Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання
СІЛКОВ В.В., СІЛКОВА Е.О.

Відповіді на питання для підготовки до підсумкового контролю
з навчальної дисципліни
МАТЕМАТИКА
1курс, 2семестр

Методичні рекомендації
до вивчення курсу
студентами для здобувачів
ступеня вищої
освіти «бакалавр»
за спеціальністю
А3 Початкова освіта

РІВНЕ – 2026

УДК 51:378.091.2(072)
В 42

Відповіді на питання для підготовки до підсумкового контролю з навчальної дисципліни «Математика» для здобувачів ступеня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю А3 Початкова освіта : метод. рекомендації для здобувачів ступеня вищої освіти / уклад.: В. В. Сілков, Е. О. Сілкова ; за заг. ред. В. В. Сілкова. Рівне : РДГУ, 2026. 114 с.

Рецензенти:

к.п.н., проф. Павелків О.М. кафедри математики та методики її навчання РДГУ

к.п.н., доц. Генсіцька-Антонюк Н.О. кафедри математики та методики її навчання РДГУ

Методичні рекомендації розглянуті та затверджені на засіданні кафедри математики та методики її навчання (Протокол № 4 від 24 лютого 2026 р.).

Методичні рекомендації обговорено та затверджено на засіданні навчально-методичної комісії педагогічного факультету РДГУ (протокол № 3 від 19 березня 2026 р.).

Першоджерела:

1. Курс математики. – К.: Вища школа, 1995. – 392 с. (с. 3–40).
2. Кухар В.М., Білий Б.Н. Теоретичні основи початкового курсу математики. – К.: Вища школа, 1980. – 360 с. (с. 11–88).
3. Кухар В.М. та ін. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: Практикум / За заг. ред. В.М. Кухар. – К.: Вища школа, 1989. – 333 с. (с. 5–56).

Основна література:

1. Богданович М.В. Методика викладання математики в початкових класах: навч. посіб. / М.В. Богданович, М.В. Козак, Я.А. Король. — 3-є вид., перероб. і доп. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2006. — 336 с.
2. Богданович М.В. Урок математики в початковій школі: навч. посіб. / М.В. Богданович, Н.О. Будна, Г.П. Лишенко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2004. — 208 с.
3. Боровик В. та ін. Математика: Посібник для педінститутів. – К.: Вища школа, 1980. – 400 с.
4. Боровик Н.В., Зайченко І.В., Рудник А.В. Математика. Практикум ч.1, ч.2: Навчальний посібник. – Чернігів, 2003–2004 рр.
5. Коваль Л.В. Сучасні навчальні технології в початковій школі: навч.-метод. посіб. / Л.В. Коваль. — Донецьк: ТОВ «ЮгоВосток, Лтд», 2006. — 225 с.
6. Король Я.А. Практикум з методики викладання математики в початкових класах / Я.А. Король. – Тернопіль, 1998. — 136 с.
7. Курс математики: навч. посібник / В. Боровик, Л. Вивальнюк, М. Мурач та ін. – К.: Вища школа, 1995. – 392 с.: іл.
8. Кухар В., Білий Б. Теоретичні основи початкового курсу математики: навч. посібник. – К.: Вища школа, 1980. – 360 с.

Додаткова література:

1. Крайчук О., Сілков В., Шутяк О. Невід'ємні цілі числа: метод. посібник для студентів І курсу. – Рівне, 1999. – 46 с.
2. Крайчук О., Сілков В., Шутяк О. Практичні заняття з математики. І семестр: метод. посібник для студентів І курсу. – Рівне, 2000. – 40 с.
3. Пасічник Я., Сілков В., Шутяк О. Контрольні роботи з математики: метод. посібник для студентів. – Рівне: РДГУ, 1999. – 90 с.
4. Пасічник Я. Математика: елементи математичної логіки: метод. посібник. – Рівне, 1997. – 159 с.
5. Приймак О., Кочкарьова Л., Крайчук О. Розширення поняття про число: метод. рекомендації для студентів. – Рівне: РДГУ, 2001. – 40 с.
6. Сілков В., Шутяк О. Модуль «Функції, рівняння, нерівності»: матеріали для самостійної роботи на практичних заняттях з математики. – Рівне, 1998. – 40 с.

Інформаційні ресурси:

1. www.students.net.ua – український освітній портал для студентства.
2. www.school.edu-ua.net – освітній сайт із навчальними програмами, підручниками, довідниками.
3. http://www.cippe.edu-ua.net/akt.htm – дистанційне навчання у післядипломній освіті.
4. www.udl.org.ua – українська система дистанційного навчання.
5. www.mon.gov.ua – сайт Міністерства освіти і науки України.
6. www.nbuv.go.ua – сайт бібліотеки ім. В.І. Вернадського.
7. https://vseosvita.ua/
8. https://osvita.ua/Legistation/doshkilna-osvita
9. http://formula.co.ua/
10. http://www.osnova.com.ua/magazines/
11. http://www.bymath.net/

1.Поняття множини та її елементу, їхні позначення. Загальноприйняті позначення основних числових множин. Способи задання множин.

Якщо у повсякденному житті термін «множина» пов'язується, як правило, з великою кількістю предметів, то в математиці цим поняттям позначають різні множини незалежно від кількості елементів в них. Які ж множини розглядають в математиці? – ті, які містять один, два, три, тощо елементів, або навіть жодного елемента.
У практичній діяльності термін «множина» має ряд синонімів: сукупність, колекція, клас, група, ансамбль. Хоча і в математиці існують синоніми для поняття «множина» (множина значень змінної – область визначення; множина двох рівнянь – система рівнянь тощо), але для математики важливо, щоб всі поняття трактувалися всіма однозначно. Поняття множини є одним із основних понять математики, але його означення не існує. Таким чином, поняття «множина» є, з одного боку, одним з основних понять математики, а з другого – неозначуваним, первісним. Сутність змісту цього поняття розкривається шляхом опису з допомогою конкретних прикладів. Отже, «множина» - це сукупність об'єктів певної природи, які можуть мати або не мати якусь спільну властивість.

Множини прийнято позначати великими буквами латинського алфавіту: $\underline{A, B, C,\ldots}$ Об'єкти, з яких складається множина, називають елементами множини. Їх прийнято позначати малими буквами латинського алфавіту: $\underline{a, в, c, \ldots, x, y}$ або цими ж буквами з індексами. Якщо елемент $\boldsymbol{a}$ належить деякій множині $\boldsymbol{M}$, то це позначають так: $\boldsymbol{a \in M}$, а якщо елемент $\boldsymbol{в}$ не належить множині $\boldsymbol{A}$, то це позначають так: $\boldsymbol{в \notin A}$. Якщо деякі елементи належать множині A, то їх записують у фігурних дужках так: $A=\{a, в, c, d\}$; $B=\{в_1, в_2, в_3, в_4, в_5\}$.

Деякі множини в математиці мають усталені, загальноприйняті позначення. Як відомо, множини можуть складатися із елементів будь-якої природи, зокрема із чисел. Такі множини прийнято називати числовими. Для деяких числових множин введені спеціальні позначення: множину натуральних чисел прийнято позначати буквою $\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$; множину цілих чисел позначають так: $\boldsymbol{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \pm n, \ldots\}$; множину раціональних чисел, яка складається із цілих чисел та додатних і від'ємних дробів прийнято позначати буквою $\boldsymbol{Q}$; множину дійсних чисел, яка складається із множини раціональних та ірраціональних чисел позначають буквою $\boldsymbol{R}$.

Задати множину означає: схарактеризувати її елементи так, щоб відносно кожного елемента можна було відразу встановити, належить він цій множині чи ні. Множина вважається заданою, коли відносно будь-якого її елементу ми можемо твердити чи належить він множині чи ні.

Множину можна задати, назвавши всі її елементи, тобто переліком. Задати множину <u>переліком</u> означає назвати чи записати всі її елементи, наприклад: $M=\{1,2,3,4,5\}$. Цей спосіб є зручним, коли множина має малу кількість елементів. Множини також можна задавати за допомогою <u>характеристичної властивості</u>, наприклад: $A=\{x/x\in R$ і $x>0\}$. Задати множину описом або за допомогою характеристичної властивості означає вказати характеристичну властивість всіх елементів множини, наприклад: множину натуральних чисел, які менші числа 6, описом задають так: $M=\{x/x\in N\wedge x<6\}$.

Скінченні множини легко задавати і переліком, і описом. Але частіше користуються способом переліку. Нескінченні множини здебільшого задають описом. Але в окремих випадках задають і переліком, наприклад: $P=\{x/x\in N\wedge x:2\}$, $M=\{2, 4, 6, 8, ..., 2n,\ldots\}$. Таким чином, існують два способи задання множин: описом або за допомогою характеристичної властивості та переліком.

2. Порожня, скінченна, нескінченна та універсальна множини. Підмножина. Власні та невласні підмножини даної множини. Рівні та нерівні множини.

У математиці розглядають множини, які не містять жодного елемента. Для їхнього позначення використовують спеціальний символ ∅, а називають їх порожніми множинами. Прикладом порожніх множин можуть бути такі: множина людей на Марсі; множина дійсних коренів рівняння $x^2+3=0$.

За кількістю елементів всі множини можна поділити на три групи:

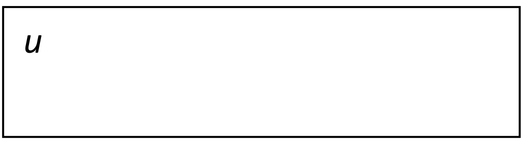
1) порожні множини;

2) скінченні множини – це такі множини, кількість елементів яких можна позначити натуральним числом n(A). Прикладом скінченних множин можуть бути такі: множина цифр десяткової системи числення; множина студентів групи;

3) нескінченні множини – це такі множини, кількість елементів яких не можна виразити натуральним числом. Прикладами нескінченних множин є наступні: множина натуральних чисел; множина дійсних чисел.

Розглянемо кілька множин, які складаються із об'єктів однакової природи, наприклад: множина студентів першого курсу; множина студентів педагогічного факультету РДГУ; множина студентів РДГУ; множина студентів України; множина студентів світу. Як видно із наведеного прикладу, кожна наступна множина включає в себе попередню. Таку множину в математиці називають універсальною й позначають буквою U або інколи – I. Крім того, можна вважати, що існує множина, яка містить в собі всі множини, які тільки існують. По відношенню до однієї і тієї ж множини можна вибрати декілька універсальних множин. Так, для множини студентів другого курсу педагогічного факультету універсальною множиною можуть бути множина всіх студентів факультету, або множина студентів другого курсу РДГУ, або множина студентів м. Рівне. Для наочного зображення універсальної множини використовують прямокутник

(**див. малюнок № 1.1.**).



Малюнок №1.1. Зображення універсальної множини.

Означення: якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, але в множині A є хоча б один елемент, яких немає в множині B, то множину B називають власною підмножиною множини A.

Символічно це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$. Цей запис означає, що множина B включається в A і, що ці множини перебувають у відношенні включення. Підмножини бувають власні і невласні. Кожна скінченна не порожня множина А має дві невласні підмножини: 1) порожню ($\varnothing$); 2) саму себе (А).

В математиці доведено, що число підмножин будь-якої скінченої множини визначається за формулою: $n(p(A))=2^k$, де $n(p(A))$ – число підмножин множини A, k – число елементів множини A, тобто $n(A)$.

У теорії множин розглядаються множини, які складаються з одних і тих самих елементів. Про такі множини говорять, що вони рівні.

Означення 1: дві множини A та B називаються рівними, якщо кожна із них є підмножиною іншої, тобто: якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A=B$.

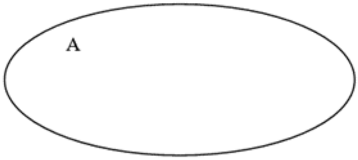
Означення 2: якщо множини складаються з одних і тих самих елементів, то вони називаються рівними.

Означення 3: якщо кожен елемент множини A є елементом множини B і, навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A, то такі множини називаються рівними.

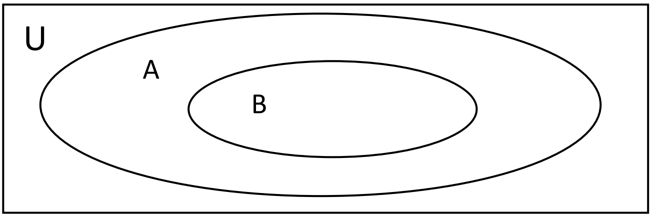
Означення: Нерівні множини — це множини, які не є однаковими, тобто вони мають різні елементи або різну кількість елементів.

