі класичного підходу до вирішення дошка може бути переплутана. Якщо ми додаємо куб за допомогою програмного забезпечення, ми побудуємо призму, заповнюємо ріжучий трикутник, щоб ромба і можна легко помітити, що перпендикуляр збігається з діагоналлю куба додавання. [5]

Задача 3. Дано куб $ABCDEFGH$. A точка P — центр грані $BCGF$, точка Q — середина ребра CD.

Обчисліть кут косих прямих AP , HQ, якщо $AB = 1$.

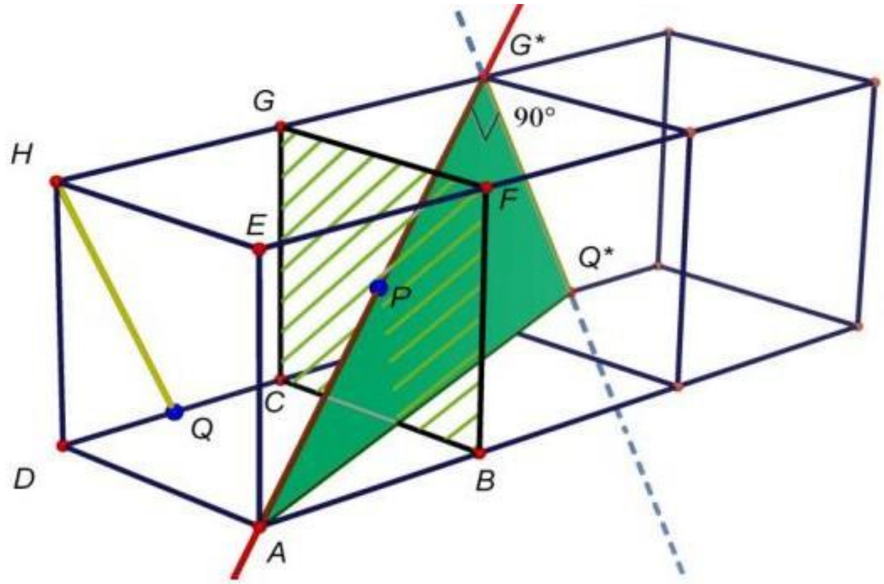


Рис.1.3

Використання представленого методу вимагає додавання двох кубів за рахунок перекосу ліній. Спрощення дійсно показове. Використання теорема Піфагора доводить, що прямі перпендикулярні.

Важливість проблеми та необхідність її розв'язання зумовили створення комплексу практичних завдань, які можуть бути використані в процесі вивчення геометрії в курсах математики рівня стандарту та профільного рівня.

1.3. Шляхи реалізації практичного спрямування курсу стереометрії

Серед напрямів, які можуть поліпшити рівень і якість шкільної математичної освіти, є підсилення її практичного і прикладного спрямування.

Практичне спрямування курсу математики передбачає вироблення в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення як самої математики, так і інших навчальних предметів, при цьому застосовувати раціональні обчислювальні прийоми; розв’язувати рівняння і нерівності, користуватися обчислювальною технікою тощо.

Прикладні задачі сприяють виконанню багатьох завдань навчального процесу. Крім попередньої підготовки учнів до свідомого дослідження реальних явищ природи, ці задачі дають можливість розкривати методологічні питання взаємозв’язку теорії і практики під час вивчення математики, формувати в учнів наукове світорозуміння. За їх допомогою вчителі можуть активізувати пізнавальну діяльність учнів, підвищити їх інтерес до навчального предмета.

Значну увагу варто присвятити прикладним задачам як одному із основних засобів реалізації прикладної спрямованості курсу стереометрії у школі. З огляду на існуючі у мовній практиці, науково-методичній літературі термінологічні розбіжності щодо поняття "прикладна задача", різні форми його визначення, уточнено таке. Задачі, які використовуються у навчальній діяльності, мають свою специфіку порівняно із задачами, що розв'язуються у науковій діяльності: мету використання, спосіб формулювання, засоби і оптимальність розв'язування, застосовність знайденого розв'язку тощо. Прикладними називаємо задачі, які виникають за межами математики, але розв'язування яких вимагає застосування математичного апарату. Прикладною задачею практичного характеру називатимемо задачу, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (його виготовленої моделі), потребує проведення геометричного експерименту, відповідних вимірювальних робіт тощо. Прикладною задачею теоретичного характеру назвемо задачу, якщо її розв'язування не пов'язане з роботою із реальним предметом або його виготовленою моделлю. Також, залежно від вимоги, поряд із прикладними задачами на обчислення, побудову виділено якісні прикладні задачі. Це задачі із вимогою пояснити, дослідити або обґрунтувати певний факт або положення дійсності із можливим, але необов'язковим виконанням обчислень, побудов тощо. Цінність таких задач, неускладнених обчисленнями, у тому, що вони дозволяють зосередитись учням на ясному та точному з'ясуванні геометричної суті аксіом, постулатів, теорем, понять та уявлень; формують в учнів геометричне мислення та інтуїцію, розуміння процесу математичного моделювання [46].

Ідеться про реалізацію прикладної спрямованості курсу математики. Прикладна спрямованість математики – це змістовний та методологічний зв'язок курсу із практикою, що передбачає формування в учнів умінь, необхідних для розв'язування засобами математики практичних задач.

Реалізація прикладної спрямованості починається із підготовчої стадії, на якій діяльність вчителя полягає у визначенні прикладно-орієнтованих цілей і планування навчальної діяльності з вивчення курсу стереометрії в конкретній навчальній групі. Її засобами є діюча програма; інформація про профіль, рівень научуваності, особливості навчальної групи; орієнтири дій із корекції планування у контексті прикладної спрямованості стереометрії та варіанти редакції цілей вивчення курсу, окремих розділів або тем.

На початковій стадії навчальна діяльність учителя безпосередньо корегується із навчальною діяльністю учнів у такий спосіб : а) розповідь вчителя про предмет стереометрії, метод, спосіб та організаційні засоби його вивчення, визначення стереометрії – сприймання учнями інформації, з'ясування ними початкових характеристик курсу, планування своєї навчальної діяльності; б) постановка вчителем цілей вивчення цього курсу – їх сприймання та усвідомлення учнями як особистісно значущих. Форма, в якій повинні бути визначені та сформульовані для учнів цілі вивчення курсу чи теми має бути рекламною. Для створення такої форми доцільно залучати комп'ютерно - комунікаційні технології. Важливо на цій стадії організувати спільну діяльність учителя та учня для з'ясування засобів досягнення поставлених цілей, аналізу можливих труднощів вивчення курсу стереометрії та способів їх подолання [3,9].

На підготовчій стадії основна робота відводиться вчителю (написання планів, створення дидактичного матеріалу, тощо).

На основній стадії реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу геометрії діють найважливіші її засоби: 1) прикладна орієнтація абстрактної частини шкільної стереометрії, залучення прикладної інформації; 2) прикладні задачі; 3) засоби наочності; 4) комп’ютерно-комунікаційні технології. Доцільним є підводити прагматичний підсумок (систематично з’ясовувати разом з учнями особистісну цінність знань, умінь та навичок, що набуті за певний період вивчення курсу чи теми).

Певна розроблена система є тим засобом, що допомагає вчителю формувати в учнів уміння виконувати загальні, спеціальні розумові дії, набувати учнями навички самостійної роботи. Це пояснюємо тим, що вона поєднує різноманітні задачі, що потребують проведення всіх або окремих етапів математичного моделювання; містять надлишкову або недостатню кількість даних для розв'язування; нерозкриту вимогу; дають можливість учням аналізувати інформацію з геометричної точки зору, усвідомлювати відмінності між об'єктом та його моделлю; формують в учнів поняття об'єму і площі поверхні та вміння їх правильно оцінювати, обчислювати; демонструють міжпредметні зв'язки та ін. Для ефективної організації навчальної діяльності учнів із розв'язування прикладних задач для вчителя визначено методичні прийоми та орієнтовні дії. Перед розв'язуванням прикладних задач доцільно: 1) з'ясувати із учнями, що таке прикладна задача, визначити етапи її розв'язування (на прикладі текстової задачі); 2) познайомити учнів із таблицею застарілих мір; 3) започаткувати ведення словника для полегшення перекладу умови прикладної задачі на мову математики (наприклад, місткість – об'єм); 4) з'ясувати доцільність додержання правил наближених обчислень під час розв'язування прикладних задач, нагадати ці правила учням. На етапі формалізації важливо: 1) використовувати евристичні запитання; 2) абстрагуватись від властивостей об'єкту, несуттєвих для побудови його моделі; 3) допомагати учням чітко вказувати відмінності між об'єктом та його моделлю, формулювати умову та вимогу прикладної задачі на мові математики. На етапі розв'язування задачі всередині побудованої моделі слід: 1) навчати учнів користуватись джерелами необхідних додаткових даних (проведення вимірювань; використання довідкової літератури) та теоретичних відомостей (підручники;

тезово-опорні конспекти); 2) вводити задачі-двійники (абстрактні задачі, розв'язування яких подібне до розв'язування прикладної задачі всередині побудованої моделі); 3) перед виконанням учнями рисунків до прикладних задач дозволяти їм виконувати відповідні ескізи; 4) систематично застосовувати інформаційно-комп'ютерні технології для виконання рисунків, проведення обчислень; 5) доводити знайдений розв'язок до числового значення або розрахункової формули. На етапі інтерпретації потрібно наголосити на необхідності здійснювати перевірку знайденого розв'язку на відповідність вимозі задачі. Також визначена орієнтовна схема дій для учнів із розв'язування прикладних задач [37].

Значну увагу приділено організації роботи зі складання прикладних задач: дослідження джерел сюжетів та кількісної інформації для створення прикладних задач; обробка, систематизація та зберігання числових даних; з'ясування із учнями вимог до прикладних задач.

Таким чином, прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії – одна з цілей математичної освіти й основа , на якій опанування учнями математичних знань, умінь і навичок їх використовувати відбувається значно ефективніше. Забезпечення прикладної спрямованості сприяє формуванню стійких мотивів до навчання і до вивчення математики зокрема. Способи та засоби реалізації прикладної спрямованості у нових суспільних умовах та вимогах сьогодення до рівня, якості та характеру математичної освіти набувають актуальності за умови модернізації, уточнення та розширення. Побудована концептуальна модель та створена на її основі відповідна методика являються одним із варіантів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії.

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Вчителі протягом вивчення стереометрії приділяють увагу в основному опрацюванню теорії та розв'язуванню абстрактних задач, оскільки вони недооцінюють можливості реалізації прикладної спрямованості для досягнення цілей вивчення цього курсу. Посилюють цю ситуацію такі фактори: невелика кількість годин, що відведена для вивчення курсу стереометрії, у методичній літературі мало матеріалів, які доводять значущість прикладної спрямованості та конкретних методичних розробок , які допомагають вчителю використовувати її засоби. З огляду на перераховані обставини, у вчителів відсутня мотивація для систематичного прикладного спрямування курсу, зокрема для розв'язування з учнями прикладних задач, особливо враховуючи їх невелику кількість у підручниках, посібниках та майже повну відсутність серед добірок завдань контролюючого характеру [49].

У рамках визначеної проблеми вимагають вирішення у зв'язку із реформуванням освіти такі питання: створення концепції реалізації прикладної спрямованості, що враховує ідеї гуманітаризації освіти та вимоги диференціації навчання, обмеженість часового інтервалу, який відведено на вивчення стереометрії у школі; формування системи сучасних прикладних стереометричних задач, на базі якої можна навчити учнів спеціальних прийомів розумової діяльності і формувати практичні вміння, що лежать в основі застосування математики; використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між ними. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Відомо, що ефективним є також навчання , яке в єдності з вихованням забезпечує активізацію мислення учнів і свідоме засвоєння ними системи наукових знань, спонукає у них бажання та потребу в цих знаннях і викликає інтерес до предмета, допомагає розвитку здібностей кожного учня, розвиває вміння та навички застосовувати отримані знання на практиці, а також самостійно здобувати ці знання. Підвищенню ефективності навчання математики сприяє розв’язування задач практичного змісту. Звернення до прикладів із життя і навколишньої дійсності полегшує вчителю організацію цілеспрямованої навчальної діяльності учнів.

Існує необхідність так організувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим. А це можливо шляхом подолання надмірної абстракції, через розкриття ролі математики в пізнанні навколишнього світу, через інтеграцію з іншими предметами та формування у такий спосіб цілісного, гармонійного світосприйняття учнів [34].

Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії – це орієнтація цілей, змісту та засобів навчання стереометрії в напрямку набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок , які використовуватимуться ними у різних сферах життя.

Висновки до першого розділу

Практичні задачі мають бути частиною практики викладання стереометрії вчителем. Адже прикладні задачі допомагають старшокласникам зрозуміти, що, вивчаючи цей курс, вони пізнають реальний світ, а розв’язуючи прикладні задачі, навчаються правильно і раціонально розв’язувати проблеми, які виникають у житті.

Викладання стереометрії в школі повинно бути орієнтоване на реальне життя, тобто уроки стереометрії повинні бути орієнтовані на практику. Сьогодні ми можемо говорити лише про наявність певних практичних елементів у школах. Разом з тим, аналіз літератури з питань практичної спрямованості навчання стереометрії, визначення сутності та складових цього поняття, деякі узагальнення та висновки з цього питання окреслюють шляхи реалізації, які необхідно розробити в майбутньому.

Вчителі протягом вивчення стереометрії приділяють увагу в основному опрацюванню теорії та розв’язуванню абстрактних задач, оскільки вони недооцінюють можливості реалізації прикладної спрямованості для досягнення цілей вивчення цього курсу. Посилюють цю ситуацію такі фактори: невелика кількість годин, що відведена для вивчення курсу стереометрії, у методичній літературі мало матеріалів, які доводять значущість прикладної спрямованості та конкретних методичних розробок , які допомагають вчителю використовувати її засоби. З огляду на перераховані обставини, у вчителів відсутня мотивація для систематичного прикладного спрямування курсу, зокрема для розв'язування з учнями прикладних задач, особливо враховуючи їх невелику кількість у підручниках, посібниках та майже повну відсутність серед добірок завдань контролюючого характеру.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВІДШУКАННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ

2.1. Аналіз змісту курсу стереометрії на рівні стандарту та на профільному рівні

Вивчення математики в старшій школі поділяється за чотирма критеріями: рівнем стандарту, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов’язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов’язану з математикою або її застосуваннями.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на поглиблене вивчення математики у 8-11 класах [26].

