Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему

Методичні підходи до вивчення геометрії в профільних класах

Виконала: студентка 2 курсу магістратури, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання Софія Петрівна Репетуха

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Олександр Васильович Крайчук

Рецензент: Кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри Інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем’янчука»
Юрій Геогійович Лотюк

Рівне – 2024 року

Зміст

Вступ

Актуальність.

На сучасному етапі окремі аспекти професіоналізації підготовки майбутніх учителів математики в Україні досліджують такі математики-методисти: М. Бурда, Л. Білоусова, С. Семенець, О. Скафа, Н. Тарасенкова, О. Чашечникова, В. Шарко та інші. Теоретичним дослідженням наукової роботи студентів різних спеціальностей присвячені праці М. Братко, О. Колесников, А. Конверський, В. Круглик, В. Марцин, І. Рассохи, Г. Цехмістрової. Питаннями наукової фахової підготовки майбутніх учителів математики в різні часи займалися відомі науковці та методисти: В. Бевз, Ю. Колягін, О. Мордкович, З. Слєпкань, М. Шкіль, Н. Шунда.

Система загальної середньої освіти України на даний момент перебуває в процесі впровадження профільного навчання в старшій школі. Профілізація навчання старшокласників є важливим кроком у реформуванні освіти.

Чому так важливо вивчати геометрію? Вона має навчати учнів правильного сприймання навколишнього світу. Це основне положення, яким має керуватися вчитель при плануванні навчальної діяльності.

Найважливіше завдання стереометрії – формування вмінь розв'язувати задачі. Тому методика формування вмінь набувати стереометричних знань і застосовувати їх є важливою складовою методики навчання стереометрії.

Найголовніша умова профільного навчання орієнтованість навчально-методичних засобів навчання. Вона реалізується у рівні викладу матеріалу, змісті підручника, диференційованості дидактичних матеріалів, характері прикладів та ілюстрацій. Підготовка до навчання стереометрії і організація повторення планіметрії є важливим етапом навчального процесу, особливо при профільному навчанні. Коли учні вивчають геометричні тіла, варто значну увагу приділяти найважливішим видам конструювання тіл, а також дослідження їхніх властивостей. Це сприяє формуванню просторового мислення, розвитку логічного мислення, забезпечення практичної спрямованості навчання.

Зважаючи на практичну необхідність, недостатню наукову розробленість та соціальну значимість було обрано тему роботи: «Зміст і методика проведення курсу за вибором «Методичні підходи до вивчення геометрії в профільних класах»».

Об'єкт дослідження. Процес навчання учнів профільної школи розв'язувати геометричні задачі.

Предмет дослідження. Удосконалення змісту та методики курсу за вибором «Методичні підходи до вивчення геометрії в профільних класах»

Мета дослідження. Полягає у тому, щоб теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити зміст і методику проведення курсу за вибором «Методи розв'язування геометричних задач в профільній школі».

Гіпотеза дослідження. Навчання учнів профільних класів розв'язуванню стереометричних задач досягне вищого рівня в порівнянні зі спостережуваним в досвіді переважної більшості, якщо:

а) зміст курсу буде будуватися за проблемно-тематичним принципом у вигляді цільової навчальної системи задач;

б) форми і методи навчання учнів профільних класів розв'язувати геометричні задачі будуть будуватись на основі технологій рівневої диференціації в особисто-орієнтованому навченні.

Відповідно до предмета, мети й гіпотези дослідження визначено такі **завдання:**

- обґрунтувати загальні засади профільної освіти;
- вивчити науково-методичну літературу з предмету дослідження;
- проаналізувати роль і місце задач у навчанні геометрії в профільних класах;
- розглянути класифікацію стереометричних задач;
- проаналізувати методи та способи розв'язування стереометричних задач;
- розробити, теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити систему вправ до курсу за вибором.

Наукова новизна. Обґрунтувати зміст та методику проведення курсу за вибором «Методи розв'язування геометричних задач в профільній школі».

Методи дослідження. Теоретичні – системний аналіз навчально-методичної і психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів.

Емпіричні – бесіди з вчителями і викладачами, спостереження, вивчення і узагальнення досвіду загальноосвітніх закладів щодо реалізації профільного навчання з математики.

Теоретичне значення роботи полягає в обґрунтуванні та розробці курсу за вибором «Методичні підходи до вивчення геометрії в профільних класах».

Практична цінність. Дану роботу можуть використовувати вчителі математики для проведення уроків в профільних класах, для вивчення та застосування різних методів до розв'язування задач стереометрії, а також для реалізації проекту зі створення і апробації методичного комплексу для вчителів математики у профільних групах учнів.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, додатків та списку використаних джерел.

Перший розділ роботи, який називається «Історико-педагогічні аспекти становлення профільної школи», починається зі сторінок історії, згадуються світові тенденції диференціації навчання, обґрунтовуються загальні засади профільної освіти.

У другому розділі під назвою „Зміст, структура та класифікація задач в стереометрії» розглядається зміст та структура задачі, пояснюється поняття «задача» в психології та дидактиках різних науковців. Також в цьому розділі розглядається класифікація стереометричних задач.

У третьому розділі роботи – «Зміст і методика курсу за вибором «Методичні підходи до вивчення геометрії в профільних класах» – розроблена авторська програма курсу за вибором, розглядаються методичні рекомендації учням щодо розв'язування стереометричних задач, а також рекомендації вчителям щодо формування вмінь в учнів розв'язувати задачі. Крім того розроблено систему вправ з планіметрії, як актуалізації знань зі стереометрії, систему вправ з стереометрії, а також систему усних вправ до даної теми.

Апробація результатів дослідження. Основні положення та результати дослідження обговорювалися на II Міжнародній науково-практичній конференції «Achievements of 21st Century Scientific Community» (м. Дніпро, 16-17 вересня 2024р.). Результати роботи також були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів і студентів Рівненського державного гуманітарного у 2023 та 2024 роках та анонсовані в роботі [30].

РОЗДІЛ І. ІСТОРИКО-ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ СТАНОВЛЕННЯ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

1.1. Історичні особливості організації профільного навчання у XX ст.

На певних історичних етапах функціонування школи диференціація навчання реалізовувалась по-різному. На кожному етапі історичного розвитку, особливості організації профільного навчання в XX ст. мали свою специфіку організації. Проаналізувавши різні джерела, можна виокремити головне:

У 20-их роках будувалася Профільна школа і мала на меті забезпечити трудову підготовку випускників на допрофесійному рівні. Вона становила єдину форму освіти підлітків та юнацтва. Було передбачено поділ на такі профілі: сільськогосподарський (агрономічна школа), індустріально-технічний (технічна школа), соціально-економічний та медичний (школа лікарського помічника).

Формування концепції розвивального навчання поклало початок в 50-их роках. Почали створювати школи з поглибленим вивченням окремих предметів.

У 60-их роках середню освіту здобували в різнотипових середніх закладах освіти: загальноосвітня школа, середні спеціальні навчальні заклади, середні професійно-технічні училища.

Саме в період 50-60-их років С. Шварцбурд створив перший в країні спеціалізований клас, в якому готували програмістів-обчислювальників. Оскільки, підготовка програмістів-обчислювальників вимагала глибоких математичних знань, це стало натхненням на створення шкіл з поглибленим вивченням математики.

Виникли також і певні проблеми реформи математичної освіти, які розглядали учені-методисти: 1) Основною формою диференціації у старших класах було те, що вводились предмети на вибір і скорочувались обов’язкові предмети (М. Рогановський). 2) Враховуючи вікові особливості учнів та їх знання, піднімалося питання про використання «методу нашарування» (Є. Семенов). 3) Система навчання в профільних класах мала бути такою, щоб повністю забезпечити потреби вищої школи (Н. Кварацгелія).

Тому В. Болтянський, Г. Глейзер, С. Черкасов запропонували свою концепцію диференційованого навчання математики. За даною концепцією припускають поділ учнів на три групи:

- учні, для яких математика служить для загального розвитку;
- учні, які вважають, що математика є важливою в подальшій професійній діяльності;
- учні, які вважають, що їх майбутня діяльність неможлива без математики [2, 3, 16].

Щоб реалізувати цю концепцію її автори вважають, що необхідно створити відповідно три підручники з математики, що відповідають загальнокультурному, прикладному і творчому рівнях.

Відомі науковці-методисти М. Метельський, В. Болтянський, О. Дубинчук, З. Слєпкань, С. Соболь висловлювали свої думки щодо реалізації концепції диференційованого навчання математики.

- Основними засадами диференційованого навчання є те, що в різних профілях на математику слід використовувати різні програми та підручники; виділяти різну кількість тижневих годин.
- Потрібно досягнути визначеного рівня математичної культури, обсягу знань та стилю мислення – це найголовніше, навчаючи дитину, яка надалі буде мало використовувати знання з математики.
- Однією з тенденцій в концепції шкільної математичної освіти є розуміння необхідності математичної освіти для всіх учнів. Тому що, тільки за наявності належної математичної підготовки людина може визначити свою подальшу долю, якщо це йдеться про оволодіння новою професією чи спеціальністю, про підвищення кваліфікації і т.д.

1.2. Досвід країн Європи і світу щодо запровадження профільного навчання

Проаналізувавши різні джерела, можна дійти висновку, що елементи профільного навчання в європейських старших школах в тій чи іншій мірі почали запроваджуватись понад 100 років тому.

Так 130 років тому профільним навчальним закладом стає французький ліцей. Що стосується математичної освіти, то в усіх секціях математика вивчалася всіма учнями ліцею, але в різних секціях – різний обсяг. Середня освіта Франції має наступну структуру: елементарний цикл – 5 років (так звана початкова школа), перший цикл – 4 роки та третій цикл – 3 роки (середня школа). Математика у французькій школі є обов'язковим предметом для вивчення всіма учнями.

Найбільш цікавими для нас є курси математики І-го та випускного класів. Тут вивчають математику в залежності від обраного напряму: філософського (математику вивчають 2 години на тиждень) і математичного (передбачається 6 годин в І класі та 9 годин у випускному).

Філософський напрям сприяє формуванню широко гуманітарного кругозору учнів та являє собою становлення філософського мислення.

Математичний напрям являє собою великий курс, який готує учнів, які будуть тісно пов'язані професією з математикою. Програма поглиблює знання учнів та дає змогу оволодіти математичними методами дослідження задач і з інших областей знань.

Особливості сучасної системи середньої освіти в Німеччині пов'язані перш за все з федеративним устроєм країни (табл. 1.)

Таблиця 1.

Особливості системи середньої освіти в Німеччині

Гімназія	Загальна школа	
	Реальна	Головна
По завершенню навчання учень отримує атестат про повну середню освіту	Навчання дає змогу потрапити до ВНЗ (професійних і академічних)	Навчання спрямоване на професійну освіту. Передбачає допрофільну підготовку

Проаналізуємо дослідження, яке провів Л. Фаннінгер та розглянемо основні завдання профільного навчання основних шкіл Австрії:

- створення умов із врахуванням розвитку навчально-пізнавальних здібностей і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів;
- забезпечення умов для життєвого і професійного самовизначення учнів, формування в дітях гуманних почуттів та любові до праці;
- спрямування дітей до майбутньої професії;
- забезпечення перспективних зв'язків між загальною середньою та професійною освітою відповідно до обраного профіля [2].

Середня освіта Польщі – триступенева. Загальний час навчання до закінчення середньої школи становить від 12 до 14 років. Система середньої школи має такий вигляд: Початкова школа – 6 класів, Гімназія – 4 роки, Ліцей – 4 роки. По закінченню навчання в середній школі учні здають матуральні іспити. В разі успішної здачі іспитів отримують атестат зрілості.

Коротка характеристика зарубіжного досвіду організації профільного навчання говорить про те, що профільний предмет залишається головним компонентом змісту освіти на цьому рівні. Загальносвітові тенденції розвитку освіти говорять про те, що в цих країнах педагоги обрали шлях поліфуркації. Як зазначала О. Локшина, що серед основних цілей старшої школи в зарубіжних країнах можна виокремити такі:

- розкриття потенціалу особистості та її індивідуальний розвиток
- більше кваліфікованої робочої сили для задоволення потреб економіки
- формування активного члена громадянського суспільства.

Досить цікавими є особливості математичної освіти у Канаді, США, Японії.

У школах Японії розроблено різні за рівнем та змістом викладання курсів математики. Учень може обрати один загальний обов'язковий курс або обрати ще один (або більше).

В США учень може обмежитися одним, двома або декількома курсами математики, але й може не вибирати жодного. Слід зазначити, що така тенденція призвела до зниження рівня математичної підготовки випускників середньої школи. Тому в 1987 р. Національна рада вчителів США запропонувала програму з математики, яка є загальною для всіх учнів. Звичайно, що вона передбачає різні методичні підходи навчання учнів, що обрали різні напрями навчання.

Математику в канадській школі поділяють на два рівні – базовий та поглиблений. Що цікаво, тут математику не розбивають на окремі уроки з алгебри та геометрії.

Проаналізувавши закордонний досвід, представлений у Проекті концепції профільного навчання, можна виділити для всіх вивчених країн загальні риси організації навчання у старшій ланці середньої школи:

1. В усіх країнах загальна освіта на старшому ступені – профільна.
2. Зазвичай, профільне навчання охоплює три останні роки навчання в школі.
3. Частина учнів, які продовжують навчання у профільній школі, продовжує зростати в усіх країнах.
4. Кількість обов’язкових навчальних предметів у профільній школі в порівнянні з основними значно менша.
5. Зазвичай, профільна школа відокремлена як окремий вид освітньої організації.
6. Документи про закінчення навчання в старшій (профільній) школі зазвичай надають право на зарахування до вищих навчальних закладів [15].

1.3. Мета, завдання і принципи організації профільного навчання

Школа XXI століття - це школа, в якій повинні реалізовуватись нові ідеї щодо організації освіти. У реформуванні середньої освіти в Україні в даний момент найактуальнішою проблемою є впровадження профільного навчання. Нова школа має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів, для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності. Профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно-орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у створенні власної освітньої програми.

Профільне навчання – вид диференціації, що за рахунок змін у змісті, організації та структурі освітнього процесу, дає можливість якомога точніше враховувати здібності та інтереси учнів, зважаючи на їх можливості, а також, створювати належні умови для старшокласників відповідно до їх професійних інтересів.

Метою профільного навчання є надання якісної освіти для старшокласників у відповідності з їхніми індивідуальними можливостями, здібностями і потребами; забезпечення професійного орієнтації учнів щодо їх майбутньої діяльності, яка, до того ж, користується попитом на ринку праці; встановлення тісного зв'язку та наступності між загальної середньою і професійною освітою; забезпечення можливості формування інтелектуального та культурного потенціалу як найвищої цінності нації.

Основні завдання профільної школи:

- сприяння у розвитку творчої самостійності, формуванні дослідницьких умінь і навичок, ціннісних орієнтацій, які дають можливість випускнику школи успішно само реалізуватися;
- продовження формування в учня його духовності і культури, громадянина України, що здатний зробити свідомий суспільний вибір;
- здійснення психолого-педагогічної діагностики щодо визначення готовності до прийняття самостійних рішень учня, пов'язаних з вибором професійного спрямування;
- забезпечення наступності між загальною середньою та професійною освітою, можливістю обрати та отримати професію [2, 6].

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

Соціальної рівноваги (узгодження між трьома позиціями: можливість освітніх послуг, запитів ринку праці і соціальних очікувань випускників школи).

Наступності і неперервності (взаємозв'язок між допрофільною підготовкою, профільним навчанням та професійною підготовкою).

Варіативності (можливість вибору предметів; багаторівневість освітніх програм; використання різноманітних технологій).

Гнучкості (можливість зміни профілю навчання, змісту і форм організації профільного навчання).

Діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів відповідно до обраного профільного навчання).

Диференціації (можливість самостійного вибору школярем профілю навчання, виходячи з їх здібностей, результатів навчання та бажань).

Індивідуалізації (врахування індивідуальних особливостей особистості для досягнення поставленої мети) [9].

1.4. Структура та форми організації профільного навчання

Профільне навчання – навчання, що спрямоване на врахування нахилів, здібностей та інтересів кожного учня щодо їх професійного та соціального самовизначення і відповідності вимогам сучасного ринку праці. Такий підхід до організації освіти учнів старших класів найповніше реалізує принцип особистісно-орієнтованого навчання та дає змогу створити найкращі умови для їхнього професійного самовизначення та подальшої самореалізації. Впровадження профільного навчання керується такими ідеями:

- учні мають можливість будувати власну освітню траєкторію;
- запровадження компонентного формату змісту освіти;
- зменшення кількості обов’язкових предметів у порівнянні з базовою освітою;
- різноманітність організаційних форм.

Відповідно до сучасних уявлення профільне навчання представлене:

- базовими предметами (рівень стандарту);
- обов’язково-вибірковими предметами;
- профільними предметами;
- курси за вибором(факультативи та спеціальні курси) [9, 22].

За характером взаємодії суб’єктів виділяють такі форми організації профільного навчання:

1) внутрішньошкільні: профільні класи (групи) в однопрофільних і багатопрофільних загальноосвітніх навчальних закладах; профільні класи з

поглибленим вивченням предметів; профільне навчання за індивідуальними навчальними планами та програмами (індивідуальні освітні траєкторії); динамічні профільні групи (у тому числі різновікові); профільні класи (групи) в спеціалізованих школах – інтернатах.

2) зовнішньошкільні: міжшкільні профільні класи (групи) в опорній школі освітнього округу, районному ресурсному центрі, НВК тощо; міжшкільні класи (групи) професійної підготовки та профільного навчання на базі міжшкільного навчально-виробничого комбінату (МНВК); профільні класи (групи) загальноосвітніх навчальних закладів на базі професійно-технічних, вищих навчальних закладів.

Міжшкільна взаємодія – взаємодія шкіл, коли профільне навчання реалізується у формі міжшкільних профільних груп (тобто, з метою ширшого його вибору). Профілі розподіляються між школами, які обрали лише один профіль (однопрофільна школа), але, водночас, можуть також створюватися міжшкільні профільні групи, які вивчають інший предмет за програмами для профільних класів.

А також розподіл профілів між школами може відбуватися за двома і більше профілями, що реалізуються в опорній школі, або іншому навчальному закладі (багатопрофільна школа).

Мережева взаємодія – учні різних типів шкіл формуються в цільові групи, що входять до мережі закладів загальної середньої освіти (поглиблене вивчення предметів для учнів з високими інтелектуальними здібностями, організація довузівської підготовки, позашкільні навчальні заклади та ін.)

Варіативність моделей профільного навчання:

Опорна профільна школа. Створюється на базі загальноосвітніх навчальних закладів, що мають необхідну матеріально-технічну базу, архітектурну доступність, кадрове забезпечення та розташована територіально доступно для учнів найближчих закладів освіти. В опорному навчальному закладі також розробляються методики проведення психологічних тренінгів, спеціальних курсів, проводяться майстер-класи. Тобто заклад виступає центром методичної роботи щодо організації профільного навчання.

Динамічні профільні групи. Профільна школа, в якій передбачається формування груп в межах одного класу, що має на меті поглибити вивчення навчального предмета (навчальних предметів).

Профільні класи за одним напрямом профілізації. У школах, що не мають паралельні класи, можуть створювати профільні групи в межах одного напряму з урахуванням потреб учнів, а також за наявності відповідних матеріальних та кадрових умов.

Профільні класи з декількома напрямами профілізації. У школах, що мають паралельні класи, можуть створювати профільні групи за декількома напрямами з урахуванням потреб учнів, а також за наявності відповідних матеріальних та кадрових умов.

Міжшкільні профільні групи. Створюються на базі навчально-виховних комплексів, опорних шкіл освітнього округу, міжшкільних навчально-виробничих комбінатів.

Районний (міський) ресурсний центр. Зазвичай, такі центри створюються на базі навчальних закладів, що мають архітектурну доступність, належне професійно-педагогічне та матеріально-технічне забезпечення. Це дає змогу ефективно використовувати матеріальні, кадрові ресурси, концентрувати їх для вирішення освітніх потреб віддалених шкіл. Центр може забезпечувати навчання у очно-заочній, дистанційній формі, екстернату, організовувати міжшкільні навчальні майстерні, проводити майстер-класи та ін.

Центр міжшкільних профільних курсів. Такі центри створюються за вибором учнів орієнтованих на профільне навчання та допрофільну підготовку. Центр міжшкільних профільних курсів забезпечує створення умов для реалізації профілів, яких немає в опорних школах та школах за місцем проживання.

За погодженням, загальноосвітні навчальні заклади з відповідними управліннями освіти можуть створювати інші моделі організації профільного навчання [34, 35].