3. Відношення між множинами (включення, рівності, перерізу) та їх позначення за допомогою кругів Л.Ейлера та діаграм Ейлера-Венна. Потужність множини. Рівнопотужні (еквівалентні) множини. Скінченні, нескінченні та зчисленні множини. Множини потужності континууму.

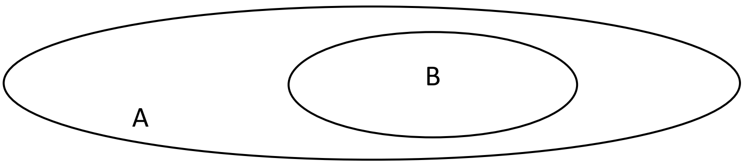
За допомогою означення рівності між множинами можна задати відношення рівності. Виявляється, що це можуть бути відношення включення, перетину та рівності або тотожності. Для наочного зображення множин та відношень між ними використовуються спеціальні графічні зображення, на яких множини позначаються кругами або овалами. Такі круги прийнято називати кругами Л.Ейлера (**див. малюнок № 1.2.**). Якщо універсальну множину зображати прямокутником, а інші множини – кругами, то таке зображення має назву діаграм Ейлера-Венна (**див. малюнок № 1.3.**). На ньому зображено множину $B\subset A\subset U$. Відношення включення зображено **на малюнку № 1.4.**, а відношення перетину – **на малюнку № 1.5**.



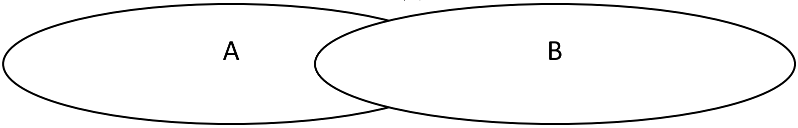
Малюнок № 1.2. Круг Л.Ейлера.



Малюнок № 1.3. Діаграма Ейлера-Венна.



Малюнок № 1.4. Відношення включення.



Малюнок № 1.5. Відношення перетину.

Означення: потужністю множини називають кількість елементів даної множини.

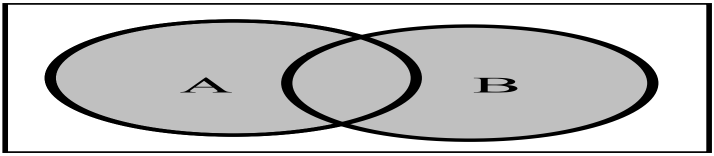
Позначаємо потужність множини M через $n(M)$.

Означення: множина називається скінченною, якщо кількість її елементів можна зобразити натуральним числом, інакше множина називається нескінченою.

4. Операція об'єднання (додавання) множин та основні властивості (закони) цієї операції.

Означення: Об'єднанням множин A та B називають третю множину $A \cup B$, що складається із елементів, які входять хоча б в одну із множин A чи B.

Символічно наведене означення можна записати так: $A \cup B = \{x / x \in A$ або $a \in B\}$. На діаграмі Ейлера-Венна ця множина зображена **на малюнку № 1.6**.



Малюнок № 1.6. об'єднання множин A∪B.

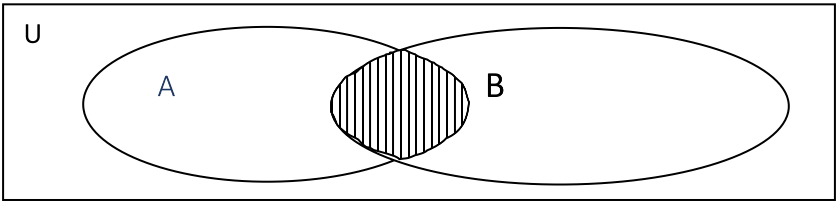
Операція об'єднання може поширюватись на три і більше множин. Вона підкоряється певним законам:

1. $A \cup \varnothing = A$.
2. $A \cup U = U$.
3. $A \cup A = A$ - закон ідемпотентності (незмінності).
4. переставний або комутативний закон: $A \cup B = B \cup A$.
5. сполучний або асоціативний закон $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

5. Операція перетину множин та основні властивості (закони) цієї операції.

Означення: перетином (або перерізом) двох множин A і B називається така третя множина $A \cap B$, яка складається із спільних елементів A та B.

Символічно це означення можна записати так: $A \cap B = \{x / x \in A$ і $x \in B\}$. З допомогою діаграм Ейлера-Венна перетин множин А і В зображено **на малюнку № 1.8**.



Малюнок № 1.8. Перетин множин $A \cap B$.

Означення перетину можна поширити на випадок трьох і будь-якої скінченної кількості множин. Операція перетину множин підкоряється таким законам:

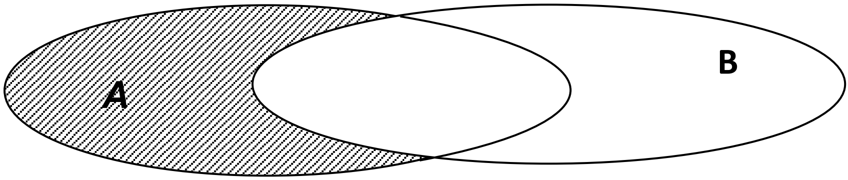
1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cap U = A$.
3. $A \cap A = A$ - закон ідемпотентності (незмінності).
4. $A \cap B = B \cap A$ - переставний (комутативний).
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – сполучний (асоціативний).
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – розподільний (дистрибутивний) закон перетину відносно об’єднання.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – розподільний (дистрибутивний) закон об’єднання відносно перетину.

6. Операції різниці (віднімання) множин та основні властивості (закони) цієї операції.

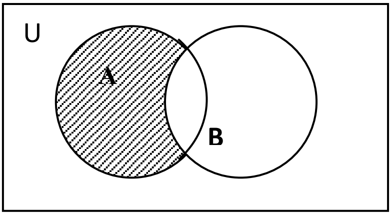
Означення: різницею двох множин *A* і *B* називається така третя множина $A \backslash B$, яка складається із тих і тільки тих елементів множини *A*, що не належать множині *B*.

Символічно це означення можна записати так: $A \backslash B = \{x / x \in A$ і $x \notin B\}$.

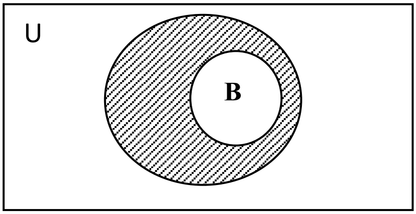
Операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням. За допомогою кругів Ейлера різницю множин А і В зображено **на малюнку № 1.10**. Різні випадки різниці множин за допомогою кругів Ейлера можна зобразити так (**див. малюнки №№ 1.11-1.14.**).



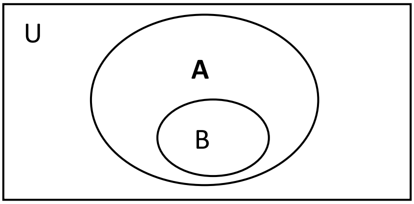
Малюнок № 1.10. Різниця множин A\B.



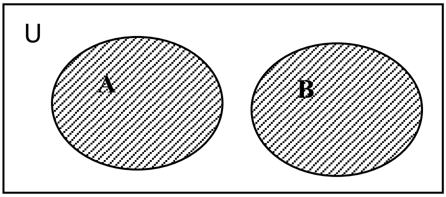
Малюнок № 1.11. Різниця множин A\B



Малюнок № 1.12. Різниця множин A\B

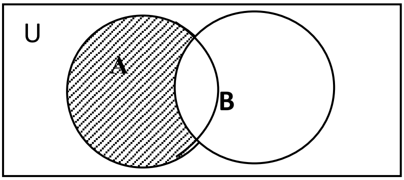


Малюнок № 1.13. Різниця множин B\A=∅.

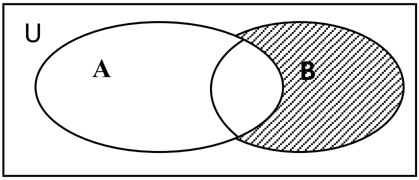


Малюнок № 1.14. Різниця множин A\B=A.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна легко довести, що операція різниці не підкоряється комутативному закону, тобто, що $A\backslash B \neq B\backslash A$ (**див. малюнки №№ 1.15-1.16.**).



Малюнок № 1.15. A\B.



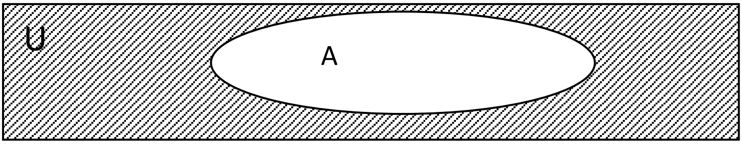
Малюнок № 1.16. B\A.

7. Операція доповнення до даної та універсальної множини та основні властивості (закони) цих операцій.

Із поняттям різниці множин тісно пов'язана операція доповнення даної множини до універсальної. Це важливо, оскільки певні сукупності ми розглядаємо у рамках відповідної універсальної множини U. У таких випадках операція знаходження доповнення множин набуває самостійного значення, хоч вона є окремим випадком операції віднімання множин.

Означення: Доповненням даної множини $A \subset U$ до універсальної множини U називається множина $U \backslash A$, яка є різницею цих множин, тобто така множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи множини U, що не належать множині A.

Доповнення даної множини до універсальної позначають $\bar{A}$ або інколи A'. Символічно прийняте означення можна записати так: $\bar{A}=\{x/x \in U$ і $x \notin A\}$. Графічне зображення множини $\bar{A}$ представлено на діаграмі Ейлера-Венна



Малюнок № 1.17. Доповнення множини A до універсальної множини U: Ā=U\A.

Безпосередньо із означення доповнення випливає справедливість таких законів:

1. $\bar{U}=\varnothing$.
2. $\varnothing'= U$.
3. $A''=A$ - закон подвійного доповнення.

Операції доповнення, перетину і об'єднання множин пов'язані між собою законами де Моргана:

1. $(A \cup B)'=A' \cap B'$ - доповнення до об'єднання множин A і B дорівнює перетину доповнень цих множин.

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ - доповнення до перетину множин A і B дорівнює об'єднанню доповнень цих множин.

8.Поняття розбиття множини на класи (підмножини), що попарно не перетинаються. Розбиття множини на класи за допомогою однієї, двох і трьох властивостей. Класифікації.

Поняття розбиття множин на підмножини, що попарно не перетинаються, широко використовуються при проведенні класифікацій. Прикладом класифікацій у математиці може бути поділ кутів на прямі і непрямі, натуральних чисел на парні і непарні тощо. У біології це поділ організмів на живі та неживі, у бібліотекознавстві – різноманітні каталоги. Разом з тим зазначимо, що для правильного проведення класифікації слід дотримуватися вказаних в означенні умов. Якщо хоча б одна із вказаних умов буде порушена, то класифікація стане неправильною.

Суть будь-якої класифікації (понять, відношень і т.ін.) зводиться до того, що елементи однієї (універсальної) множини за певними характеристичними ознаками розбиваються на дві або кілька непорожніх підмножин так, щоб кожен елемент даної множини входив в одну і тільки одну з підмножин, тобто щоб ці підмножини попарно не перетинались, інакше, щоб переріз кожної пари з них був порожньою множиною.

Яскравим прикладом класифікації понять є класифікація чисел: множина комплексних чисел поділяється на дві підмножини, що не перетинаються, - множину дійсних чисел і множину уявних чисел. Множина дійсних чисел поділяється на дві підмножини, що не перетинаються, - множину раціональних і множину ірраціональних чисел.

Розбиття множини за допомогою <u>однієї властивості</u>:

Розглянемо множину M і деяку властивість P, яка може бути або істинною, або хибною для кожного елемента. Всі елементи множини M можна розділити на дві підмножини:

– M_1 – елементи, що мають властивість .

– M_2 – елементи, що не мають властивості .

Наприклад, якщо M множина – це множина студентів, то за властивістю "є відмінником" можна розділити множину на студентів-відмінників та інших студентів.

Розбиття множини за допомогою <u>двох властивостей</u>:
Якщо ми вводимо ще одну властивість Q, то кожен елемент множини M може потрапити в одну з чотирьох підмножин:

1. M_{11}– елементи, що мають обидві властивості P і Q .
2. M_{10}– елементи, що мають властивість P, але не мають Q.
3. M_{01}– елементи, що мають властивість Q, але не мають P.
4. M_{00}– елементи, що не мають жодної з цих властивостей.