Розподіл годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Розподіл годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти

Навчальні предмети	**Кількість годин на тиждень у класах**					
	Рівень стандарту		**офільний рівень**		**ь поглибленого вивчення**	
	10	**11**	**10**	**11**	**10**	**11**
Математика	3	3	-	-	-	-
Алгебра та початки аналізу	-	-	5	5	5	5
Геометрія	-	-	4	4	4	4

У нашому дослідженні акцентуємо увагу на двох основних рівнях (рівень стандарту та профільний рівень), а також розглянемо особливості навчальної програми для учнів 10-11 класів ліцеїв.

Рівень стандарту. Метою навчання математики на рівні стандарту є насамперед формування загальної математичної освіти та розвиток математичного мислення, тобто здатності класифікувати об’єкти, утворювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами та висловлювати судження. Розвиток практичних навичок з математики є однією з основних цілей математичної освіти. Ефективним способом реалізації практичної спрямованості шкільних уроків математики є комплексне і систематичне використання математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між поняттями, характеру прикладів, доведень, систем вправ і, нарешті, систем контролю. Іншими словами, математику слід викладати таким чином, щоб учні могли її застосовувати.

Програма передбачає, що геометрія та алгебра, а також основи аналізу вивчаються разом або окремо. Порівняно з поділом курсу математики на два предмети («Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія»), перший підхід має певні переваги з точки зору вивчення предмета на стандартизованому рівні. Він дозволяє забезпечити єдність математичної освіти, концентрацію навчальної діяльності навколо невеликої кількості понять і фактів за певний проміжок часу, оптимальний розподіл часу на вивчення окремих тем з урахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечення природних зв’язків всередині тем і між темами. Такий підхід особливо важливий для загальнокультурної спрямованості математичної освіти. [27].

За навчальною програмою рівня стандарту на вивчення математики у 10 класах відводиться 105 годин.

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт у разі сумісного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 10-му класі подано в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем з математики, рівень стандарту у 10-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	2	Діагностична
II	Функції, їхні властивості і графіки	22	1
III	Паралельність прямих і площин у просторі	22	1
IV	Тригонометричні функції	26	1
V	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	22	1
VI	Резерв часу і повторення	9	1

У разі роздільного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 10-му класі доцільно розглядати теми у тому самому обсязі.

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія» може бути таким, як подано у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту (51 год. І семестр – 32 год, 2 год на тиждень,
ІІ семестр – 19 год, 1 год на тиждень, резервний час – 6 год) у 10-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	1	
II	Паралельність прямих і площин у просторі	22	1
III	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	22	1
IV	Резерв часу і повторення	6	1

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт у разі сумісного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 11-му класі подано в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем з математики, рівень стандарту в 11-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Повторення курсу математики 10 класу	2	Діагностична
II	Показникова та логарифмічна функції	12	1
III	Координати і вектори	10	1
IV	Похідна та її застосування	14	1
V	Інтеграл та його застосування	10	1
VI	Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл.	37	2
VII	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики	10	1
VIII	Резервний час і повторення	10	1
	Разом	105	

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія» може бути таким, як подано у таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту (51 год. І семестр – 32 год, 2 год на тиждень,

ІІ семестр – 19 год, 1 год на тиждень, резервний час – 6 год) в 11-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	1	
II	Координати і вектор	10	1
III	Геометричні тіла.Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	37	2
IV	Резервний час і повторення	3	
	Разом	51	

Профільний рівень підготовки. Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості в динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу, предметів природничого спрямування, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів [28].

2.2. Методика розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень

Розв'язування стереометричних задач є моделлю для вивчення самої стереометрії. Тому розв'язування стереометричних задач повинно відображати всю діалектику зв'язку стереометрії з реальним світом. На практиці це означає постановку задачі, побудову абстрактної теорії, яка відповідає всім вимогам математичної формалізації, інтерпретацію отриманих результатів і розуміння їх практичного застосування. Необхідно не тільки розв'язувати «готові» задачі, а й показувати учням процес їх створення. Вони повинні порівнювати проблеми, які потрібно розв'язати, шукати більш загальні шляхи їх розв'язання та аналізувати, які практичні ситуації вони можуть охоплювати. Таким чином створюється другий рівень запитань. Метою є аналіз тривимірних задач (у традиційному розумінні).

Розв'язуючи ці задачі, учні засвоюють найважливіші геометричні поняття, опановують математичну символіку та вчаться користуватися доведеннями.

Методика розв'язування стереометричних задач на екстремум (найбільше/найменше значення) включає *перехід до плоских аналогів (метод січних площин), використання симетрії, метод перетворення фігур (обертання,* *симетрія), застосування нерівностей* (зокрема, трикутника, Коші), а часто й *зведення до задачі аналітичної геометрії або calculus*, де шукають екстремум функції (через похідну) для плоских проекцій або перерізів, або ж *використання властивостей* певних геометричних місць точок для знаходження екстремальних відстаней чи площ. Ключ – звести багатовимірну задачу до одновимірної (функціональної) або просторової (геометричної).

Основні етапи методики:

1. Аналіз умови та виділення змінних*:* Визначити, що є фіксованим, а що змінюється, що потрібно оптимізувати.

2. Побудова моделі:

- Геометричні методи: використовувати симетрію, перетворення, властивості відстаней (нерівність трикутника, мінімальна відстань – перпендикуляр).
- Аналітичні методи (через функцію): виразити шукану величину (відстань, площа, об'єм) через одну змінну (або кілька), використовуючи координати, тригонометричні функції, теореми (Піфагора, синусів, косинусів). Звести задачу до знаходження екстремуму функції на відрізку (використовуючи похідну), як в планіметрії.

Розв'язання:

Довести, що знайдений варіант є мінімальним/максимальним (наприклад, найкоротша відстань – пряма, найменший периметр – через симетрію).

Зменшення розмірності: Перехід до перерізу площиною. Наприклад, знайти найменшу відстань між мимобіжними прямими через їх спільний перпендикуляр або через площину, що містить одну з прямих і паралельна іншій.

Метод симетрії: Для задач на мінімум периметра (як приклад, площинний) використовують дзеркальне відображення. У стереометрії це може бути відображення відносно площини.

Застосування похідної: Якщо вдалося виразити об'єм/площу фігури, вписаної в іншу, через одну змінну, застосовується похідна.

Використання нерівностей: Нерівність трикутника ($a+b\geq c$) для довжин.

Геометричні місця точок: Визначення множини точок, з яких відрізок/відстань буде мінімальною/максимальною.

Стереометрична задача часто зводиться до планіметричної підзадачі або задачі на оптимізацію функції, використовуючи властивості стереометричних фігур.

Тому рекомендації щодо використання запитань практичного змісту в 10- 11 класах такі:

1. звертати увагу на реальне практичне застосування отриманих результатів;
2. для кращих учнів можна давати завдання з елементом наукового дослідження;
3. умови завдання повинні бути максимально наближені до реальних поточних ситуацій і потреб;
4. по можливості розв'язувати задачу більш ніж одним способом.

Для того, щоб за відведений навчальною програмою час розв'язати більшу кількість задач, рекомендується майже на кожному уроці усно розв'язувати 5-10 задач. Особливу увагу слід приділяти розвитку вміння розв'язувати найпростіші задачі. Адже без цього неможливо навчити учнів розв'язувати задачі середньої складності.

Для того, щоб вміти розв'язувати задачі усно, корисно подавати об'ємні задачі, пов'язані з однією і тією ж фігурою.

Найкраще запам'ятовується те, що легко уявити. Саме для цього і створені задачі прикладного характеру, які чітко відображують життєві ситуації. Так при вивченні многогранних кутів корисно розв'язати декілька задач на знаходження елементів покрівель будинків.

Задача 1. Завіси даху утворюють прямокутник *ABCD*. *AB* = 12 м; *BC* = 30 м; кут нахилу скатів – 30^0. Довести, що нахили скатів рівні. Знайти площу поверхні покрівлі (рис. 2.3)

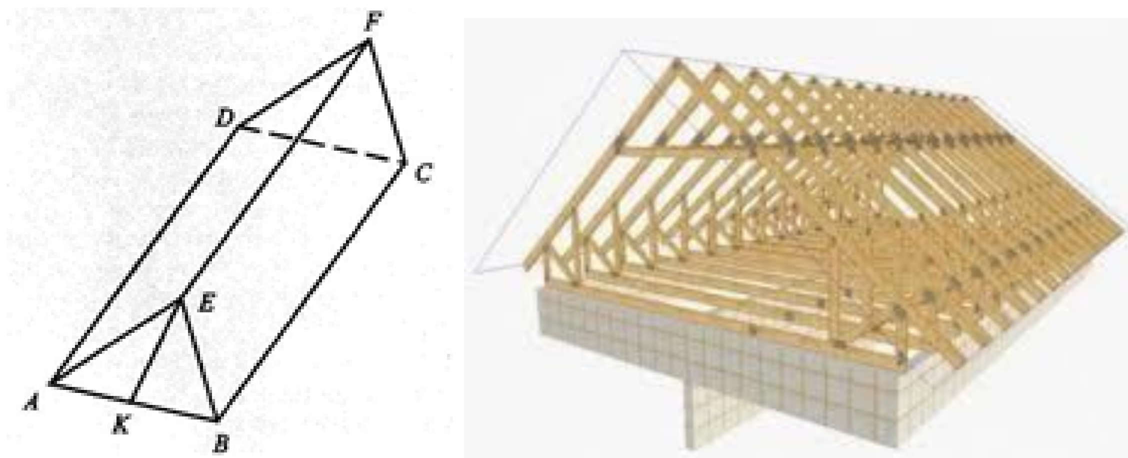


Рис. 2.3. Трикутна призма

Розв'язання

1. Скати даху представляють собою рівні прямокутники *BCFE* і *ADFE.*
2. Прямокутник *ABCD* розташований горизонтально.
3. Площина трикутника *ABE* і *CDF* перпендикулярні до площини *ABCD.*
4. Так як скати даху – прямокутники, то *EF* паралельна *AD*. Отже, за ознакою паралельності прямої і площини *EF* паралельна площині *ABCD.*

5. Скат *BCFE* утворює двогранний кут, ребро якого – *BC*. Побудуємо лінійний кут двогранного кута. Проведемо *ЕК* перпендикулярно *AB*, оскільки Δ *ABE* перпендикулярний *ABCD*, то *ЕК* перпендикулярно *ABCD*. Похила *BE* перпендикулярна *BC*, її проекція *BK* перпендикулярна *BC*. Отже, кут *ABE* = β – лінійний кут двогранного кута, який утворений скатом *BCFE* і площиною *ABCD.*

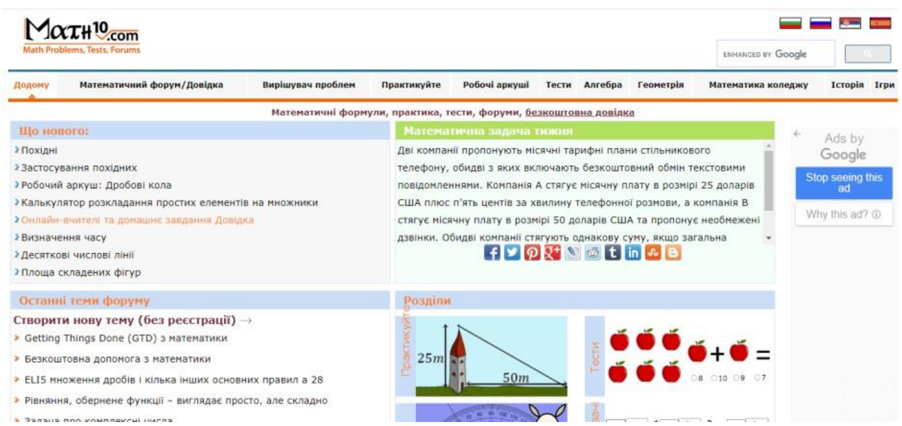
6. Аналогічно можна довести, що кут *EAB* – лінійний кут двогранного кута, який утворений скатом *AEDF* і площиною *ABCD.*

Розглянемо трикутник *ABE*, він рівнобедрений, отже, кут *EAB* дорівнює куту *BAE*, тому вони – рівні і є двогранними кутами. Отже, скати даху нахилені до горизонталі однаково.

2.3. Використання інтернет сервісу $Math10$ для розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень

$Math10$ є сервісом веб додатків який спрощує розуміння і насамперед розв’язування задач з стереометрії на відшукання найбільшого та найменшого значень.

Процес розв’язання задачі дуже простий для цього потрібно для початку роботи насамперед перейти на сайт $math10.com$ де показано на мал.4.



Мал.1

Сам же сервіс розбитий на блоки де в першому показано нові оновлення над чим були роботи з минулої версії:

- Похідні
- Застосування похідних
- Робочий аркуш: Дробовікола
- Калькулятор розкладання простих елементів на множники
- Онлайн-вчителі та домашнє завдання довідка
- Визначення часу

- Десяткові числові лінії

Площа складених фігур

Що нового:

- Похідні
- Застосування похідних
- Робочий аркуш: Дробові кола
- Калькулятор розкладання простих елементів на множники
- Онлайн-вчителі та домашнє завдання Довідка
- Визначення часу
- Десяткові числові лінії
- Площа складених фігур

Мал.2

Також під цим блоком видно як компанія працювала над темою про форуми де розділила блок на 2 теми (мал.3).

Останні теми форуму

Створити нову тему (без реєстрації) →

- Getting Things Done (GTD) з математики
- Безкоштовна допомога з математики
- ELI5 множення дробів і кілька інших основних правил а 28
- Рівняння, обернене функції – виглядає просто, але складно
- Задача про комплексні числа
- Визначте такі складені функції
- Що поганого в теорії струн?
- Чому трикутники так ретельно вивчаються в математиці?
- Прямокутник із парканом має 54 фути огорожі

Останні активні форуми

- Що таке геоінженерія? Чи може це пом’якшити кліматичні зміни?
- Чи є гравітація квантовою?
- Знайдіть найменше ціле натуральне число N
- Навіщо вивчати математику?

Мал.3

* **Останні теми форуму**

* Створити нову тему (без реєстрації)→

* $Getting\ Things\ Done\ (GTD)$ з математики

* Безкоштовна допомога з математики

* $ELI5$ множення дробів і кілька інших основних правил a 28

* Рівняння, обернене функції – виглядає просто, але складно

* Задача про комплексні числа

* Визначте такі складені функції

* Що поганого в теорії струн?