1.5. Досвід запровадження і функціонування профільного навчання в Україні

Втілення ідеї профілізації старшої школи в нинішній її інтерпретації відбулося через апробацію і впровадження таких її форм: спеціалізовані школи для дітей з підвищеними здібностями і навчальними можливостями, класи з поглибленим вивченням окремих предметів, навчально-виробничих комбінати, впровадження широкого спектру факультативів.

Україна має достатньо позитивного досвіду впровадження і функціонування профільного навчання. Сьогодні в Україні має місце розгалужена мережа різних типів навчальних закладів: гімназії, ліцеї, колегіуми. Нині із запровадженням профільного навчання в старшій школі, розпочався новий, сучасний етап у розвитку профільного навчання. В результаті чого, визначено мету, сутність, принципи, а також структуру профільного навчання, визначені можливі форми організації. В Концепції профільного навчання теоретично оформлено сутність, мету і принципи організації профільного навчання, його структуру, форми організації, сутність етапу до профільної підготовки та умови реалізації Концепції. Оновлена Концепція (затверджена наказом МОН України від 21.10.2013 №1456 «Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі») визначає мету і завдання профільного навчання, реалізація яких здійснюється на основі принципів соціальної рівноваги, наступності і неперервності, гнучкості, варіативності, діагностико-прогностичної реалізованості, диференціації, індивідуалізації.

Завершуючи розповідати короткі історичні відомості про становлення профільної школи, слід зазначити, що ідеї профільного навчання були актуальними як у вітчизняній так і у зарубіжній педагогіці в усі періоди її розвитку. Незважаючи на те, що на різних етапах функціонування школи профільне навчання реалізовувалось по-різному, можна побачити подібні риси, які є характерними для процесу профілізації.

У світлі проблематики даного дослідження, процес профілізації сучасної старшої школи має об'єктивний і закономірний характер та має бути спрямований на розв'язання таких завдань:

- рівний доступ до повноцінної освіти повинні мати різні категорії учнів відповідно до їх здібностей, індивідуальних схильностей і потреб;
- створення умов для диференціації змісту навчання учнів старшої школи з широкими і гнучкими можливостями побудови учнями індивідуальних освітніх програм;
- забезпечення поглибленого вивчення окремих предметів програми повної загальної освіти;
- розширення можливостей соціалізації учнів, забезпечення наступності між загальною і професійною освітою; ефективніша підготовка випускників школи до засвоєння програм вищої професійної освіти [14, 34].

РОЗДІЛ ІІ. ЗМІСТ, СТРУКТУРА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ В СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Умови, вимоги та схематичний запис задачі

Задача 1. В прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 см і 12 см. Знайти катети трикутника.

Коли ми прочитали цю задачу, перше, що ми помітили: задача складається з деяких стверджень та вимог. Стверджується, що «в прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 і 12 см», а вимога, полягає в тому, що необхідно «знайти катети трикутника».

Досить часто вимога в задачі подається у вигляді запитання. Будь-яке питання вимагає знайти відповідь на це питання, а тому всяке запитання можна і замінити вимогою.

Будь-яка задача складається з декількох тверджень і вимог. Твердження – це умова задачі. Тут стає зрозуміло, що перше, що необхідно виконати при розв'язанні задачі, - розкласти формулювання задачі на умову та вимогу. Слід взяти до уваги, що в задачі, зазвичай. Не одна умова, а декілька незалежних елементарних умов; вимог теж може бути декілька. Тому слід розкласти всі твердження та вимоги на окремі елементарні умови і вимоги.

В задачі 1 можна виділити такі елементарні умови:

1. трикутник, про який йде мова в задачі, прямокутний;
2. в цей трикутник вписано коло;
3. точка дотику кола з гіпотенузу ділить її на два елементарні;
4. довжина одного з цих відрізків дорівнює 5 см;
5. довжина іншого відрізка рівна 12 см.

Вимогу задачі можна розкласти на два елементарні:

1) знайти довжину одного катета трикутника;
2) знайти довжину другого катета трикутника;

Розкласти задачу на елементарні умови та вимоги не завжди легко. В деяких випадках необхідно переоформлювати задачу.

Схематичний запис задачі – це проміжним етап між аналізом задачі та її розв’язанням. З нього має логічно слідувати математична модель задачі. Слід зауважити, що не для всіх задач потрібно робити схематичний запис. Наприклад, для задач, які записані на символічній мові схематичний запис не потрібний.

Для схематичного запису геометричних задач доцільно використовувати рисунок тієї фігури, яка розглядається в задачі. Розглянемо головні з них:

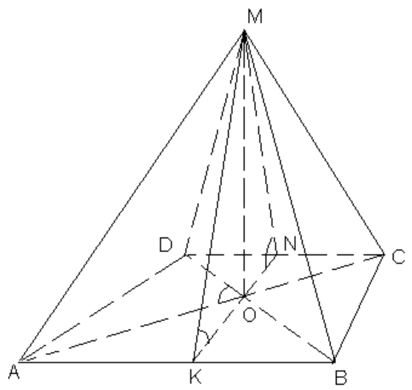
1. Рисунок – це схематичний малюнок основного об’єкту задачі (геометричної фігури) з позначенням всіх елементів фігури і деяких її характеристик за допомогою букв та інших символів.

2. Рисунок має чітко відповідати умові задачі. Тобто, наприклад, в задачі названий трикутник, але не вказано його вид, то необхідно побудувати будь-який різносторонній трикутник. Якщо в задачі названа трапеція і не вказаний її вид, то не варто будувати рівнобедрену та прямокутну трапецію.

3. Не потрібно дотримуватись чітких розмірів при побудові рисунку, але бажано дотримуватись пропорцій і побудови деяких елементів фігури. Наприклад, якщо в задачі сторона AB трикутника ABC найбільша, то на рисунку вона дійсно має бути більшою за інші сторони. Якщо задана медіана трикутника, то на рисунку вона повинна проходити приблизно через середину сторони трикутника.

4. Необхідно дотримуватись всіх правил побудови просторових фігур. Якщо це можливо і доцільно, то краще будувати якісь перерізи цих фігур [10, 15].

Задача 2. Основою піраміди є рівнобедрена трапеція, в якій паралельні сторони рівні 12 см і 8 см, а нерівні відрізки діагоналей утворюють кут $60°$. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Двогранні кути, утворені бічними гранями з основою і прилеглі до паралельних основ трапеції, відносяться як 1:2. Обчислити об’єм піраміди.



мал.1

Основним об'єктом задачі є чотирикутна піраміда. Розглянемо один із прикладів побудови її рисунка.

Проводимо довільний відрізок AB (краще горизонтальний) і через його середину – точку K – приблизно під кутом в $30°$. Через довільну точку N цієї прямої проведемо іншу пряму, паралельну прямій AB, і відкладаємо по дві сторони точки N два рівних відрізки NC і ND. З'єднавши C з B і D з A, отримаємо основу піраміди – трапецію ABCD. Проводимо в ній діагоналі, з точки O – точки перетину цих діагоналей проводимо вертикальний відрізок – висоту піраміди OM. Далі з'єднуємо точку M зі всіма вершинами основи. Таким чином, отримали повний рисунок заданої піраміди.

При короткому записі умови можна безпосередньо записати задане відношення двогранних куті, але можна спочатку побудувати на рисунку лінійні кути цих двогранних кутів, записати відношення лінійних кутів. В першому випадку отримуємо схематичний запис задачі.

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD = BC$;

3) $\angle AOD = 60°$; 4) $OM \perp (ABCD)$;

5) $\angle(MAB; ABCD) : \angle(MCD; ABCD) = 1:2$

Знайти: V_{ABCD}.

У другому випадку умову 5 можна записати так: $\angle OKM : \angle ONM = 1:2$.

Тоді в самому розв'язанні необхідно записати побудову лінійних кутів заданих двогранних кутів. Після ствердження, що кути OKM і ONM є лінійними кутами відповідних двогранних кутів, необхідно довести.

2.2. Зміст поняття «розв'язати задачу». Структура процесу розв'язування задачі

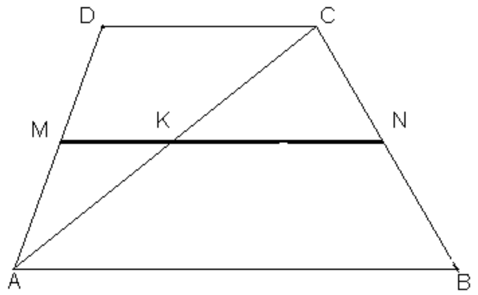
Ми досить часто чуємо, що розв'язати задачу – це означає знайти її розв'язок. Чи дійсно це так? Як розуміти слово «знайти»? Якщо хтось отримав задачу, якимось чином знайшов відповідь та озвучив її. То чи можна вважати що це задача розв'язана? Очевидно, що ні. Тому розв'язання задачі полягає не тільки в тому, щоб знайти відповідь, а ще в чомусь. Розглянемо розв'язання наступної задачі.

Задача 3. Довжини основ трапеції рівні 4 см і 10 см. Знайти довжини відрізків, на які ділить середню лінію цієї трапеції одна із її діагоналей.

Спочатку робимо схематичний запис задачі.

Дано: $AB \parallel CD; AM = MD; BN = NC; AB = 10$ см; $CD = 4$ см.

Знайти: MK і NK



мал.2

Оскільки, середня лінія трапеції паралельна її основам, то $MN \parallel AB, MN \parallel CD.$ Діагональ АС ділить трапецію на два трикутника. Розглянемо кожен з цих трикутників. В ΔABC відрізок NK є середньою лінією, або NK як частина відрізка NM паралельна АВ, і точка N за умовою є середина сторони ВС. А середня лінія трикутника дорівнює половині основи. Значить, $KN = \frac{1}{2}AB,$ а так як АВ=10 см, то $KN = 5$ см.

Аналогічно, розглядаючи ΔACD, ми переконуємось, що MK є середньою лінією цього трикутника і тому $MK = \frac{1}{2}CD$, але $CD = 4$ см, отже, $MK = 2$ см.

Задача розв'язана.

Зробимо висновок, що розв’язати математичну задачу – це знайти таку послідовність загальних положень математики (аксіоми, означення, теореми, правила, закони, формули), які застосуємо до умови задачі і до їх наслідків та отримаємо відповідь.

Розглянемо структуру процесу розв’язування задачі.

Коли ми отримуємо задачу, перше, що ми робимо – аналізуємо. Тобто визначаємо умови та в чому полягає її вимога. Аналіз – *перший етап.*

В певних випадках цей аналіз потрібно якось записати. Для цього використовують різні схематичні записи задач, побудова яких являється *другим етапом* процесу розв’язання.

Аналізуємо задачу та будуємо її схематичний запис для того, щоб певним чином знайти способи розв’язання задач. Пошук певного способу складає *третій етап.*

Після того, як знайшли спосіб розв’язання задачі, його потрібно здійснити, - а це вже буде *четвертий етап* процесу розв’язання.

Після здійснення розв’язання, яке письмово або усно описано, необхідно впевнитись, що воно вірне і задовольняє всі умови задачі. Для цього виконується перевірка - *п’ятий етап.*

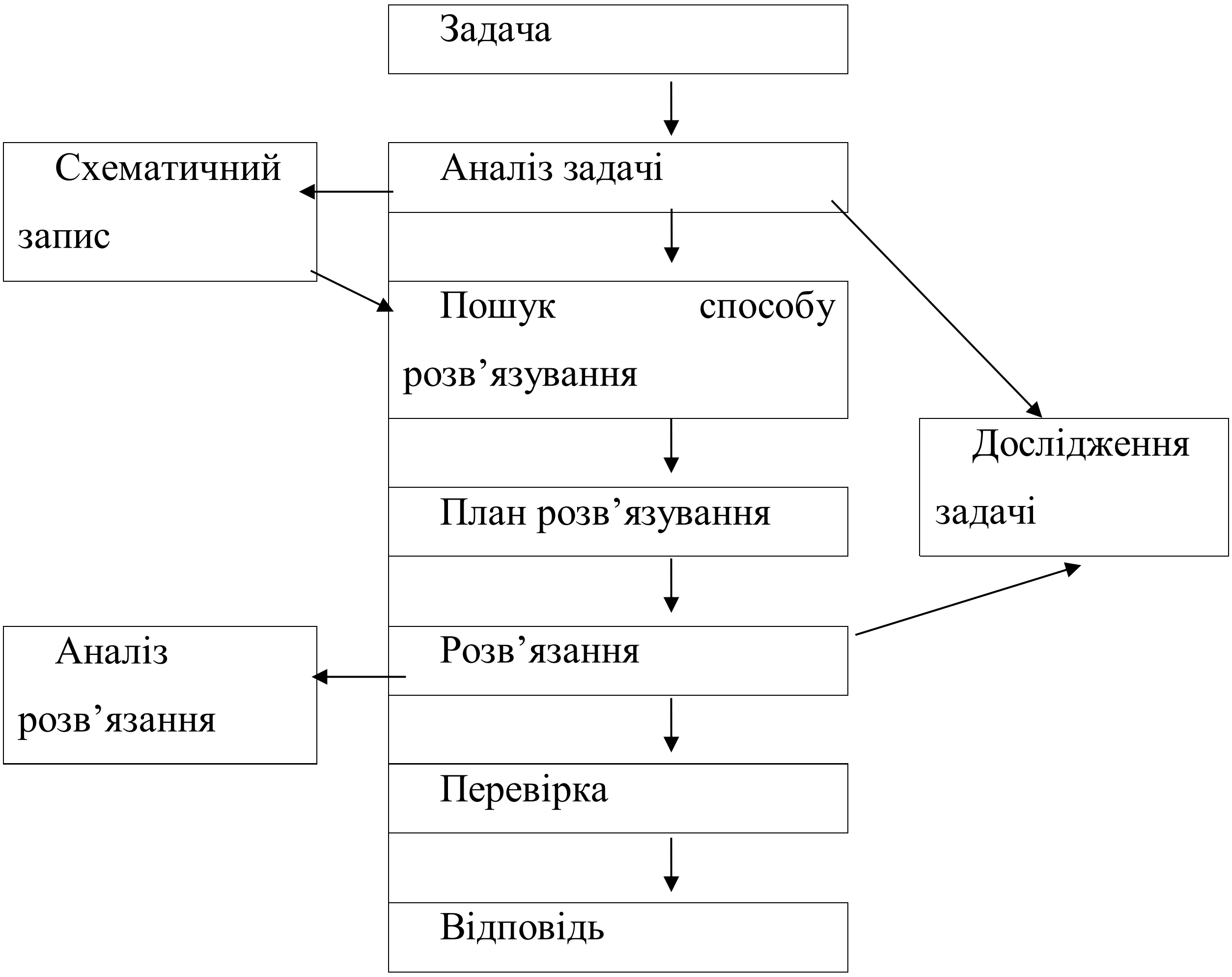
Багато задач, крім перевірки, потребують ще дослідити її. Тобто, встановити, при яких умовах задача має розв’язання, а також скільки різних розв’язань в кожному окремому випадку або при яких умовах задача не має розв’язків. Все це складає *шостий етап* процесу розв’язання задачі.

Після виконаної перевірки на вірність розв’язання та , якщо необхідно, провівши дослідження задачі, необхідно сформулювати чітко відповідь задачі. Це вже буде *сьомий етап.*

Також корисно, в учбових та пізнавальних цілях провести аналіз виконаного розв’язання, тобто, встановити, чи немає, більш раціонального способу розв’язання, чи можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити, тощо. Це є останнім та необов’язковим етапом – *восьмим етапом* розв’язання [3].

Зробимо висновок, що весь процес розв'язання задачі можна розділити на вісім етапів (схема 1)

Схема 1



2.3. Класифікація задач в стереометрії

Яку задачу називають стереометричною? Досить часто вважають, задача є стереометричною, якщо в ній йдеться мова про неплоску фігуру, але необхідно уточнювати в якому просторі ця фігура знаходиться.

Розглянемо нижче задачі.

Задача 4. Один чоловік пройшов спочатку шлях 1 км на північ, потім кілометр на захід, а потім 1 км на південь. Чи міг він повернутися на те місце, звідки починав рухатись?

Якщо ми намалюємо на аркуші схему руху чоловіка, то стає зрозуміло, що це неможливо. Але, якщо використати модель кулі, то відповідь стає протилежною. Тобто, спочатку чоловік рухався 1 км на північ, потім повернувшись на захід пройшов навколо північного коло радіусом 1 км, а потім повернув на південь і пройшов 1 км. Таким чином, він опинився на тому ж місці.

Задача 5. Побудувати трикутник з вершинами A(0;0;0), B(1;-1;3) та C(2;2;2)?

Перше, що маємо – трикутник так точки, тобто плоскі елементи, проте цю задачу необхідно вважати стереометричною тому, що побудова здійснюється в просторі.

Зробимо висновок, що стереометричні задачі – це задачі, в яких йдеться про фігури тривимірного простору. Залежно від вимог розрізняють задачі на обчислення, на побудову, на доведення та на дослідження.

2.3.1. Задачі на побудову

Стереометричні задачі на побудову – це задачі, в яких потрібно побудувати фігуру з певними властивостями в тривимірному просторі.

Існують різні підходи і методики розв'язування стосовно видів стереометричних задач на побудову.

Г. П. Бевз стверджує, що до видів стереометричних задач на побудову відносять задачі на уявлювані побудови, задачі на проекційних малюнках і задачі на моделях (ефективні побудови). Під час розв'язування задач на уявлювані побудови не використовують інструментів для побудови, а лише пояснюють спираючись на аксіоми і наслідки з них, що і в якій послідовності слід «будувати» [4, 5].

Приклад задачі на уявлювану побудову: через точку, яку дано поза прямою, проведіть площину перпендикулярну до цієї прямої.

Учні повинні засвоїти основні властивості паралельного проектування (припускається, що напрям прямих і відрізків, які відомі з властивостей, не збігаються з напрямами проектування):

- проекція прямої є пряма;
- проекція відрізка є відрізок;
- паралельні відрізки на проекції зображаються паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;

- відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих зберігається;
- проекція спільної точки двох фігур є спільною точкою їх проекцій.

Лише після цього вони почнуть розв’язувати задачі на ефективні побудови.

Основні задачі на побудову розбиті на такі групи:

І. Побудова точки перетину прямої з площиною, побудова лінії перетину двох площин і побудова перерізу многогранника площиною.

ІІ. Побудову прямої, що проходить через точку поза даною прямою і паралельна даній:

- побудова прямої, паралельної даній площині;
- побудова площини, паралельної даній;
- побудову площини, яка проходить через одну з даних мимобіжних прямих і паралельна другій з них;
- побудову прямої, яка проходить через дану точку і перетинає дві дані мимобіжні прямі.

ІІІ. Побудова перпендикуляра до даної площини і побудова площини, перпендикулярної до даної прямої.

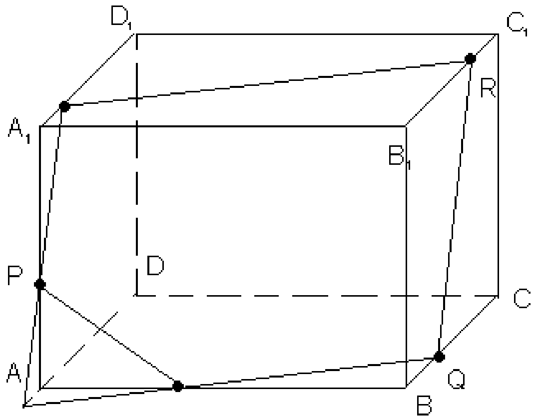
Зображенням фігури (прообразу) – це будь-яка фігура (образ), подібна до паралельної проекції даної фігури на площину. Форма зображення залежить від положення зображуваної фігури щодо площини проекцій, а також від вибору напряму проектування.

Задача на зображення фігури вважається розв’язаною, якщо одержано будь-яке зображення фігури, яке вдало, наочно і правильно відображає форму геометричної фігури і співвідношення між її елементами [17].

Розглянемо приклад задачі на побудову.

Задача 6.

Дано зображення проекції на деяку площину куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з відміченими точками P, Q, R на ребрах AA_1, BC, C_1D_1. Побудуйте на цьому зображенні переріз куба площиною PQR.



мал.3

Розв’язання. У процесі побудови перерізу можна звернути увагу на те, що прямі, по яким деяка площина перетинає пару паралельних площин, паралельні. На малюнку видно процес побудови. Спочатку через точку P проводимо пряму, паралельну прямій RQ, і знаходимо її точки перетину з прямими AD і A_1D_1. Ці точки з’єднуємо з точками Q та R і отримуємо переріз граней ABCD, $A_1B_1C_1D_1$. На перетині однієї із двох граней, які залишаться, вже побудовані дві точки, і залишається їх з’єднати.