Наприклад, якщо P – "є студентом" і Q – "проживає в гуртожитку", то множина студентів розділиться на чотири групи:

- ті, хто є студентами і проживає в гуртожитку;
- ті, хто є студентами, але не проживає в гуртожитку;
- ті, хто не є студентами, але проживає в гуртожитку;
- ті, хто не є студентами і не проживає в гуртожитку.

Розбиття множини за допомогою <u>трьох властивостей</u>:

Додавши ще одну властивість R, кожен елемент множини M може належати до однієї з восьми підмножин (усі можливі комбінації значень P, Q та R).

Наприклад, якщо:

- P– студент;
- Q– проживає в гуртожитку;
- R– отримує стипендію;

то множина розділиться на 8 класів:

1. M_{111}– студенти, які проживають у гуртожитку та отримують стипендію.
2. M_{110}– студенти, які проживають у гуртожитку, але не отримують стипендію.
3. M_{101}– студенти, які не проживають у гуртожитку, але отримують стипендію.

4. M_{100}– студенти, які не проживають у гуртожитку та не отримують стипендію.
5. M_{011}– не студенти, які проживають у гуртожитку та отримують стипендію.
6. M_{010}– не студенти, які проживають у гуртожитку, але не отримують стипендію.
7. M_{001}– не студенти, які не проживають у гуртожитку, але отримують стипендію.
8. M_{000}– не студенти, які не проживають у гуртожитку і не отримують стипендію.

Класифікація – це, дія, розподіл об'єктів по класам на основі схожості об'єктів всередині класу і відмінності їх від об'єктів інших класів.

Як правило, метою класифікації являється систематизація наших знань.

Класифікація широко використовується в математиці.

Наприклад: натуральні числа діляться на парні та непарні; кути – гострі, прямі і тупі.

Будь-яка класифікація пов'язана з розподілом деякої множини на підмножини.

Вважають, що множина X розбита на класи X_1, X_2, …X_n, якщо:

1. *Підмножини x1, x2, ...Xn попарно на перетинаються.*
2. *Об'єднання підмножин x1, x2, ...Xn співпадає з множиною x.*
3. *Підмножини не порожні.*

Якщо не виконана хоча б одна з умов, класифікації вважають неправильною.

9. Поняття кортежу та впорядкованої пари. Поняття кортежу довжини n. Рівні пари та кортежі. Декартів (прямий) добуток множин, його задання та зображення. Властивості декартового добутку множин. Число елементів декартового добутку та об'єднання множин. Декартів добуток n множин.

У загальному випадку порядок розміщення елементів у множині не має принципового значення. Але для певних множин він важливий.

Означення: Упорядкованою парою або кортежем довжини 2, називають таку множину з двох елементів a і $в$, у якій істотним є не тільки самі елементи, але й порядок їх розміщення у множині $(a;в)$.

Елементи впорядкованої пари називаються компонентами або координатами. Впорядковану пару $(a;в)$ ще називають кортежем довжини 2 і позначають $<a,в>$. Аналогічно можна визначити поняття впорядкованої трійки або кортежу довжини три, впорядкованої четвірки або кортежу довжини чотири тощо.

Означення: Дві пари $(a;в)$ і $(c;d)$ називаються рівними, якщо відповідні компоненти їх рівні, тобто $(a;в)=(c;d)$ тоді і тільки тоді, коли $a=c$ і $в=d$.

Означення: декартовим добутком множин X і $У$ називається множина $X\times У$ впорядкованих пар $(x;y)$ таких, що $x\in X$ і $y\in У$.

Символічно це означення можна записати так: $X\times \mathbf{У}=\{(x;y)/x\in X \text{ і } y\in У\}$. Якщо множини X і $У$ співпадають, тобто $X=У$, то множина $X\times X$ складається із всіх пар $(x;x)$ таких, що $x\in X$ і називається декартовим квадратом. Вона позначається X^2. Аналогічно можна означити декартів добуток трьох, чотирьох і будь-якого скінченного числа множин.

Означення: декартовим добутком множин $A_1, A_2,..., A_n$ називається множина кортежів $(a_1, a_2, , a_3, ...,a_n)$ довжини n таких, що $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $a_3\in A_3$, …, $a_n\in A_n$, тобто $A_1\times A_2\times A_3\times ..\times A_n=\{(a_1, a_2, , a_3, ...,a_n)/a_1\in A_1, a_2\in A_2, a_3\in A_3, …, a_n\in A_n\}$.

Оскільки декартів добуток є множиною, то його можна задавати тими ж способами, що і множини, тобто:

1) переліком всіх пар, що входять до нього;

2) описом або за допомогою характеристичної властивості.

Крім того, декартів добуток множин можна задавати ще й такими способами:

3) табличним, коли елементи, які належать декартовому добутку множин розміщують у вигляді таблиці, в якій у стовпчиках розміщені елементи множини *Х*, а в рядках - елементи множини *У*, а елементи множини $X \times У$ пишуть на перетині відповідних рядків і стовпців (**див. таблицю № 1.1.**);

4) аналітично, тобто за допомогою формули, наприклад: у=5х-7;

5) графічно, коли елементи декартового добутку множин зображаються точками декартової прямокутної системи координат;

6) за допомогою графа.

у / х	а	в	с
1	**(1,а)**	**(1,в)**	**(1,с)**
3	**(3,а)**	**(3,в)**	**(3,с)**
5	**(5,а)**	**(5,в)**	**(5,с)**
7	**(7,а)**	**(7,в)**	**(7,с)**

Таблиця № 1.1. Табличне задання декартового добутку множин.

Властивості декартового добутку множин:

1. $A \times B \neq B \times A$ – ця нерівність говорить про те, що декартів добуток множин немає властивості комутативності.
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
7. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

10.Поняття відповідності між елементами двох множин, бінарні відповідності, їх позначення та способи задання. Множина відправлення та множина прибуття відповідності. Образи і прообрази елементів і множин, їх позначення.

Теорія множин вивчає множини та операції над ними. Її застосовують до побудови математичних теорій, до розв'язування практичних завдань, розглядаючи множини, між елементами яких існують ті чи інші відношення. Прикладом таких відношень у повсякденному житті є родинні відношення між людьми, відношення на роботі між колегами, в математиці – це відношення паралельності, подільності, рівності тощо.

Слід зазначити, що поняття відповідності, відношення розуміють майже однозначно. Однак таке розуміння носить інтуїтивний, а не точний характер. Для вивчення різноманітних відношень між математичними об'єктами інтуїтивне поняття «відношення» слід уточнити, але так, щоб воно набуло цілком конкретного математичного змісту і в той же час не втратило своєї інтуїтивної сутності.

Означення: бінарним відношенням, визначеним між елементами множин X і $У$, називається будь-яка підмножина декартового добутку цих множин X і $У$.

Означення: відповідністю між множинами X і $У$ називається трійка множин X, $У$ і $G\subset X\times У$.

Множину X називають множиною відправлення або областю визначення відповідності, множину $У$ – множиною прибуття або множиною значень відповідності, а множину впорядкованих пар $G\subset X\times У$, які перебувають у відповідності, - графіком відповідності. Домовилися відповідності позначати малими буквами грецького алфавіту α, β, γ, δ, ε та ін. Символічний запис $\alpha=\{G\subset X\times У\}$ означає, що задано відповідність між елементами множин X і $У$. Якщо елементи пари $(x;y)$ перебувають у відповідності α, то це позначають так: $x\alpha y$ і читають «елемент y відповідає елементу x у відповідності α». Інколи відповідності позначають і великими буквами латинського алфавіту R, S, T, наприклад: xRy, $aSв$ тощо. Слід зазначити, що уже в початкових класах діти знайомляться з відповідностями та відношеннями. Так, молодші школярі розглядають відношення рівності, більше, менше тощо.

Відповідність вважається заданою тоді, коли відносно будь-якої пари можна сказати належить чи не належить вона відповідності. Оскільки відповідність є підмножиною декартового добутку множин, то цілком логічно припустити, що відповідності можна задати всіма тими способами, якими задавався декартів добуток множин, а саме:
1) переліком всіх пар елементів, які перебувають у цій відповідності;
2) за допомогою характеристичної властивості;
3) таблицею;
4) рівнянням;
5) графіком;
6) графом.

Не всі вказані способи задання відповідностей рівнозначні, а найзручнішим буде той, який потрібен саме для конкретної відповідності.

Означення: образом елемента $a\in A$ у відповідності $\alpha\subset A\times B$ називають множину тих елементів $в\in B$, для яких $(a;в)\in\alpha$.

Означення: прообразом елемента $b\in B$ у відповідності $\alpha\subset A\times B$ називають множину тих елементів $a\in A$, для яких $(a;в)\in\alpha$.

Домовилися образ елемента $a\in A$ у відповідності $\alpha\subset A\times B$ позначати $\alpha(a)$. Прообраз елемента $в\in B$ при цій же відповідності $\alpha\subset A\times B$ будемо позначати так: $\alpha^{-1}(a)$.

11. Типи відповідностей (порожня, повна, всюди визначена у множині відправлення, сюр'єктивна, інє'ктивна, функціональна відповідність або функція, відображення, бієктивна). Обернені функції та відображення.

Типи відповідностей:

1) порожня відповідність, при якій $G \cap X \times У = \varnothing$ і $\alpha = \varnothing$;

2) повна відповідність, при якій $\alpha = X \times У$ і у графі якої від кожного елемента множини X йдуть стрілки до кожного елемента множини $У$;

3) відповідність всюди визначена у множині відправлення X, тобто така, у якої $G \subset X \times У$ і для якої $\alpha^{-1}(У) = X$. Це означає, що всі елементи множини X мають образи у множині $У$. На графі такої відповідності із кожного елемента множини X виходить стрілка до якогось елемента множини $У$;

4) сюр'єктивна відповідність, тобто відповідність на всю множину прибуття $У$, причому $\alpha(X) = У$. При такій відповідності кожен елемент множини $У$ має прообраз у множині X. Для графа цієї відповідності характерно те, що із кожного елемента множини X виходить стрілка і в кожен елемент множини $У$ входить стрілка;

5) інє'ктивна відповідність – це така відповідність $\alpha \subset X \times У$, у якої прообрази елементів з множини $У$ містять не більше одного елемента з множини X. На графі такої відповідності в елементи множини $У$ входить не більше однієї (одна або жодної) стрілки;

6) функціональна відповідність або функція, при якій образи елементів з множини X або порожні, або містять лише один елемент. Граф цієї відповідності характеризується тим, що з кожного елемента множини X виходить або одна стрілка, або не виходить жодної стрілки, але в елементи множини $У$ може входити більше, ніж одна стрілка;

7) відображення – це всюди визначена функціональна відповідність, коли кожному елементу з множини X відповідає єдиний елемент у множині $У$. Такі відповідності, тобто відображення, у свою чергу, поділяють на дві групи: а) відображення множини X в множину $У$, коли у множині $У$ є елементи, які не мають прообразів в множині X. Граф такого відображення характеризується тим, що з всіх елементів множини X виходять стрілки, але не в кожен елемент множини $У$ входить хоча б одна стрілка; б) відображення

множини X на множину $У$, коли кожен елемент з множини $У$ має прообраз у множині X;

8) бієктивна або взаємно однозначна відповідність, яка одночасно всюди визначена, сюр'єктивна, інє'ктивна та функціональна, тобто це ін'єктивне та сюр'єктивне відображення.

У математиці доволі часто доводиться мати справу з оберненими об'єктами (обернені числа, обернені задачі, обернені теореми, обернені функції тощо). Отже, цілком доцільним є введення понять оберненої відповідності та оберненого відображення.

Означення: відповідністю, оберненою до відповідності $\alpha\subset X\times У$, називається така відповідність α^{-1}, яка є підмножиною декартового добутку множин $У\times X$ і складається з тих і тільки тих пар $(y;x)$, для яких $(x;y)\in\alpha$.

12. Бінарні відношення між елементами однієї множини, способи їхнього задання та їх властивості: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність, антитранзитивність.

Хоча поняття відповідності та відношення досить близькі, але вони мають суттєві відмінності

Означення: якщо у відповідності f множина відправлення X співпадає з множиною прибуття $У$, то таку відповідність будемо називати відношенням між елементами множини X.

Означення: бінарним відношенням, визначеним у множині X, називається кожна підмножина декартового квадрату $X\times X=X^2$.

Оскільки відношення це відповідність, то його можна задавати тими самими способами, тобто за допомогою переліку, характеристичної властивості, таблиць, графів, графіків, формулою (аналітично).

Залежно від набору певних властивостей виділяють типи відношень:

Означення1: відношення α, визначене у множині X, називається **рефлексивним**, якщо кожний елемент множини X перебуває у відношенні α сам з собою, тобто $a\alpha a$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$$(\forall\ x\in X)(a\alpha a).$$

Якщо відношення α рефлексивне, то говорять, що елементи множини X мають властивість рефлексивності. Прикладами рефлексивних відношень є відношення подільності на множині чисел ($a\vdots a$), рівності на множині фігур, паралельності на множині площин тощо.