* Чому трикутники так ретельно вивчаються в математиці?

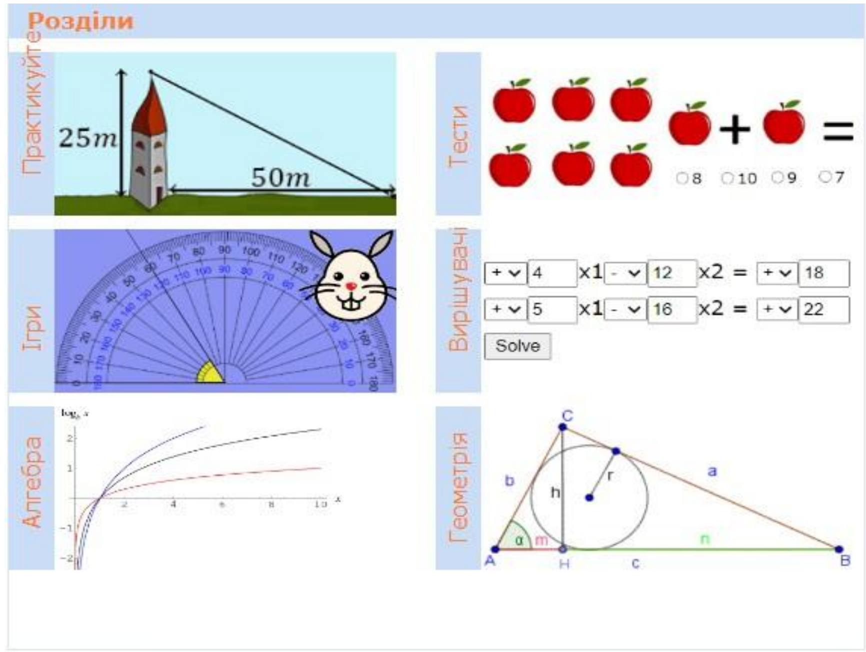
* Прямокутник із парканом має 54 фути огорожі

* **Останні активні форуми**

- Що таке геоінженерія? Чи може це пом'якшити кліматичні зміни?
- Чи є гравітація квантовою?
- Знайдіть найменше ціле натуральне число N
- Навіщо вивчати математику?

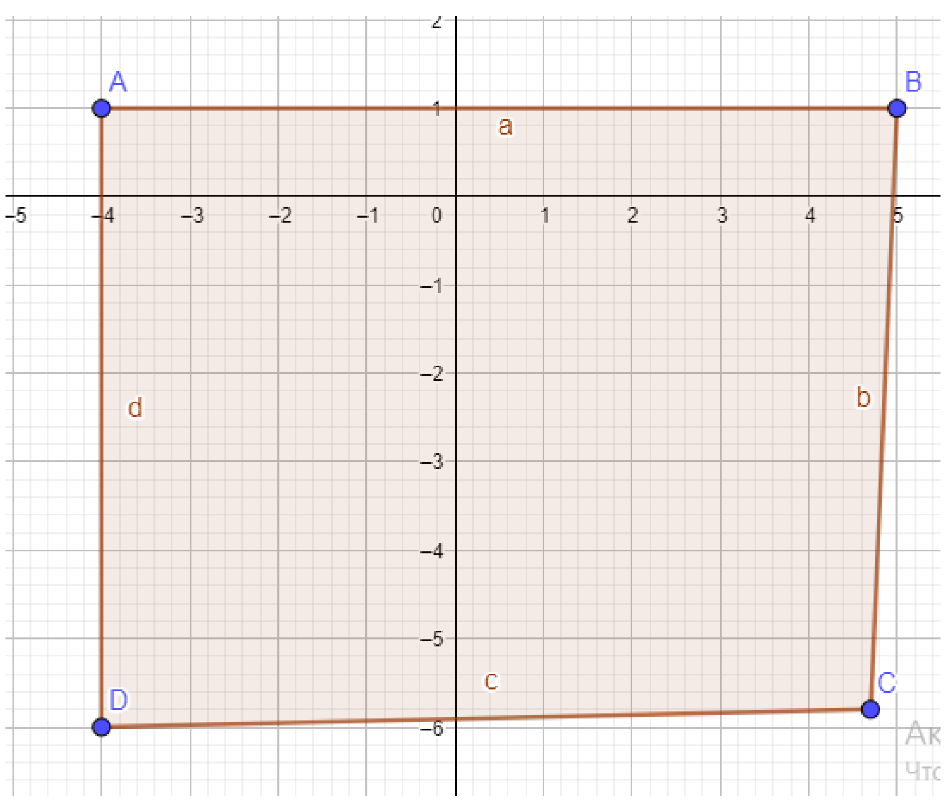
На іншому блоці показано розділи (мал.7). В яких можна:

- Практикувати
- Грати в ігри
- Проходити тести
- Вирішувати задачі по алгебрі або геометрії



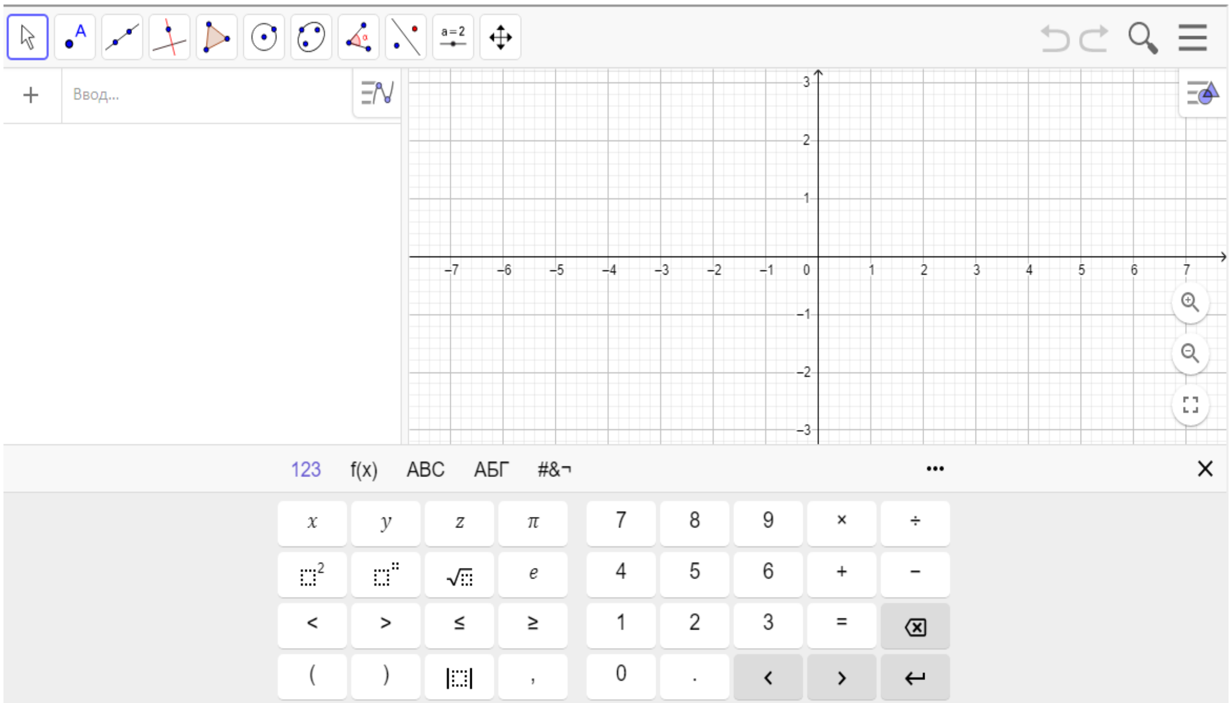
Мал.4

там же ж можливо створити фігуру у просторі або на точках координат де чітко показано на Мал.4.



Мал.5

Чим же відомий $math10.com$ а саме $Geogebra$ тому що $Geogebra$ — це найкраще програмне забезпечення для геометрії в Інтернеті для створення різних геометричних фігур - точок, ліній, кутів, трикутників, багатокутників, кіл, еліпсів, $3D$ площин, пірамід, конусів, сфер (Мал.6).



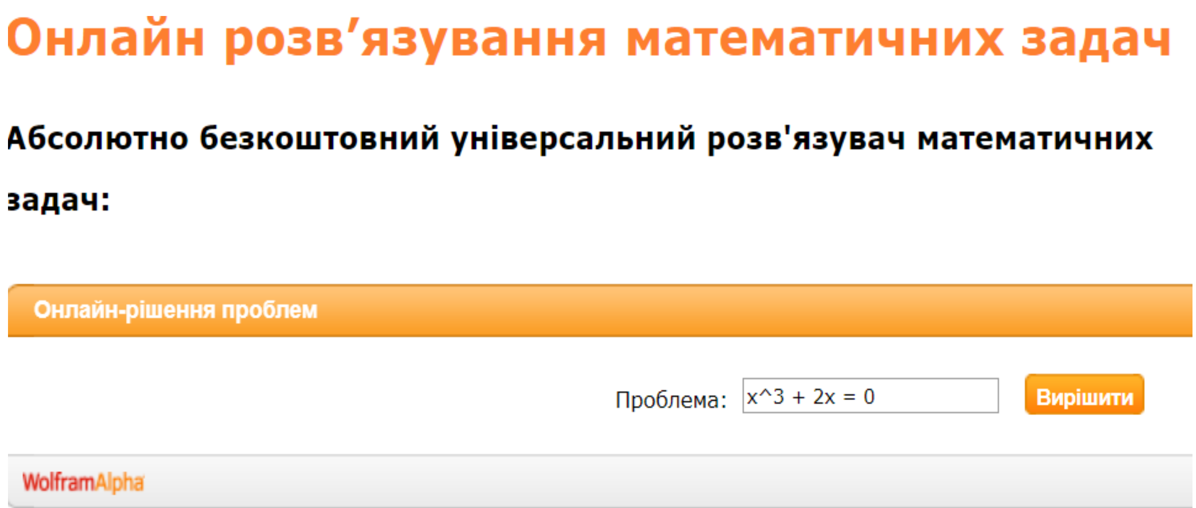
Мал.6

Процес створення вправ $math10.com$ в дуже простий та цікавий у використанні. Сервіс відкриває великі можливостідля дидактичних завдань зі стереометрії і інших тем з математики. Є також можливість використовувати ілюстративні, мал.9.

Фото з вставленням у проект. Створені завдання образні наявні, легко запам'ятовуються. Автори проекту завжди мають можливість використовувати та виправити». Є можливість виправлення помилок. функцію «повернутись» і ще також є функція створити новий.

Розглянемо розробленіна $math10.com$ вправи для учнів.

Вправа «Вирішувач проблем»



Мал.7

Вправа «Вирішувач проблем» Вирішує математичні задачі онлайн. Також безкоштовна версія дає вам і відповіді на ваше завдання. Якщо ви учень хоче побачити повні рішення, то йому потрібно зареєструвати обліковий запис.

Вправа «Вирішувач проблем» розв’язує: Базовий математичний план.

Basic Math Solver пропонує вам розв’язувати онлайн-задачі дробів, метричні перетворення, силові та радикальні задачі. Ви можете знайти площу та об’єм прямокутників, кіл, трикутників, трапецій, коробок, циліндрів, конусів, пірамід, сфер. Ви можете спрощувати й оцінювати вирази, розмножувати перемножувати поліноми, комбінувати вирази.

Висновки до другого розділу

Отже, для того щоб навчитися розв'язувати стереометричні задачі, потрібно навчитися правильно зображувати просторові фігури на площині, володіти двома методами – паралельним проектуванням і центральним проектуванням (перспективою). При паралельному проектуванні, потрібно враховувати властивості фігур, що проектуються, перш за все ті, які залишаються незмінними (інваріантними) при паралельному проектуванні, хоча докладний розгляд питань зображення просторових фігур в паралельній проекції виходить далеко за межі шкільної програми.

Розв'язування учнями стереометричних задач має велике значення для реалізації міжпредметних зв'язків на практиці. Відбувається демонстрація прямого зв'язку математики з іншими науками, що допомагає зацікавити учнів у вивченні предмета. Стереометричні задачі дають можливість проілюструвати застосування різних математичних понять. Однак при їх доборі та розв'язуванні завжди слід пам'ятати про методичні вимоги, згадані вище. Реалізація міжпредметних зв'язків, безсумнівно, виконує ряд важливих функцій у навчанні як математики, так і інших дисциплін. Вони впливають на вибір і організацію навчальних матеріалів, активізують різні методи навчання..

Для того, щоб полегшити вивчення учнями тривимірного матеріалу, рекомендується систематично впроваджувати ІКТ, які можуть значною мірою допомогти вчителям розширити уяву учнів.

Використання програмних засобів на різних етапах навчання може допомогти пояснювати новий матеріал; розвивати вміння учнів розв'язувати різноманітні задачі; перевіряти рівень математичної компетентності учнів; забезпечувати зворотний зв'язок та організовувати комунікацію; сприяти творчій навчальній діяльності учнів.

РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВІДШУКАННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ

3.1. Розробка варіативного курсу «Розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень»

Курс «Розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень»

Курс сприяє розвитку учнів логічного мислення і також просторової уважності і дозволяє їм глибше розглянути і зрозуміти навчальний матеріал по даній темі, Для всіх учнів старших класів, які продовжать навчання, пов'язане з геометрією, а саме стереометрією. Курс буде сприяти успішній здачі НМТ з математики, і подальшому навчанню у Вищому навчальному закладу.

Вивчений матеріал з математики стане для них дуже хорошою основою для отримання освіти вибраної спеціальності.

Курс складається з наступних тем : розв'язання стереометричних задач

геометричних фігур, знаходження їх площі, та відшукання найбільшого та найменших значень.

За допомогою $math10.\ com$ ми наглядно спробуємо показати фігуру і розв'язати задачу.

<u>Задача 1.</u> В коло радіуса R вписана трапеція $ABCD,$ основа AB якої є діаметром кола. Якою має бути довжина бічної сторони трапеції, щоб трапеція мала найбільшу площу?

<u>Розв'язання</u> У задачі потрібно знайти довжину бокової сторони трапеції, при якій площа трапеції буде найбільшою. Її можна прийняти за незалежну змінну, потім через неї і радіус R кола висловити площу трапеції.