2.3.2. Задачі на обчислення

Чи не найпоширенішими задачами стереометрії є задачі на обчислення. Зазвичай, умова стереометричної задачі на обчислення починається зі слів «обчисліть», «знайдіть, «визначте», тощо.

Задачі на обчислення є з параметрами та без них. Якщо розв’язують задачу з параметрами, то, зазвичай, отримують вираз або ж функцію від цих параметрів. Якщо є ще й міри кутів, то таку задачу майже завжди розв’язують, застосовуючи тригонометричні функції цих кутів. Якщо розв’язують задачу без параметрів, то отримують число або числове значення геометричної величини (довжина, площа, міра кутів, об’єм, тощо).

Задачі на обчислення бувають *абстрактні* й *прикладні.*

Задача називається абстрактною, якщо в ній ідеться про абстрактні геометричні фігури та їх відношення.

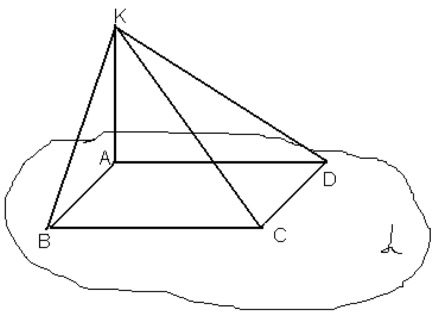
Прикладна задача – задача про реальні, матеріальні об’єкти та зв’язки між ними [24, 29].

Приклад задачі на обчислення:

Із вершини А прямокутника ABCD проведений перпендикуляр АК до його площини, відстань від кінця К якого до інших вершин рівні 6 м, 7 м і 9 м. Знайдіть довжину перпендикуляру.

Багато учнів мають ще слабку просторову уяву. Зазвичай, в цьому випадку в розв'язанні допомагає попередній розгляд моделі задачі. Коли учень бачить модель, від швидше буде справлятися з питанням побудови малюнка до задачі та краще розумітиме його особливості.

На мал.4 зображений трикутник ABCD, що належить площині α, АК⊥α, КВ = 6 м, KD = 7 м, КС = 9 м. Знайдіть довжину перпендикуляра АК.

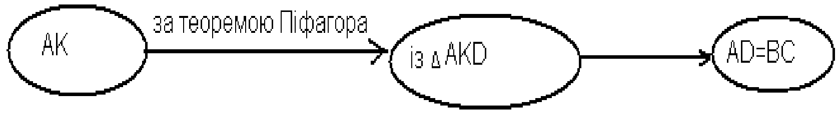


мал.4

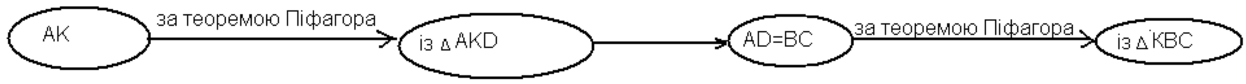
Якщо почати аналізувати, що саме необхідно знайти в задачі – це вже перший крок процесу мислення.

Аналіз того, що необхідно знайти в задачі – перший крок процесу мислення. Позначимо шукану величину символом АК і запишемо це на дошці поряд з малюнком. Зрозуміло, що перпендикуляр АК до площини α виступає в якості катета трикутника AKD, гіпотенуза KD відома. Тому, довжину шуканого катета можна знайти із трикутника AKD, за теоремою Піфагора. З'явився новий об'єкт процесу мислення ΔAKD і зв'язна з ним ланка обох об'єктів теореми Піфагора. Це зручно проілюструвати учням за допомогою схеми:

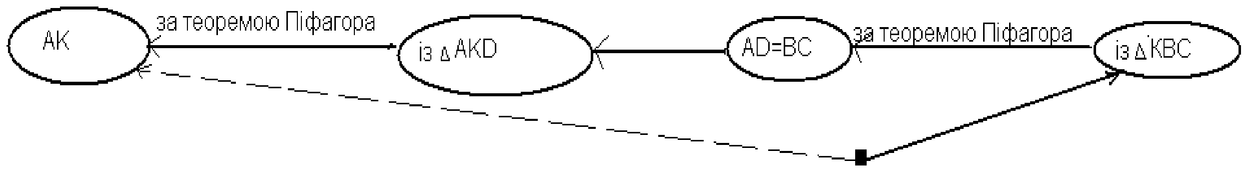
Далі було б легко із ΔAKD знайти довжину катета AD, яка за умовою задачі не відома. Тому катет AD розуміємо на основі іншого поняття, що це сторона прямокутника ABCD. Отже, AD = BC. Отже, до схеми добавляється ще один об’єкт:



Продовжуючи пошук задачі, перейменовуємо відрізок BC в якості сторони трикутника KBC, в якому відомі довжини сторін KB і KC. Якщо б вдалося встановити, що Δ KBC прямокутний, то знайти довжину сторони BC за теоремою Піфагора було б не складно. Але видно, що Δ KBC справді прямокутний: AB⊥α, і за теоремою про три перпендикуляри KB⊥BC. В послідовності наших роздумів з’явився новий об’єкт - Δ KBC. Теорема Піфагора вказує на зв’язок Δ KBC з раніше встановленими.



Тепер учні легко зроблять висновок: щоб розв’язати задачу, потрібно по створеній схемі міркувати в зворотному напрямі. Що ми бачимо на наступній схемі:



Чорний квадрат на схемі вказує на початкові дані, штрихова лінія вказує на кінцеву ціль, а жирна стрілка вказує на кінцеву ціль в думках учня.

На початку, пошук розв’язання задачі для учня майже неможливий без допомоги вчителя. Проте, згодом, здобуваючи досвід і навички, учні почнуть самостійно знаходити шлях розв’язання задачі. Досить часто буває, що учень, розв’язуючи задачу, відступає від основної лінії розв’язання і попадає в глухий кут. В такому випадку вчитель має пояснити учневі, чому так сталося. Це заставить учня більше обдумувати певну умову задачі.

2.3.3. Задачі на доведення

Вже неодноразово в психології та педагогіці ставилася проблема навчання учнів вмінню розв'язувати задачі на доведення в стереометрії. Одна, поки немає єдиної точки зору на те, чому і як навчати учнів, щоб вони могли розв'язати задачі середнього та високого рівнів, не за зразком, який показав вчитель, а прийти самостійно до розв'язування такої задачі.

Ще однієї, не менш важливою проблемою є те, що задачі на доведення в стереометрії не мають єдиної схеми розв'язання, і тому це викликає труднощі в учнів.

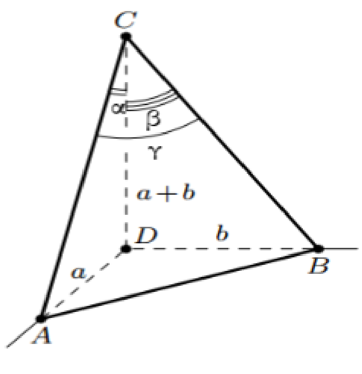
Для розв'язування задач на доведення досить часто використовують *геометричний метод.* В деяких випадках крім зображення просторової фігури доводиться виконувати різні додаткові побудови.

Розглянемо приклади розв'язання таких задач.

Задача 7. Дано тетраедр ABCD, всі плоскі кути при вершині D - прямі, а ребро CD дорівнює сумі ребер AD та BD. Довести, що сума всіх плоских кутів при вершині C дорівнює 90°.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний тетраедр (мал.5), $AD = a, BD = b, AC = m,$ $BC = n, \angle ACD = \alpha, \angle BCD = \beta$ та $\angle ACB = \gamma$. Оскільки $AD < CD$, $BD < CD$, то кожний з кутів α та β менше $45°$

i $0° < \alpha + \beta < 90°$. Отже, i $0° < \gamma < 90°$.



мал.5

Доведемо, що $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma$.

Так як

$$\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{a}{m}, \sin\beta = \frac{b}{n}, \cos\alpha = \frac{a+b}{m}, \cos\beta = \frac{a+b}{n},$$

то

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a(a+b)}{mn} + \frac{b(a+b)}{mn} = \frac{(a+b)^2}{mn}.$$

З трикутника *ABC,* де $AB^2 = a^2 + b^2$, за теоремою косинусів знаходимо:

$$\cos\gamma = \frac{m^2+n^2-(a^2+b^2)}{2mn}.$$

Трикутники *ACD та BCD* прямокутні, тому

$m^2 + n^2 = a^2 + (a+b)^2 + b^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a+b)^2.$

Отже, $\cos\gamma = \frac{(a^2+b^2)}{mn}$.

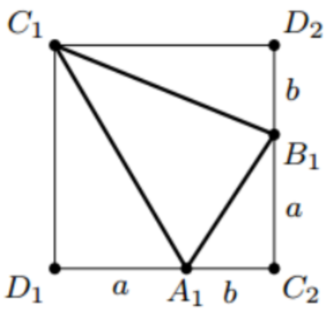
Тому, $\sin(\alpha+\beta) = \cos\gamma$, або $\sin(\alpha+\beta) = \sin(90° - \gamma)$.

Таким чином, отримаємо: $\alpha + \beta = 90° - \gamma$, або $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Що й треба було довести.

Дана задача розв'язувалася *аналітичним методом*. Тому розглянемо розв'язання цієї ж задачі *геометричним методом.*

Задача 8. Дано тетраедр ABCD, всі плоскі кути при вершині D - прямі, а ребро CD дорівнює сумі ребер AD та BD. Довести, що сума всіх плоских кутів при вершині C дорівнює 90°.

Доведення: Назвемо грань *ABD* тетраедра – його основою, а всі інші – бічними гранами. Побудуємо розгортку бічної поверхні, розрізавши тетраедр по ребрам *AD, BD, CD*. Покажемо, що ця розгортка – це п'ятикутник $A_1D_1C_1D_2B_1$ з прямим кутом C_1.



мал.6

Побудуємо квадрат $C_1D_1C_2D_2$ зі стороною $a + b$. На сторонах D_1C_2 і C_2D_2 відкладемо відрізки D_1A_1 і C_2B_1 рівні a. Тоді $A_1C_2 = B_1D_2 = A_1B_1$. Тому трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ також рівні. Таким чином, п'ятикутник $A_1D_1C_1D_2B_1$ – це розгортка бічної поверхні тетраедра *ABCD*. Звідси, стає відомо, що сума плоских кутів тетраедра при вершині *C* дорівнює куту $D_1C_1D_2$ квадрата, тобто дорівнює 90°.

Якщо порівняти розв'язання цієї задачі аналітичним та геометричним методом, то можна помітити те, що в першому випадку відсутні допоміжні побудови, а от, при розв'язуванні другим методом слід здогадатися, що потрібно використати розгортку поверхні тетраедра, а також виконати допоміжні побудови.

2.3.4. Задачі на дослідження

Очевидно, що задачею на дослідження називають задачу, в якій вимагають щось дослідити. Зазвичай, для таких задач характерні вимоги: «порівняйте», «дослідіть», «з'ясуйте»; або запитання: «за якої умови?», «чи існує?», «чи правильно?», «чи залежить?» тощо. Для прикладу наступні задачі є задачами на дослідження:

1. Чи існує призма, що має 200 ребер?
2. В якій правильній чотирикутній призмі центри вписаної та описаної сфер збігаються?

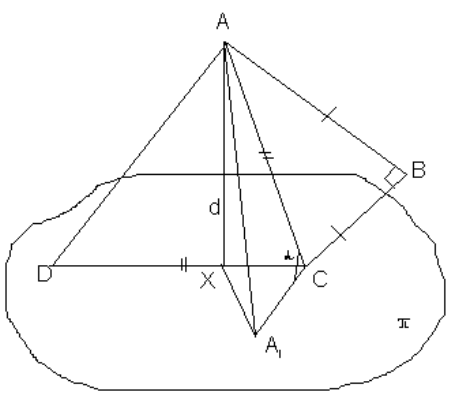
Одним із видів задач на дослідження є задачі на знаходження геометричних місць точок. Інколи ці задачі відносять до задач на побудови, що є недоцільно. Тут достатньо описати фігуру, яка і є шуканим геометричним місцем точок. Також такий вид задач ще відносять до задач на доведення, з чим також не можна погодитись. Тому що одним доведенням розв'язування не вичерпується.

Стереометричні задачі на дослідження великою мірою сприяють розвитку просторової уяви учнів, якщо вони для них зрозумілі і доступні. Систематичне розв'язування таких задач дає змогу учням поглибити свої знання, виховує інтерес до стереометрії, розвиває дослідницькі здібності учнів.

Розглянемо приклад задачі за дослідження.

Задача 9. Через бічну сторону CD трапеції ABCD, в якій AD||BC, $\angle B = 90°$, AB=BC і AC=CD, проведена площина π на відстані d від вершини A; точка A_1 - проекція вершини A на площину π. Знайти на стороні CD точку, із якої відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом α, і обчислити площу трапеції.

Розв'язання



мал.7

Спочатку з'ясуємо, з якої сторони CD трапеції відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом. Доведемо, що $\angle ACD = 90°$. За теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри, $DC \perp A_1C$, отже, для будь-якої точки X відрізка CD $A_1X > A_1C$. Згідно умові, $\angle A_1CA = \alpha, A_1A = d.$

Обчислимо площу трапеції. $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC}$, де $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2, S_{ABC} = \frac{1}{4}AC^2,$ а $AC = \frac{d}{\sin\alpha}.$ Тоді $S_{ABCD} = \frac{3}{4}AC^2 = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}.$

Відповідь. $S_{ABCD} = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}.$

Досить часто, складовою частиною розв’язання задачі на обчислення чи на побудову є дослідження. Тому деякі автори і такі задачі вважають задачами на дослідження, що є помилковим твердженням. Адже, задачі на дослідження – окремий вид. Звичайно це не стосується комбінованих задач, які містять дві або й більше вимог. Наведемо приклад такої задачі:

Задача 10. Через дану точку на ребрі тетраедра проведіть переріз, "паралельний двом його мимобіжним ребрам". Доведіть, що цей переріз – паралелограм. За якої умови його площа буде найбільшою?

Така задача комбінована: на побудову, доведення та дослідження.

РОЗДІЛ III. ЗМІСТ І МЕТОДИКА КУРСУ ЗА ВИБОРОМ «МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ»

3.1. Програма курсу за вибором для учнів 10-11 класів (профільний рівень)

Програма призначена для організації навчання математики на профільному рівні. Вона розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання.

Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких ***завдань:***

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої позитивної мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики, системою математичних знань, навичками та уміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння знаннями інших освітніх галузей і забезпечення мотивації потреби неперервності навчатися впродовж життя.
- інтелектуальний розвиток особистості – розвиток логічного мислення та інтуїції учнів, просторової уяви, пам'яті, уваги, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури;
- громадянське виховання та формування позитивних рис особистості – ініціативності та творчості, пізнавальної самостійності та інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються;

- формування життєвих компетентностей учня – позитивних рис характеру (наполегливості, волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо);
- формування загальнолюдських духовних цінностей особистості; виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано робити висновки про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в соціумі.

Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- розпізнає життєві чи предметні ситуації як задачі, що можна розв'язати математичними методами; формулює їх математичною мовою та розв'язує, використовуючи математичні компетентності, оцінює похибку обчислень та інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов, змісту та цілей предмета дослідження; застосовує математичні моделі при вивченні природничих (фізика, астрономія, географія, економіка, хімія, біологія) та інших навчальних предметів;
- логічно мислить (аналізує та порівнює, прогнозує результат, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади, висуває та перевіряє гіпотези); володіє алгоритмами та евристиками;
- користується відповідними джерелами для пошуку математичної інформації, може самостійно її проаналізувати та передати математичну суть (в текстовій, графічній, табличній, знаково-символьній формах);
- виконує математичні розрахунки, раціонально поєднуючи усні та письмові обчислення, використовує електронні обчислювальні пристрої;
- виконує тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів під час розв'язування різних задач

(рівнянь, нерівностей, їх систем, геометричних задач, задач із застосуванням тригонометрії);

- аналізує графіки функціональних залежностей, досліджує їхні властивості; використовує властивості елементарних функцій для аналізу та опису реальних явищ, фізичних процесів, залежностей;
- володіє методами математичного аналізу в обсязі, що дозволяє досліджувати властивості елементарних функцій, будувати їх графіки і розв'язувати нескладні прикладні задачі;
- обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання, аналізує випадкові величини та знаходить їх найпростіші характеристики, розуміє значення головних статистичних показників, обирає оптимальні рішення;
- зображує геометричні фігури, встановлює і обґрунтовує їхні властивості; застосовує властивості фігур при розв'язуванні задач; вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об'єми) .

Крім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей.

Наскрізні лінії та їх реалізація. У навчальній програмі виокремлюються такі наскрізні **чотири** лінії ключових компетентностей: **"Екологічна безпека та сталий розвиток", "Громадянська відповідальність", "Здоров'я і безпека",** "**Підприємливість та фінансова грамотність"**, які спрямовані на формування в учнів здатності застосовувати знання й уміння у реальних життєвих ситуаціях.

Наскрізні лінії є засобом інтеграції ключових і загальнопредметних компетентностей, навчальних предметів та предметних циклів, їх необхідно враховувати при формуванні шкільного середовища життєдіяльності.

Наскрізні лінії є соціально значимими надпредметними темами, які допомагають формуванню в учнів уявлень про суспільство в цілому, розвивають здатність застосовувати отримані знання у різних життєвих ситуаціях.

Навчання за наскрізними лініями реалізується насамперед:

· через організацію відповідного навчального середовища – зміст та цілі наскрізних тем враховуються при формуванні духовного, соціального і фізичного середовища навчання;

· через базові навчальні предмети – під час навчання, виходячи із наскрізних тем, проводяться відповідні трактовки, приклади і методи навчання, реалізуються надпредметні, міжкласові та загальношкільні проекти. Роль навчальних предметів при навчанні наскрізних тем – різна і залежить від цілей і змісту навчального предмета та від того, наскільки тісно пов'язаний із конкретною наскрізною темою той чи інший предметний цикл;

· через предмети за вибором;

· через спеціальні курси за вибором;

· через позакласну навчальну роботу.

З метою підвищення ефективності навчання, необхідною умовою є залучення до навчально-виховного процесу компетентнісного, діяльнісного та особистісно-орієнтованого підходів, які передбачають систематичне включення учнів до різних видів активної навчально-пізнавальної діяльності та формування умінь корисних у реальних життєвих ситуаціях. Доцільно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці. Формуванню математичної та ключових компетентностей сприяє встановлення та реалізація у навчанні математики міжпредметних і внутрішньопредметних звязків, а саме: змістово-інформаційних, операційно-діяльнісних і організаційно-методичних. Їх використання посилює пізнавальний інтерес учнів до навчання і підвищує їх рівень загальної культури, створює умови для систематизації навчального матеріалу і формування наукового світогляду. Учні набувають досвіду застосування знань на практиці.

Важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. На дохідливих прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття і відношення, теорії та методи. Ознайомлення учнів з іменами та біографіями видатних учених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків, сприятиме національному і патріотичному вихованню школярів.

Структура навчальної програми. Програма розрахована на 630 годин 420 годин навчального часу, відведеного на вивчення алгебри та початків аналізу, 210 годин на геометрію.

Розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на вивчення тем залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій. На основі орієнтовних тематичних планів учитель розробляє календарно-тематичний план, в якому конкретизується обсяг навчального матеріалу.

Програмою передбачено резерв навчального часу. Спосіб використання резервного часу вчитель може обрати самостійно: для повторення на початку навчального року матеріалу, який вивчався у попередніх класах, як додаткові години на вивчення окремих тем, якщо вони важко засвоюються учнями, для проведення інтегрованих з профільним або іншими предметами уроків тощо.

Програму подано у формі таблиці, що містить дві колонки: очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів та зміст навчального матеріалу. У змісті вказано навчальний матеріал, який підлягає вивченню у відповідному класі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів орієнтують на результати навчання, які також є і об'єктом контролю та оцінювання.

В основу формування змісту програми покладені такі принципи:

- наступність у навчанні математики між різними ланками математичної освіти, наступність з допрофільним навчанням математики і навчанням математики на інших рівнях,
- збереження традицій вітчизняної методичної школи та накопиченого досвіду підготовки випускників спеціалізованих шкіл з поглибленим вивченням математики та предметів природничо-наукового циклу;
- збереження високого рівня теоретичної математичної підготовки як основи професійної підготовки, вироблення здатності успішно працювати в галузях природничих дисциплін, самостійно здобувати знання;
- формування необхідних загальнонаукових, загальнонавчальних та соціально-особистісних компетентностей на основі цілеспрямованої реалізації міжпредметних зв'язків, зокрема предметів природничого циклу, які мають становити цілісну систему.