Означення2: відношення α, визначене у множині X, називається **антирефлексивним**, якщо не кожен елемент множини X перебуває у відношенні α сам з собою, тобто $a\alpha a$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$$(\forall\ x\in X)(a\alpha a)$$

Якщо відношення α антирефлексивне, то говорять, що елементи множини X мають властивість антирефлексивності. Прикладами антирефлексивних відношень є відношення більше на множині чисел, перпендикулярності на множині прямих тощо.

Означення3: відношення α, визначене у множині X, називається **симетричним**, якщо для будь-яких $a,в\in X$ із того, що $a\alpha в\rightarrow в\alpha a$.Символічно наведене означення можна записати так: $(\forall\ a,в\in X)(a\alpha в\rightarrow в\alpha a)$.

Якщо відношення α симетричне, то говорять, що елементи множини X мають властивість симетричності. Прикладами симетричних відношень є відношення дорівнює на множині фігур, перпендикулярності на множині прямих тощо.

Означення4: відношення α, визначене у множині X, називається **асиметричним**, якщо для будь-яких $a,в\in X$ із того, що $a\alpha в\rightarrow в\alpha a$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$(\forall a, в \in X)(a\alpha в \to \overline{в\alpha a})$.

Якщо відношення α асиметричне, то говорять, що елементи множини *X* мають властивість асиметричності.

Означення5: відношення α, визначене у множині *X*, називається **антисиметричним**, якщо для будь-яких $a, в \in X$ із того, що $(a\alpha в \wedge в\alpha a) \to (а=в)$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$(\forall a, в \in X)(a\alpha в \wedge в\alpha a) \to (a = в)$. Якщо відношення α антисиметричне, то говорять, що елементи множини *X* мають властивість антисиметричності.

Означення6: відношення α, визначене у множині *X*, називається **транзитивним**, якщо для будь-яких $a, в, c \in X$ із того, що $(a\alpha в \wedge в\alpha c) \to (a\alpha c)$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$(\forall a, в, c \in X)(a\alpha в \wedge в\alpha c) \to (a\alpha c)$.

Якщо відношення α транзитивне, то говорять, що елементи множини *X* мають властивість транзитивності. Прикладами транзитивних відношень можуть бути: відношення подільності на множині чисел, відношення менше на множині кутів тощо.

Означення7: відношення α, визначене у множині *X*, називається **антитранзитивним**, якщо для будь-яких $a, в, c \in X$ із того, що $(a\alpha в \wedge в\alpha c) \to \overline{(a\alpha c)}$.

Символічно наведене означення можна записати так:

$$(\forall a, в, c \in X)(a\alpha в \wedge в\alpha c) \to \overline{(a\alpha c)}.$$

Якщо відношення α антитранзитивне, то говорять, що елементи множини *X* мають властивість антитранзитивності.

Означення8: відношення α, визначене у множині *X* називається **зв’язним**, якщо для будь-яких $a\alpha в$ і $a \neq в$ випливає, що $a\alpha в$ або $в\alpha a$.

Прикладом таких відношень є відношення більше, менше на множині чисел.

13. Відношення еквівалентності та порядку, їх властивості. Впорядковані множини. Зв'язок відношення *еквівалентності з розбиттям множини на класи, що попарно не перетинаються.*

У математиці відношення між елементами однієї множини поділяють принаймні на три групи:

1) відношення еквівалентності;
2) відношення порядку;
3) функціональні відношення.

Означення: будь-яке рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення f, визначене у множині X, називається відношенням еквівалентності.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення подібності на множині трикутників, паралельності на множині площин, «бути однокурсником» на множині студентів тощо. оскільки кожна людина проживає на одній вулиці сама з собою, то це відношення рефлексивне;

Означення: бінарне відношення α, визначене у множині X, називається відношенням строгого порядку, якщо воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Прикладами відношень строгого порядку є: відношення «менше» у множині цілих чисел; відношення «бути старшим» на множині людей; відношення «бути вищим» на множині дерев тощо.

Означення: бінарне відношення α, визначене у множині X, називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Прикладами відношень нестрогого порядку є: відношення «більше або дорівнює» у множині раціональних чисел; відношення подільності на множині натуральних чисел тощо.

Означення: відношення порядку в множині X називається відношенням лінійного порядку, якщо для будь-яких елементів $x,y \in X$ виконується умова $x\alpha y \vee y\alpha x$. Якщо ж відношення не має такої властивості, то його називають відношенням часткового порядку.

Прикладом відношення лінійного порядку є відношення «більше» чи «менше» на множині чисел.

Означення: якщо відношення α в множині X є відношенням часткового порядку, то множину X називають <u>частково впорядкованою множиною</u>.

Означення: якщо відношення α в множині X є відношенням лінійного порядку, то множину X називають <u>лінійно впорядкованою множиною</u>.

Лінійно впорядковані множини мають ряд властивостей. Нехай $a, в, c \in X$ і множина X лінійно впорядкована відношенням α. Якщо відомо, що $a\alpha в \wedge в\alpha c$, то говорять, що елемент *в* лежить між елементами *a* і *c*.

Означення: множина X, яка лінійно впорядкована відношенням α, називається <u>дискретною</u>, якщо між будь-якими двома її елементами знаходиться лише скінченна множина елементів.

Прикладом дискретних множин є множини натуральних і цілих чисел.

Означення: множина X, яка лінійно впорядкована відношенням α, називається <u>щільною</u> в собі, якщо для будь-яких двох різних її елементів існує елемент цієї множини, що лежить між ними.

Прикладом щільних в собі множин є множина дійсних чисел.

14. Комбінаторні задачі. Правила суми і добутку.

Комбінаторика — це розділ математики, що вивчає способи вибору та розміщення елементів у множинах за певними правилами. Основними задачами комбінаторики є підрахунок кількості способів виконання деякої дії або вибору об'єктів.

Правило суми застосовується, коли деяку дію можна виконати кількома взаємовиключними способами.

Означення: якщо існує A способів виконати одну дію і B способів виконати іншу, і ці дії не можуть відбуватися одночасно, тоді загальна кількість способів виконати одну з них дорівнює сумі $A+B$.

Правило добутку застосовується, коли необхідно виконати послідовність незалежних дій.

Означення: якщо одну дію можна виконати A способами, а після неї іншу — B способами, то загальна кількість способів виконати обидві дії дорівнює добутку $A \times B$.

Обидва правила можна комбінувати для розв'язання складніших задач. Головне — правильно визначити, чи йдеться про взаємовиключні варіанти (правило суми) або про послідовний вибір (правило добутку).

Комбінаторні правила суми і добутку є основою для розв'язання багатьох задач з підрахунку кількості способів виконання дій.

15. Розміщення з повтореннями та без повторень.

Розміщення – це вибір k елементів із n з урахуванням порядку.

Розміщення без повторень - впорядкована послідовність k елементів, вибраних з множини, що містить n елементів, де кожен елемент можна використати лише один раз.
Формула для підрахунку кількості таких розміщень:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Розміщення з повтореннями - впорядкована послідовність k елементів, вибраних з множини, що містить n елементів, де кожен елемент може повторюватися.
Формула для підрахунку кількості таких розміщень:

$$A_n^k = n^k$$

16. Перестановки з повтореннями та без повторення.

Перестановка — це впорядкований набір усіх n елементів множини. Вона відрізняється від розміщень тим, що використовуються всі елементи множини, а не тільки деяка їх частина.

Означення: Перестановкою без повторень P_n називається впорядкований набір з n різних елементів.

Формула: $P_n = n!$

Означення: Перестановкою з повтореннями $P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_m)}$ називається впорядкований набір з n елементів, де деякі елементи можуть повторюватися.

Формула: $P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_m)} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ - кількість повторів кожного типу елементів.

17. Комбінації та їх властивості.

Комбінація — це спосіб вибору k елементів із n без урахування порядку. На відміну від розміщень, тут важливо лише, які елементи обрані, а не їхня послідовність.

Комбінація без повторень - вибірка k елементів із n, де порядок елементів не має значення, і кожен елемент можна використати лише один раз.

Формула: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Комбінація з повтореннями - вибірка k елементів із n, де порядок не має значення, але кожен елемент може повторюватися необмежену кількість разів.

Формула: $C_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Властивості комбінацій:

1. $C_n^k = C_n^{(n-k)}$
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

18. Поняття як форма мислення, зміст і обсяг поняття та зв'язок між ними.

Поняття - це форма мислення в якій в безпосередній єдності відображаються загальні, суттєві ознаки предметів, явищ, процесів.

Логічна структура поняття складається з таких елементів як ***зміст*** і ***обсяг***.

Зміст поняття складається з сукупності ознак, які виділяються як окремі поняття.

Наприклад: змістом поняття «злочин» є сукупність таких суттєвих ознак як «суспільно-небезпечний характер дії», «протиправність», «провинність», «карність».

Обсягом поняття є множина предметів, які мисляться в понятті.

Обсяг поняття злочин складають усі злочини, бо вони мають загальні, істотні ознаки. Зміст поняття виражається за допомогою такої логічної операції як *визначення поняття*. Предмети, які входять в обсяг поняття, називають *логічним класом*, або *множиною*, а окремий предмет обсягу поняття є *елементом класу або множини*.

Наприклад: елементами класу злочинів будуть такі поняття як крадіжка, шахрайство, розбій та ін. Кожне з даних понять має ознаки притаманні змісту поняття злочин.

Зміст та обсяг поняття взаємопов'язані один з одним. Цей зв'язок виражається у *законі оберненого співвідношення між обсягом та змістом поняття*. Коли змінюється зміст поняття, то змінюється і його обсяг і, навпаки, зміна в обсязі поняття зумовлює зміну в його обсязі. Згідно з даним законом збільшення змісту поняття веде до утворення поняття з меншим обсягом, а збільшення обсягу поняття веде до утворення поняття з меншим змістом.

Наприклад: якщо ми збільшимо обсяг поняття адвокат, то можемо утворити поняття юрист, зміст якого буде менший, а обсяг більший, оскільки в ньому тепер мисляться юристи усіх спеціальностей.

19. Означувані та неозначувані поняття. Способи означення математичних понять, їх види (через найближчий рід і видову відмінність (видову ознаку), генетичні, індуктивні, або рекурсивні). Види означень понять початкового курсу математики. Структура визначення через рід та видову відмінність (видову ознаку).

Означувані поняття – ті, що мають формальне визначення (наприклад, «квадрат», «дробове число»).

Неозначувані поняття – ті, що не мають формального визначення, але приймаються без пояснення на основі інтуїції (наприклад, «точка», «пряма», «площина» у геометрії).

Наприклад:

Поняття «трикутник» можна означити: «Трикутник – це геометрична фігура, що має три сторони».

Але поняття «точка» є неозначуваним – воно сприймається інтуїтивно.

Означення - це речення, в якому розкривається зміст даного поняття, тобто формулюються його істотні ознаки.

Правильне означення поняття повинно містити мінімальну кількість ознак, тобто лише необхідні і достатні, які б виділяли його з іншого, ширшого за обсягом. Ніяких зайвих ознак, які можна довести на основі інших, в означенні не повинно бути.

Взагалі, означення — це логічна операція, яка розкриває зміст поняття.

Способи означення математичних понять:

а) Через найближчий рід і видову відмінність (класичне означення)

Це найуживаніший спосіб у математиці.

Структура означення:

Поняття = найближчий рід + видова ознака

Наприклад:

- «Прямокутник» — це чотирикутник (рід), у якого всі кути прямі (видова ознака).
- «Квадрат» — це прямокутник (рід), у якого всі сторони рівні (ознака).

б) Генетичне означення

Описує поняття через процес його побудови або утворення.

Наприклад: натуральний ряд чисел: починається з 1, і кожне наступне число — на одиницю більше за попереднє.

в) Індуктивне означення

Означення, яке базується на виявленні спільних ознак у ряду прикладів. Часто використовується у початковому навчанні.
Наприклад: учням показують кілька трикутників різної форми та пояснюють, що всі ці фігури — трикутники, бо мають три сторони.
г) Рекурсивне означення
Використовується для означення об’єктів, де наступні елементи будуються на основі попередніх.
Наприклад:
Рекурсивне означення числової послідовності:

- $a_1 = 1$
- $a_{n+1} = 2a_n + 3$

У початковій школі переважають такі типи означень:

- **Інтуїтивні** (базуються на уявленні): точка, пряма.
- **Ілюстративні** (подаються через приклади): фігури, числа.
- **Означення через рід і видову ознаку** (на старших етапах початкової школи): наприклад, означення прямокутника.
- **Означення через практичні дії** (генетичні): наприклад, що таке коло — «фігура, утворена при обертанні нитки навколо однієї точки».