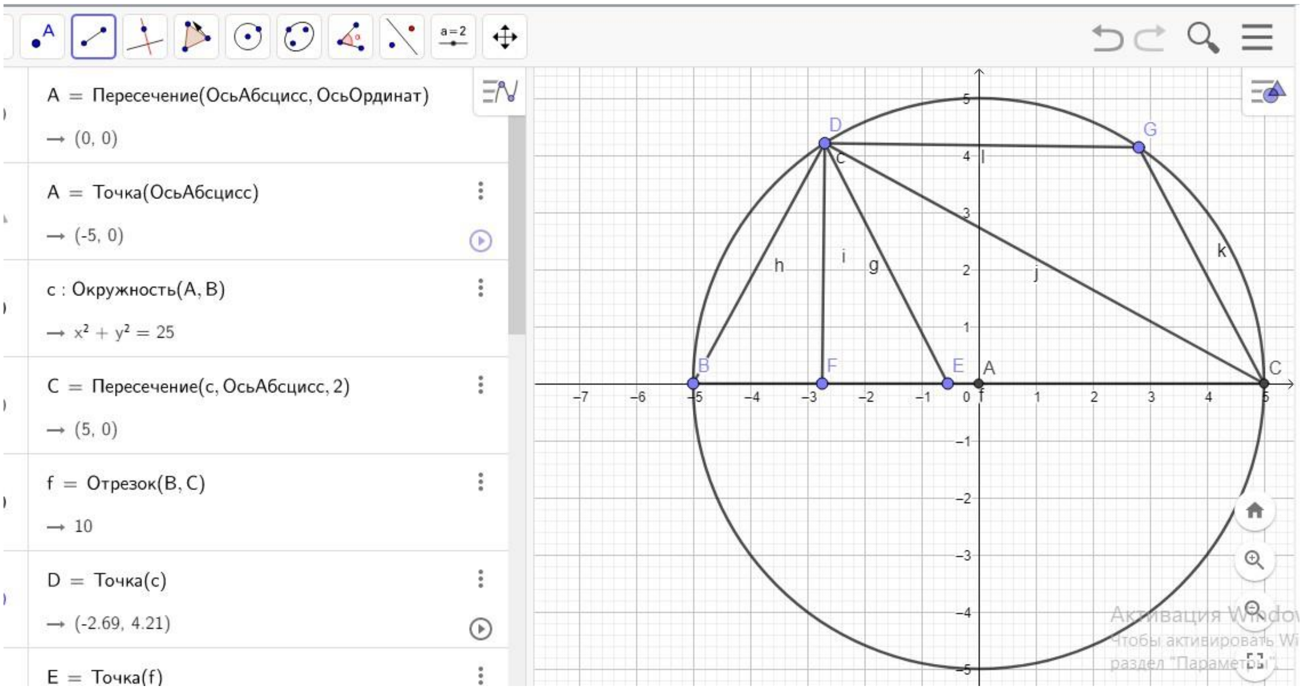


Рис.3.1.

<u>Задача 2</u>. Куб, ребро якого дорівнює, перетинається площиною, що проходить через діагональ. Яку найменшу площу може мати переріз і за якого вугілля нахилу перерізу до площини основи? [2]

Розв'язок:

Нехай площина, що проходить через діагональ $B1D$ куба, перетинає його ребро АА1 у точці К. Тоді вона перетинає ребро СС1 у точці L, симетричної відносно центру куба. У перетині вийде паралелограм $B1$ КDL, площа якого дорівнює подвоєній площі $B1$ КD. Проведемо висоту $\triangle$ $B1$ КD. Нехай $B1\ D\ =\ d$, $KM\ =\ h, DM\ =\ y, AK\ =\ x$.

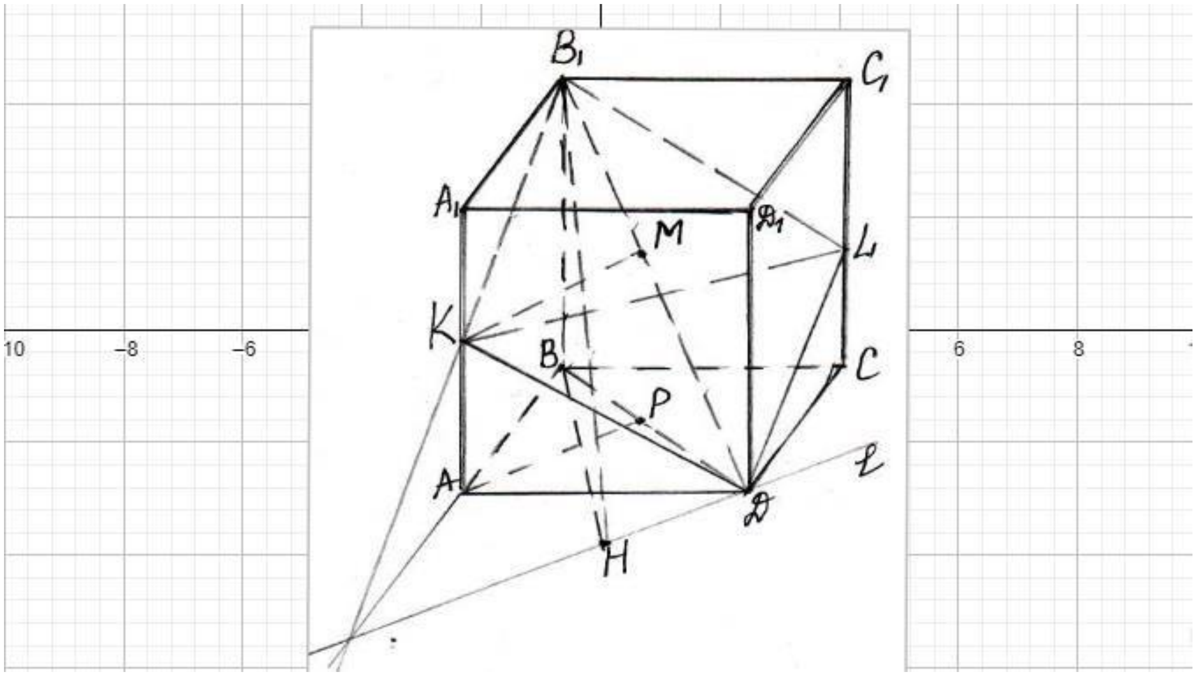


Рис. 3.2.

Площа перерізу визначається формулою: $S = dh,$ де $d = a\sqrt{3}.$ Отже, завдання зводиться до знаходження найменшого значення h. З прямокутних$\triangle$ $B1$ КМ та DКМ, , виразимо за теоремою Піфагора двома способами КМ, отримаємо рівняння:

$(a^2 + x^2) - y^2 = a^2 + (a - x)^2 - (d - y)^2,$ звідки $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + x).$ отже

$h^2 = a^2 + x^2 - \frac{1}{3}(a + x)^2 = \frac{2}{3}(x^2 - ax + a^2),$ або

$h^2 = \frac{2}{3}(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2}, где 0 \le x \le a.$

Звідси слідує що $h = a/\sqrt{2}$ при $x = a/2.$ Найменше значення площі перерізу дорівнює

$\frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$

кут φ між площиною цього перерізу та площиною основи $ABCD$ куба знайдемо за формулою: $\cos\varphi = S_{осн} : S_{сеч}.$ отримаємо: $\cos\varphi = \sqrt{6}/3.$

<u>Задача 3.</u> Даний кут і всередині нього точка. Проведіть через цю точку пряму так, щоб були найменшими:

а) площа трикутника, що відсікається від кута проведеної прямої;

б) периметр цього трикутника.

<u>Розв’язання</u> а) Доведемо, що шукана має наступну властивість відрізок LM цієї прямої, укладений між сторонами кута, ділиться цією точкою А пополам. Насправді, нехай $\mathrm{A}L = AN$, (Рис. 3.3.).

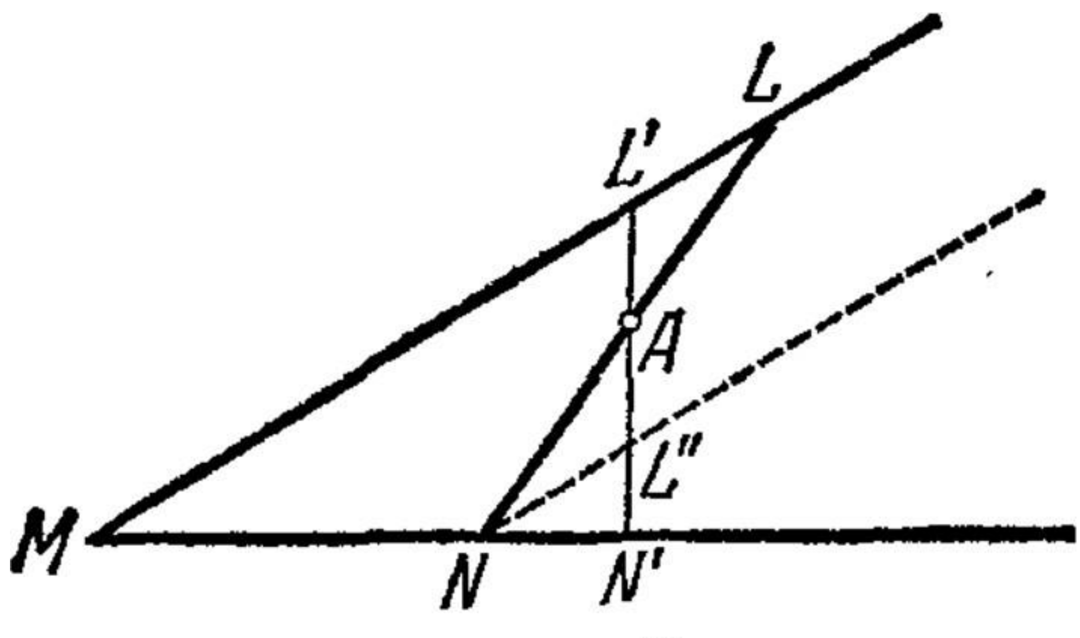


Рис. 3.3

Доведемо, що трикутник LMN має найменшу можливу площу. Проведем через точку А якусь

іншу пряму; нехай, наприклад, вона перетинає ML, у точці L$'$ і продовження MN у точці N$'$, Тоді через дану точку А всередині кута можна провести одну пряму l таку, що ув'язнений всередині кута відрізок прямий l ділиться в точці А навпіл. Для побудови прямої l достатньо, наприклад, відкласти $AL" = AL'$ (див. рис. 3.3.) і провести через $L"$ пряму $L"N \parallel L'M$; тоді АN - шукана пряма.

$LN < AN'$, бо проведена через N пряма, паралельна МL,

перетне відрізок АN' у точці L'' такий, що $L'A = AL''$. З рівняння трикутників ANL'' та ALL' випливає, що

$$S_{\triangle MN'L'} = S_{MNAL'} + S_{\triangle ANL''} + S_{\triangle NN'L''} > \\ > S_{MNAL'} + S_{\triangle AL'L} = S_{\triangle MNL},$$

— а це нам і треба було довести.

6) Нехай LMN - даний кут і А - дана точка; проведем через А січну $B'C'$ (де B' і C' - точки на сторонах кута), і нехай S'- коло, що стосується променів $B'N$ і $C'L$ у точках P і Q прямий $B'C'$ у точці R (рис. 3.4 а). Очевидно, $B'P = B'R$

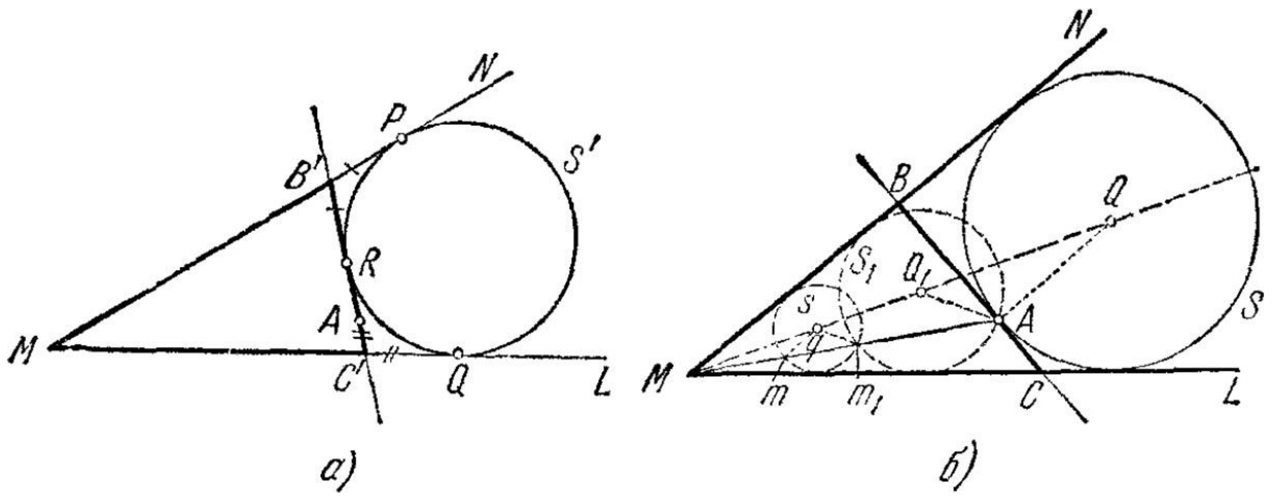


Рис. 3.4

$C'Q = C'R$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки. Звідси:

$$MB' + B'C' + C'M = MB' + B'R + C'R + MC' = \\ = MB' + B'P + C'Q + C'M = MP + MQ,$$

периметр трикутника $MB'C'$ дорівнює $MP + MQ = 2MP = 2MQ$. Проведемо тепер через точку А коло S (найбільших з двох можливих), що стосується обох сторін кута, і проведемо в точці дотичну до кола S (див. рис. 3.4. б). Точки перетину цієї дотичної зі сторонами кута позначимо B і C. Трикутник MBC шуканий. Для доказу зауважимо, що, як ми тільки що переконалися, периметр трикутника MBC дорівнює подвійній відстані.

Від точки M до точки дотику кола S зі стороною кута. Проведемо через A будь-яку іншу пряму, що перетинає сто- ні кута в точках B′ і C', і побудуємо коло S', вписанийну в трикутник B′MC′ (див. знову рис. 3, а). Точка R торкання.

Існують два кола S і $S1$, що проходять через точку A і що стосуються сторін кута; для їх побудови достатньо вписати в кут LMN довільне коло s з центром q, знайти точки m і $m1$ т, її перетину з прямою AM і через A провести прямої A$Q||mq$ $AQ1||m1q$;; точки Q і $Q1$, їх перетину з бісектрисою кута M і будуть центрами кіл S і $S1$; (див. рис. 3.4).