Математика займає особливе місце у системі знань людства, виконуючи роль універсального та потужного методу сучасної науки. Тому особливу увагу варто приділити з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема, забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів його застосуванню до розв'язування широкого кола прикладних задач, зокрема фізичних. Вивчаючи математику на профільному рівні, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, та до чітко сформульованої математичної задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та його застосування до вихідної ситуації.

Вибір вивчення математики на профільному рівні передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов'язаної з нею. Незважаючи на це, мотиваційний етап навчального процесу в таких класах не можна ігнорувати. Одним зі способів мотивації, які доцільно використовувати у математичних та фізико-математичних класах, є створення проблемної ситуації. Така ситуація може бути досить складною, вимагати серйозних математичних знань та значних зусиль для її розв'язування. При спробі знайти спосіб розв'язування проблеми учні стикаються з недостатністю наявних у них математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією.

Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання. При їх використанні доцільно дотримуватися таких педагогічних умов:

- враховувати особливості навчальної діяльності, її зміст і структуру; цикли життєдіяльності учня, його здібності, інтереси, нахили, індивідуальні відмінності учнів, форми їх прояву в сфері комунікативних відносин і в пізнавальній діяльності;
- відповідні технології навчання мають бути варіативними, особистісно орієнтованими, коли знання, вміння та навички розглядаються не лише як самоціль, а й як засіб розвитку пізнавальних і особистісних якостей учня; виховують в учня здатність бути суб'єктом свого розвитку, рефлексивного ставлення до самого себе;
- забезпечувати цілісне психолого-методичне проектування навчального процесу в умовах рівневої та профільної диференціації навчання.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо.

Доцільною вбачається організація проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на уроках та позакласних і факультативних заняттях з математики.

Оцінювання навчальних досягнень учнів. Контроль навчальних досягнень учнів здійснюється у вигляді поточного, тематичного, семестрового, річного оцінювання та державної підсумкової атестації.

Поточне оцінювання здійснюється у процесі поурочного вивчення теми. Його основними завданнями є: встановлення й оцінювання рівнів розуміння і первинного засвоєння окремих елементів змісту теми, встановлення зв'язків між ними та засвоєним змістом попередніх тем, закріплення знань, умінь і навичок.

Формами поточного оцінювання є індивідуальне та фронтальне опитування; тестова форма контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів; робота з графіками, схемами, діаграмами; виконання учнями різних видів письмових робіт; взаємоконтроль учнів у парах і групах; самоконтроль тощо. Поточне оцінювання учнів з математики проводиться безпосередньо під час навчальних занять або за результатами виконання домашніх завдань, усних відповідей, письмових робіт тощо. Інформація, отримана на підставі поточного контролю, є основою для коригування роботи вчителя на уроці.

Тематичному оцінюванню навчальних досягнень підлягають основні результати вивчення теми (розділу).

Тематичне оцінювання навчальних досягнень учнів забезпечує:

- усунення безсистемності в оцінюванні;
- підвищення об'єктивності оцінки знань, навичок і вмінь;
- індивідуальний та диференційований підхід до організації навчання;
- систематизацію й узагальнення навчального матеріалу;
- концентрацію уваги учнів до найсуттєвішого в системі знань.

Тематична оцінка виставляється на підставі результатів опанування учнями матеріалу теми впродовж її вивчення з урахуванням поточних оцінок, різних видів навчальних робіт (практичних, лабораторних, контрольних) та навчальної активності школярів. У процесі вивчення значних за обсягом тем можливе проведення декількох проміжних тематичних оцінювань.

Перед початком вивчення чергової теми всі учні мають бути ознайомлені з тривалістю вивчення теми (кількість занять); кількістю й тематикою обов'язкових робіт і термінами їх проведення; критеріями оцінювання.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, EUREKA, GeoGebra, AGrapher, бібліотек електронних наочностей тощо. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо [7, 8, 23].

Доцільною також вбачається організація проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на уроках та позакласних і факультативних заняттях з математики.

***

Клас	Номер теми	Назва теми	Кількість годин для вивчення теми
10	1	Вступ до стереометрії	15
	2	Паралельність прямих і площин у просторі	24
	3	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	26
	4	Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі	22
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач,	18

		резервний час	
		Разом:	105
11	5	Многогранники	24
	6	Тіла обертання	21
	7	Об'єми многогранників	16
	8	Об'єми та площі поверхонь тіл обертання	16
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач, резервний час	28
		Разом:	105

3.2. Базисні задачі в стереометрії

Ефективний метод навчання учнів розв'язувати геометричні задачі заснований на використанні, при відшуканні плану розв'язання задачі, деяких висновків, отриманих при відшуканні так званих *базисних* задач.

Алгоритмічний підхід для пошуку плану розв'язання тою чи іншою мірою якоїсь задачі допомагає учням швидше знайти цей план. Базисні задачі – це задачі на доведення залежностей, ефективно використаних при розв'язанні багатьох геометричних задач.

Очевидно, що немає визначеної кількості базисних задач, які повинен знати учень. В кожній задачі об'єм алгоритмічних даних може бути іншим. Але мінімум цих знань учень повинен мати. Адже тоді він зможе розв'язати тільки легкі задачі.

Щоб учні краще запам'ятовували алгоритмічні дані, можна рекомендувати записувати їх в окремий загальний зошит, де будуть записані такі ж важливі відомості з курсу математики.

«Під алгоритмічною діяльністю, - пише німецький педагог Б. Чада, - ми розуміємо всі види діяльності, що направлені на розв'язання задач з допомогою алгоритмів, правил, рекомендацій. Вона охоплює не тільки формальне виконання вказаних алгоритмів, але й підбір алгоритму для розв'язання даної конкретної задачі, складені із багатьох вивчених правил конкретної кінцевої послідовності кроків, що приводять до розв'язання задачі, формулювання алгоритму, а також пристосувань відомого вже алгоритму до умови задачі. Таким чином, алгоритмічна діяльність є важливою складовою частиною математичної освіти» [14].

Розглянемо приклади базисних задач.

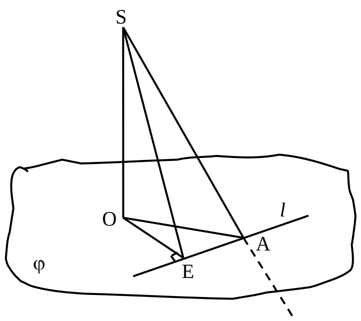
Задача 11. (формула «трьох косинусів»)

Нехай γ – кут між похилою, проведеною до площини, та прямою, що лежить у цій площині; α – кут між похилою та її проекцією на площину; β – кут між цією проекцією та прямою на площині (формула «трьох косинусів»)

Довести, що $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta$.

Доведення.

Нехай *SA* – похила, що проведена з точки *S* до площини φ. $SO \perp \varphi$, *OA* – проекція *SA* на φ.



Проведемо $OE \perp l$.

За теоремою про три перпендикуляри: $\angle SEA = 90°$, $\cos\gamma = \dfrac{EA}{SA}$.

мал.8

Маємо:

$$\cos\gamma = \frac{EA}{SA} = \frac{EA}{SA}\cdot\frac{OA}{OA} = \frac{OA}{SA}\cdot\frac{EA}{OA} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Задача 12. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи.

Відповідь: $\cos\angle SBO = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos 30^0}$

Задача 13. У тригранному куті *OABC*:$\angle AOB$ = 45°; $\angle AOC$ = 60°; $\angle BOC$ = 45°. Знайти кут між променем *AO* та площиною *BOC*.

Відповідь: sin *y* = cos *y* =⇒ *y* = 45°.

Задача 14. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини його основи під кутами α та β. Знайти косинус кута між діагоналями.

Відповідь: $\cos x = \cos\left(90^0 - \alpha\right)\cos\left(90^0 - \beta\right) = \sin\alpha\sin\beta$

Задача 15. Дві прямі l_1 та l_2 належать площині π. Вони перетинаються в точці *A* під кутом γ. Третя пряма l_3 проходить через точку l_1 та перетинає прямі l_1 та l_2 під кутами α та β відповідно. Визначити косинус кута між прямою l_3 та площиною π.

Відповідь: $\cos x = \cos\alpha\sqrt{1 + \sqrt{\left(\dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}\right)}}$

3.3. Методи розв’язування задач в стереометрії

Проблема пошуку розв’язків задач хвилюють як вчителів, так і методистів та вчених. Коли учень починає розв’язувати задачу, він інтуїтивно шукає зв’язки між відомими елементами задачі та тими, що повинні знайти. Як правило, це відбувається хаотично. Багато учнів мають слабо розвинуту просторову уяву і як показує досвід, щоб розв’язати певну задачу, учні попередньо розглядають модель до задачі. Саме тоді учні швидше справляються з побудовою малюнка та краще розуміють його особливості.

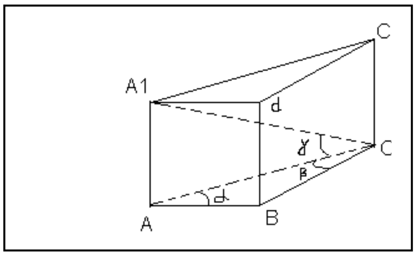
В чому ж полягає завдання вчителя? Він має систематизувати пошук розв’язку, привчити учнів аналізувати умову задачі. І перше, на що слід звертати увагу – це вимога задачі. Після аналізу учні разом з вчителем складають схему розв’язування (короткий запис, схематичний запис тощо). Далі учні самостійно розв’язують задачу.

З досвіду відомо, що на перших уроках на пошук розв’язку і складання схеми витрачається стільки ж часу, скільки і на саме розв’язування. Доречно буде після розв’язування однієї задачі проаналізувати 2 – 3 задачі, накреслити шляхи їх розв’язування. Звичайно, коли учні розв’язують багато задач, то набувають навиків розумової діяльності і знайомляться з іншими видами діяльності: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення. І тому надалі починають швидше справлятися з пошуком розв’язків задач.

3.3.1. Спосіб обчислення невідомих величин

Спосіб розв’язування стереометричних задач на обчислення невідомих величин зазвичай здійснюється так: знаходять фігуру (найчастіше – це трикутник), в якій достатньо відомо елементів для знаходження інших. Потім, розглядають ряд інших прилеглих, до неї фігур (це буде в більшості випадках теж трикутник) так, щоб в результаті послідовного знаходження невідомих елементів цих фігур можна було знайти вже шукану величину.

Задача 16. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містять сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d і утворює з площиною основи кут γ. Визначити об’єм призми.



мал.9

Розв’язання. Нехай в основі прямої призми лежить трикутник ABC, у якому $\angle A=\alpha, \angle B=\beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B: A_1B= d. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тоді за умовою $\angle A_1BA=\gamma$. Об’єм призми $V=S_{осн}\cdot H$

1. Звернемо увагу, що в прямокутному трикутнику A_1BA ($\angle A=90$) є досить даних для його розв’язання (гіпотенуза і гострий кут), саме з цього почнемо розв’язувати задачу $H= AA_1 =d\cdot\sin\gamma$; $AB=d\cdot\sin\gamma$.

2. Бачимо, що в трикутнику АВС достатньо даних (сторона та два прилеглих кута) для його розв'язання за теоремою синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$$

$$AC=\frac{AB\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{d\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Тоді

$$S_{осн}=\frac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

$$V=\frac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

Відповідь: $\dfrac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$

3.3.2. Метод доведення від супротивного

Метод доведення від супротивного складається з таких етапів:

1. Припускаємо, що може бути протилежне тому, що стверджується в теоремі.
2. Спираючись на аксіоми і вже доведені теореми та на основі припущення, робимо певні висновки.
3. Знаходимо, в чому ж наш висновок суперечить умові, аксіомі, доведеній раніше теоремі тощо.
4. Робимо висновок, що наше припущення являється хибним, а тому твердження теореми – правильне.

Досить часто такий спосіб доведення використовують, коли потрібно довести єдиність якогось об'єкта. Тобто, припускають протилежне (таких об'єктів існує хоча би два).

Тут треба чітко розуміти: коли ми доводимо теорему або розв'язуємо задачу, то кожне твердження потрібно обгрунтовувати. Тобто, навести приклад аксіоми чи раніше доведеної теореми, звідки воно випливає. Треба ретельно перевіряти, чи повністю виконані всі умови теореми, на яку ви спираєтесь.

Приклад задачі.

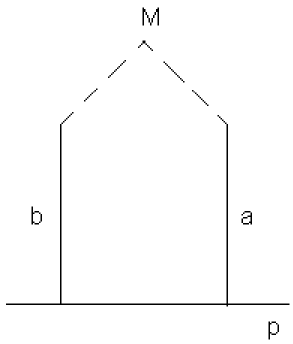
Задача 17. Довести, якщо дві прямі перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, то ці прямі паралельні.

Дано: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ (A – істинне висловлення (умова теореми)).

Довести: a || b   (B – висновок теореми)

Доведення:

Нехай прямі a і b не є паралельними. (Нехай $\overline{B}$ - істинне висловлення)



мал.10

Маємо: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ a і b не паралельні. ($A \wedge \overline{B} = B_1(\textit{позначення})$)

З того, що справджується умова A і прямі a і b не паралельні, випливає, що перпендикулярні до прямої p прямі a і b перетинаються, тобто:

$a \perp p, b \perp p, a \neq b, a \cap b = M(B_2)$ ($B_1 \Rightarrow B_2$ - істинне висловлення)

Але тоді через точку M проходять два різні перпендикуляри a і b до прямої p, що суперечить відомій теоремі: (B_2 – хибне висловлення)

Через будь-яку точку площини проходить один і тільки один перпендикуляр до даної прямої.

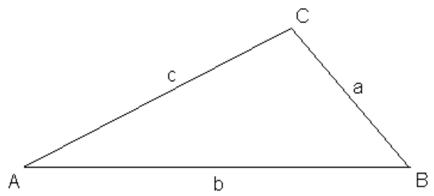
Доведення цієї задачі традиційно закінчуються такими словами: «Отже, наше припущення неправильне, прямі a і b паралельні»

Задача 18. Якщо в трикутнику ABC, де a, b, c – довжини його сторін, $c^2 = a^2 + b^2, \text{то} \angle C = 90°$.

Доведення:

Використаємо спосіб доведення від супротивного.

Припустимо, що в трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) .



мал.11

Тоді можливі два випадки: а) $0° < \angle C < 90°$ б) $90° < \angle C < 180°$. Розглянемо кожний з них:

а) У ΔABC: $(0° < \angle C < 90°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$. Отже, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Тоді хибним буде і те, що $0° < \angle C < 90°$.

б) У ΔABC: $(90° < \angle C < 180°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Маємо: $0° < \angle C < 90°$ і $90° < \angle C < 180°$ - хибне висловлення. Тоді $\angle C = 90°$.

Задачу доведено.

Отже, для доведення теорем або задач методом від супротивного треба вміти правильно заперечувати дане висловлення.

3.3.3. Спосіб введення допоміжного відрізка

При розв'язуванні задач, в яких задані лінійні величини не входять в один трикутник з заданими кутами, використовують метод введення допоміжного відрізка.

Такі задачі зводяться до складання рівняння знаходження одного з невідомих відрізків (допоміжних відрізків), величину знаходять за допомогою знайденого відрізка.

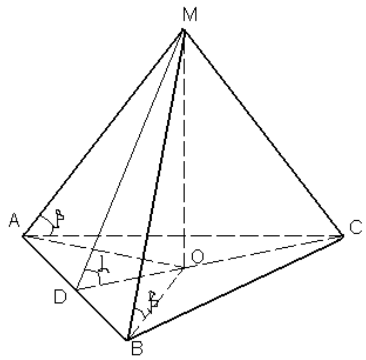
При складанні рівняння слід користуватися наступними рекомендаціями:

1. Потрібно знайти такий відрізок (або два відрізки, рівних між собою), які можна виразити двома різними способами через введений відрізок та дані величини, після чого – порівняти ці вирази.

2. Якщо перший спосіб не є доцільним, то потрібно шукати геометричні зв'язки між елементами фігури (подібність; відрізки, що дорівнюють сумі або різниці двох даних відрізків тощо) і у співвідношення, що дається цим зв'язком, підставити величини, виражені через даний відрізок, дані величини.

Розглянемо для прикладу задачу.

Задача 19. Основа піраміди – правильний трикутник, сторона якого *a*. Два бічних ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β, а грань між ними нахилена до основи під кутом α. Знайти об’єм піраміди.



мал.12

Розв’язання:

Оскільки, ∠MOA=∠MBO маємо, що AO = BO. Тоді, основа висоти MO – рівновіддалена від кінців відрізка AO і BO і мають на висоті CD правильний трикутник ABC.

Дані сторони, з жодним з кутів не пов’язані, тому задачу розв’язуємо шляхом введення допоміжного відрізка. З рисунка видно, що висота піраміди входить у прямокутні трикутники, в яких відомі кути, до того ж саме висота потрібна для визначення об’єму, тому висоту ми приймаємо за допоміжний відрізок.

Позначимо MO через *x*.

AO =$x\cdot ctg\,\beta$, DO =$x\cdot ctg\,\alpha$.

Для знаходження x маємо рівняння

$AO^2 - DO^2 = AD^2$

$x^2\cdot ctg^2\beta - x^2\cdot ctg^2\alpha = \frac{a^2}{4}$

$x^2\cdot(ctg^2\beta - ctg^2\alpha) = \frac{a^2}{4}$

$x = \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$

$V = \frac{1}{3}S_{осн.н.}$, $\qquad V = a^3\sqrt{\frac{3}{24}}\cdot\sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$

3.3.4. Спосіб введення допоміжного кута

Суть методу введення допоміжного кута полягає в тому, що шукані лінійні елементи виражають спочатку через лінійні елементи і тригонометричні функції допоміжного кута, після чого – тригонометричні функції допоміжного кута або відкидають (наприклад, виражають через тригонометричні функції відомих кутів), або обчислюють їх значення.

Який же кут потрібно обрати за допоміжний? Взагалі. В задачах на многогранники за допоміжний кут можна обрати:

1) Кут між бічним ребром і основою многогранника;
2) Лінійний кут деякого двогранного кута;
3) Плоский кут деякого многогранного кута, тощо.

Щоб детально ознайомитися з цим методом, розглянемо розв'язування кількох геометричних задач, серед яких будуть задачі із застосуванням тригонометрії. В результаті розв'язування такої задачі, отримаємо формулу, яка виражає шукану величину як функцію даних величин. Розв'язуючи такі задачі, найчастіше використовують такі відомості з курсу геометрії:

1. У тригранному куті плоский кожний кут менший від суми двох інших плоских кутів і більший за їх різницю.
2. У опуклому многогранному куті сума всіх плоских кутів менша від 2π.
3. Кут між площиною і похилою гострий.
4. Властивості зовнішніх і внутрішніх кутів трикутника, тобто:

   А) Якщо α – кут при вершині рівнобедреного трикутника, то $0 < 2\alpha < \pi$.

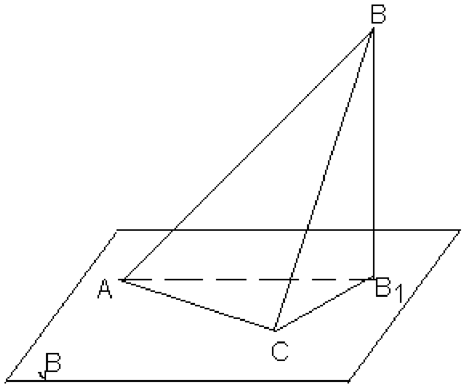
   Б) Кут при основі рівнобедреного трикутника – гострий.

   В) У трикутнику напроти більшої сторони лежить більший кут; проти меншої сторони лежить менший кут.

   Г) Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього, який не суміжний з ним.
5. Деякі співвідношення між кутами в просторі та їх проекціями на площину, які нижче подамо у вигляді теореми та наслідку з неї.

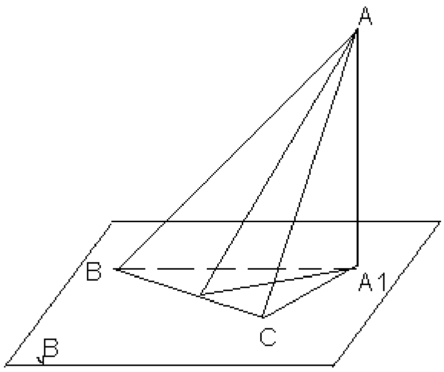
Теорема.