Компонент	**Пояснення**	**Приклад**
Рід (узагальнення)	Більш загальне поняття, до якого належить нове	Чотирикутник
Видова ознака	Ознака, що відрізняє нове поняття від інших в межах роду	Усі кути прямі (для прямокутника)
Повне означення	Рід + ознака	Прямокутник — це чотирикутник, у якого всі кути прямі.

20.Аксіоми. Теореми. Ознаки.

Аксіоми — це основні твердження, які приймаються без доведення. Вони є фундаментами, на яких будуються вся теорії.
Наприклад:

- Через дві точки можна провести тільки одну пряму.
- Якщо до відрізка додати ще один відрізок, отримаємо довший відрізок.

Теореми — це твердження, які потрібно доводити, використовуючи аксіоми, раніше доведені теореми та логіку.
Наприклад:
Теорема Піфагора: У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.
Ознаки — це умови, за яких ми можемо зробити певний висновок.
Наприклад:
Ознака рівності трикутників: Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідним сторонам і куту іншого — трикутники рівні.

21.Поняття висловлення, їх види (елементарні, складені, рівносильні) та позначення.

Висловлення — це речення, про яке можна однозначно сказати, чи воно істинне (правдиве), чи хибне (неправдиве). Вони є об'єктом вивчення математичної логіки галузі математики, яку називають математичною логікою. Запитальні і окличні речення не є висловленнями, бо про них не можна сказати, що вони істинні або хибні.

Висловлення позначають малими буквами латинського алфавіту. Прикладом висловлень можуть бути такі: *а*=„Київ – столиця України”, *в*=„Іваненко – студент”. У математичній логіці висловлення розглядають лише з точки зору їх істинності чи хибності, абстрагуючись від конкретного їх змісту. Отже, висловлення є своєрідною величиною, яка може приймати два значення – „істинне” або „хибне”. Якщо висловлення «*а*» істинне, то це позначають так a=1, а якщо хибне - то a=0.

Види висловлень:
1.Елементарні - це прості висловлення, які не містять інших висловлень.
Наприклад:
- "3 ділиться на 3"
- "Земля обертається навколо Сонця"

2.Складені висловлення - це висловлення, які утворені з кількох простих за допомогою логічних зв'язок (операцій):
- "і" (кон'юнкція): $(A \land B)$
- "або" (диз'юнкція): $(A \lor B)$
- "не" (заперечення): $(\bar{A})$
- "якщо..., то..." (імплікація): $(A \to B)$
- "тоді і тільки тоді, коли" (еквівалентність): $(A \leftrightarrow B)$

3.Рівносильні висловлення — це такі, які завжди мають однакове значення істинності в усіх випадках.
Наприклад:
- Висловлення А: "Якщо йде дощ, то земля мокра."
- Висловлення В: "Якщо земля не мокра, то дощ не йшов."

Ці два висловлення **рівносильні**.

22.Поняття предиката, його позначення та область визначення. Поняття кванторів існування та загальності, їх позначення та зв'язок між ними.

Предикат — це висловлення, яке залежить від змінної, тобто воно ще не є істинним або хибним, поки не підставимо значення
Наприклад: «$x > 0$» — це не висловлення, а **предикат**, бо поки ми не знаємо значення x, ми не можемо сказати, істинне чи ні.
Якщо підставимо: x = 5 → "5 > 0" — істинне
x = -2 → "–2 > 0" — хибне
Предикати зазвичай позначаються великими літерами з дужками: $P(x)$, $Q(x)$, $R(x, y)$, $S(x, y, z)$ і т.д.
Областю визначення предиката є множина всіх можливих значень змінної.
Висловлення можуть утворюватись не лише шляхом надання певного значення змінній предиката, можна утворити

висловлення, поставивши перед предикатом одне з слів «будь-який», «довільний», «кожний», «усі» ,«існує» та інші. Ці слова називаються кванторами.

Розрізняють два види кванторів – квантори загальності і квантори існування.

Квантори загальності вживаються за допомогою слів «будь-який», «кожен», «усі», «довільний» та позначається символом «$\forall$» .

Квантори існування виражаються словами «існує», «хоча б один», «деякі» і позначається символом «$\exists$» .

23.Операція заперечення над висловленнями та предикатами. Таблиці істинності. Основні властивості (закони) операції заперечення.

У звичайній мові для утворення речення, зміст якого є протилежним до даного, використовують частку «не» або словосполучення «неправильно, що…». Так само досить часто вони використовуються у математичних твердженнях. Цій частці чи словосполученню у математичній логіці певним чином відповідає операція заперечення. Символічний запис $\bar{a}$ можна прочитати так: «заперечення висловлення a», «не-a», «неправильно, що a». Математичне означення цього поняття:

Означення: запереченням даного висловлення «a» називають таке нове висловлення «$\bar{a}$», яке істинне тоді, коли висловлення a хибне, і хибне тоді – коли висловлення a істинне.

Операцію заперечення можна задати за допомогою таблиці, яку в математичній логіці називають таблицею істинності (**див. таблицю № 2.1.**). Таким чином, щоб отримати із даного висловлення його заперечення слід поставити перед висловленням слово «неправильно» чи поставити перед присудком частку «не».

a	**$\bar{a}$**
0	**1**
1	**0**

Таблиця № 2.1. Таблиця істинності заперечення висловлення.

Операція заперечення висловлень підкоряється закону подвійного заперечення $\overline{\overline{a}}=a$

24.Операція кон'юнкції над висловленнями та предикатами. Її таблиця істинності. Основні властивості (закони) операції кон'юнкції.

У математичній логіці таке нове висловлення називають кон'юнкцією (грецьк. **conjunctio** - зв'язок, союз) даних висловлень (a і b) і позначають так: $a \wedge b$. Символічний запис $a \wedge b$ читають так: «a і b», або «a в кон'юнкції з b», або «кон'юнкція a і b».

Означення: кон'юнкцією двох висловлень a і b називають таке нове висловлення $a \wedge b$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлення a і b.

Інколи означення формулюють і так: «кон'юнкцією двох висловлень a і b називають таке нове висловлення $a \wedge b$, яке хибне тоді і тільки тоді, коли хибне хоча б одне із висловлень a і b». Легко довести, що обидва ці означення рівносильні. Крім цього, означення кон'юнкції двох висловлень можна задати за допомогою таблиці істинності

а	***в***	***а∧в***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблиця № 2.3. Таблиця істинності для операції кон'юнкції.

Операцію кон'юнкції називають логічним множенням. Означення операції кон'юнкції двох висловлень можна поширити на три, чотири та на будь-яке скінченне число висловлень. Наприклад: кон'юнкцією висловлень a, b, c

називається таке нове висловлення, яке хибне тоді і тільки тоді, коли хибне хоча б одне з висловлень a, b і c, тобто $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c$. Враховуючи сказане, зазначимо, що всі твердження, які ми будемо доводити для двох висловлень щодо кон'юнкції, будуть, майже завжди, істинними для будь-якого скінченого числа висловлень.

Безпосередньо із означення кон'юнкції двох висловлень легко переконатися у справедливості таких властивостей (законів): 1) $\boldsymbol{a \wedge 1 = a}$; 2) $\boldsymbol{a \wedge 0 = 0}$; 3) $\boldsymbol{a \wedge a = a}$ – закон ідемпотентності. Крім вказаних законів, операція кон'юнкції висловлень підкоряється комутативному (переставному) $\boldsymbol{a \wedge в = в \wedge a}$ та асоціативному (сполучному) законам $\boldsymbol{(a \wedge в) \wedge c = a \wedge (в \wedge c)}$, які потребують доведення. Ці закони доводять, використовуючи таблиці істинності. Покажемо це на прикладі асоціативного закону операції кон'юнкції

а	***в***	***с***	***а∧в***	***(а∧в)∧с***	***в∧с***	***а∧(в∧с)***
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Таблиця № 2.4. Асоціативний закон операції кон'юнкції.

25.Операція диз'юнкції над висловленнями та предикатами. Її таблиця істинності. Основні властивості (закони) операції диз'юнкції.

У математичній логіці таке нове висловлення називають диз'юнкцією (грецьк. **disjunction** - роз'єднання, розрізнення) даних висловлень (a і b) і позначають так: $a \vee b$. Символічний запис $a \vee b$ читають так: «a або b», або «a в диз'юнкції з b», або «диз'юнкція a і b».

Означення: диз'юнкцією двох висловлень *a* і *b* називають таке нове висловлення $a \lor b$, яке хибне тоді і тільки тоді коли хибні обидва висловлення.

Крім наведеного означення операцію диз'юнкції можна задати з допомогою іншого означення чи таблиці істинності (**див. таблицю № 2.5.**).

a	**в**	**a∨в**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Таблиця № 2.5. Таблиця істинності для операції диз'юнкції.

Означення: диз'юнкцією двох висловлень *a* і *b* називають таке нове висловлення $a \lor b$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне хоча б одне із висловлень *a* і *b*.

Операцію диз'юнкції називають логічним додаванням. Означення операції диз'юнкції двох висловлень можна поширити на три, чотири та на будь-яке скінченне число висловлень.

Безпосередньо із означення диз'юнкції двох висловлень легко переконатися у справедливості таких властивостей (законів): 1) $a \lor 1 = 1$; 2) $a \lor 0 = a$; 3) $a \lor a = a$ – закон ідемпотентності. Крім вказаних законів, операція диз'юнкції висловлень підкоряється таким законам:

3. $a \lor в = в \lor a$ –комутативний (переставний) закон.

4. $(a \lor в) \lor c = a \lor (в \lor c)$ – асоціативний (сполучний) закон.

5. $a \land (в \lor c) = (a \land в) \lor (a \land c)$ – дистрибутивний (розподільний) закон операції кон'юнкції відносно диз'юнкції.

6. $a \lor (в \land c) = (a \lor в) \land (a \lor c)$ – дистрибутивний (розподільний) закон операції диз'юнкції відносно кон'юнкції (п'ятий та шостий закони пов'язують операції кон'юнкції та диз'юнкції).

7. $\bar{a} \land в = \bar{a} \overline{\lor в}$.

8. $\overline{a \vee в} = \bar{a} \overline{\wedge} в$ - закони де Моргана, які пов'язують операції заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції.

26. Операція імплікації над висловленнями та предикатами. Її таблиця істинності. Основні властивості (закони) операції імплікації.

У математичній логіці таке нове висловлення називають імплікацією (грецьк. **Implico** – тісно зв'язую) даних висловлень (a і b) і позначають так: $a \rightarrow b$ або $a \Rightarrow b$. Символічний запис $a \rightarrow b$ або $a \Rightarrow b$ читають так: «якщо a, то b», або «з a слідує (випливає) b», або «імплікація a і b», або «a імплікує в b».

Означення: імплікацією двох висловлень a і b називається таке нове висловлення $a \rightarrow b$, яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення a істинне, а висловлення b – хибне, і істинне в усіх інших випадках.

За допомогою таблиці істинності операцію імплікації можна задати так (**див. таблицю №2.7.**).

а	*в*	*a→b*
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Таблиця № 2.7. Таблиця істинності для операції імплікації висловлень.

Існує чотири види імплікації: 1) $\boldsymbol{a \rightarrow b}$ – пряма; 2) $\boldsymbol{b \rightarrow a}$ – обернена до даної; 3) $\bar{a} \rightarrow b$ - протилежна до прямої; 4) $\boldsymbol{\bar{b} \rightarrow \bar{a}}$ - протилежна до оберненої або обернена до протилежної.

Можна ствердити, що справедливі такі рівності: $\boldsymbol{a \rightarrow b = b \rightarrow a}$ та $\boldsymbol{b \rightarrow a = a \rightarrow b}$. Таким чином, маємо дві пари рівносильних між собою імплікацій $\boldsymbol{a \rightarrow b = b \rightarrow a}$ та $\boldsymbol{b \rightarrow a = a \rightarrow b}$. Це дає змогу визначати істинність не всіх чотирьох імплікацій, а лише двох (по одній із кожної пари), бо істинність двох інших випливатиме із рівносильності пар імплікацій.

27.Операція еквіваленції над висловленнями та предикатами. Її таблиця істинності. Основні властивості (закони) операції еквіваленції.