<u>Задача 4</u>. а) Дана пряма l дві точки A і B, по одну сторону від цієї прямої. Знайдіть на прямій l точку X, сума відстаней якої до точок A та B має найменше можливе значення.

б) Дано пряму l і дві точки A і B по різні боки від неї. Знайдіть на прямій l точку X, різницю відстаней якої до точок A та B має найбільше (за абсолютною величиною) значення.

<u>Розв’язання</u>

Нехай B′ - точка, симетрична точці B щодо прямої l (Рис.3.5).

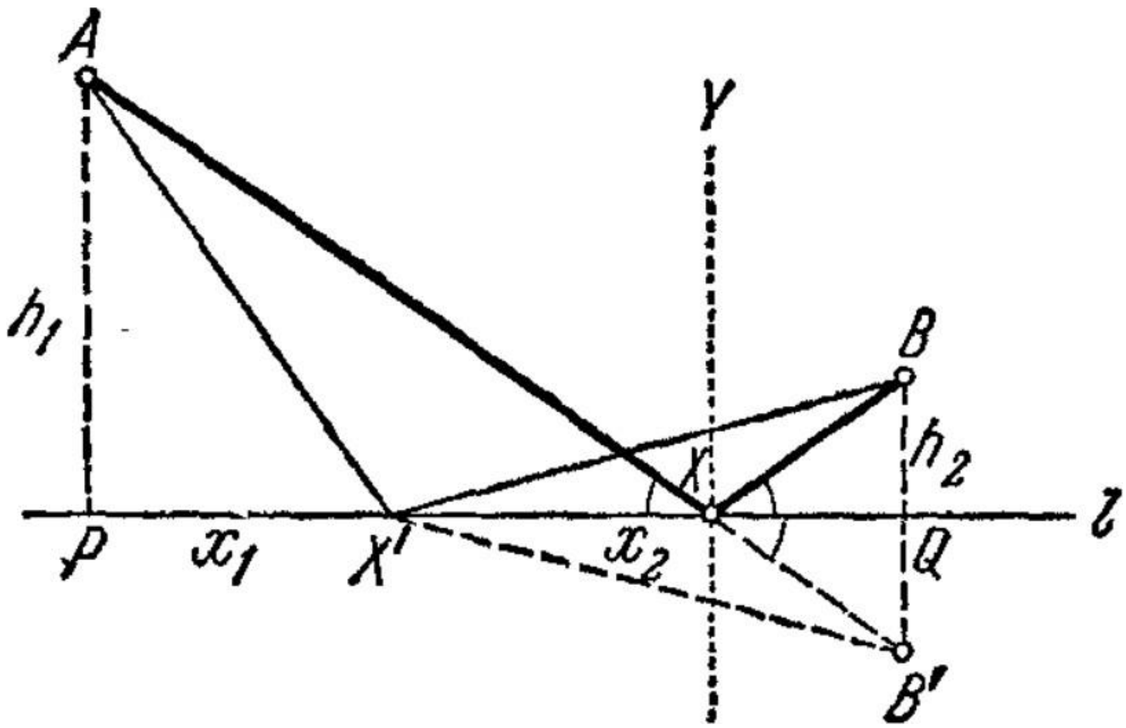


Рис. 3.5

Якщо X′—довільна точка прямої l то $AX' + X'B = AX' + X'B'$. Отже, сума $AX' + X'B$ буде найменшою коли сума.

$AX' + X'B'$ найменша тобто коли X′ збігається з точкою X перетину прямої AB' з l. Примітка 1.

З Рис. 3.5. слідує, що прямі AX і BX утворюють з l рівні кути (або, якщо назвати освічені прямими AX і BX з перпендикуляром XУ до прямої l кутів AXУ та BXУ «кутом падіння» та «кутом відображення», що «кут падіння дорівнює куту відображення»

Таким чином, правило, що визначає положення на прямий l такий точки X, що

сума $AX + XB$ досягає найменшого можливого значення, збігається з відомим правилом відбиття від плоского дзеркала променя, надісланого з точки А в точку В.

Примітка 2.

Якщо позначити відстані AP та BQ точок A і B від прямої 1 через $h1$ I $h2$, а відстані

PX′ та QX′ точки X′ прямої l від проекцій P і Q точок A та B на пряму l через x1 і x2, то, очевидно,

$$AX' + BX' = \sqrt{h_1^2 + x_1^2} + \sqrt{h_2^2 + x_2^2}.$$

Таким чином, з вирішення цього завдання слідкує, що при $x1 + x2 = const$ $=PQ)$ вираз

$x_1 + x_2 = \mathrm{const}\ (= PQ)$ *выражение* $\sqrt{h_1^2 + x_1^2} + \sqrt{h_2^2 + x_2^2}$

досягає найменшого можливого значення при $x1 = \frac{h1}{}$ (бо трикутники APX і BQX

б) Нехай B' — точка, симетрична відносно B відносно l (рис. 3.6).

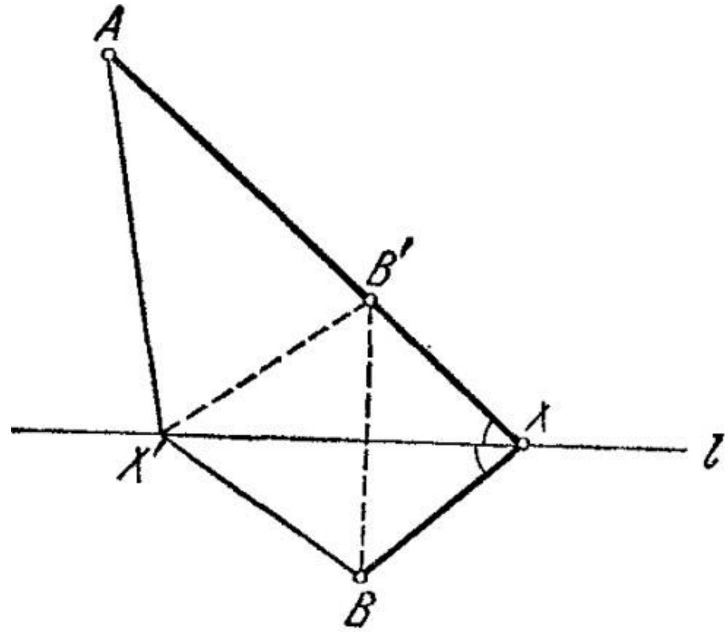


Рис. 3.6.

Якщо X' — довільна точка пряма l, то $AX'—B'X' \leq AB'$.

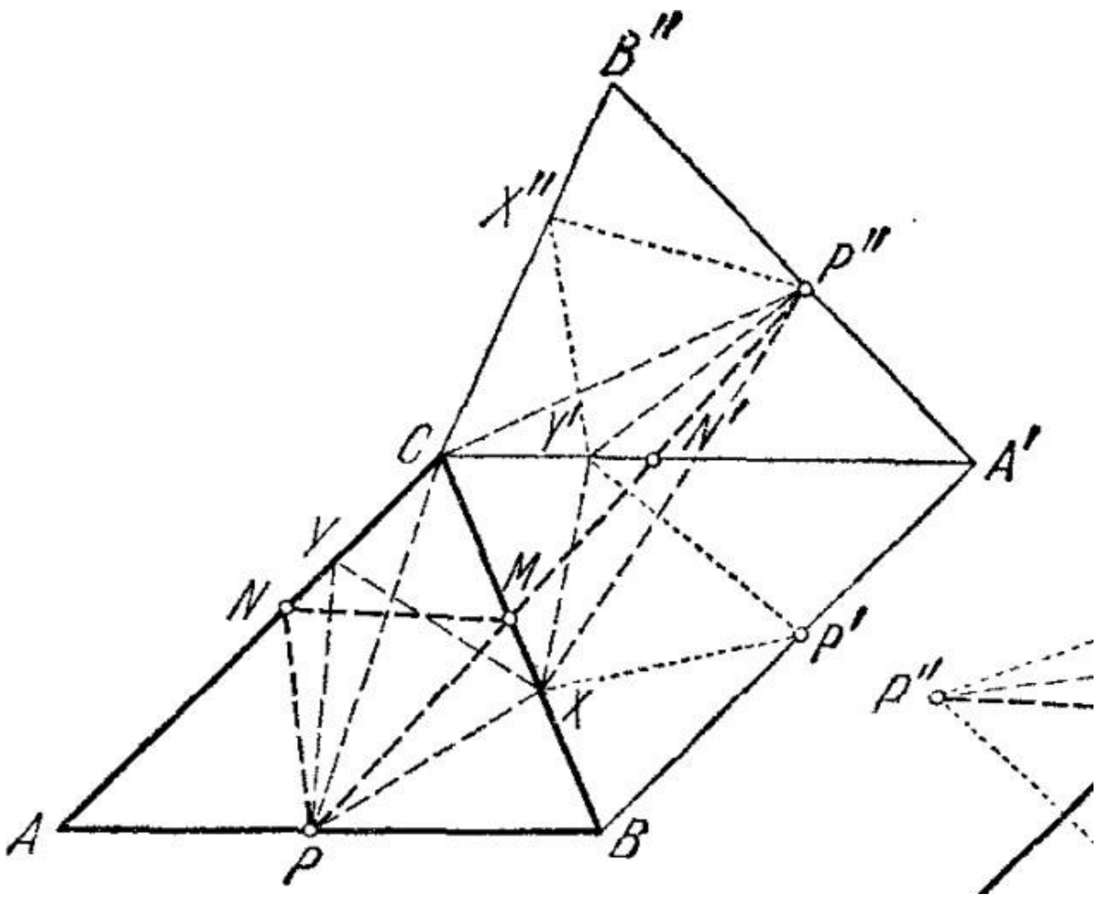
А тому як $AX'—BX' = AX'—B'X'$, то різниця $AX'—BX'$ буде найбільшою, коли X' співпадає з точкою X перетину AB' з l, для якої $AX - BX = AX - B'X = AB'$.

Якщо точки A і B находяться на однаковому відстані від l та $AB'||l$, то завдання немає рішення; Якщо A та B симетричні щодо l і B' збігається з A, то різниця $AX' - BX'$ має одне й те ж (нульове) значення для всіх точок X' прямої l.

Задача 5. а) Впишіть у даний трикутник ABC трикутник, одна сторона якого збігається із заданою точкою P сторони AB і периметр якого має найменше можливе значення.

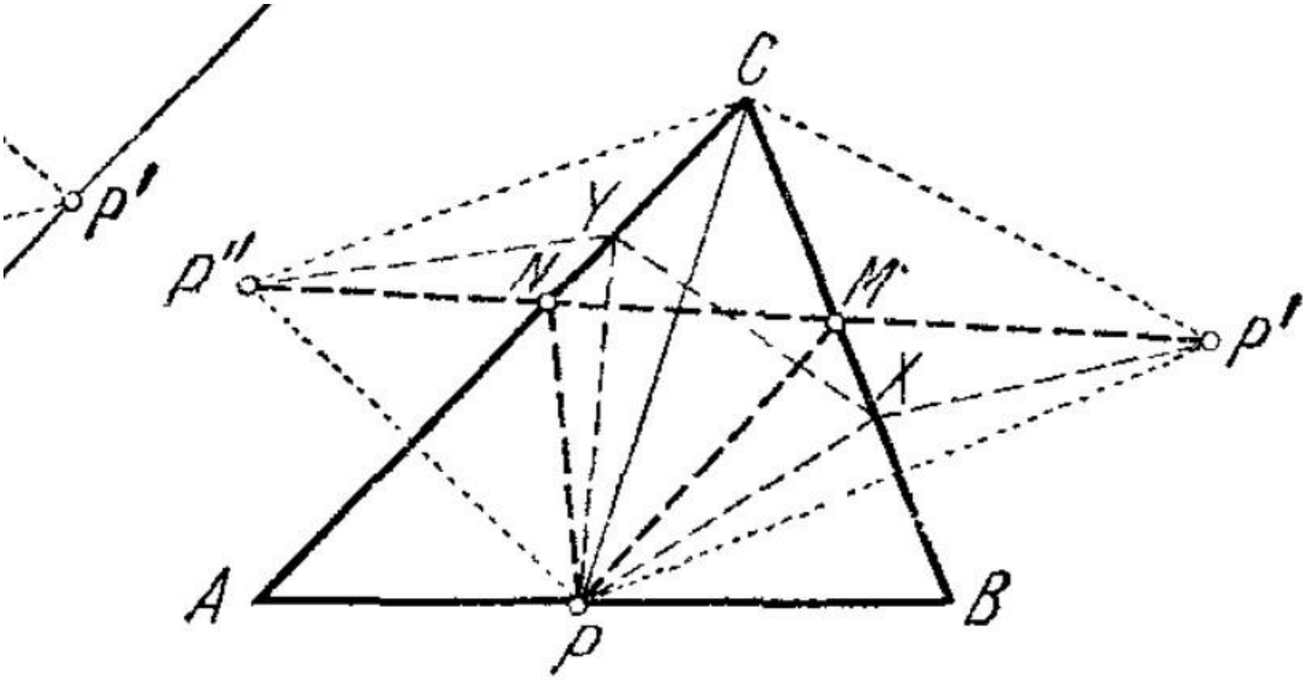
б) Впишіть у даний трикутник ABC трикутник найменшого можливого периметра.

Розв’язання: Перше рішення, нехай PXY -довільний трикутник, вписаний в АВС, одна з вершин якого збігається з точкою Р. Відобразимо симетрично трикутник АВС разом з трикутником РХУ від прямої BС; отриманий трикутник А$'$ВСі вписаний у нього трикутник Р$'$ХУ$'$ відобразимо від прямої СА$'$ (Рис, 3.7. а).



Оскільки ХУ $=$ ХУ$'$ і УР $=$ У$'$Р$'$ $=$ У$'$Р$''$, то периметр трикутника РХУ дорівнює довжині ламаної РХУ$'$Р". Тому периметр трикутника РХУ буде найменшим у тому випадку, коли найменшою буде довжина ламаної РХУ$'$Р".

Далі можуть бути дві можливості. Якщо відрізок РР" перетинає пряму ВС між точками В і С (а отже, і пряму СА$'$ між точками С і А$'$), то він буде коротшим за буд якою ламаною РХУ$'$Р", і шуканий трикутник буде визначено (трикутник РММ на (рис. 3.7.); М-точка перетину РР" з ВС, N - точка, симетрична точці N' перетину РР" з СА$'$ відносно BC).