Якщо B_1 – проекція вершини B прямокутного трикутника ABC на площину β, яка проходить через катет AC, то $AB_1C > ABC$ (мал.1)



мал.13

Наслідок. *Якщо з однієї і тієї самої точки A, взятої поза площиною p, проведеної до цієї площини дві рівні похилі AB та AC, то кут між ними менший від кута між їх проекціями на площину β.*

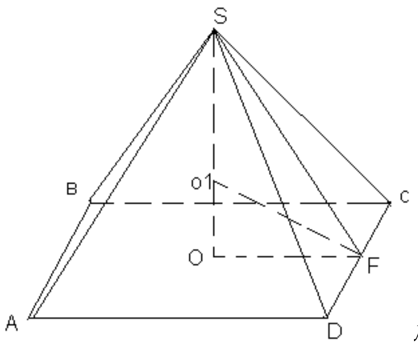


мал.14

Легко доведемо цей наслідок, якщо проведемо висоти AD та A_1D рівнобедрених трикутників ABC та A_1BC.

Далі розв'яжемо декілька задач способом введення допоміжного кута.

Задача 20. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює *a,* а плоский кут при вершині піраміди α. Визначити радіус кулі, вписаної в дану піраміду.



мал.15

Розв'язання.

Центр O_1 кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду SABCD, є точкою перетину висоти SO піраміди з бісектрисою O_1F лінійного кута двогранного кута, утвореного бічною гранню і основою піраміди.

Невідомий радіус OO_1 вписаної кулі можна знайти з прямокутного трикутника OO_1F, в якому $OF = |\frac{\alpha}{2}|$. Кути трикутника OO_1F невідомі, а тому один з них, наприклад $\angle SOF$, можна взяти за допоміжний і позначити його через φ. Тоді $O_1FO = |\frac{\varphi}{2}|$; з ΔOO_1F маємо $|O_1O| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2}$.

Далі можемо виразити $tg\frac{\varphi}{2}$ через тригонометричні функції кута *a*.

Відомо, що

$$\sqrt{tg\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{(1-\cos\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)}(0° < \varphi < 90°)$$

залишається cosφ виразити через функції кута α; з ΔSOF маємо $\cos\varphi = \frac{|OF|}{|SF|}$

З ΔSCF маємо $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{|CF|}{|SF|}$, але |CF|=|OF|, то $\cos\varphi = tg\frac{\varphi}{2}$

Тоді:

$$|OO_1| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{(1-tg\frac{\varphi}{2})(1+tg\frac{\varphi}{2})} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}$$

Отже, в цій задачі за допоміжний кут доречно було взяти лінійний кут двогранного кута при основі правильної піраміди.

Дослідимо даний розв'язок.

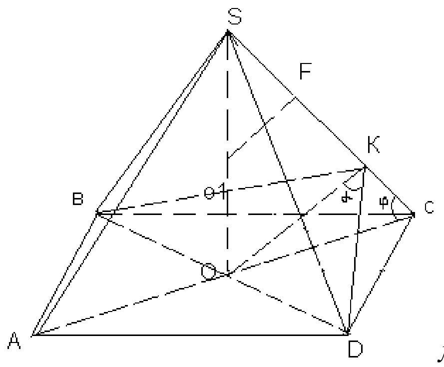
Очевидно, що a>0. Крім того, за властивістю плоских кутів многогранного кута при вершині S даної піраміди:

0<4α<2π, тому 0< $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, отже, $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$>0.

При $a>0$, і $0<\alpha<\frac{\alpha}{2}$ радіус OO_1 виражається додатнім числом.

Відповідь. $|OO_1|= \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$, де $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$.

Задача 21. В кулю радіуса R вписана правильна чотирикутна піраміда, в якої двогранний кут між суміжними бічними гранями дорівнює 2α. Знайти сторону основи піраміди.



мал.16

Розв'язання.

Нехай O_1 – центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди SABCD. Відомо, що точка O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і прямої O_1F, яка перпендикулярна до бічного ребра і піраміди і ділить його навпіл. Щоб визначити сторону основи піраміди, достатньо визначити |OC|. Введемо допоміжний кут SCO і позначимо його через, оскільки $\angle SO_1F=\angle SCO=\varphi$ з ΔSFO_1, в якому $|SO_1|$=R, знайдемо |SF|=Rsinφ, а, отже, |SC|=2R sin φ.

Нехай |CD|=x, тоді $|OC|=\frac{x}{\sqrt{2}}$; з ΔSOC маємо:

$|OC|= \frac{x}{\sqrt{2}}$ =|SC| cosφ= 2Rsinφ cosφ,

$x=2\sqrt{2}$ Rsinφ cosφ. (1)

Далі треба sinφ і cosφ виразити через тригонометричні функції кута α. Побудувавши кут BKD – лінійний кут двогранного кута між суміжними бічними гранями і сполучивши точки К та О, дістанемо

з ΔOKD: $\frac{|OK|}{|OD|} = ctg\alpha$; з ΔOKC: $\frac{|OK|}{|OC|} = \sin\alpha$; але |OD|=|OC|, тому

ctg φ=sin φ, а $\cos\varphi = \frac{\sqrt{-\cos\varphi}}{\sin\alpha}$.

Підставивши значення sinφ і cosφ в (1), знаходимо:

$$x=2\sqrt{2}R\sin\varphi\cos\varphi=2\sqrt{2}R\,ctg\,\alpha\,cosec\,\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha} \qquad (2)$$

Отже, за допоміжний кут доцільно було вибрати кут нахилу бічного ребра піраміди до основи.

Дослідимо знайдений розв'язок.

Очевидно, що R>0. Крім того, [KC] перпендикулярний до площини трикутника BKD, тому відрізки BK і KD є проекціями конгруентних похилих BC і CD на площину трикутника BKD. За наслідком з теореми: $\angle BKD > \angle BCD$, отже, 2α>$\frac{\alpha}{2}$. Крім того кут BCD – кут при вершині рівнобедреного ΔBKD, тому 2α<π.

При $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ маємо: -cos α >0.

ctg α >0 і cosec α >0, бо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Отже, права частина формули (2) додатна.

Відповідь. x=2√2Rsinφ cosφ=2√2R ctg α cosec α√-cos 2 α, де $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.3.5. Метод аналогії

Аналогія – умовивід, в якому на основі подібності предметів за одними ознаками робиться висновок про подібність цих предметів за іншими ознаками.

Висновки, які дає аналогія, треба ще перевіряти іншими способами. Незважаючи на це, аналогія все ж широко застосовується як метод пізнання в математиці, зокрема в стереометрії.

Аналогію можна використовувати в усіх темах шкільного курсу стереометрії, переносячи відомі властивості планіметричних фігур на відповідні фігури в просторі.

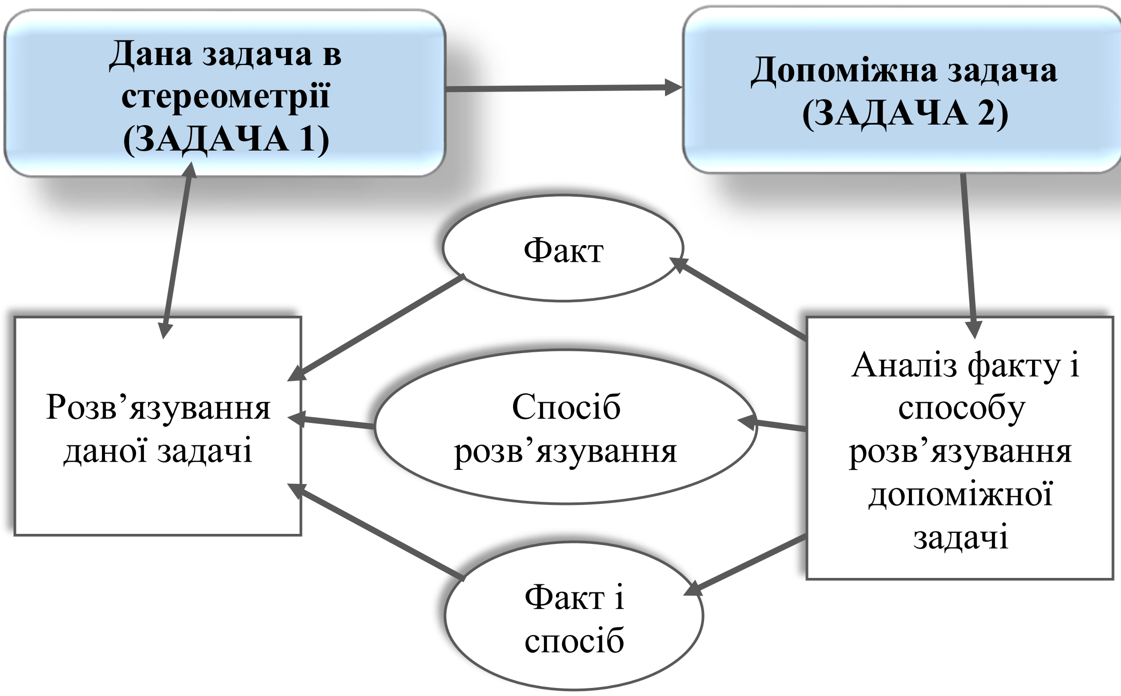
Розглянемо приклади стереометричних задач з використання методу аналогії. Розробка методики розв’язання таких задач має велику дидактичну та пізнавальну цінність і є актуальною методичною проблемою.

Вчитель може повідомити учням ряд послідовних правил застосування методу аналогії при розв’язанні стереометричних задач. Ці правила можна подати у вигляді наступних етапів:

- Проаналізувати умову *даної задачі стереометрії* (ЗАДАЧА 1);
- Пригадати, чи не зустрічали ви схожу задачу (ЗАДАЧА 2);
- Якщо ж зустрічали, то обрати ЗАДАЧУ 2, як *допоміжну задачу*;
- Проаналізувати факт і спосіб розв’язання ЗАДАЧІ 2;
- Визначити можливість застосування факту і способу розв’язання ЗАДАЧІ 2 для розв’язання *задачі стереометрії* (ЗАДАЧА 1)
- Записати дане розв’язання.

Вчитель може показати учням *схему 2*, в якій коротко описана технологія використання методу аналогії для розв’язання стереометричних задач [25, 31].

Схема 2



Задача 22. Точки B_1, C_1, D_1 відповідно лежать на ребрах AB, AC, AE тетраедра ABCD. Довести, що $\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}{AB \cdot AC \cdot AD}$, де $V_{AB_1C_1D_1}$ та V_{ABCD} є відповідно об'ємами тетраедрів $AB_1C_1D_1$ та $ABCD$.

Розв'язання.

Сформулюємо аналогічну задачу в планіметрії:

Задача 22А. Точки B_1, C_1 відповідно лежать на сторонах AB та AC трикутника ABC. Довести, що $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$, де $S_{AB_1C_1}$ та S_{ABC} є відповідно площами трикутників AB_1C_1 та ABC.

Назвемо цю задачу *допоміжною* до ЗАДАЧІ 22.

Допоміжну задачу можна розв'язати двома способами.

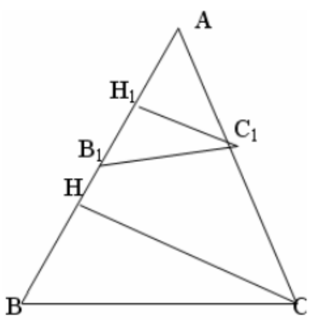
1-Й СПОСІБ. Застосуємо формулу обчислення площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ (1)

Для трикутника ABC маємо: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

Для трикутника AB_1C_1маємо: $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} \mathrm{AB}_1 \cdot \mathrm{AC}_1 \cdot \sin A$

З двох рівностей маємо: $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$

Задачу розв'язано.



мал. 17

2-Й СПОСІБ.

Проведемо висоти трикутників AB_1C_1 та ABC з вершин C та C_1 на пряму AB. Позначимо основи цих висот відповідно H та H_1.

Використаємо формулу обчислення площі трикутника через сторону і відповідну висоту:

$$S = \frac{1}{2} ah \quad (2)$$

Для трикутника ABC маємо: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

Для трикутника AB_1C_1маємо: $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot C_1H_1$

З двох рівностей маємо: $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1}{AB} \cdot \frac{C_1H_1}{CH}$

Оскільки, трикутники AC_1H_1 та ACH подібні то $\frac{C_1H_1}{CH} = \frac{AC_1}{AC}$.

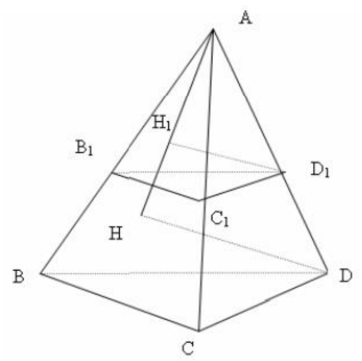
Тому, $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$. (3)

Задачу розв’язано.

Проаналізувавши два способи розв’язування *задачі 22А,* робимо такий висновок: в першому способі використовується формула (1), але для тетраедра поки що невідома формула, аналогічна даній. Вчитель повідомляє учням, що така формула є, але доводиться дуже важко. Тому шукати розв’язок задачі за 1-им способом не будемо. Щодо другого способу, то відома формула, аналогічна до формули (2) – обчислення об’єму тетраедра за площею і висотою:

$V = \frac{1}{3}Sh.$

Тому найкраще для розв’язуванні *задачі 22* нам підходить 2-й спосіб.



мал. 18

Проведемо висоти тетраедрів ABCD та $AB_1C_1D_1$ з вершин D та D_1 на площину ABC.

Позначимо основи висот відповідно H та H_1. Для тетраедра ABCD маємо:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DH \quad (4)$$

Для тетраедра $AB_1C_1D_1$ маємо:

$$V_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{3}S_{AB_1C_1} \cdot D_1H_1$$

Із цих рівностей маємо: $\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} \cdot \frac{D_1H_1}{DH}$ (5)

За результатами *задачі 22А* маємо таку рівність: $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$

Тому, щоб розв’язати *задачу 22* необхідно довести, що $\frac{D_1H_1}{DH} = \frac{AD_1}{AD}$ (6)

Ця рівність випливає із подібності трикутників AD_1H_1 та ADH, яку досить легко можемо довести.

Висновок: щоб розв'язати *задачу 22*, потрібно спочатку застосувати формулу (4) для тетраедрів ABCD та $AB_1C_1D_1$ і отримаємо рівність (5). Потім слід довести рівність (6) і використати її та результат допоміжної задачі (рівність 3), одночасно замінивши в рівності (5).

3.3.6. Координатний метод

У курсі стереометрії існують такі задачі, в яких «класичне» розв'язання не підходить або потребує великої кількості кроків. Тому потрібно шукати інші способи розв'язування таких задач, серед них метод координат.

Якісне розв'язання стереометричної задачі методом координат залежить від вдалого вибору координатних осей при розміщенні заданої фігури.

Для розв'язування задач координатним методом слід володіти такими вміннями:

1. Виконувати побудову точки за координатами;
2. Визначати координати точок;
3. Обчислювати відстань між точками та координати середини відрізка;
4. Вдало вибирати систему координат;
5. Складати рівняння заданої фігури за її характеристичною властивістю;
6. За рівнянням визначати конкретний геометричний образ;
7. Перетворювати алгебраїчні рівності [19].

Розв'яжемо декілька задач координатним методом.

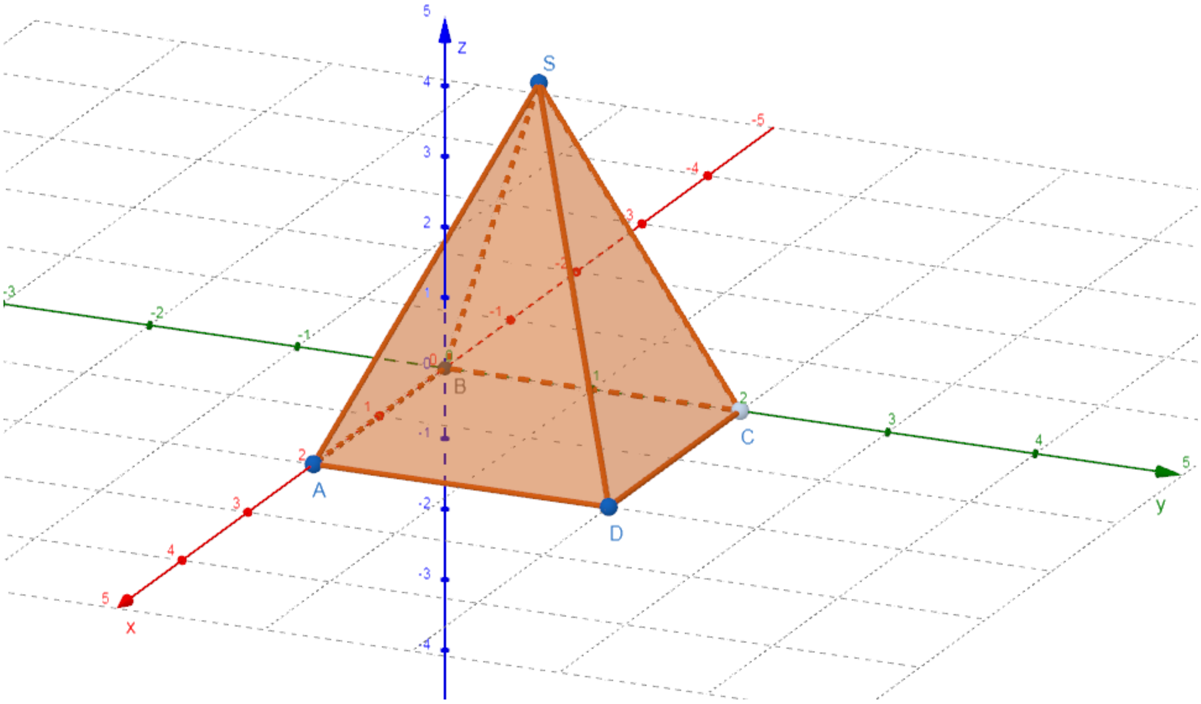
Задача 23. У правильній чотирикутній піраміді з висотою 4 та стороною основи 2 знайти відстань від вершини кута основи до площини бічної грані, якій належить інша сторона основи.

Розв'язання.

Введемо прямокутну систему координат з початком в точці B, основа ABCD правильної чотирикутної піраміди SABCD лежить в координатній площині *XOY* ($AB \subset OX$; $BC \subset OY$). Тоді відомо, що точки основи піраміди мають координати B(0;0;0); A(2;0;0); C(0,2,0); D(2;2;0). Оскільки S проектується паралельно OZ у центр квадрата основи, то її координати x і y дорівнюють координатам середин відрізків AB і BC відповідно

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_S, \; \frac{y_B + y_C}{2} = y_S$$

Тоді вершина піраміди буде мати координати: S(1;1;4).



мал. 19

За умовою потрібно знайти відстань від вершини кута основи B до площини бічної грані DCS, якій належить інша сторона основи.

Складемо рівняння площини DCS вигляду $ax + by + cz + d = 0$, де коефіцієнти a, b, c не перетворюються на нуль одночасно. Три точки D, C, S належать площині $ax + by + cz + d = 0$, отже їх координати задовольняють рівняння.

Маємо систему:

$$\begin{cases} 2a + 2b + d = 0, \\ 2b + d = 0, \\ a + b + 4c + d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ 2b + d = 0, \\ b + 4c + d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ d = -2b, \\ b = 4c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ d = -2b, \\ b = -8c. \end{cases}$$

Нехай c=1. Тоді $\begin{cases} a = 0, \\ b = 4, \\ c = 1, \\ d = -8. \end{cases}$ Рівняння площини DCS має вигляд: $4y + z - 8 = 0$

$\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ відстань від точки M (x_0, y_0, z_0) до площини $ax + by + cz + d = 0$.

Знайдемо відстань від точки B (0;0;0) до площини DCS.