У математиці досить часто використовуються словосполучення «тоді і тільки тоді», «необхідно і достатньо», слова «рівносильно», «еквівалентно» тощо. У математичній логіці таке нове висловлення називають еквіваленцією даних висловлень (a і b) і позначають так: $a \leftrightarrow b$ або $a \Leftrightarrow b$. Символічний запис $a \leftrightarrow b$ або $a \Leftrightarrow b$ читають так: «a рівносильно b», або «a еквівалентно b», або «еквіваленція висловлень a і b», або «для a необхідно і достатньо b», або «a тоді і тільки тоді, коли b».

Означення: еквіваленцією двох висловлень a і b називається таке нове висловлення $a \leftrightarrow b$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли значення істинності висловлень a і b співпадають (або коли вони одночасно істинні або одночасно хибні).

За допомогою таблиці істинності операцію еквіваленції можна задати так (**див. таблицю № 2.10.**).

Зв'язок між операціями еквіваленції, імплікації, кон'юнкції, заперечення та диз'юнкції виражається за допомогою таких формул:

1) $\boldsymbol{a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)}$;

2) $\boldsymbol{a \leftrightarrow b = (\bar{a} \vee b) \wedge (b \vee a)}$.

Другу формулу легко одержати із першої, якщо врахувати формулу: $\boldsymbol{a \to b = \bar{a} \vee b}$.

a	**b**	**a↔b**
0	**0**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**1**	**1**

Таблиця №2.10. Таблиця істинності еквіваленції висловлень.

28.Логічні формули. Порядок виконання логічних операцій у формулах. Рівносильні формули. Тотожно істинні формули (логічні закони).

Із шкільного курсу математики відомо, що вирази отримують за допомогою цифр, букв, знаків арифметичних дій та дужок. Аналогічно можна отримувати вирази або формули у математичній логіці. Для того, щоб однозначно розуміти відповідні формули та в однаковому порядку виконувати дії над висловленнями та предикатами, виробили наступні правила виконання операцій: заперечення, кон’юнкція, диз’юнкція, імплікація та еквіваленція:

1) порядок виконання логічних операцій регулюють дужками, починаючи виконання з операції, яка стоїть у самих внутрішніх дужках;

2) вираз, який міститься під знаком операції заперечення, в дужки не береться, але його вважають таким, що знаходиться в дужках, а тому обчислюють окремо;

3) якщо у формулі немає дужок, то порядок виконання логічних операцій такий: а) заперечення; б) кон’юнкція; в) диз’юнкція; г) імплікація; д) еквіваленція.

Означення: Формула, яка набуває лише істинних значень називається тотожно істинною формулою або тавтологією.

Означення: Формула, яка набуває лише хибних значень називається тотожно хибною формулою, або суперечністю.

29.Поняття теореми, її будова. Види теорем (дана, обернена, протилежна, обернена до протилежної, спряжені теореми) та зв'язок між ними.

Теорема – це твердження, істинність якого доводять. Теорема містить умову і висновок.

$A \Rightarrow B$

A – умова, *B* – висновок.
Можна сказати, що теорема – це висловлення про те, що з властивості *A* слідує властивість *B*. Істинність цього висловлення встановлюється шляхом доведення.

Залежно від того, як ми змінюємо частини теореми (умову та висновок), розрізняють **п’ять видів теорем**:
1. Пряма теорема (якщо A, то B)
Наприклад: якщо кут прямий, то його градусна міра — 90°.
2. Обернена теорема (якщо B, то A)
(Міняємо місцями умову і висновок)
Наприклад (обернене до попереднього): якщо кут має градусну міру 90°, то він прямий.
Увага! Пряма і обернена теореми **не завжди обидві істинні**.
Кожну треба доводити **окремо**!

3. Протилежна теорема (якщо не A, то не B)
Наприклад: якщо кут не прямий, то його градусна міра не дорівнює 90°.
4. Обернена до протилежної теорема (якщо не B, то не A)
Наприклад: якщо градусна міра кута не дорівнює 90°, то він не прямий.
5. Спряжені теореми
Спряжені теореми — це **пряма теорема** та її **обернена**. Якщо **обидві істинні**, то вони утворюють **еквівалентність**:
A ⇔ B ("A тоді і тільки тоді, коли B")
Наприклад: трикутник рівнобедрений ⇔ кути при основі рівні

30. Способи доведення теорем (дедуктивний, індуктивний, метод від супротивного тощо).

Спочатку зазначимо, що довести теорему – це означає встановити логічним шляхом, що завжди, коли виконується властивість *A(x)* буде виконуватись і властивість *B(x)*. Доведення теорем в математиці проводиться за правилом логіки без будь-яких посилань на наочність та досвід. У математиці існують різні способи доведення теорем, які класифікують по-різному. Серед різних способів доведення теорем зупинимося на характеристиці тих, які найчастіше зустрічаються в шкільному курсі математики. У першу чергу вкажемо **на дедуктивний спосіб доведення теорем**, сутність якого полягає в тому, що виходячи з умови теореми і використовуючи доведені раніше теореми, ми будуємо ланцюжок міркувань, який дозволяє нам переконатися в справедливості висновків теорем.

Сутність **індуктивних доведень** полягає в тому, що на основі розглянутих кількох окремих випадків ми робимо загальний висновок. Для того, щоб не розглядати всі часткові випадки, в математиці є метод доведення, який називається **методом математичної індукції**. Він складається з таких етапів: а) перевіряємо твердження для n=1; б) припускаємо істинність твердження при n=k; в) виходячи з припущення пробуємо довести істинність твердження при n=k+1. Тоді дане твердження буде справедливим для будь-якого натурального числа.

Наступним способом доведень є **спосіб доведення від супротивного**, сутність якого полягає в тому, що ми заперечуємо висновок теореми і пробуємо це довести. В результаті ми приходимо до суперечності із умовою теореми або з доведеним раніше твердженням. Найбільш часто цей спосіб доведення використовують при доведенні теорем єдиності.

31.Необхідні та достатні умови.

Будь-яку теорему можна сформулювати з використанням слів «необхідно», «достатньо» чи «необхідно і достатньо». Покажемо це на прикладі наступної теореми «якщо в чотирикутнику сторони попарно паралельні, то цей чотирикутник паралелограм». У цій теоремі ми маємо два предикати: $A(x)$: «у чотирикутнику х протилежні сторони попарно паралельні» і $B(x)$: «чотирикутник х – паралелограм». Розглянемо імплікацію предикатів $A(x)\to B(x)$. Легко переконатися, що вона завжди істинна. Аналогічно імплікація

B(x)→A(x)=1. Тоді кожний із предикатів є необхідною і достатньою умовою для іншого, а тому теорему сформулюємо так: «для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його протилежні сторони були парно паралельні».

Як відомо, теореми, в яких використовують слова «необхідно і достатньо» називають ознаками, бо вони дозволяють з'ясувати, чи відносяться дані об'єкти до певного класу (наприклад, ознаки подільності, ознаки перпендикулярності тощо).

32.Поняття міркування, правильні та неправильні міркування. Перевірка правильності міркувань з допомогою кругів Л.Ейлера.

В основі обґрунтування та доведення лежать міркування, під якими розуміють логічну операцію, в результаті якої із одного або декількох взаємопов'язаних за змістом речень одержують речення, що містить нове по відношенню до вихідних знання. Якщо проаналізувати структуру міркування, то можна помітити, що будь-яке з них складається із умови (або посилок) та висновку.

Міркування — форма мислення, в якій з одного або кількох тверджень (посилок) робиться висновок.

Правильне міркування — логічно вивірене, висновок випливає з посилок.

Неправильне міркування — містить логічні помилки або підміни понять.

Перевірка міркувань за допомогою кругів Ейлера:

- ✓ Кожне твердження зображується як множина (коло).
- ✓ Співвідношення множин (включення, перетин тощо) показують логічні зв'язки.
- ✓ Якщо висновок суперечить візуальній моделі — міркування хибне.

33.Алгоритми. Основні властивості алгоритмів. Приклади алгоритмів, що використовуються в курсі математики початкової школи.

Алгоритм — скінченна послідовність чітких інструкцій для досягнення результату.

Властивості алгоритмів:

1. Скінченність — завершується за скінченну кількість кроків.
2. Визначеність — кожна дія чітко задана.
3. Результативність — призводить до результату.
4. Масовість — може застосовуватись до цілої групи задач.
5. Поетапність — складається з окремих кроків.

Приклади шкільних алгоритмів:

- Додавання в стовпчик.
- Множення багатоцифрових чисел.
- Побудова геометричних фігур за вказаними параметрами.
- Алгоритм порівняння чисел.

34.Теоретико-множинний підхід до побудови множини цілих невід'ємних чисел.

Теоретико-множинний (кількісний) підхід заключається в тому, що число трактується як спільна властивість класу скінченних еквівалентних множин.

В цій теорії розглядаються основні поняття «число», «величина», «відношення», «множина». Залежно від порядку їх слідування можна побудувати різні курс математики у початкових класах. У підручниках Богдановича такий порядок слідування:

1. «Число»
2. «Величина»
3. «Відношення»
4. «Множина»

Тому в курс математики покладено теоретико-множинний підхід і поняття «числа формується в результаті розгляду операцій над скінченними предметними множинами (кількісна теорія). Це означає що явно розглядається поняття «числа» і «величини», а поняття «відношення» і «множина» розглядаються неявно.

35.Теоретико-множинне тлумачення арифметичних дій та їх властивостей.

Теоретико-множинне тлумачення арифметичних дій та їх властивостей — це підхід до пояснення основ арифметики (додавання, віднімання, множення, ділення) через поняття множин, що формує логічно-обґрунтоване уявлення про дії з числами у дітей, особливо на етапі початкового навчання.

Основні ідеї теоретико-множинного підходу:

- Число розглядається як потужність (кількість елементів) деякої скінченної множини.
- Арифметичні дії — як операції над множинами або їхніми характеристиками (кількістю елементів, об'єднаннями, перетинами тощо).

1. Додавання

Теоретико-множинне тлумачення: додавання чисел відповідає об'єднанню двох неперетинних множин.

Приклад:

Нехай є множина *A* з 3 елементів і множина *B* з 2 елементів, причому $A \cap B = \varnothing$.

Тоді потужність об'єднання $A \cup B$ дорівнює 3+2=5.

Властивості:

- **Переміщувальна (комутативна):** $a+b=b+a$ — об'єднання не залежить від порядку.
- **Сполучна (асоціативна):** $(a+b)+c=a+(b+c)$ — результат об'єднання не залежить від послідовності.

2. Віднімання

Теоретико-множинне тлумачення: віднімання — це знаходження різниці між потужностями множин, коли одна множина є підмножиною іншої.

Приклад:

Якщо $A=\{1,2,3,4,5\}$, а $B=\{1,2\}$, то $A \setminus B=\{3,4,5\}$, і $5-2=3$.

3. Множення

Теоретико-множинне тлумачення: множення розглядається як побудова декартового добутку або повторне додавання рівномірних множин.

Приклад:

Якщо є 3 групи по 2 елементи: $A=\{a1,a2\}$, $B=\{b1,b2\}$, $C=\{c1,c2\}$, то загальна кількість елементів — $3 \times 2 = 6$.

Властивості:

- **Комутативність:** $a \times b = b \times a$
- **Асоціативність:** $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- **Розподільність:** $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

4. Ділення

Теоретико-множинне тлумачення: Ділення — це розбиття множини на рівні частини або знаходження кількості елементів у кожній частині.

Приклад:

Маємо 12 елементів, поділених на 3 рівні групи — у кожній по 4 елементи. Це $12 \div 3 = 4$.

36.Аксіоматична побудова множини цілих невід'ємних чисел.. Метод математичної індукції. Аксіоматичне означення арифметичних дій.

У аксіоматичному підході натуральні числа трактуються таким чином.

Означення: Натуральними числами називають елементи будь-якої структури (N_0, $'$, 0) , де N_0 – непорожня множина, $0 \in N_0$, $'$ – символ унарної алгебраїчної операції (операції слідування), причому справедливі такі аксіоми (Пеано).

Аксіома 1. Нуль не йде ні за яким натуральним числом

$(\forall x)\ \ (x' \neq 0)$

Аксіома 2. Для кожного натурального числа існує єдине натуральне число, що безпосередньо йде за натуральним числом.

$$(\forall x)\ \ (\exists! y)\ \ (y = x')$$

Аксіома 3. Кожне натуральне число безпосередньо слідує не більше, як за одним натуральним числом.

$$(\forall x)\ \ (\forall y)'\ \ (x' = y'\ \ \Rightarrow\ \ x = y)$$

Аксіома 4. (Аксіома індукції). Нехай підмножина $M \subset N_0$ має такі властивості:

1) $0 \in M$;
2) $(\forall x)\ (x \in M \ \Rightarrow\ x' \in M)$, тоді $M=N_0$.