б)

Якщо ж відрізок PP" перетне пряму BC поза відрізання BC, то найкоротшою з ламаних $PXУ'P"$ буде та, для якої точки X і $У'$ збігатимуться з точкою C. У цьому випадку шуканий трикутник вироджується у двічі взятий. Відрізок PC.

Залишається з'ясувати, коли матиме місце той чи інший випадок. Для цього зауважимо, що трикутник $A'B''C'$ виходить із трикутника ABC обертанням навколо точки C на кут, що дорівнює подвоєному куту C трикутника, бо послідовність двох симетрій щодо метрів щодо разуючих кута a прямих рівносильна обертанню навколо точки перетину цих прямих на кут $2a$: див. (рис.3.9),

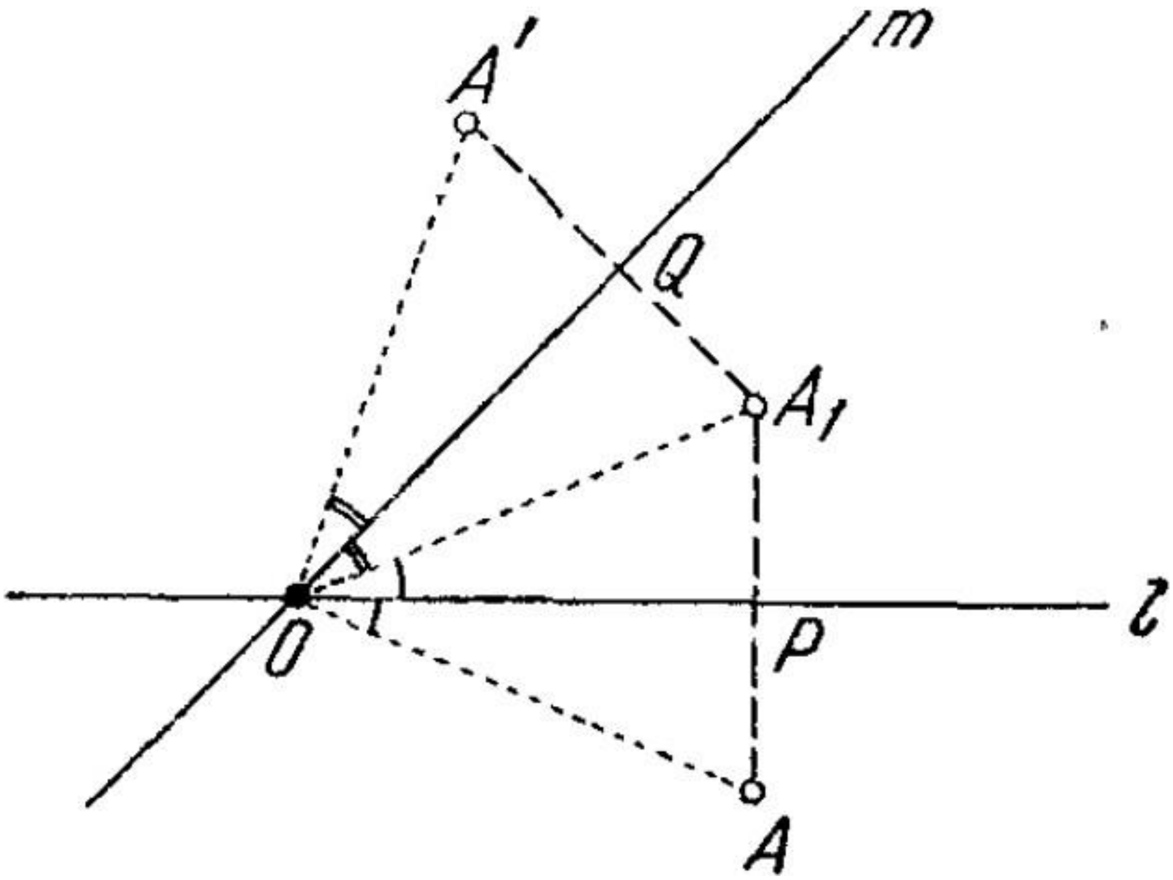


Рис. 3.9.

де очевидно, $OA = OA1'$ і $\angle AOA1 = 2\angle POA1, \angle A1OA' = 2\ \angle A1OQ,$ і значить, $\angle AOA' = 2\angle POA, + 2\angle A1OQ = 2\angle POQ = 2a.$ тому $\angle PCP'' = 2\angle C,$ звідки відразу слід що якщо $\angle C < 90º,$ то пряма PP'' перетне сторону BC трикутника; якщо $\angle C \geq 90º,$ то PP''

Перетне пряму BC або у своїй точці C, або у точці, що лежить на продовженні

відрізка BC за точку C. Друге рішення.

Нехай знову PXУ – будь який трикутник, вписаний у трикутник ABC; P′ і P′′— точки, симетричні точці P щодо прямих BC та CA (Рис.3.9).

Оскільки PX = P′X і PУ = P"У, то периметр трикутника PXУ дорівнює довжині ламаної P′XУP′′ тому, якщо P′P′′ перетне бічні сторони AC і BC трикутника ABC в точках M і N, то трикутник ABC в точках $M\ i\ N$, то трикутник PMM і є шуканий. Якщо ж $P'P''$ не перетне відрізки АС та BC, то шуканий трикутник вироди́ться в двічі взятий відрізок РС.

Аналогічно першому рішенню можна показати, що перший випадок має місце, коли кут трикутника менше 90°, а другий - коли $\angle C \geq 90^{\circ}$.

Зазначимо, що друге рішення мало відрізняється. від першого.

б) Перше рішення. Будемо вважати, що кут при вершині C заданого трикутника, гострий. Нехай Р – довільна точка сторони АВ; побудуємо згідно з першим рішенням задачі а) Вписаний в АВС трикутник PMN найменшого можливого периметра, що дорівнює довжині відрізка PP'' (див. мал.19, а). Залишається тільки вибрати точку Р так, щоб відповідний їй відрізок PP'' був найменшим. Згадаймо, що $\angle PCP'' = 2\angle C$, тобто не залежить від вибору точки P; тому основа рівнобедреного трикутника PCP" з данним кутом $\angle PCP'' = 2\angle C$при вершині буде найменшим, якщо буде найменшою бічна сторона СР. Далі треба розглянути окремо два випадки.

1. Кути при вершинах А і В трикутника АВС гострі (трикутник гострокутний). В цьому випадку відрізок СР має найменування величину, коли точка Р збігається з основою P_0 висоти CP_0 , трикутника АВС (рис. 3.10).

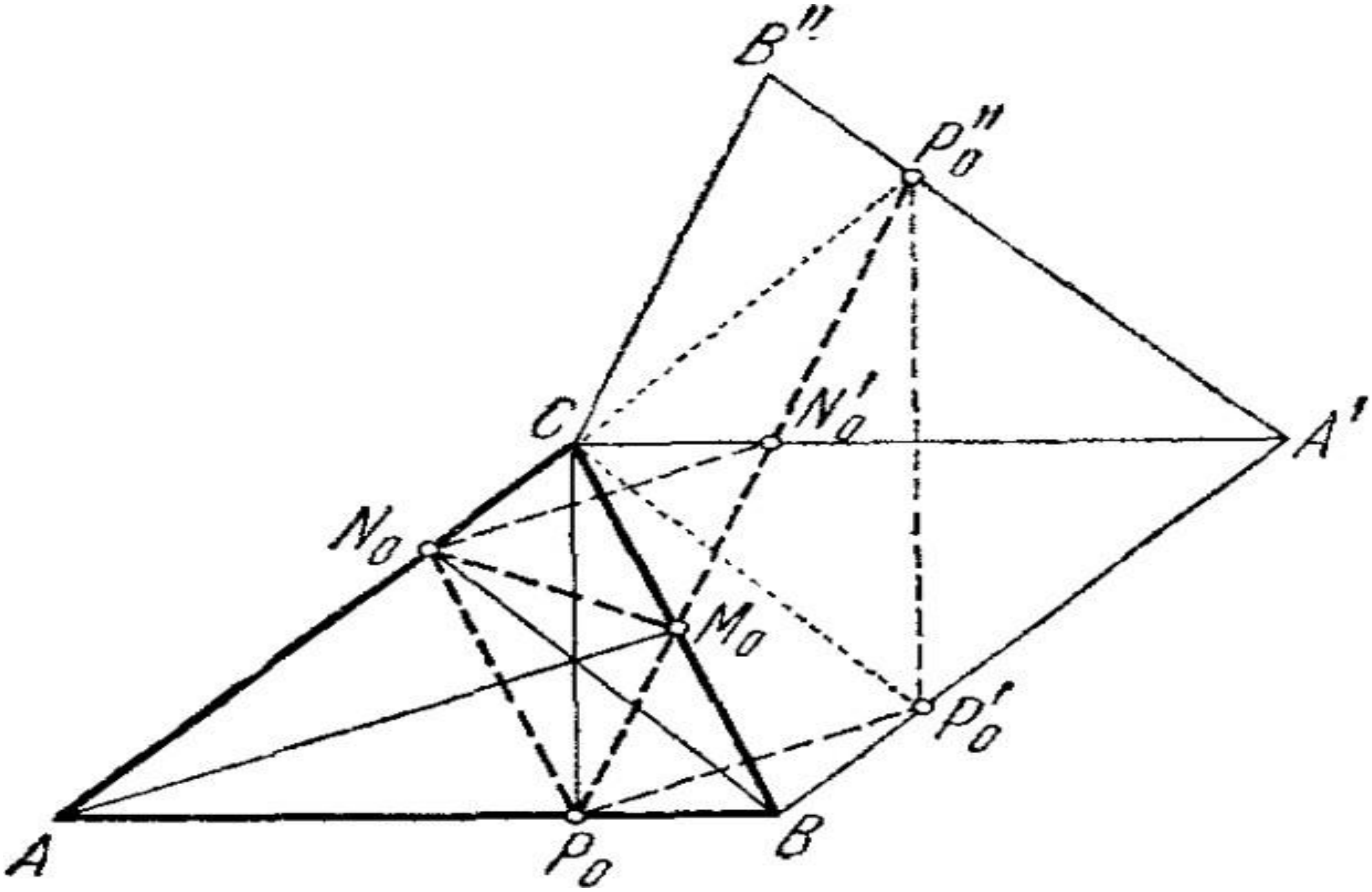


Рис. 3.10

Легко показати, що і вершини M_0і N_0 трикутника $P_0\,M_0N_0$ отриманого при такому виборі точки P, є основою висот трикутника ABC 1). Дійсно з рис. 3.10 випливає, що

$$\angle N_0P_0A = \angle CP_0A - \angle CP_0N_0 = 90^\circ - \angle CP_0''N_0' = \\ = 90^\circ - \frac{180^\circ - 2\angle C}{2} = \angle C,$$

отже, навколо чотирикутника BC$N_0\,P_0$, можна описати коло, і $\angle BN_0\,C = \angle BP_0\,C = 90°$. Також доводиться, що А$M_0 \perp$ ВС.

2. Якщо, наприклад, кут А прямий або тупий, то відрізок СР є найменшим, коли точка Р збігається з вершиною А трикутник. Звідси випливає, що шуканий трикутник вироджується у двічі взяту висоту АМ трикутника.

Друге рішення. При вирішенні задачі б) можна також виходити і з другого розв'язання задачі а). Оскільки периметр трикутника ММР (мал.19,6) дорівнює РР", $CP' = CP'' = CP$ і $\angle P'CP'' = 2\angle C$, то завдання зводиться до відшукання такої точки P.

Насправді наступна частина доказу є зайвої: з рівноправності всіх сторін трикутника АВС випливає, що якщо вершина P_0. шуканого трикутника $P_0 M_0 N_0$ є основа опущеної на бік АВ висоти, та точки M_0 і N_0, повинні збігатися з основами двох інших висот. що CP має найменше значення. далі див. перше рішення задачі.

3.2. Результати експериментального дослідження щодо впровадження методики розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень

Метою даного дослідно-експериментального дослідження є перевірка ефективності використання розробленої нами методики розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень

Вибірку педагогічного експерименту становили учні 10 А класу та учні 10 Б класу, які поділено на експериментальну групу (10 А клас – ЕГ) та на контрольну групу (10 Б клас – КГ). У кожній групі було по 18 дітей, тобто сукупну вибірку становило 36 дітей. В експериментальній групі на уроках геометрії використовувався інтегрований підхід, а з дітьми контрольної групи уроки проводилися традиційним методом.

Для того, щоб перевірити ефективність використання розробленої нами методики розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень в процесі навчання учнів 10 класів на уроках геометрії, було використано метод перевірки за допомогою контрольної роботи та метод спостереження.

Метод перевірки знань був використаний для оцінки рівня засвоєння матеріалу учнями, з якими не використовувався варіативний курс завдань на уроках геометрії та учнями після використання курсу на уроках геометрії. Контрольна робота складалась з теоретичних та практичних завдань, які охоплювали основні поняття та методи роботи, а також вимагали застосування отриманих знань для розв'язання різноманітних задач.

Метод спостереження використовувався для оцінки динаміки навчального процесу під час використання варіативного курсу завдань. Для цього були зафіксовані дані про активність учнів на уроці, їхнє ставлення до роботи з завданнями, рівень залученості до уроку, здатність до самостійної роботи та засвоєння нового матеріалу.

Контрольна робота була складена на основі завдань державної підсумкової атестації для учнів 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів та завдань НМТ 2025 р. та передбачала виконання завдань трьох рівнів. Завдання першого рівня (9 питань) мали тестовий характер та оцінювалися в 0,5 бали кожне. Максимальна кількість балів за виконання цієї частини – 4 бали. Три завдання (№10–11) другого рівня оцінювалися в 1 бал кожне, а два завдання (№12–14) третього рівня – по 2 бали. Максимальна кількість балів за виконання контрольної роботи – 12 балів.

Шкала оцінювання контрольної роботи була відповідно до виконання завдань з фізики наступною:

- учні 10 класів, які набрали сумарну кількість балів від 1 до 4 балів включно визначаються як такі, що мають низький рівень засвоєння знань з навчання геометрії;

–учні 10 класів, які набрали сумарну кількість балів від 5 до 8 балів включно визначаються як такі, що мають середній рівень засвоєння знань з навчання геометрії;

–учні 10 класів, які набрали сумарну кількість балів від 9 до 12 балів включно визначаються як такі, що мають високий рівень засвоєння знань з навчання геометрії.

У табл. 3.1 та на рис. 3.1 наведено розрахунки рівня засвоєння знань з фізики учнів 10 класів.