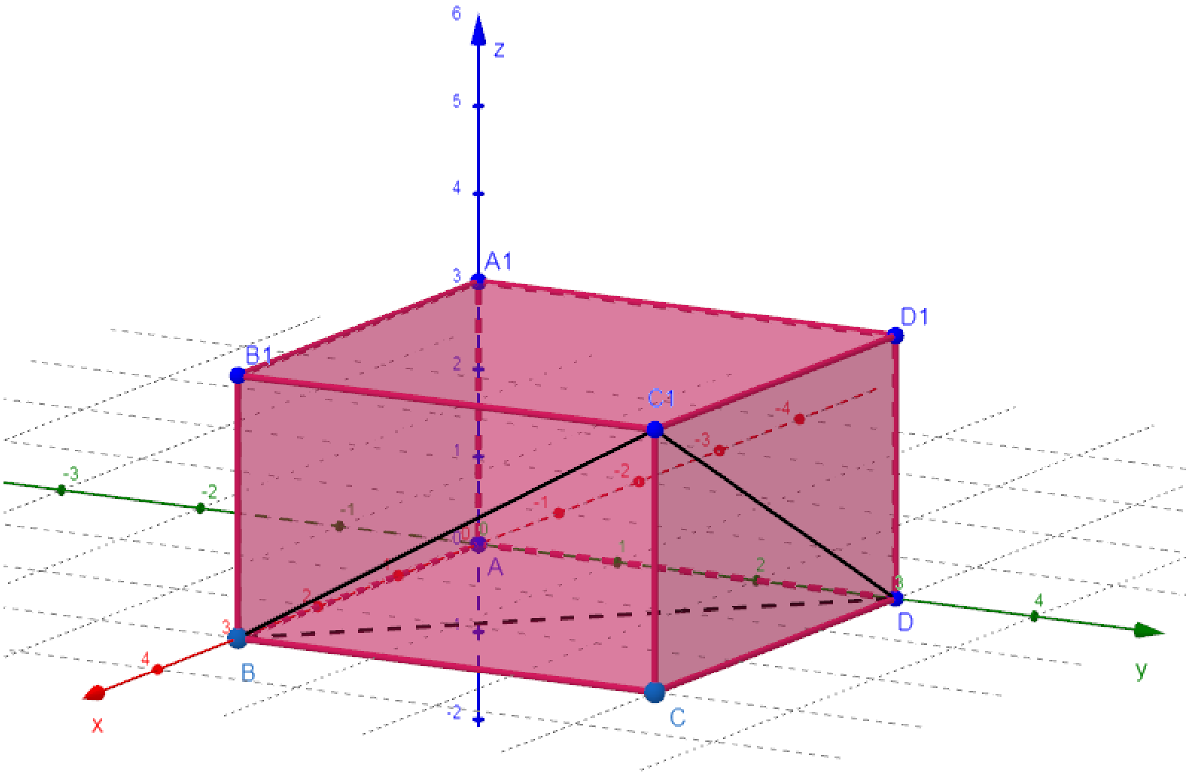
$\rho = \frac{|0+0+0-8|}{\sqrt{0+16+1}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$.

Відповідь: $\frac{8}{\sqrt{17}}$.

Задача 24. Ребра AB, AD, і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно дорівнюють 3 см, 1 см і 4 см. Знайдіть відстань від точки A_1 до площини BC_1D.

Розв'язання:

Введемо прямокутну систему координат з початком в точці A, нижня основа прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить в координатній площині XOY ($AB \subset OX$; $AD \subset OY$, $AA_1 \subset OZ$). Тоді відомо, що вершини прямокутного паралелепіпеда мають координати A(0;0;0); B(3;0;0); C(3,1,0); D(0;1;0); A_1(0;0;4); C_1(3;1;4).



мал. 20

За умовою потрібно знайти відстань від вершини A_1 до площини BC_1D. Складемо рівняння площини BC_1D. Нехай рівняння $ax + by + cz + d = 0$, задає площину BC_1D.

Маємо систему:

$$\begin{cases} 3a + d = 0, \\ b + d = 0, \\ 3a + b + 4c + d = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4c = 0, \\ b + d = 0, \\ b + 4c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4c = 0, \\ b = -d, \\ d = -3a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{4}a, \\ b = -d, \\ d = -3a. \end{cases}$$

Нехай a=4 (для зручності обчислення). Тоді $\begin{cases} a = 4, \\ b = 12, \\ c = -3, \\ d = -12. \end{cases}$ Рівняння площини BC_1D має вигляд: $4x + 12y - 3z - 12 = 0$

Знайдемо відстань від точки A_1 (0;0;4) до площини BC_1D.

$\rho = \frac{|-3\cdot 4-12|}{\sqrt{16+144+9}} = \frac{24}{13} = 1\frac{11}{13}$ *см.*

Відповідь: $1\frac{11}{13}$ см.

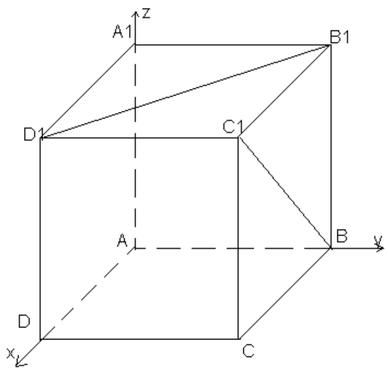
3.3.7. Метод векторів

Розглянемо схему розв’язання стереометричних задач методом векторів:

1. Перекласти вимогу задачі на векторну мову.
2. Ввести прямокутну систему координат або вибрати три не компланарні вектори у просторі.
3. Знайти координати векторів, що виділені в пункті 1, або виразити ці вектори через базисні.
4. Знайти або довести виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову.

Розглянемо приклад розв’язанні задачі методом векторів.

Задача 25. Знайти кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.



мал.21

Розв’язання.

Скористаємось запропонованою вище схемою розв’язання. Нехай дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Позначимо кут між мимобіжними діагоналями B_1D_1 і BC_1 двох суміжних граней куба через φ ($\angle(B_1D_1, BC_1)=\varphi$).

1. Подамо вимогу задачі на векторній мові: необхідно знайти кут φ із співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{B_1D_1}\cdot\overline{BC_1}|}{|\overline{B_1D_1}|\cdot|\overline{BC_1}|}$$

2. Введемо прямокутну систему координат: початок виберемо в точці A, вісь Ox направимо вздовж AD, Oy – вздовж AB і Oz – вздовж AA_1.

Якщо ребро куба взяти за одиницю, то координати вершин куба: A(0;0;0), B(0;1;0), C(1;1;0), D(1;0;0), $A_1(0;0;1)$, $B_1(0;1;1)$, $C_1(1;1;1)$,$D_1(1;0;1)$.

3. Тоді координати векторів, виділених у пункті 1, будуть:

$$\overline{B_1D_1} = \overline{(1;-1;0)},\quad \overline{BC_1} = \overline{(1;0;1)}$$

Знайдемо кут φ: cos φ=$\frac{1}{2}$

Оскільки cos φ=$\frac{1}{2}$ і кут φ – гострий (як кут між прямими), то φ=60º.

Відповідь. φ=60º

3.3.8. Спосіб інверсії

Термін «інверсія» походить від латинського слова «inversio» – перевертання або перестановка.

В чому ж полягає метод інверсії? При інверсії фігура в деякому розумінні перевертається, але відносно не осі симетрії, а відносно кола.

Припустимо, що на площині α задано коло К з радіусом R та центром в точці О. Тоді, інверсія – це така відповідність між точками площини, при якій кожній точці А, відмінній від точки О, ставиться у відповідність точка A_1, так що:

- точки А та A_1 розміщені на одному і тому самому промені, який виходить з точки О;
- відрізки ОА та OA_1 пов'язані співвідношенням: $OA \cdot OA_1 = R^2$.

З вище наведеного означення випливають такі властивості інверсії:

1. Властивість симетрії: якщо точка А відповідає точці A_1, тоді точка A_1 відповідає точці А.
2. Якщо ОА $<$ R, то $OA_1 >$ R (тобто, якщо точка А знаходиться всередині кола, то точка A_1 лежить за колом, і навпаки)
3. Точки, що лежать на колі інверсії, збігаються з своїми інверсними точками. Полюс інверсії не має інверсної собі точки.

Розглянемо приклад розв'язання задачі.

Задача 26. Знайти радіус кулі, описаного навколо тетраедра, знаючи довжини шести його ребер.

Для розв'язання даної задачі необхідно спочатку ввести деякі позначення. Нехай a = BC, b = AC, c = AB, α = DA, β = DB, γ = DC тетраедра ABCD.

Розглянемо A', B', C', протилежні точки A, B, C приймаючи за полюс інверсії точку D і вибираючи довільно степінь інверсії *к.* Куля, описана навколо тетраедра, буде при таких умовах фігурою, протилежної площини A'B'C'; її діаметр 2R буде рівний $\frac{k}{DH}$, де через DH визначено відстань полюса від даної площини.

Але DH є висотою тетраедра A'B'C'D; відповідно, об'єм цього тетраедра рівний одній третій добутку DH на площу трикутника A'B'C'. З іншої сторони, даний тетраедр і тетраедр DA'B'C' можна розглядати як ті, що мають своїми основами відповідно грані DAB і DA'B'; і висотами будуть відрізки CP і C'P';

відповідно, відношення об'ємів цих тетраедрів рівне відношенню площ їх основ. Якщо позначити через V об'єм даного тетраедра, то будемо мати:

$$\frac{DH \cdot S_{A'B'C'}}{3V} = \frac{DA' \cdot DC' \cdot DB'}{DA \cdot DC \cdot DB} \quad (*)$$

Але відрізки, що входять в праву частину цієї рівності, відповідно рівні:

α=DA, β=DB, γ=DC, $DA' = \frac{k}{\alpha}, DB' = \frac{k}{\beta}, DC' = \frac{k}{\gamma}$. З іншої сторони , ми маємо:

$B'C' = \frac{k \cdot BC}{DB \cdot BC} = \frac{k \cdot a}{\beta\gamma} = \frac{k \cdot a \cdot \alpha}{\beta\gamma\alpha}, C'A' = \frac{kb\beta}{\alpha\beta\gamma}, A'B' = \frac{kc\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, ці рівняння показують, що трикутник A'B'C' подібний трикутнику , сторони якого відповідно виміряються $a\alpha, b\beta, c\gamma$ причому коефіцієнт подібності рівний $\frac{k}{\alpha\beta\gamma}$. Позначивши через Σ площу цього останнього трикутника, будемо мати:

$$S_{A'B'C'} = \frac{k^2\Sigma}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

Якщо в рівнянні (*) замінити DH через $\frac{k}{2R}$ та інші вхідні в нього елементи (крім V) – отриманих для них виразів, то після всіх перетворень отримаємо $6VR = \Sigma$.

Таким чином, добуток радіуса описаної кулі на об'єм тетраедра, рівне одній шостій площі трикутника, сторони якого вимірюється відповідно добутками протилежних ребер тетраедра.

3.3.9. Метод геометричних місць точок

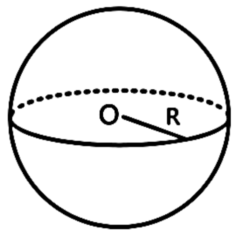
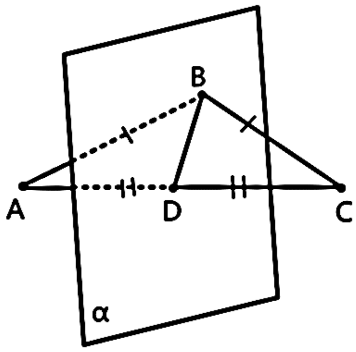
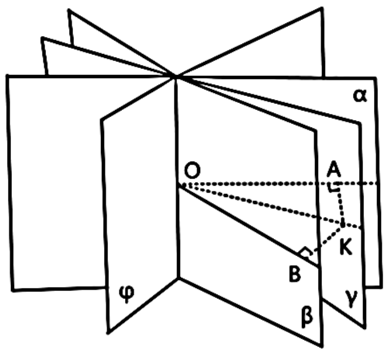
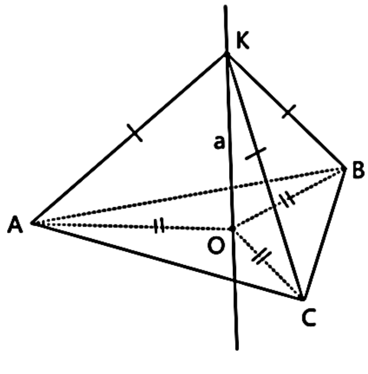
Означення. Геометричне місце точок (ГМТ) простору – це фігура, як складається з усіх точок простору, які мають певну властивість.

Розв'язання задач на знаходження ГМТ в просторі, так само як і в планіметрії, складається з висування гіпотез про вид шуканої фігури G, а також обгрунтовуються два взаємно обернених твердження:

1) Якщо точка В належить фігурі G, то вона має дану властивість;
2) Якщо точка В має дану властивість, то вона належить фігурі G. [25, 26].

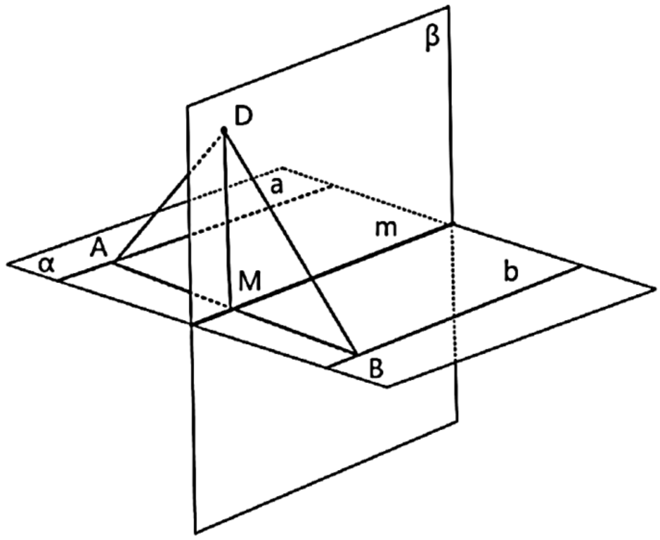
Розглянемо основні ГМТ простору, які мають ту ж властивість, що і відповідні ГМТ на площині:

Таблиця 2

I.	Геометричним місцем точок простору, розташованих на даній відстані R від даної точки O, є сфера радіуса R з центром в точці O.	
II.	Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від двох даних точок A та C, є площина, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину.	
III.	Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних площин, що перетинаються, є бісекторні півплощини всіх двогранних кутів, утворених відповідними площинами.	
IV.	Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин трикутника, є пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, описаного навколо триктуника.	

Розглянемо приклад розв’язання такої задачі.

Задача 27. Знайти ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.



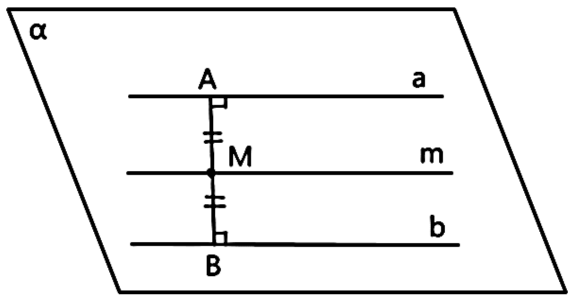
Насамперед, потрібно розглянути площину α, у якій лежать дані паралельні прямі (мал.22). *ГМТ площини, рівновіддалених від двох паралельних прямих a і b в цій площині,*

мал.22

буде пряма m, яка паралельна даним прямим і проходить посередині між ними (тобто ділить відстань AB між даними прямими навпіл: AM = MB). Тому, ГМТ відповідних точок простору обов'язково буде мати пряму m.

Згадаємо, що в просторі похилі, які мають рівні проекції, рівні, то можна зробити припущення, що відповідне ГМТ простору буде мати теж всі перпендикуляри до площини α, які проведені з кожної точки прямої m. Але такі перпендикуляри лежать в площині β, яка перпендикулярна до площини α і проходить через пряму m. Отже, можемо висунути гіпотезу, що шуканим ГМТ і буде площина β.

Отже, нам потрібно довести, що *ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих a та b, є площина β, яка перпендикулярна до площини α, визначеної даними прямими, і ділить навпіл відстань між ними* (а також містить пряму m площини α, яка паралельна даним прямим і проходить між площинами) (мал.23)



мал.23

1. Нехай точка D належить площині β. У площині β проведемо перпендикуляр DM $\perp$ m. Оскільки, $\beta \perp \alpha$, то DM $\perp$ α. Проведемо через точку M в площині α пряму AB $\perp$ m $(A \in a, B \in b)$. Оскільки $m \parallel a \parallel b$, то AB $\perp$ a та AB $\perp$ b. Взявши до уваги, що AM = BM, маємо рівність

відповідних похилих: AD = BD. Використовуючи теорему про три перпендикуляри, отримаємо, що AD $\perp a$ та BD $\perp b$, тобто точка D рівновіддалена від прямих a та b.

2. Нехай точка D рівновіддалена від прямих a та b, тобто DA = DB (AD $\perp a$ та BD $\perp b$). Розглянемо площину DAB. Вона перпендикулярна до прямої a ($a \perp$ AD та $a \perp$ BD, оскільки $a \parallel b$). Тому, AB $\perp a$, і тоді площина β проходить через точку M – середину відрізка AB. Оскільки DA = DB, то точка D теж рівновіддалена від кінців відрізка AB. Зробимо висновок, що через точку M проходить тільки одна площина β, перпендикулярна до AB, отримаємо: D $\in \beta$.

Тому площина β дійсно є шуканим ГМТ.

3.3.10. Методи паралельного та центрального проектування

Щоб зобразити просторову фігуру на площині, зазвичай використовують *метод паралельного проектування.*

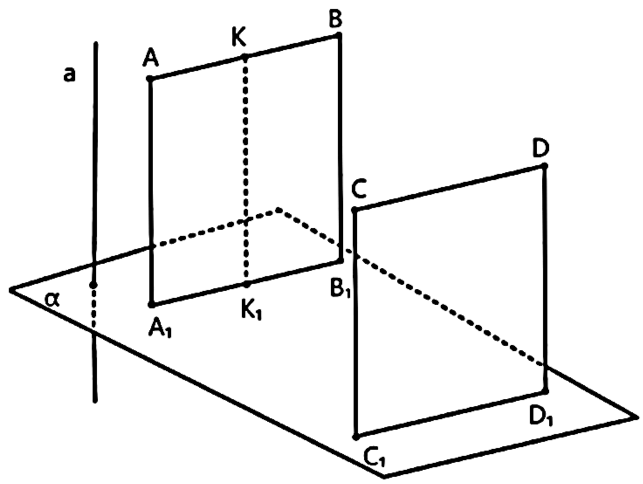
Візьмемо довільну пряму a, яка перетинає площину α. Через довільну точку A деякої фігури проведемо пряму $AA_1 \parallel a$, яка перетинає площину α в точці A_1. (мал. 24)

Точка A проектується в точку A_1 на площині α: $A \to A_1$.

Аналогічно $B \to B_1,\ AB \to A_1B_1$ ($BB_1 \parallel AA_1 \parallel a$).

Розглянемо властивості паралельного проектування:

1. Пряма проектується в пряму або точку; відрізок проектується у відрізок або точку.



Мал.24

2. Якщо $AB \parallel CD, (AB \to A_1B_1, CD \to C_1D_1, AB \parallel AA_1)$, то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ або вони збігаються.

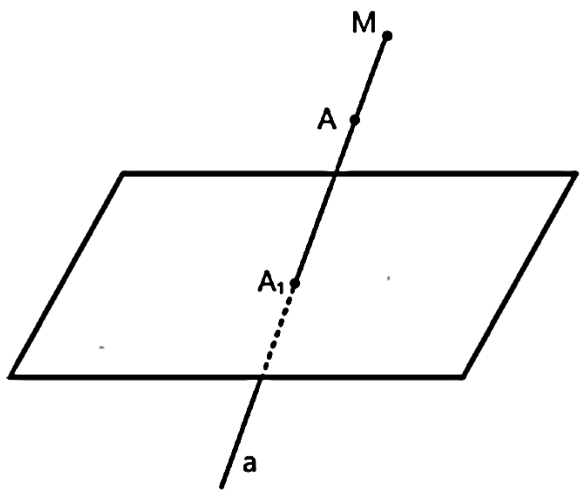
3. $\frac{AK}{KB} = \frac{A_1K_1}{K_1B_1}$

Наслідок: Якщо точка К – середина відрізка АВ, $AB \rightarrow A_1B_1, K \rightarrow K_1$, то точка K_1 – середина відрізка A_1B_1.

4. Якщо плоска фігура G лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція *G'* на цю площину дорівнює фігурі G.

Для зображення просторових фігур також велике значення має *центральне проектування*, яке зазвичай використовують у фотографії, живописі тощо. За законами центрального проектування людина сприймає навколишні предмети за допомогою зору.

Нехай α – деяка площина, а точка М, яка не належить їй, - центр проектування (мал. 25). Для точки А простору введемо пряму a через точки М та А. Точку перетину цієї прямої з площиною α називають центральною проекцією точки А на площину α. Позначимо цю точку A_1.



мал.25

Спосіб проектування, при якому точкам А простору ставлять у відповідність їх центральні проекції A_1, називається центральним проектування.

Розглянемо розв'язання декількох задач з використанням даного методу.

Задача 28. Чи може паралелограм бути паралельною проекцією трапеції?

Коментар: Тут використаємо метод від супротивного, щоб спростувати дане твердження. Припустимо, що паралельною проекцією трапеції є паралелограм. Спираючись на властивості паралелограма і трапеції та на властивості паралельного проектування, отримаємо суперечність із якоїсь із цих властивостей.