Найпростіші наслідки з аксіоми Пеано:

Наслідок 1. Числа, що слідують за різними числами, також різні. $(\forall x, y)\quad (x \neq y \ \Rightarrow\ x' \neq y')$

Наслідок 2. Кожне натуральне число відмінне від числа, що слідує за ним. $(\forall x)\quad (x \neq x')$

37.Натуральне число як міра величини. Арифметичні дії над числами, що є мірами довжини відрізка. Властивості множини цілих невід'ємних чисел.

Натуральні числа — це числа, що використовуються для лічби предметів (1, 2, 3, …).

Міра величини — це числове значення, яке показує, скільки разів певна одиниця виміру міститься в даній величині.

При вимірюванні довжини відрізка, вибирається **одиниця виміру** (наприклад, 1 см), і відрізок порівнюється з нею. Якщо в одному відрізку поміщається, наприклад, 5 разів одиниця виміру, то його довжина дорівнює 5 см — **натуральне число виступає як міра довжини**.

Арифметичні дії над числами, що є мірами довжини відрізка – це дії, які дозволяють моделювати та розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками:

- **Додавання**: Якщо довжина одного відрізка — 4 см, а іншого — 3 см, то їхня спільна довжина дорівнює 4 + 3 = 7 см.
- **Віднімання**: Якщо один відрізок довший за інший (наприклад, 6 см і 2 см), то різниця довжин — 6 - 2 = 4 см.
- **Множення**: Якщо відрізок довжиною 3 см повторюється 4 рази, то загальна довжина — 3 × 4 = 12 см.
- **Ділення**: Якщо відрізок довжиною 12 см поділити на рівні частини по 3 см, отримаємо 12 ÷ 3 = 4 частини.

Ці операції моделюються **на наочному матеріалі**: відрізках, стрічках, лінійках тощо.

Властивості множини цілих невід'ємних чисел

Множина цілих невід'ємних чисел включає всі натуральні числа та нуль: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Основні властивості:

- **Замкненість** відносно додавання та множення: сума або добуток будь-яких двох чисел із цієї множини також належить цій множині.
- **Наявність нуля**: 0 — єдиний елемент, що не є натуральним числом, але належить до $\mathbb{N}_0$.
- **Відсутність оберненого елемента для віднімання**: Наприклад, $3 - 5 \notin \mathbb{N}_0$.
- **Порядок**: числа впорядковані зліва направо — можна сказати, яке більше/менше.
- **Нескінченність множини**: кількість елементів нескінченна.

38.Позиційні та непозиційні системи числення, запис чисел у позиційних та непозиційних системах числення.

Сукупність прийомів та правил найменування й позначення чисел називається ***системою числення.***

Розрізняють позиційні, непозиційні, змішані системи числення.

Система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється, називається *непозиційною*.

Історично першими виникли непозиційні системи числення. Вони ґрунтуються на кількісному підході до визначення числа, який для кодування тих чи інших кількостей застосовував особливі знаки – числа. Кожному знаку відповідав кількісний еквівалент. Добре відомим прикладом непозиційної системи числення є римська система, в якій роль цифр відіграють букви алфавіту: I – один, V – п'ять, X – десять, C – сто, Z – п'ятдесят, D –п'ятсот, M – тисяча. Наприклад, 324 = CCCXXIV.

Недоліками непозиційних систем числення є громіздкість зображення чисел, труднощі у виконані операцій тощо.

Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа, називається *позиційною.*

Загальноприйнятою в сучасному світі є десяткова позиційна система числення, яка з Індії через арабські країни прийшла в Європу. Основою цієї системи є число десять. Основою системи числення називається число, яке означає, у скільки разів одиниця наступного розряду більше за одиницю попереднього.

Мінімальний набір знаків, якими записується число, називається *алфавітом.* Кількість знаків в алфавіті називається *основою системи числення.*

39.Алгоритми арифметичних операцій над цілими невід'ємними числами у десятковій системі числення

Алгоритми арифметичних операцій над цілими невід'ємними числами в десятковій системі числення — це чіткі послідовності дій, які дозволяють виконувати основні обчислення: додавання, віднімання, множення та ділення. Ці алгоритми формуються ще в початковій школі і лежать в основі подальшого вивчення математики.

Алгоритм додавання

Мета: знайти суму двох невід'ємних цілих чисел.

Алгоритм:

1. Записати числа одне під одним, вирівнявши розряди (одиниці під одиницями, десятки під десятками тощо).
2. Починаючи з найменшого розряду (одиниць), додати цифри цього розряду.
3. Якщо сума цифр ≥ 10, записати в поточний розряд лише останню цифру суми, а "десяток" перенести в наступний розряд (це називається **перенос**).
4. Повторювати ці дії для всіх розрядів з урахуванням переносу.
5. Якщо після останнього розряду є перенос, дописати його як додатковий розряд.

Алгоритм віднімання

Мета: знайти різницю двох невід'ємних цілих чисел (за умови, що зменшуване ≥ від'ємника).

Алгоритм:

1. Записати числа одне під одним, вирівнявши розряди.
2. Починаючи з найменшого розряду, відняти цифру від'ємника від відповідної цифри зменшуваного.
3. Якщо цифра в зменшуваному < від цифри у від'ємнику, позичити одиницю з вищого розряду (це називається **запозичення**).
4. Повторювати ці дії для кожного розряду.
5. Результат записується під лінією.

Алгоритм множення

Мета: знайти добуток двох невід'ємних чисел.

Алгоритм:

1. Записати множники один під одним.
2. Починаючи з найменшого розряду другого множника, множити його на всі цифри першого множника.
3. Кожен отриманий результат записується під лінією зі зміщенням відповідно до розряду (аналогічно як при множенні в стовпчик).
4. Отримані добутки додаються між собою.

Алгоритм ділення (в стовпчик)

Мета: знайти частку від ділення одного невід'ємного числа на інше (якщо потрібно — з остачею).

Алгоритм:

1. Визначити, скільки разів дільник вміщується в перші розряди діленого.
2. Записати відповідну цифру частки.
3. Помножити дільник на цю цифру — відняти добуток від відповідної частини діленого.
4. Знести наступну цифру діленого.
5. Повторювати кроки 2–4, доки всі цифри діленого не використано.
6. Якщо ділення не є точним — отримаємо остачу.

40.Запис чисел у позиційних системах числення, відмінних від десяткової

Перша *позиційна* система числення виникла понад 2000 років до н.е. в стародавньому Вавилоні. Це була шістдесяткова позиційна нумерація. Проте принцип позиційного значення цифр тут ще не використовувався скрізь. Для запису чисел використовували положення клину : ▼- 1 і 60, ◄ - 10. Інші числа зображувались за допомогою цих знаків і дій додавання.

Сучасна позиційна система числення була винайдена в Індії у V-VI ст. Через арабів вона поширилася в IX ст. в Середню Азію, а пізніше – і в Західну Європу. Великим досягненням індійської математики було введення нуля для позначення відсутності одиниць розряду в числі. Після цього десяткова система числення стала повністю оформленою. Запровадження десяткової системи числення на Русі було зупинено монгольським ігом. Тільки у XVIII ст. індійська система числення витіснила слов'янську нумерацію.

У сучасному житті використовують також інші системи числення. В астрономії з давніх-давен застосовується шістдесяткова система числення. Основою цієї системи є число 60. Так, 60сек = 1 мінута, або $60'' = 1'$, $60' = 1^\circ$ тощо.

Взагалі, основою числення може бути будь-яке натуральне число $p \geq 2$. Для запису числа в такій системі числення використовується p символів: 0,1, ..., p-1.

Означення: Записом цілого невід'ємного числа x у p-ній системі числення називається його подання у вигляді

$x = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0$,

де $a_n, \ldots, a_1, a_0$ набувають значення 0, 1, ..., p-1, $a_n \neq 0$.

Числа $1, p, p^2, \ldots, p^n$ називають розрядними одиницями 1-го, 2-го, ... , (n+1)-го розрядів.

41.Арифметичні операції над числами у недесяткових позиційних системах числення

Порівняння чисел, записаних у системі числення з основою p, виконується так само, як і в десятковій системі числення: порівнюються цифри, починаючи зі старших розрядів.

Дії над числами в не десяткових системах числення виконуються за тими ж правилами, що і в десятковій системі числення. Перш за все для додавання і множення одноцифрових чисел складаються відповідні таблиці. Вони використовуються як при відніманні і діленні одноцифрових чисел, так і при діях з багатоцифровими числами.

Таблиця додавання з $p = 5$

+	1 2 3 4
1 2 3 4	2 3 4 10 3 4 10 11 4 10 11 12 10 11 12 13

Таблиця множення з $p = 5$

×	1 2 3 4
1 2 3 4	1 2 3 4 2 4 11 13 3 11 14 22 4 13 22 31

42.Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій позиційній системі числення.

Для перетворення числа з основою b у десяткову систему використовується формула розкладу за степенями основи:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \ldots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

Приклад:

$$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$$

Перетворення з десяткової системи в іншу позиційну

Ціла частина:

Потрібно **ділити** число на основу нової системи, записуючи остачі. Остачі записуються у **зворотному порядку**.

Приклад:

Перетворити 45_{10} у двійкову систему:

45 ÷ 2 = 22 ост. 1

22 ÷ 2 = 11 ост. 0

11 ÷ 2 = 5 ост. 1

5 ÷ 2 = 2 ост. 1

2 ÷ 2 = 1 ост. 0

1 ÷ 2 = 0 ост. 1

Результат: $\mathbf{45_{10}= (101101)_2}$

Дробова частина:

Потрібно **множити** дробову частину на основу системи та брати цілі частини добутків. Ці значення записуються у порядку обчислення.

Приклад:

Перетворити 0.625_{10} у двійкову систему:

0.625 × 2 = 1.25 → 1

0.25 × 2 = 0.5 → 0

0.5 × 2 = 1.0 → 1

Результат:$\mathbf{0.625_{10} = (0.101)_2}$

Щоб перейти з системи числення з основою a у систему з основою b, зазвичай використовують **проміжне перетворення через десяткову систему**:

1. Перетворити число з основи a у десяткову.
2. Перетворити отримане десяткове число в систему з основою b.

Приклад:

$(1101)_2$→?8

1. $(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$
2. 13_{10}=15_8

Альтернативно, можна використовувати **групування**:

- для переходу з двійкової в вісімкову: групи по 3 біти справа наліво.
- для переходу в шістнадцяткову: групи по 4 біти.

43.Поняття відношення подільності та його властивості; подільність суми, різниці, добутку

Відношення подільності — це математичне твердження про те, що **одне число ділиться на інше без остачі**.

Означення: Якщо для цілого a і натурального числа $в$ існує таке число ціле невід'ємне число c таке, що виконується рівність $a = bc$, то говорять, що числа a і b знаходяться у відношенні подільності.

Позначається $a \vdots в$. Читається: a і b знаходяться у відношенні подільності; a кратне b; a ділиться націло на b; b є дільником числа a.

Властивості відношення подільності:

Властивість 1: $(\forall a \in N)\ (a \vdots a)$ – рефлективності.

Доведення $(\forall a \in N)\ a = a \cdot 1 \Rightarrow a \vdots a$.

Властивість 2: $(\forall a, b, c \in N)\ (a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c)$ – транзитивності.

Доведення $\substack{a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot q \\ b \vdots c \Rightarrow b = c \cdot r} \Rightarrow\ a = (c \cdot r)q \Rightarrow a = c(rq) \Rightarrow a \vdots c$

Властивість 3: $(\forall a, b \in N)\ (a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b)$ – асиметричності.

Доведення $\substack{a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot q \\ b \vdots a \Rightarrow b = a \cdot r} \Rightarrow\ a = (a \cdot r)q \Rightarrow a = a(rq) = rq = 1 \Rightarrow$ $r = q = 1$

Тобто $a = b$

Властивість 4: $(\forall b \in z_0)\ (b \neq 0 \Rightarrow 0 \vdots b)$

Властивість 5: $(\forall a \in N)\ \ \overline{a \vdots 0}$

Властивість 6: $(\forall a \in z_0)\ (a \vdots 1)$

Відношення подільності є відношенням нестрогого порядку.

Теорема 1 Якщо кожен доданок суми ділиться на деяке число, то і сума ділиться на це число. $a \vdots c \wedge в \vdots c \Rightarrow (a + в) \vdots c$

Теорема 2 Різниця двох чисел ділиться на дане число, якщо зменшуване і від'ємник діляться на це число. $a \vdots c \wedge в \vdots c \Rightarrow (a - в) \vdots c$

Теорема 3 Добуток ділиться на дане число, коли на дане число ділиться хоча б один із співмножників.