Таблиця 3.1. Визначення рівня засвоєння знань з геометрії учнів 10 класів

Рівні	ЕГ		КГ	
	К-сть учнів	%	К-сть учнів	%
Низький	1	5,6	5	27,8
Середній	5	27,8	8	44,4
Високий	12	66,6	5	27,8

	Низький	Середній	Високий
ЕГ	5.6%	27.8%	66.6%
КГ	27.8%	44.4%	27.8%

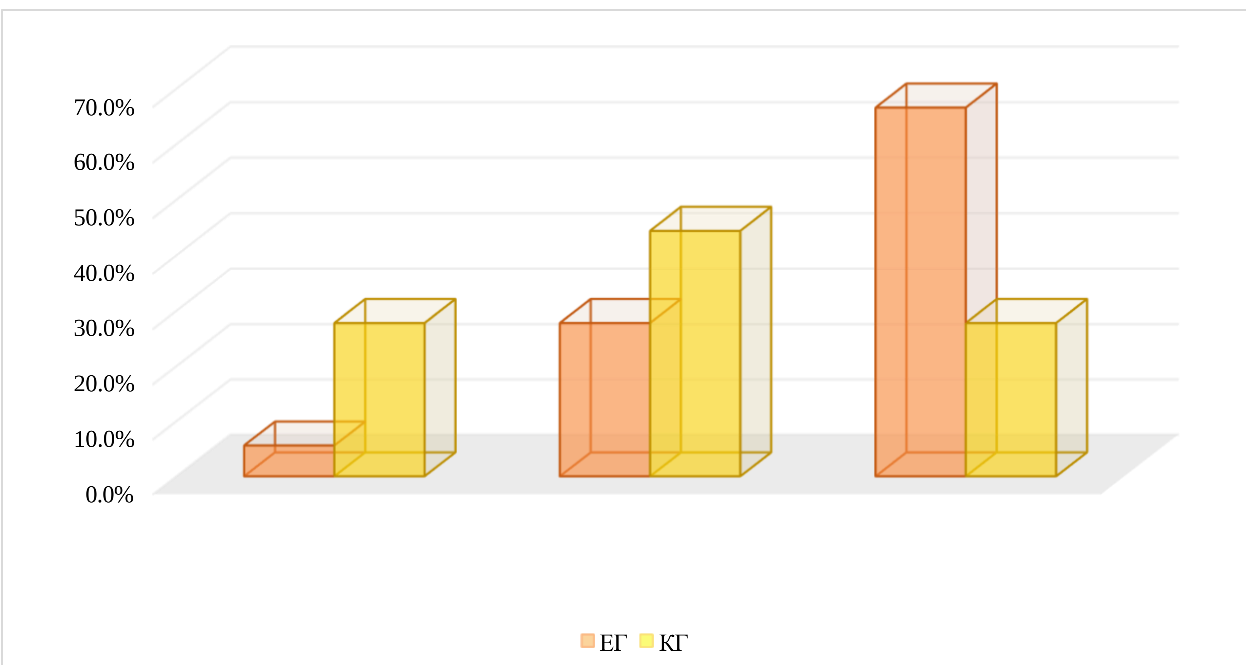


Рис. 3.1. Визначення рівня засвоєння знань з геометрії учнів 10 класів

Як видно із рис. 2.2 в ЕГ значно кращі результати виконання завдань контрольної роботи. У 66,6% учнів (12 дітей) – високий рівень засвоєння знань, у 27,8% учнів – середній рівень і тільки в 1 учня (5,6%) – низький рівень засвоєння знань з геометрії учнів 10 класів. Що стосується КГ, то отримано наступні дані: високий рівень засвоєння знань з геометрії учнів 10 тільки в 5 учнів (27,8%), середній рівень у 44,4%, а низький також у 5 учнів (27,8%). Дані результати свідчать про ефективність використання розробленого варіативного курсу завдань для уроків геометрії у 10 класі, оскільки більшість учнів показали високий рівень засвоєння знань з фізики в порівнянні з контрольною групою. Зокрема, в ЕГ було лише 5,6% учнів з низьким рівнем засвоєння знань, в той час як в КГ цей показник становив 27,8%. Таким чином, можна зробити висновок, що використання варіативного курсу завдань сприяє більш якісному засвоєнню матеріалу учнями 10 класів. Результати нашого дослідження свідчать про те, що використання варіативного курсу «Розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень завдань» у 10 класів дійсно сприяє більш якісному засвоєнню матеріалу учнями. Порівняння результатів контрольної роботи показали, що в ЕГ більше учнів мають високий та середній рівень засвоєння знань, а менше учнів мають низький рівень засвоєння знань, у порівнянні з КГ.

Також слід відзначити, що за результатами спостережень, учні, які працювали з варіативним курсом завдань, більше зацікавлені у процесі навчання та більш активно брали участь у дискусіях та вирішенні задач. Це може бути пов'язано з тим, що завдання були більш практично спрямовані та мали більший зв'язок з реальними життєвими ситуаціями.

Отже, наше дослідження підтверджує ефективність використання методики розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень, що сприяє більш якісному засвоєнню матеріалу та збільшенню зацікавленості учнів у процесі навчання.

Висновки до третього розділу

Результати дослідно-експериментального дослідження показали, що впровадження методики розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень дійсно сприяє покращенню якості засвоєння матеріалу учнями. Результати контрольної роботи свідчать про високий рівень засвоєння знань у більшості учнів, що свідчить про ефективність використання варіативного курсу завдань. Проте, виявлені недоліки у викладанні матеріалу та впровадженні курсу завдань під час дослідження свідчать про необхідність ретельної розробки та планування процесу навчання, включаючи врахування навчальних програм та інноваційних технологій та методик навчання. Також, для більш ефективного впровадження методики розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень слід проводити попередню підготовку вчителів та надавати їм необхідну методичну допомогу.

Отже, в цілому, результати дослідження підтверджують ефективність використання методики розв’язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень, але показують, що необхідно вдосконалювати процес навчання та враховувати недоліки, щоб досягти ще більш високих результатів.

.

ВИСНОВКИ

Отже, в даній магістерській роботі описується методика навчання загальних методів розв'язування стереометричних задач, та задач на відшукання найбільшого та найменшого значень. Учням потрібно знати та розуміти стереометрію як науку в геометрії тому що геометрія є абстрактною наукою, часто викладається без належного застосування. При написанні даної роботи ми дійшли наступних висновків:

1. На основі аналізу навчальної і методичної літератури по даній проблемі дійшли висновку, що методика навчання стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень є актуальною у зв’язку із зростанням потреб економіки, техніки. У зв`язку з тим, що все більше учнів мають проблеми у розв’язуванні стереометричних задачах, вчителям потрібно знати, як навчати дітей. Окремі аспекти проблеми навчання можна усунути шляхом використання технологій.

2. Вміння розв’язувати стереометричні задачі учнями розглядаються як правильні інтелектуальні дії, напрямлені на розв'язування поставлених задач. Характеристика цих дій дозволяє побачити загальні вміння розв'язувати планіметричні задачі. На основі наданому аналізу навчальної і методичної літератури по даній проблемі я дійшла висновку, що методика навчання і викладання стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень є актуальною у зв'язку із зростання ефективності в різних сферах економіки, техніки та інших галузей. Уміння вирішити поставлену задачу - це, насамперед, уміння самостійно провести правильний спосіб її вирішення. Також навчити учнів вирішувати це саме завдання означає що учні зможуть самі знайти спосіб рішення цього завдання.

3. Знання учнів з стереометрії є проблемою у її розумінні хоча це не так, як на перший погляд здається. Тому що саме вивчення цього матеріалу спонукає учнів до проведення дослідження і вдосконалення методики | розв'язування

стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень.

4. Традиційна методика викладання стереометрії приділяє велику увагу засвоєнню такими знань, що вимагає зміст предмета. При такому підході завдання використовуються переважно для закріплення вивченої теми і недостатньо для розвитку мислення. Прийоми, способи дій, закладені в запропонованих завданнях, залишаються для учнів неосмисленими і неусвідомленими. У школярів не виробляються критерії і правила, якими надалі можна керуватися при самовизначенні стратегії і тактики рішення нових завдань.

5. Вивчення курсу «Розв'язання стереометричних задач на відшукання найбільшого і найменшого значень» складається з трьох частин: теоретичної, практичної і контролю знань і умінь учнів. Теоретична частина варіативного курсу полягає у викладі учителем основних алгоритмів рішення завдань по темі, що вивчається, з наведенням прикладів і повідомлення учнем додаткових формул і теорем, які не входять в курс середньої школи. Практична частина варіативного курсу полягає в застосуванні такими, що вчаться отриманих знань для вирішення завдань. Після кожної теми проводиться самостійна робота, в результаті якої оцінюються отримані знання і уміння. По закінченню розділу проводиться залік. А у кінці навчального року - підсумкову контрольну роботу.

6. Наше дослідження підтверджує ефективність використання методики розв'язування стереометричних задач на відшукання найбільшого та найменшого значень, що сприяє більш якісному засвоєнню матеріалу та збільшенню зацікавленості учнів у процесі навчання. Курс сприяє розвитку інтелектуальному мисленню і уваги учнів, дозволяє їм краще розглянути і зрозуміти правильно навчальний предмет по даній темі. Сам курс сприятиме успішній здачі НМТ та інших екзаменах з математики, і подальшому навчанні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Стереометрія в опорних схемах. Київ : Факт, 2000. 68 с.

2. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К.

Математика. 11 клас. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Тернопіль : Навчальна книга Богдан, 2011. 480 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. Київ: Освіта, 2000. 239 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, 1989. 367 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. Математика. 2002. № 13. С. 7.

6. Бевз Г. П. Математика: проб. підруч. для 11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 1995. 191 с.

7. Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. Методика викладання математики в початкових класах. Навч. Посібник. Київ : Навчальна книга Богдан, 2006. 336 с.

8. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184–189.

9. Бурда М. І., Дубинчук О. С., Мальований Ю. І. Математика 10–11: проб. навч. посібник для шк., ліцеїв та гімназій гуманітар. профілю. Київ : Освіта, 1997. 224 с.

10. Бурда М. І., Мальований Ю. І., Колесник Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти К: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.: іл. Київ: Освіта, 1997. 224 с.

11. Генденштейн Л. Е., Єршова А. П. Наочний довідник з геометрії. Харків. Тернопіль : Гімназія Підручники і посібники, 1997. 96 с.

12. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.

13. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти.

О. Істер, О. Єргіна. Київ : Генеза, 2019. 288 с.

14. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б.та ін. Хврків : Гімназія, 2019. 240 с.

15. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти Нелін Є. П., Долгова О. Є. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.

16. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах: Для ст. шк. віку. Київ : Рад. шк., 1991. 208 с.

17. Коломієць О. М., Сільченко А. М. Застосування програми GeoGebra у навчанні учнів геометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 219-221.

18. Красницький М. П. Просторова уява та уявлення особистості й асоціативне мислення. Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 59-61.

19. Лов’янова І.В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: Теоретичний аспект: Монографія/ І. В. Лов’янова Черкаси: видавець Чабаненко Ю.А.; 2014. 354 с.

20. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 304 с.

21. Межейнікова Л. С. Про визначення активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 30. Вид-во ДонНУ, 2008, с. 248.

22. Мізенко Г. Задачі з геометрії для розвитку математичних здібностей дітей. Математика. 2001. № 1. С. 23-27.

23. Національний мультипредметний тест ЗНО онлайн 2025 року [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zno.osvita.ua/multitest/507/

24. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

25. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

26. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

27. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. *Математика*. 2004. 27-28. С. 18-22.

28. Овчар О. Методи розв'язування прикладних задач на уроках математики. *Молодь і ринок*. 2010. № 10(69). С. 145-150.

29. Пазиненко С.В. Збірник прикладних задач ДЛЯ 5-6-Х КЛАСІВ «Математика навколо нас»: Збірник задач для вчителів математики і учнів загальноосвітніх шкіл. URL: https://naurok.com.ua/zbirnik-prikladnih-zadach-93930.html ст12- 14

30. Пазушко Ж. І. Розвиваюча геометрія в початковій школі. 2005, 167 с.

31. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / За ред. В. О. Швеця. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.

32. Прокопенко Н. С., Щекань Н. П. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми

факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. Київ: Навчальна книга, 2003. 302 с.

33. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.

34. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія і методика навчання математики». Київ, 2007. 23 с.

35. Роганін О. М. Геометрія. 11 клас: Плани-конспекти уроків. Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2003. 256 с.

36. Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. *Інформаційні технології і засоби навчання.* № 6. 2014. С. 124-133.

37. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

38. Слєпкань З. І. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика : навч. посіб. для студ. спец. «Педагогіка і методика середньої освіти. Математика» за ред. З. І. Слєпкань. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. 292 с.

39. Слєпкань З. І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи. *Математика в школі*. 2003. № 9. С. 3-4.

40. Танабаш Л. Ю. Креативність, або творчі здібності. *Математика в школах України*. 2004. № 11. С. 8-10.

41. Терех О. Я. Навчальні задачі на уроках геометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 88-90.

42. Уроки узагальнення та систематизації знань. Реферат. URL:.https://ru.osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14807/

43. Федченко Л. Я. Методика організації узагальнення і систематизації знань і вмінь учнів при навчанні математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 1998. 179 с.

44. Фіцула М.М. Педагогіка: навч. посібник для студ. вищих пед. закладів освіти. Київ: вид. центр «Академія», 2000. 554 с.

45. Чернега Н. С. Розвиток логічного мислення учнів. Наукові записки. 2002. № 45. С.158-160.

46. Чеберніна Г. М., Сліпович Н. М. Математика в житті людини. Збірка задач., 2011.

47. Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. *Математика в школі 2009*. № 4. с. 17-24.

48. Швець В. О. Теорія та практика спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. В. О. Швець, А. В. Прус. Житомир : Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.

49. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: навчальний посібник. Київ: Вища школа, 2003. 463 с.

50. Ярославська Г. М. Многогранники? Еврика! Урок-гра в 11 класі. Математика в школах України. 2005. № 30. С. 45-90.