Розв'язання: Ні, тому що в трапеції прямі, на яких лежать бічні сторони, перетинаються. А тому, точка перетину цих прямих повинна проектуватися в точку перетину їх проекцій (в точку перетину прямих, на яких лежать протилежні сторони паралелограма-проекції). Робимо висновок, що це неможливо, тому що протилежні сторони паралелограма лежать на паралельних прямих, тобто вони не перетинаються.

Задача 29. На зображенні $P_1K_1M_1$ (мал.26, а) рівнобедреного прямокутного трикутника PKM ($\angle M = 90°$) побудуйте зображення квадрата, який лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата служить гіпотенуза трикутника і вершина прямого кута розташована всередині квадрата.

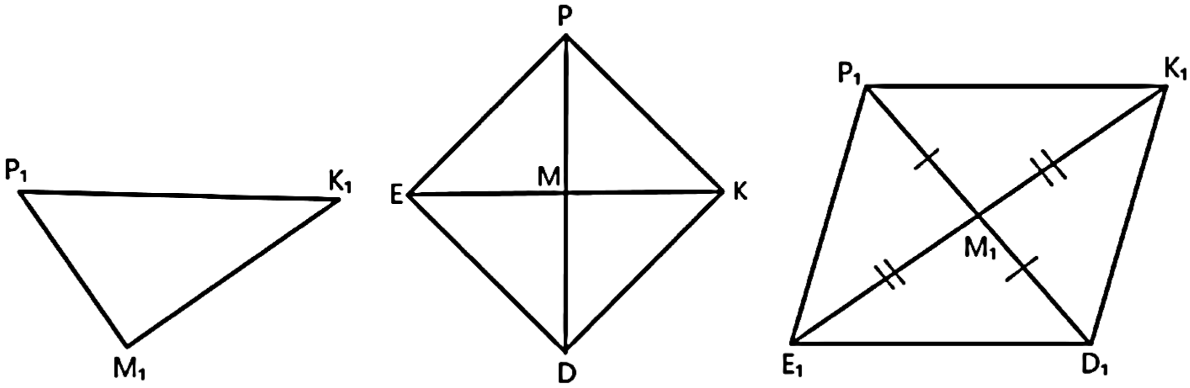
Коментар: аналізуючи умову задачі розглядаємо фігури-оригінали та виділяємо такі їх властивості, які зберігаються при паралельному проектуванні (паралельність прямих і відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих).

Коли з'ясуємо, що у квадраті PKDE (мал.26, б) точка M – середина відрізків KE та PD, складемо такий план побудови:

Продовжити сторони P_1M_1 та K_1M_1 за точку M_1 і відкласти відрізки, що дорівнюють відповідним сторонам даного трикутника так, щоб точка M_1 була серединою діагоналей K_1E_1 та P_1D_1 побудованого чотирикутника $P_1K_1D_1E_1$.

Розв'язання: Нехай на гіпотенузі PK рівнобедреного прямокутного трикутника PKM побудовано квадрат PKDE так, що вершина M розташована в центрі квадрата (мал.26, б). Отже, точка M є точкою перетину діагоналей цього квадрата (тому що діагоналі квадрата, а також PM та KM рівнобедреного прямокутного трикутника PKM утворюють кути по 45° зі стороною PK). Тоді точка M – середина діагоналей KE та PD.

Але в процесі проектування середина відрізка проектується в середину проекції відрізка. А отже, ми продовжимо сторони P_1M_1 та K_1M_1 за точку M_1 та відкладемо відрізки: $M_1D_1 = P_1M_1$, $M_1E_1 = M_1K_1$. Послідовно сполучимо точки P_1, K_1, D_1, E_1 відрізками та отримаємо чотирикутник $P_1K_1D_1E_1$ (мал.26, в) – шукане зображення квадрата PKDE.



а *б* *в*

мал.26

3.4.Методичні рекомендації учням щодо розв'язування задач

Щоб навчитися розв'язувати стереометричні задачі важливо засвоїти кілька принципів та правил. Якщо їх дотримуватися, то розв'язати будь-яку задачу буде легко.

По-перше, необхідно навчитися завжди аналізувати задачу.

Що це означає? Тобто, треба навчитися розбивати умову задачі на елементарні умови і вимоги. Далі в кожній елементарній умові слід побачити об'єкт і його характеристику. Якщо в умові декілька об'єктів, то треба виявити їх відношення. А також необхідно встановити характер кожної вимоги, тобто визначити тип задачі.

Також слід дотримуватися наступного правила: не приступати до розв'язання задачі, поки не проведений повний, глибокий аналіз задачі та не побудований (якщо потрібний) її схематичний запис.

По-друге, варто розуміти, що розв'язання будь-якої задачі – це послідовне використання математичних знань до умови задачі, які були отримані із цих умов висновків до тих пір, поки не отримаємо такі висновки, які і є відповідями на вимоги задачі. Для того, щоб отримати такі висновки необхідно мати багаж математичних знань (правила, формули, означення, теореми, тощо).

По-третє, необхідно не тільки знати, але й вміти правильно використовувати основні методи розв'язання задач. Пригадаємо ці методи:

перетворення (моделювання) задачі, розбиття задачі на під задачі та метод допоміжних елементів.

Після аналізу задачі та побудови її схематичного запису, як правило, діють в такому порядку:

1. Якщо можливо, то розбити складну задачу на простіші задачі.
2. Якщо 1 пункт не вдається, то можна перетворити задачу в більш простий, знайомий вигляд (наприклад, заміна змінних, тотожні перетворення заданих виразів, тощо)
3. Якщо ж і 1 і 2 пункт не вдається, то можна спробувати ввести якість допоміжні елементи, з метою отримати задачу, яку можна буде розбити на під задачі, або перетворити на простішу.

3.5.Процес формування в учнів вмінь розв’язувати задачі

Одне з перших завдань вчителя – навчити учнів розв'язувати задачу. Тобто, відповісти на питання «Як це зробити?». При цьому необхідно уточнювати умови, за яких повинна розв'язуватись та чи інша проблема. Завдання вчителя – це озброїти учнів вмінням розв'язувати задачі за мінімальний проміжок часу. Також, важливо розуміти, що учні володіють різною успішність в навчанні, мають різне ставлення до предмету математики. Тому тут важливо донести до учнів знання загальних методів і способів розв'язання задач. Формуючи в учнів загальний підхід до розв'язання математичних задач, можна досягти вміння учнів розв'язувати задачі.

Щоб учні здобули знання загального підходу як до процесу управління потрібно володіти деякими поняттями і закономірностями кібернетики, зокрема поняттям «управління».

Управління – це примусовий, цілеспрямований вплив на об'єкт, вибраний з множини впливів на основу інформації про стан зовнішнього середовища, об'єкту та програми управління, що здійснюється в цілях забезпечення необхідного йому функціонування і розвитку.

Процес обробки інформації складається з ряду послідовних дій, які виконуються через окремі операції. Певна сукупність операцій може бути представлена алгоритмом. Тому в даній роботі використання алгоритмів в навчальному процесі розглядається як засіб управління процесом формування в учнів загальних вмінь. Побудова і застосування алгоритмів в навчальному процесі – один із засобів формування в учнів узагальнених вмінь [29, 35].

Реалізацій алгоритмів в навчальному процесі безліч: управління зі сторони вчителя, алгоритми навчання, самоуправління учнями, перетворення репродуктивних і продуктивних методів навчання, тощо.

Діяльність учнів можна назвати певною системою дій. Дії, які пропонують учні, не завжди є для них простими діями. В такому випадку вчитель має висунути гіпотезу, що будь-яке складне твердження можна подати як структуру простих дій, які учні на даному етапі змогли б з легкістю виконати. Після виконаних дій вчитель проводить певну роботу по вивченню учнями сформульованої системи операцій.

Вміння розв'язати задачу в учнів формується в результаті засвоєння певною системою знань і навичок, і водночас сам процес розв'язання задач є засобом формування в учнів системи математичних знань. Основна мета розв'язання математичних задач полягає в засвоєнні математичних понять та виробленні навичок ними доцільно користуватися.

Успішне навчання учнями розв'язувати задачі залежить в безлічі факторів, які можна поділити на три групи: основні, супутні та суперечливі умови. Сукупність основних і супутніх факторів ще називають сигналами входу. Основні фактори формують вміння розв'язувати задачі, а супутні фактори забезпечують перенесення вміння розв'язувати задачі, що виробились під час вивчення однієї теми на іншу. Суперечливі умови – причини, що якимось чином перешкоджають успішно сформувати вміння розв'язувати задачі.

Розв'язати задачу – вид пізнавальної діяльності. Змістом діяльності учнів є процес засвоєння ними вміння розв'язувати задачі. До закінчення школи учень повинен засвоїти наступні знання, операції та дії, що забезпечують успіх у вмінні розв'язати математичні задачі.

1. Знання про задачу, як про об’єкт управління

1) Що таке задача?

2) Структура задачі

3) Зміст системи задачі (предмет задачі та що вимагається знайти)

4) Зміст системи розв'язання (методи, способи і засоби розв'язання)

2. Знання про процес розв'язання задачі (основні етапи розв'язання задачі)

1) Ознайомлення з умовою задачі з виділенням заданих характеристик, обмежень і невідомих.

2) Складання плану розв'язання задачі (вибір методу розв'язування і його застосування щодо складання плану).

3) Здійснення розв'язання шляхом перетворення системи задачі по складеному плані з допомогою відібраних способів розв'язання задач.

4) Перевірка і контроль результатів розв'язання задач.

3. Зміст операцій і послідовності їх реалізації в процесі розв'язання задач

1) Прочитати умову задачі.

2) Виділення і аналіз процесів та властивостей тіл описаних в задачі.

3) Короткий запис умови задачі з виконанням малюнка.

4) Вибір методу і способу розв'язання конкретної задачі.

5) Розв'язання задачі.

6) Перевірка триманого результату [12, 18].

3.6 Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі

Практика та теорія навчання учнів розв'язувати задачі виділяє три основі етапи:

I. *Традиційний.* Здійснюється за наступною схемою:

1. Вчитель пояснює підхід до розв'язування певної задачі.
2. Колективне розв'язування задачі, під час якого весь клас обговорює спосіб розв'язування задачі; або ж один учень розв'язує біля дошки, інші слідкують.
3. Самостійне розв'язування задачі (наприклад, домашня та контрольна роботи).

II. *Напівсамостійний і повністю самостійний.*

1. Вчитель пояснює загальний підхід розв’язання задач даного виду на прикладі 1-3 задач.
2. Колективне розв'язання декількох задач з використанням загального підходу.
3. Напівсамостійне розв'язання задач. Включає в себе: колективний аналіз умови задачі, обговорення плану розв'язання і далі самостійне розв'язання.
4. Повністю самостійне розв'язання (все перераховане в 3 пункті учень виконує сам).
5. Самостійне розв'язання задач (домашня та контрольна роботи)

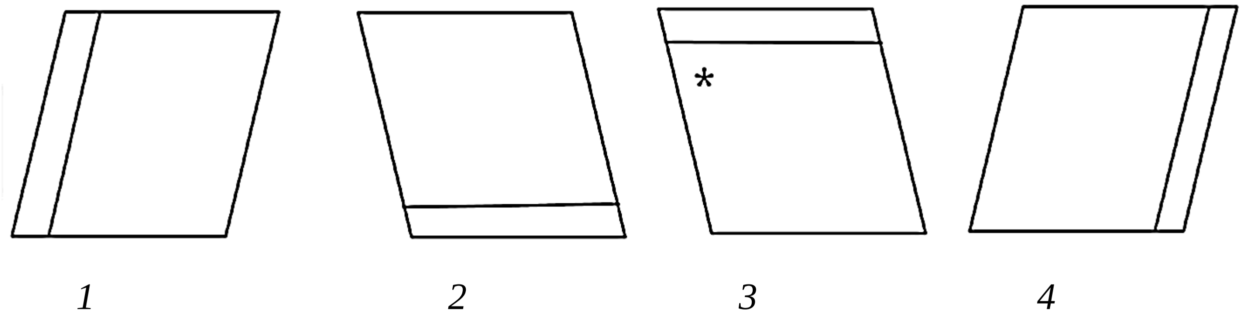
III. *Алгоритмічний.* Учні знайомляться з загальним методом розв'язання таких задач.

1. Колективне розв’язання декількох задач.
2. Пошук загального методу розв'язання задач за допомогою висунення гіпотези.
3. Учні знаходять загальний метод розв'язання таких задач та алгоритму їх розв'язання.
4. Засвоєння певних алгоритмів та окремих операцій, з яких складається розв'язок, в процесі колективного розв'язання декількох задач.
5. Самостійне розв'язання задач.
6. Самостійне розв'язання задач (домашні та контрольні роботи).

3.7.1. Усні вправи з стереометрії для учнів 10 класу

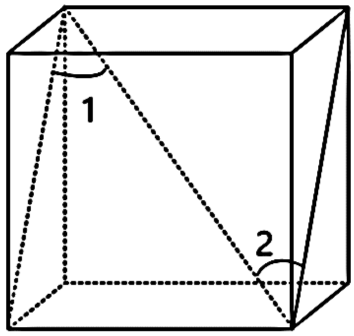
Вправи на визначення рівня розвитку просторових уявлень учнів.

1. На мал. 27 зображено одну й ту саму фігуру, але в різних положеннях. Де повинна стояти «зірочка» на кожній фігурі?



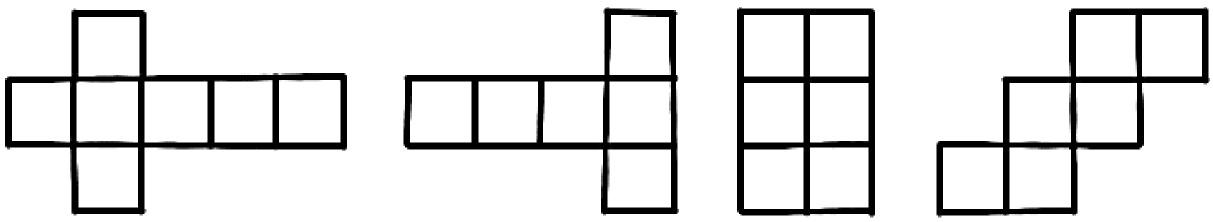
мал.27

2. На мал. 28 зображено куб. Чи правильне твердження: $\angle 1 = \angle 2$?



мал.28

3. Які з фігур на мал. 29 є розгортками куба?



мал.29

Аксіоми стереометрії.

4. Доведіть, що дві прямі у просторі не можуть перетинатися більш, ніж в одній точці.

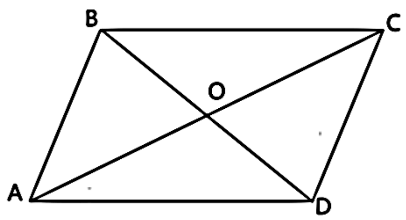
5. Поясніть, що означають такі слова: «можна провести площину», «можна провести не більше однієї площини», «площина визначена», «площина невизначена».

6. Три вершини паралелограма лежать в деякій площині. Чи можна стверджувати, що і четверта вершина паралелограма лежить в тій самій площині? Чому?

7. Чи може пряма перетинати дві сторони трикутника і не лежати у площині цього трикутника?

Паралельність прямих і площин.

8. Паралелограм ABCD (мал.30) є зображенням квадрата. Як побудувати зображення перпендикулярів, які проведені з точки О до сторін квадрата?



мал.30

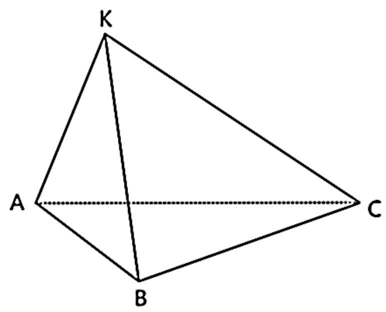
9. Як розміщені між собою осі залізничних вагонів відносно рейок?

10. Що можна сказати про прямі *a* та *b*, якщо відомо, що вони не мимобіжні?

11. Чи можуть паралельні прямі лежати відповідно на двох площинах, що перетинаються. Наведіть приклад з оточення.

Перпендикулярність прямих і площин.

12. На мал.31 ∠ABC = 90°, KA = KB = KC. Опустіть з точки К перпендикуляр на площину ABC.



мал.31

13. Чи правильні у стереометрії такі твердження?

1) Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до цієї прямої.

2) Прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні між собою.

3) Якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного до цієї точки, то вона є дотичною до кола.

14. Як на практиці встановити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?

Декартові координати і вектори у просторі

15. Точка А розміщена на від'ємній півосі *y* на відстані 8 від початку координат. Які координати точки А?

16. У точках А (3;5;7) та В (3;5;9) дві перші координати однакові, а треті – різні. Яка особливість розміщення цих точок у просторі? Яка відстань між цими точками?

17. Точка К лежить на площині *xz*, але не на осях координат. Що можна сказати про координати цієї точки?

18. Покажіть в оточенні перпендикулярні мимобіжні прямі.

3.7.2. Усні вправи з стереометрії для учнів 11 класу

Призма.

1. Ребро куба дорівнює *а*. Знайдіть: діагональ куба, діагональ грані, периметр основи, площу грані, площу діагонального перерізу, площу поверхні куба; периметр і площу перерізу, який проходить через кінці трьох ребер, що виходять з однієї вершини.

2. Сума всіх ребер куба дорівнює 24. Чому дорівнює його об'єм?

3. Доведіть, що число ребер призми кратне 3.

4. Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником.

5. Поставте куб так, щоб жодна грань не була вертикальною. Чи будуть тоді у нього горизонтальні грані?

Піраміда.

6. Чому дорівнює сума всіх плоских кутів трикутної піраміди?

7. Доведіть, що число плоских кутів в *n*-кутній піраміді ділиться на 4.

8. Порівняйте терміни: «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр». Чи можна стверджувати, що вони означають одне і те ж?

9. Як пояснити, що формулу об’єму зрізаної піраміди можна застосовувати для обчислення об’єму і піраміди, і призми?

Циліндр

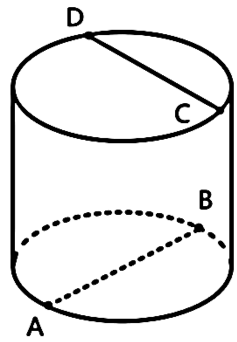
10. Один циліндр у 3 рази товщий за другий, але у 3 рази коротший, чи однакові у них об’єми?

11. Як визначити об’єм тіла, отриманого в результаті обертання квадрата навколо осі, яка проходить поза цим квадратом паралельно однієї з його сторін?

12. Як знайти відстань між прямими AB і CD (мал.32)?

13. Чи має циліндр площини симетрії; осі симетрії, центри симетрії?

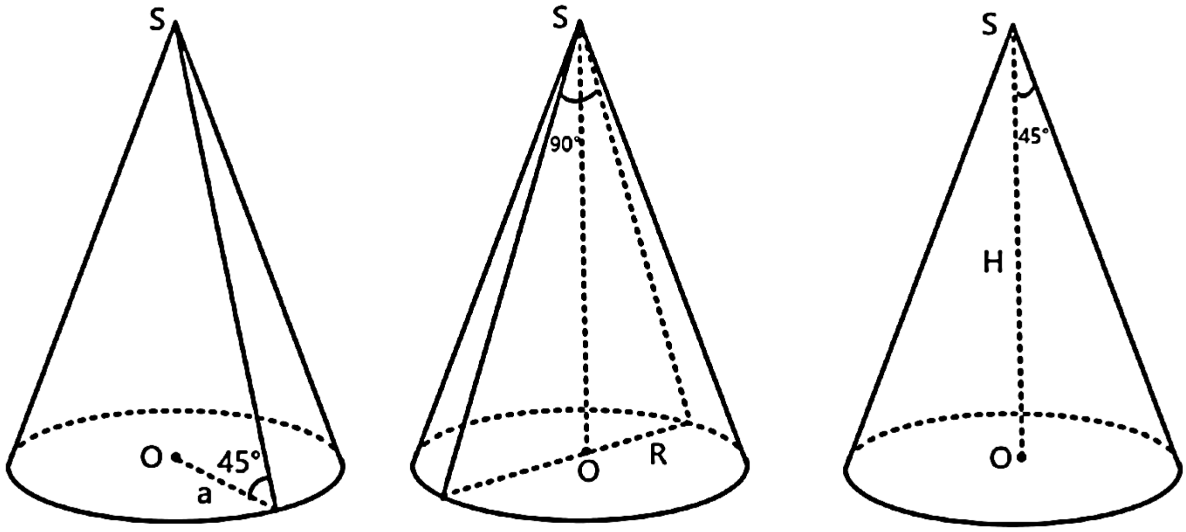
14. Запишіть формули для обчислення об'єму і бічної поверхні циліндра. Чи існує такий циліндр, у якого бічна поверхня містить стільки ж квадратних одиниць, скільки у його об'ємі кубічних одиниць?