ДОДАТКИ

Додаток А

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту

Таблиця 1

Геометрія, 10 клас
(51 год. І семестр — 32 год, 2 год на тиждень,
ІІ семестр — 19 год, 1 год на тиждень, резерв – 7 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 17 годин	
Учень/учениця: **називає** основні поняття стереометрії; **розрізняє** означувані та не означувані поняття, аксіоми та теореми; **формулює** аксіоми стереометрії та наслідки з них; **застосовує** аксіоми стереометрії та наслідки з них до розв'язання нескладних задач; **класифікує** за певними ознаками взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі за кількістю їх спільних точок; **встановлює** паралельність прямих, прямої та площини, двох площин; **з'ясовує**, чи є дві прямі мимобіжними; **зображає** фігури у просторі; **застосовує** відношення паралельності між прямими і площинами у просторі до опису відношень між об'єктами навколишнього світу.	Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них. Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин.
Тема 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 17 годин	
Учень/учениця: **встановлює та обґрунтовує** перпендикулярність прямих, прямої та площини, двох площин; **формулює** означення кута між прямими, прямою та площиною, площинами; теорему про три перпендикуляри; **застосовує** відношення між прямими і площинами у просторі, відстані і кути у просторі до опису об'єктів навколишнього світу; **розв'язує** задачі на знаходження відстаней та кутів в просторі, зокрема практичного місту.	Перпендикулярність прямих. Перпендикулярність прямої і площини. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Двогранний кут. Вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами. Вимірювання кутів у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами.
Тема 3. **КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ 10 годин**	
Учень/учениця: **користується** аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі; **усвідомлює** важливість векторно-координатного методу в математиці;	Прямокутні координати в просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для

виконує операції над векторами; **застосовує** вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; **знаходить** відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; **використовує** координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів;	обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин

Таблиця 2

Геометрія, 11 клас
(51 год. І семестр — 32 год, 2 год на тиждень,
ІІ семестр — 19 год, 1 год на тиждень, Резерв – 14 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ 14 годин	
Учень/учениця: **розпізнає** основні види многогранників та їх елементи; **зображує** основні види многогранників та їх елементи; **має уявлення** про перерізи многогранника площиною; **формулює** означення вказаних у змісті многогранників; **записує** формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди **обчислює** величини основних елементів многогранників; **застосовує** вивчені формули і властивості до розв’язування задач, зокрема прикладного змісту.	Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 12 годин	
Учень/учениця: **обчислює** величини основних елементів тіл обертання; **застосовує** властивості тіл обертання до розв’язування задач; **розпізнає** види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об’єктах навколишнього світу.	Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі. Куля і сфера. Переріз кулі площиною.

Тема 3. ОБ’ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ 11 годин	
Учень/учениця: **записує** формули для обчислення об’ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери; **має уявлення** про об’єм тіла та його основні властивості; **розв’язує** задачі на обчислення об’ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.	Поняття про об’єм тіла. Основні властивості об’ємів. Об’єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери.

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», профільний рівень.

Таблиця 3

Геометрія, 10 клас
(105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 18 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ 15 годин	
Учень/учениця **наводить приклади** точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур; **пояснює що таке** плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною; **формулює** основні поняття, аксіоми, наслідки з них; **виокремлює серед многогранників**: піраміду та призму; **розрізняє** означувані та неозначувані поняття; аксіома та наслідок; видимі і невидимі елементи многогранника; **ілюструє** текстовий зміст аксіоми, теореми, задачі за допомогою рисунка; **зображає** піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів; **пояснює та записує:** належність точок та прямих площині; позначення многогранників, їх елементів та поверхні; скорочений запис умови задачі; **характеризує** форму просторової геометричної фігури; сліди площини перерізу; розміщення двох точок двох площин, якими визначається лінія їх перетину;	Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки. Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду методом слідів.

розв'язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах.	
Тема 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 24 години	
Учень/учениця **демонструє на прикладах** моделей стереометричних фігур (об'єктах навколишнього середовища): розміщення паралельних прямих (відрізків); мимобіжних прямих; паралельність прямої (відрізка) до площини; паралельність двох площин; **формулює** означення, ознаки, теореми з тем, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** ситуації можливості точок і прямих належати одній площині; на зображених рисунках, моделях: площини граней многокутників; паралельні та мимобіжні прямі; проекціювання відрізків у певному відношенні; **пояснює та записує** ознаки: мимобіжних прямих; паралельності прямої та площини; паралельності площин; **класифікує** взаємне розміщення: двох прямих; прямої та площини; двох площин; зображення просторових фігур на площині за видом і формою; **зображає** плоскі та просторові фігури на площині; паралельне проекціювання многокутника на площину; переріз січної площини і многогранника; **обґрунтовує** методи слідів і проекцій під час побудови перерізів січної площини і многогранника; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** властивості паралельних площин та паралельного проеціювання; **розв'язує вправи, що передбачають:** встановлення взаємного розміщення двох прямих; прямої та площини; двох площин; застосування ознак паралельності прямих, прямої і площини, площин в доведеннях практичних задач; застосування методу слідів та властивостей проекціювання; виконання побудови перерізів многогранників; моделювання життєвих ситуацій паралельності та проекціювання в задачах практичного та прикладного змісту.	Взаємне розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються; паралельні прямі; мимобіжні прямі. Ознака мимобіжних прямих.. Взаємне розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються; паралельні пряма і площина. Ознака паралельності прямої та площини. Взаємне розміщення двох площин у просторі: площини, що перетинаються, паралельні площини. Ознака паралельності площин. Властивості паралельних площин. Паралельне проекціювання, його властивості. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів.
Тема 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 26 годин	

Учень/учениця **демонструє на прикладах** моделей стереометричних фігур (об'єктах навколишнього середовища) перпендикулярність прямих у просторі, прямої та площини, двох площин; **формулює** означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** перпендикуляр і похилу, перпендикуляр і проекцію похилої; кут між двома прямими простору, кут між прямою і площиною, кут між площинами; **пояснює та записує** зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими. **пояснює** що таке двогранний кут, лінійний кут двогранного кута. **класифікує** взаємне розміщення: двох прямих простору; прямої та площини; двох площин; **зображає** рисунком перетин двох прямих простору. прямої і площини під прямим кутом; перетин двох (трьох) площин під прямим кутом; кути у просторі: між двома прямими простору, прямою і площиною, двома площинами; ортогональне проеціювання многокутника на площину; **знаходить на рисунку та зображає** відрізок, яким позначається (визначається) відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; між паралельними площинами; між мимобіжними прямими; **аналізує та досліджує** перпендикулярність деякої прямої до похилої чи її проекції за теоремою про три перпендикуляри; **обґрунтовує** перпендикулярність прямих, прямої і площини, площин; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** властивості перпендикулярних прямих простору на прикладах; прямокутні трикутники, кути яких утворені трьома попарно перпендикулярними прямими (площинами); форму ортогональної проекції многокутника; кут між многокутником та його проекцією; **розв'язує вправи, що передбачають:** встановлення взаємного розміщення двох прямих простору; прямої та	Перпендикулярність прямих у просторі. Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Ознака перпендикулярності площин. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин. Кути у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Відстані у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя, від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими. Ортогональне проекціювання. Зображення кола. Площа ортогональної проекції многокутника. Практичне застосування властивостей паралельності та перпендикулярності прямих і площин.

площини; двох площин; застосування ознак перпендикулярності прямої і площини; двох площин; властивостей перпендикулярності прямих прямих простору; перпендикуляра і похилих; виконання побудови ортогональної проекції многокутника; знаходження лінійних вимірів досліджуваних фігур; площ многокутника та його ортогональної проекції, кута між многокутником та його ортогональною проекцією; моделювання життєвих ситуацій застосування перпендикулярності прямих і площин; ортогонального проекціювання в задачах навчально-практичного та прикладного змісту.	
Тема 4. КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ 22 години	
Учень/учениця **наводить приклади** моделей симетрії відносно точки та прямої із об’єктів навколишнього середовища; **формулює** означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори; **пояснює та записує** зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими. **класифікує** взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі; **зображає на** рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число; **знаходить на рисунку та зображає** напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини; **аналізує та досліджує** координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення; **обґрунтовує** перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток	Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні. Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач. Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння площини, сфери.

векторів; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач; **застосовує** формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач; **розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.	Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення.

Таблиця 4

Геометрія, 11 клас
(105 год, 3 год на тиждень, резерв – 28 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ 24 години	
Учень/учениця **наводить приклади:** геометричних фігур; многогранників і їх видів; **пояснює що таке:** многранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей для многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує многогранники** за характеристиками їх елементів: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і	Многогранні кути. Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди,

розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; видимі і невидимі елементи призми/піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проекціювання: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника – висота, твірна, апофема; перерізи площинами (осьові, діагональні, паралельні до площини основи тощо); **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи); **обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв’язування прямокутного трикутника; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до	зрізаної піраміди. Правильні многогранники.

розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 21 година	
Учень/учениця **наводить приклади:** тіл обертання; **пояснює що таке:** циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; **формулює** означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною; **класифікує** геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; **розрізняє** елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; **зображає** рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проекціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; перетин кулі площиною; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур; **обґрунтовує** властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного	Тіло обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації геометричних тіл.

кола; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; елементи комбінації просторових фігур; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.	
Тема 3. ОБ’ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ 16 годин	
Учень/учениця **пояснює що таке:** об’єм многогранника; об’єм паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди; **формулює** основні властивості об’ємів многогранника; **формулює і доводить** теореми про: об’єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; об’єм призми; об’єм піраміди; **зображує** рисунком, відповідно до властивостей паралельного проеціювання: призму, паралелепіпед, піраміду, зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об’єму; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об’єму прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; **аналізує та досліджує** лінійні виміри та величини для обчислення об’єму; **обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди, призми, паралелепіпеда; покрокові висновки під час розв’язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** об’єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об’єму прямокутного і похилого	Об’єм многогранника та властивості об’єму. Об’єм многогранників: паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди.

паралелепіпеда; призми; піраміди.	
Тема 4. ОБ’ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ 16 годин	
Учень/учениця **наводить приклади:** тіл обертання; **пояснює що таке:** об’єм циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса; площа сфери; **формулює і доводить** теореми про об’єм: циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; **розрізняє** розгортки поверхні циліндра і конуса; **зображує** рисунком, відповідно до властивостей паралельного проеціювання: циліндра, конус, зрізаний конус; кулю та її частини; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об’єму; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об’єму циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єму кулі та її частин; **вимірює та обчислює** площі бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; **аналізує та досліджує** лінійні виміри та величини для обчислення об’єму; **обґрунтовує** розміщення основи висоти циліндра, конуса, зрізаного конуса; центр кулі; покрокові висновки під час розв’язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** об’єм та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; площу сфери; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об’єму циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі; площ бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, площу сфери. знаходження площ поверхонь комбінації просторових фігур.	Об’єм тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі та її частин. Площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса. Площа сфери.

Додаток Б

Задача 1.

Конусоподібну палатку висотою 3,5 м і діаметром основи 4 м вкрито тканиною (рис.1). Скільки квадратних метрів пішло на палатку?

Рис. 1

Розв'язання

Бічна поверхня конуса обчислюється за формулою $S = \pi R l = \frac{\pi D l}{2}$. Твірну l=MN знайдемо із ΔMON

$l = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{12{,}25 + 4} = \sqrt{16{,}25} \approx$ 4,03 (м).

Обчислимо бічну поверхню: S=3,14*4*4,03$\approx$25,3 (м^2)

Відповідь: $\approx$25,3м^2.

Задача 2.

Циліндрична труба (рис. 10) діаметром 65 см має висоту 18 м. Скільки жерсті треба для її виготовлення, якщо на заклепку іде 10% матеріалу?

Рис. 2

Розв'язання.

Бічна поверхня циліндра дорівнює: S= *ПDh*,

S=3,14*0,65*18 $\approx$ 36,74 (м^2).

На заклепу витрачається 10% матеріалу тобто S_1= 3?674 (м2). Тоді на виготовлення труби необхідно така кількість жерсті:

$S_0=S+S_1 \approx 36{,}74+3{,}674 \approx 40{,}4$ (м^2)

Відповідь: $\approx$ 40,4 м^2.

Задача 3.

Пастила мала форму куба із стороною 4 дм. Її нарізали однаковими прямокутними призмами із сторонами 10х4х2 см (рис. 4). Скільки таких брусочків утворилось?

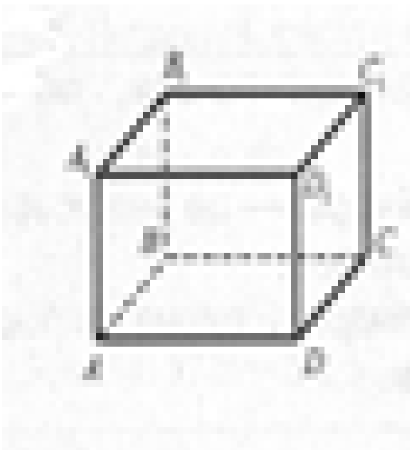


Рис. 3

Задача 4.

Упаковка для какао, виготовлена у формі прямокутного паралелепіпеда має розміри 11х7х5 см. Визначити площу її бічної поверхні (рис. 5)

Рис. 4

Задача 5.

До Дня народження Варвари замовили торт, який складається з двох циліндричних бісквітних коржів (рис. 6). Перший – R_1 = 15 см, H_1 = 10 см; другий - R_2 = 9 см, H_2 = 8 см. Обчислити об’єм бісквіту.

Рис. 5

Задача 6.

На пекарському турнірі студенти виготовили крокембуш у формі конуса об'єм якого 144 см^3, а довжина кола основи $8\sqrt{\pi}$ см (рис. 7). Знайдіть висоту крокембуша.

Рис. 6

Задача 7.

Обчислити діаметр основи баночки згущеного молока, якщо площа її бічної поверхні – 72 π см^2, а об'єм – 144 π см^3 (рис. 8)

Рис. 7

Задача 8.

Шматок ковбаси, що має форму циліндра, висота якого 12 см, а діаметр основи 5 см, розрізали на 25 порцій (рис. 9) Який об'єм однієї порції?

Рис. 8

Задача 9.

Цинкове відро має форму зрізаного конуса з діаметрами основ 38 см і 22 см та твірною 27 см (рис. 10). Скільки матеріалів пішло на його виготовлення, якщо на шви та відходи йде 12%?

Рис. 9

Задача 10.

Студент купив в магазині гарну чашку у формі півкулі і хоче дізнатися, який її вміст (рис. 11). Він виміряв діаметр чашки і висоту, які дорівнюють відповідно 15 см і 7,5 см. Знайти об’єм чашки. Які виміри зайві?

Рис. 10