мал.32

Конус

15. Обчисліть об'єми конусів, зображених на мал.33.



мал.33

16. Дано свинцеві кульки однакового розміру. Необхідно із них відлити кулю радіусом більшим у 5 разів. Скільки свинцевих кульок для цього потрібно?

17. Доведіть, що якщо елементи конуса зменшити в 2 рази, то його об'єм зменшиться в 8 разів.

Куля

18. Дано куб з ребром *a*. Обчисліть об'єм кулі: а) вписаної в куб; б) описаної навколо куба.

19. Обчисліть площу півсфери радіусом 5 см.

20. Побудуйте січну площину, яка ділить поверхню кулі у відношенні 1 : 3.

21. Кому більше дістанеться: тим, хто їстиме кавун радіусом 10 см утрьох або тим, хто їстиме кавун радіусом 20 см восьмеро?

22. Два перерізи кулі площинами мають рівні площі. Чи правильно, що площини цих перерізів однаково віддалені від центра сфери?

3.8.Результати педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент – метод досліджень, завдяки якому відбувається активний вплив на педагогічні явища за допомогою створення нових умов, які поставлені за мету дослідження.

Педагогічний експеримент – своєрідний педагогічний процес, що включає в себе досить нові якісь елементи, що певним чином дає можливість глибше, ніж зазвичай, побачити зв’язки між різними його сторонами і досить точно враховувати результати внесених змін.

У більш ширшому розумінні об’єктом педагогічного експерименту є педагогічний процес, що пов’язаний з організацією спеціальних впливів в процесі виховання та навчання.

На педагогічний експеримент слід дивитися як на комплекс певних методів, який забезпечує переконливе підтвердження гіпотези, що була висунута на початку дослідження. Саме тому педагогічний експеримент повинен спиратися на весь арсенал методів, що реалізують експериментальний науковий пошук (анкетування, бесіда, різні методи досліджень, опитування, тощо). Експеримент дає можливість глибше, ніж інші методи, перевірити дієвість педагогічних нових методів.

Предметом педагогічного експерименту є закономірності, навчання, виховання та освіти, що забезпечують передачу певного досвіду одного покоління наступним. Вони усвідомлюються тільки тоді, коли стають відомими і спрямовані на позитивний кінцевий результат виховання і навчання. Розробка педагогічного експерименту вимагає насамперед усвідомлення його цілей і мети, формулювання гіпотези.

Зазвичай, педагогічний експеримент проводиться в умовах очного навчального процесу, тобто у звичній для учнів обстановці. Розглянемо особливості педагогічного експерименту:

1. Можливість свідомо розмежовувати предмет дослідження для вивчення його окремих особливостей та сторін;
2. Немає обмеження в часі та просторі: експеримент можна повторювати необмежену кількість разів, до того часу, поки дослідник не отримає бажаних результатів;
3. За потреби, дає можливість змінювати умови існування предмету, підсилюючи ті сторони, які необхідні;
4. Створюються необхідні умови для активізації дослідника.

Повернемося до педагогічного експерименту, який проводився в 10-му класі з математичним спрямуванням.

Метою експерименту було перевірити знання учнів щодо методів розв’язання задач стереометрії. Експеримент проводився у вигляді тестових завдань з курсу стереометрії в 10 класі (зразок тестових завдань див. у додатках А, В, С).

Як показав експеримент, перед проведенням курсу за вибором «Методи розв’язування задач стереометрії» рівень знань учнів методів розв’язування задач стереометрії був досить низьким. Тобто, задачі стереометрії на базовому рівні розв’язували всі учні класу. Задачі стереометрії на середньому рівні розв’язувало 9 учнів з 17. Тоді як, задачі підвищеного рівня розв’язувало всього 4 учні з 17. Учні, вивчаючи математику обмежувалися лише поясненнями вчителя та вивчали шкільний підручник. Для розв’язування задач підвищеного рівня звичайно цих джерел недостатньо.

Отже, ці тестові завдання були запропоновані учням після проведення даного курсу. Результати показали, що задачі базового та середнього рівнів правильно виконали всі учні класу, тоді як задачі підвищеного рівня були виконані всі правильно 13 учнями з 17.

Чому цей результат показав успіх? Рівень зацікавленості учнів до геометрії збільшився. Також в учнів була можливість та необхідність використовувати додаткову літературу, щоб розв’язати ту чи іншу задачу, а тому вони мали можливість познайомитися з методами, які не подані в даному курсі.

Підсумовуючи результат, можна сказати, що даний курс дає успішні результати і може бути використаний при вивченні геометрії в профільних класах.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі було перевірено та обгрунтовано гіпотезу дослідження. У підсумку можна сказати, що рівень знань учнів помітно покращиться, якщо застосовувати у своїй педагогічній роботі методичні рекомендації, які були тут подані, та враховувати диференційований підхід до навчання і принцип особистісно-орієнтованого навчання.

Усі завдання дипломної роботи були виконані успішно. Аналізуючи результати проведеного теоретичного та експериментального дослідження, можна зробити наступні висновки:

- Запропонована в роботі методика проведення курсу за вибором відіграє важливу роль у формуванні високого рівня знань, умінь та навичок учнів;
- Було з'ясовано, що профільне навчання потребує цілеспрямованого формування учнівського колективу, розробки відповідного до навчально-методичного плану, використання специфічних форм і методів роботи з учнями, які цього потребують більше, ніж інші, модернізації матеріально-технічної бази;
- Математична задача навчає учнів орієнтуватися в різних проблемних ситуаціях, збагачувати їх знання та досвід;
- Правильний підхід до процесу розв'язання задач стереометрії повинен сприяти формуванню математичної культури та проявити інтерес до математики.

У підсумку хочеться відзначити, що матеріал, який поданий у роботі, може бути використаний як вчителями, так і студентами для проведення уроків у класах з математичних спрямуванням, адже дана тема є актуальною та корисною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А. Вивчення елементів математичної логіки у поглибленому курсі математики / І. А. Акуленко // Математика в сучасній школі. – 2012.
2. Акуленко І. А. Методика навчання математики в профільній школі : методичні рекомендації до проведення практично-семінарських занять : методичний посібник для організації аудиторної та самостійної роботи студентів / І. А. Акуленко ; за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : видавець Чабаненко Ю., 2012. – 165 с.
3. Барболіна О. С. Розвиток критичного мислення учнів шляхом розв’язання математичних задач / О. С. Барболіна // Таврійський вісник освіти. – 2016.
4. Бевз Г. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владімірова. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 272 с.
5. Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2019. 224 с.
6. Власій О. О., Кульчицька Н. В., Черняхівська Ю. Л. Методика використання «живих» креслень при вивченні шкільного курсу стереометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019.
7. Закон України «Про освіту». Електронний ресурс: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text
8. Закон України «Про повну загальну середню освіту». Електронний ресурс: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text
9. Зоріна І. А. Викладання математики у профільних і непрофільних класах школи. Збірник наукових праць ХДУ: Педагогічні науки. 2011. С. 116-120.
10. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448 с.

11. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна.– Київ : Генеза, 2019 –416 с.

12. Істер О. С. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 368 с.

13. Істер О. С. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2019. – 288 с.

14. Кравченко З. І. Діалог як основа навчання в старшій школі. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 66-68.

15. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник (укладачі В.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк). — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 224 с.

16. Лов’янова І. В. Організація навчання математики у старшій школі / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов’янова, З. О. Сердюк ; за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017

17. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2018. – 400 с.

18. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Харків : Гімназія, 2019. – 352 с.

19. Мерзляк А. Г. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2018. – 240 с.

20. Мерзляк А. Г. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Харків : Гімназія, 2019. – 204 с.

21. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях : навчально-методичний посібник / уклад. Л.А. Благодир. – Умань: ВПЦ «Візаві» – 2018. – 144 с.

22. Моторіна В. Г. Розвиток просторової уяви майбутніх вчителів математики в процесі їх геометричної підготовки. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси : ЧНУ, 2015.

23. Навчальна програма з математики для 10-11 класів. Профільний рівень. Електронний ресурс: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx

24. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10кл. закл загал. серед. освіти / Є.П. Нелін.– Харків : Вид-во «Ранок», 2018.– 272 с.

25. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019.– 240 с.

26. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с.

27. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 208 с.

28. Прус А. В. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник / А.В. Прус, В.О. Швець.– Житомир : Вид-во «Рута», 2016. – 468 с.

29. Прус А.В., Сверчевська І.А. Вчимося розв’язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях: Навчальний посібник. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. 1. Франка, 2010. -32 с.

30. Репетуха С.П., Крайчук О.В. Розв’язування стереометричних задач координатним методом. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Internet Conference, September 16-17, 2024. FOP Marenichenko V.V., Dnipro, Ukraine, P.233 – 234.

31. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчальноматематичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів / С. П. Семенець // Математика в рідній школі. – 2016.

32. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. К. : Вища школа, 2006. 582 с.

33. Тарасенкова Н. А. Діалог під час усного розв’язання задач на уроці геометрії. Вісник Черкаського університету. 2015. №8.

34. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов’янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.

35. Тарасенкова Н. А., Лов’янова І. В., Желєзняк Н. П., Окунєв Б. Й. Реалізація принципу професійної спрямованості навчання математики учнів багатопрофільної школи. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. 248 с.

36. Усні вправи зі стереометрії : навч. посіб. / Д. Т. Белешко, М. А. Віднічук, О. В. Крайчук. – Х. : Изд. группа «Основа», 2015. – 111 с., [1] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2(146)).

ДОДАТОК А

Тести для діагностування учнів з стереометрії 10 класу. Базовий рівень

1. Площина і пряма не можуть …

   A. мати тільки дві спільні точки;

   B. мати тільки одну спільну точку;

   C. не мати взагалі спільних точок;

   D. мати безліч спільних точок.

2. Як розміщені проекції двох мимобіжних прямих?

   A. Проекції перетинаються;

   B. Проекції мимобіжні;

   C. Проекції або паралельні, або перетинаються;

   D. Проекції паралельні.

3. Паралельною проекцією паралелограма не може бути …

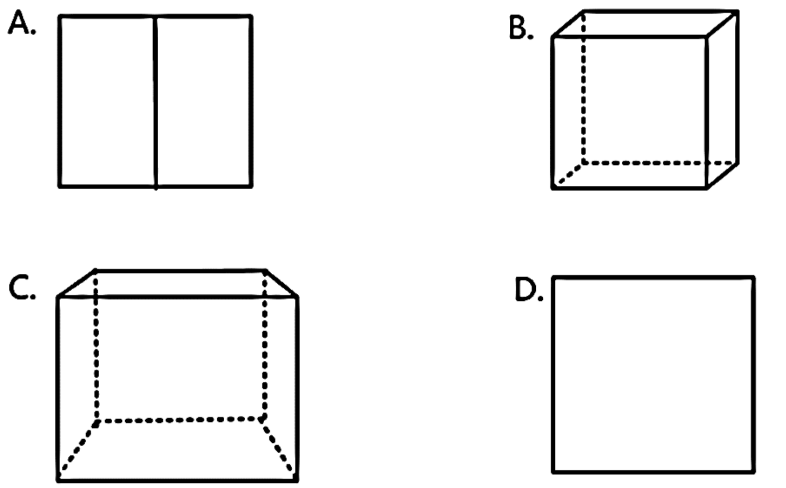
   A. Ромб

   B. Трапеція

   C. Прямокутник

   D. Паралелограм

4. На якому рисунку куб зображено не правильно?



5. Якщо одна з двох площин перпендикулярна до прямої, а друга - паралельна цій прямій, то ці площини …

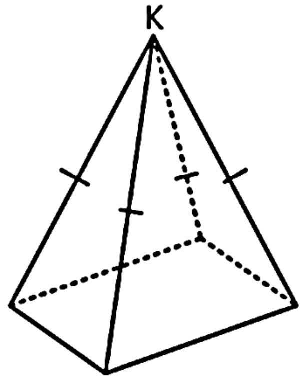
   A. Збігаються;

B. Паралельні;

C. Перпендикулярні;

D. Або збігаються, або паралельні.

6. Точка K, що належить площині прямокутника з діагоналлю 10 см, віддалена від кожної з його вершин на 6 см. Знайти відстань від точки K до площини прямокутника.



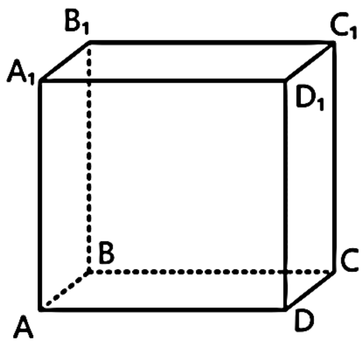
A. 4 см;

B. $\sqrt{61}$ см;

C. $\sqrt{3}$ см;

D. $\sqrt{11}$ см.

7. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Який кут утворює пряма BA_1 з площиною D_1DA.



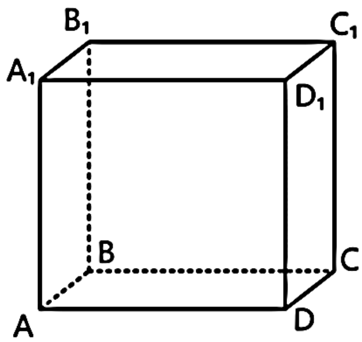
A. 30°;

B. 45°;

C. 60°;

D. 90°.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Який кут утворюється між площинами A_1B_1C та D_1DC?



A. 30°;

B. 45°;

C. 60°;

D. 90°.

9. Дано вектори $\bar{a} = (2; 3; -1), \bar{b} = (0; 1; 4)$. Знайти координати вектора $2\bar{a} - \bar{b}$.

A. (4; 6; -2);

B. (4; 5; -6);

C. (2; 1; -9);

D. (2; 2; -5).

10. Дано точку A (2; 3; 1). Яка з точок симетричних даній відносно координатної площини xy?

A. (3; 3; -1);

B. (-2; 3; 1);

C. (2; -3; 1);

D. (2; 3; -1).

11. Відстань від центра сфери $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$ до початку координат дорівнює …

A. 21;

B. $\sqrt{21}$;

C. $2\sqrt{21}$;

D. 3.

12. Площина $x+2y-z+2=0$ проходить через точку $A(-2;a;2)$, якщо a дорівнює…

A. $\frac{1}{2}$;

B. $-\frac{1}{2}$;

C. 1;

D. -1.

ДОДАТОК В

Тести для діагностування учнів з стереометрії 10 класу. Середній рівень

1. Дано чотири точки A, B, C, D. Відомо, що через деякі три з них не можна провести коло. Якими не можуть бути прямі *AB* та *CD*?

A. Паралельними;

B. Мимобіжними;

C. Такими, що перетинаються;

D. Такими, що збігаються.

2. Який з кутів не може бути ортогональною проекцією прямого кута?

A. Тупий;

B. Гострий;

C. Розгорнутий;

D. Всі варіанти можливі.

3. Переріз правильного тетраедра площиною, паралельною двом мимобіжним ребрам і такою, що проходить через середню лінію грані, є…

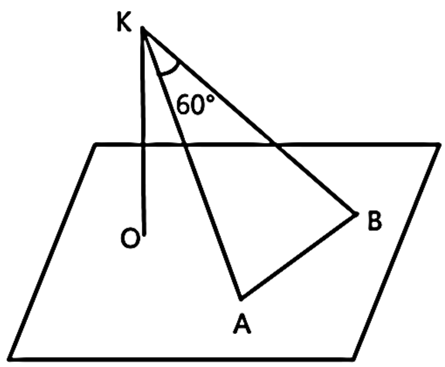
A. Трикутником;

B. Трапецією;

C. Квадратом;

D. Ромбом з нерівними діагоналями.

4. З точки віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути в 45°, а між собою - 60°. Знайти відстань між кінцями похилих.



A. $\sqrt{2}a$;

B. a;

C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$;

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

5. Яку найменшу кількість розтяжок можна використати для вертикального закріплення антени?

A. 2;

B. 3;

C. 4;

D. 6.

6. Всередині двогранного кута, градусна міра якого $60°$, дано точку, віддалену від кожної грані на відстань a. Знайти відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$;

B. $a\sqrt{3}$;

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$;

D. $2a$.

7. Площини квадратів $ABCD$ та ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайти довжину відрізка C_1D.

A. $2a$;

B. $2\sqrt{2}a$;

C. $\sqrt{3}a$;

D. $\sqrt{2}a$.

8. Вектори $\vec{a}$ та $(x^2 + 1)\vec{a}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли …

A. $x > 0$;

B. $x < 0$;

C. $x = 0$;

D. x – будь-яке число.

9. Рівняння площини, що проходить через точку $A\,(1; -1; 3)$ паралельно площині $2x + y - z = 0$, має такий вигляд…

A. $4x + 2y - 2z + 1 = 0$;

B. $-4x - y + z = 0$;

C. $2x + y - z + 2 = 0$;

D. $2x + y - z - 2 = 0$;

10. Укажіть всі значення параметра b, при яких точки $A(4;4;b)$ та $B(-1;-3;-4)$ розміщені на однаковій відстані від осі y.

A. 1;

B. -1;

C. 1 та -1;

D. Таких значень b не існує.

11. Якщо вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні, то

A. $\vec{a}=\vec{b}$;

B. $\vec{a}=-\vec{b}$;

C. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$;

D. $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні.

12. Яку з координатних площин перетинає сфера $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=10$?

A. *xy;*

B. *xz;*

C. yz;

D. жодну.

ДОДАТОК С

Тести для діагностування учнів з стереометрії 10 класу. Підвищений рівень

1. Якщо паралельні проекції двох прямих перетинаються, то ці прямі не можуть

A. Перетинатися;

B. Мати спільні точки;

C. Бути паралельними;

D. Бути мимобіжними.

2. Які з наступних фігур можна отримати як паралельні проекції прямокутника 1 дм × 2 дм:

1 – квадрат зі стороною 1 дм;

2 – квадрат зі стороною 2 дм;

3 – прямокутник зі сторонами 2 дм × 3 дм?

A. Тільки фігуру 1;

B. Тільки фігури 1 та 2;

C. Жодну з цих фігур;

D. Всі три фігури.

3. Скільки осей симетрії має просторова фігура, що складається з двох паралельних прямих?

A. Дві;

B. Три;

C. Безліч;

D. Жодної.

4. Правильний тетраедр перетинається двома площинами, паралельними двом мимобіжним ребрам. Одна з них проходить через середню лінію грані, друга – через центр мас тієї ж самої грані. Порівняйте периметри P_1 та P_2 перерізів.

A. $P_1 = P_2$;

B. $P_1 < P_2$;

C. $P_1 > P_2$;

D. Порівняти неможливо.

5. Точка простору, яка рівновіддалена від вершин трикутника, є рівновіддаленою і від його сторін, якщо цей трикутник …

A. Рівносторонній;

B. Рівнобедрений;

C. Прямокутний;

D. Гострокутний.

6. Тоска C, що не лежить у площині ромба, віддалена від усіх його сторін на 13 см, а від площини ромба на 5 см. Яка довжина висоти ромба?

A. 12 см;

B. 24 см;

C. $\sqrt{194}$ см;

D. $2\sqrt{194}$ см.

7. Більша основа прямокутної трапеції з гострим кутом 45° лежить у площині α. Кут між площиною трапеції і площиною α також дорівнює 45°. Який кут нахилу більшого бічного ребра трапеції до площини α?

A. 30°;

B. 45°;

C. 60°;

D. arctg $\frac{1}{2}$.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Порівняйте площу перерізу, проведеного через середину ребер AB, BB_1, B_1C_1 (S_1) із площею діагонального перерізу куба (S_2).

A. $S_1 = S_2$;

B. $S_1 > S_2$;

C. $S_1 < S_2$;

D. Порівняти неможливо.

9. Знайдіть кути між векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у просторі, якщо відомо, що ці кути попарно рівні та $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

A. $\arccos\frac{1}{2}$;

B. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;

C. $\arccos\frac{2}{3}$;

D. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

10. Координатна площина *yz* поділяє відрізок з кінцями $A(-3;2;4)$ та $B(6;1;3)$, рахуючи від точки *A,* у відношенні…

A. 1:2;

B. 2:1;

C. 3:10;

D. 9:10.

11. Скільки площин симетрії має фігура в просторі, яку задано рівнянням $x^2-y^2=1$?

A. Одну;

B. Дві;

C. Три;

D. Безліч.

12. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1\\(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9\end{cases}?$$

A. Один;

B. Безліч;

C. Жодного;

D. Скінченну кількість.