$a \vdots c \vee в \vdots c \Rightarrow (ав) \vdots c$

Кожна із цих теорем є лише достатньою ознакою, обернені теореми хибні. Наприклад, $\overline{14 \vdots 6} \wedge \overline{9 \vdots 6}$, але $14 \cdot 9 = 126 \vdots 6$

44.Ознаки подільності чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 25 у десятковій системі числення

Означення: Ознака подільності – це речення, яке дозволяє не виконуючи дії ділення зробити висновок, чи ділиться дане число на інше без остачі чи ні.

<u>Ознака подільності на 2</u> Число тоді і тільки тоді ділиться на 2, коли його остання цифра парна.

<u>Ознака подільності на 5</u> Число тоді і тільки тоді ділиться на 5, коли його остання цифра 0 або 5.

<u>Ознака подільності на 4(25)</u> Число тоді і тільки тоді ділиться на 4(25), коли число утворене двома останніми цифрами ділиться на 4 (25).

<u>Ознака подільності на 3(9)</u> Число ділиться на 3(9) тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3(9).

45.Загальна ознака подільності Б.Паскаля; ознаки подільності на складені числа.

Теорема (ознака Паскаля): Будь-яке число $\boldsymbol{a}$, задане в позиційній системі числення з основою $\boldsymbol{q}$ у вигляді (1) ділиться на натуральне число $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$ тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків цифр цього числа на остачі, утворені при діленні на число $\boldsymbol{b}$, відповідних степенів основи числення $\boldsymbol{q}$.

Ознаки подільності на складені числа ґрунтуються на поєднанні ознак подільності на прості множники цих чисел. Для перевірки подільності на складене число слід з’ясувати, чи виконується подільність на кожен із його простих дільників:

- **Подільність на 6**: число ділиться на 6, якщо ділиться і на 2, і на 3.
- **Подільність на 12**: число ділиться на 12, якщо ділиться і на 3, і на 4.

- **Подільність на 15**: число ділиться на 15, якщо ділиться і на 3, і на 5.
- **Подільність на 18**: число ділиться на 18, якщо ділиться і на 2, і на 9.
- **Подільність на 24**: число ділиться на 24, якщо ділиться і на 3, і на 8.
- **Подільність на 30**: число ділиться на 30, якщо ділиться і на 2, і на 3, і на 5.
- **Подільність на 36**: число ділиться на 36, якщо ділиться і на 4, і на 9.

46.Прості та складені числа, нескінченність множини простих чисел, решето Ератосфена

Означення: Більші за 1 натуральні числа, які мають рівно два дільники називаються простими.

Означення: Натуральні числа, які мають більше, ніж два дільники називаються складеними. Число 1 не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

Множину N – чисел за кількістю дільників можна поділити на 3 класи (прості, складені і число 1), а множину чисел N_0 на 4 класи (прості, складені, число 1, число 0).

Теорема (про існування простого дільника у будь-якого складеного числа): Найменший відмінний від одиниці дільник числа $a>1$ є просте число.

Теорема (Евкліда) Множина простих чисел нескінченна.

<u>Спосіб знаходження всіх простих чисел був запропонований близько 2000 років назад Ератосфеном і отримав назву решето Ератосфена.</u>

Теорема: Найбільший відмінний від 1 простий дільник складеного числа a не перевищує $\sqrt{a}$.

Наслідок: Якщо натуральне число p більше за одиницю не ділиться на жодне із простих чисел, які не перевищують $\sqrt{p}$, то p – просте число.

Приклад

257 $\sqrt{257} \approx 16{,}02$

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
$\overline{257 \vdots 2}$, $\overline{257 \vdots 3}$, $\overline{257 \vdots 5}$, $\overline{257 \vdots 7}$, $\overline{257 \vdots 11}$, $\overline{257 \vdots 13}$, $\overline{257 \vdots 17}$,
Отже, 257 – просте число.

47.Основна теорема арифметики натуральних чисел

Теорема. Кожне натуральне число $a > 1$ або просте, або може бути однозначно розкладене в добуток простих чисел з точністю до порядку розміщення множників.

У розкладі числа a деякі прості множники можуть повторюватися, тоді число записується так $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, p_2, \ldots p_k$ – різні прості множники, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ – кількість відповідних співмножників. Цей розклад називається канонічним розкладом числа.

Приклад $\qquad 48 = 2^4 \cdot 3$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

48.Дільники і кратні, спільні дільники і кратні, НСД і НСК

Означення: Якщо деяке число m ділиться на кожне з даних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то число m називається спільним кратним чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$m \vdots a_1 \wedge m \vdots a_2 \wedge \ldots m \vdots a_n \Rightarrow m = ck(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Приклад

$ck = (2, 3, 5, 6) = \{30, 60, 90, \ldots\}$

Множина спільних кратних кількох чисел є нескінченною. Найменше із спільних кратних називається найменшим спільним кратним і позначається НСК (*a, b).*

Теорема: Кожне спільне кратне даних чисел ділиться на їх найменше спільне кратне $ck(a_1, a_2, \dots, a_n) \vdots$ НСК$(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Властивість 1.Якщо НСК (*a, b)*$= k$, то для $(\forall c \in N)$.

НСК (*ac, bc) = kc.*

Властивість 2. Якщо $a \vdots b$, то НСК (*a, b) = a*

Означення: Натуральне число b називається дільником числа a, якщо $a \vdots b$.

Означення: Всяке число *в*, на яке ділиться кожне із чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається спільним дільником цих чисел.

$(a_1 \vdots b) \wedge (a_2 \vdots b) \wedge \dots \wedge (a_n \vdots b) \Rightarrow b =$ СД $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

СД (12, 18, 42,) = {1, 2, 3, 6}.

Множина спільних дільників кількох чисел скінченна, причому найменший спільний дільник для будь-яких чисел є 1.

Означення: Найбільшим спільним дільником чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ НСД $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається найбільшим із спільних дільників цих чисел.

Спільний дільник не перевищує найменше із даних чисел.

Означення: Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ називаються взаємно простими, якщо НСД$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ = 1.

Властивість 1: Якщо $a \vdots b$, то НСД (*a, b) = b.*

Властивість 2: Будь-який спільний дільник даних чисел є дільником НСД.

Теорема.(про зв'язок між НСД та НСК)

НСК $(a, b) = \frac{ab}{\text{НСД}(a,b)}$

Наслідок. НСК двох чисел дорівнює їх добутку тоді і тільки тоді, коли ці числа взаємно прості.

НСК $(a, b) = ab \Leftrightarrow$ НСД$(a, b) = 1$.

<u>Теорема</u> Спільний дільник двох чисел можна виносити як за знак НСД, так і за знак НСК.

НСД (*ac, bc)* = НСД $(a, b) \cdot c$; НСК*(ac,вc)*=НСК*(a,в)c*

Ознаки подільності на складені числа.

Теорема.Якщо НСД$(a,b)=1$, то для подільності числа c та добуток ab необхідно і достатньо, що $c \vdots a$ $і$ $c \vdots b$.
З цієї теореми випливають ознаки подільності на складені числа: 6, 12, 15, 18, 30, 36.

Ознака подільності на 36 Для подільності числа на 36 необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 4 і 9.

<u>Властивість взаємнопростих чисел</u>

1. Якщо НСД$(a,c)=1$ і $ab \vdots c$, то $b \vdots c$
2. Якщо $a \in N$ і p – просте число, причому $a \vdots p$, то НСД$(c,p)=1$
3. Якщо добуток кількох чисел ділиться на просте число *p,* то принаймні одне з цих чисел ділиться на *p*.

Теорема. Кожне натуральне число $a>1$ або просте, або може бути однозначно розкладене в добуток простих чисел з точністю до порядку розміщення множників.

49.Обчислення НСД і НСК способом канонічного розкладу на прості множники та за алгоритмом Евкліда

Теорема. Нехай $a=p_1^{L_1}\cdot p_2^{L_2}\dots p_k^{L_k}$ і $b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$ канонічні розклади чисел *a та b.* Для подільності *a* на *в* необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувалися нерівності $L_1\geq\beta_1, L_2\geq\beta_2,\dots,L_k\geq\beta_k$

Нехай

$a_1=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$

$a_2=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$

…………………..

$a_n=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}$

Позначимо через δ_i – найменше, а через τ_i – найбільше серед чисел .$\alpha_i,\beta_i\dots\gamma_i$

Теорема

НСД $(a_1,a_2,\dots,a_n)=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\dots p_k^{\delta_k}$

НСК $(a_1,a_2,\dots,a_n)=p_1^{\tau_1}\cdot p_2^{\tau_2}\dots p_k^{\tau_k}$

Ця теорема є основою для знаходження НСД та НСК способом розкладу на прості множники.

Приклад

НСД $(1050, 1260, 300) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 = 30$

НСК $(1050, 1260, 300) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300$

1050	2	1260	2	300	2
525	3	630	2	150	2
175	5	315	3	75	3
35	5	105	3	25	5
7	7	35	5	5	5
1		7	7	1	

$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$;

$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$;

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Розглянемо теорему, яка є основою алгоритму Евкліда.

Теорема. Якщо число a ділиться на b з остачею $a = bq + r$, то множина спільних дільників чисел a і b співпадає з множиною спільних дільників чисел b і r, зокрема НСД *(a,b)* = НСК *(b, r)*.

Наслідок. В алгоритмі Евкліда НСД *(a,b)* дорівнює останній відмінній від нуля остачі.

Вправа НСД $(2002, 12506) = 26$

$$\begin{array}{r|l} 12506 & \underline{20002} \\ \underline{12012} & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2002 & \underline{494} \\ \underline{1976} & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 494 & \underline{26} \\ \underline{26} & \underline{19} \\ 234 & \\ \underline{234} & \\ 0 & \end{array}$$

50.Задача розширення поняття про число; необхідність розширення множини натуральних чисел

Спочатку діти вивчають **натуральні числа** — числа, які використовуються для лічби предметів: 1, 2, 3, … Натуральні числа виникають із потреби *лічити* та *впорядковувати* предмети (перші числа — це відповідь на запитання «скільки?»).Проте в ході подальшого вивчення математики виникають ситуації, у яких **натуральних чисел недостатньо** для розв’язання задач. Це зумовлює необхідність **розширення поняття про число**.

Виникнення дробів обумовлене вимірюванням величин. Нехай дано одиничний відрізок e і відрізок a. Якщо існує таке натуральне число k, що $a=ke$, то міра відрізка a при одиниці вимірювання e дорівнює k, тобто $m_e(a)=k$. Якщо не існує такого натурального числа, але існує одиничний відрізок e_1 такий, що $e=ne_1$ і $a=ke_1$, то відрізок a складається з k відрізків, кожен з яких дорівнює $\frac{1}{n}$ частині відрізка e, то міра відрізка a дорівнює $m_e(a)=\frac{k}{n}$.

Означення: Символ виду $\frac{k}{n}$, де k,n натуральні числа,називається звичайним дробом із чисельником k і знаменником n.

Знаменник дробу показує на скільки рівних частин поділене ціле, а чисельник – скільки таких частин взято.

Розширювати множину цілих чисел будемо так:

1. до множини цілих чисел приєднаємо дробові числа;
2. визначимо арифметичні операції у новій множині;
3. поширимо основні властивості операцій на нові числа;
4. поставимо завдання виконання операції ділення(крім ділення на нуль) для будь-яких цілих чисел.

51.Побудова множини цілих чисел; зображення цілих чисел на числовій прямій; властивості множини цілих чисел

Отже, для розширення множини натуральних чисел відповідно до сформульованих вимог приєднаємо до множини N-чисел число 0 (нуль) і числа, протилежні натуральним, тобто від'ємні числа. Перед тим, як будувати множину нових чисел, приймемо наступні означення.

Означення: числа a і $-a$ називаються протилежними, якщо $a+(-a)=0$ або $-(-a)=a$.

Означення: від'ємним цілим числом називається число виду $-a$, де $a \in N$.

Виходячи з наведених означень, можна зробити наступні висновки:

1) натуральні числа можна називати додатними цілими числами, позначаючи їх Z_+;

2) множину від'ємних цілих чисел слід позначати Z_-;

3) множини Z_+ і Z_- еквівалентні, тобто $Z_+ \sim Z_-$. Легко бачити, що $Z_+ \cap Z_- = \varnothing$, $Z_+ \cap \{0\} = \varnothing$ і $Z_- \cap \{0\} = \varnothing$.

Таким чином, можна прийняти таке означення.

Означення: множиною цілих чисел називається об'єднання множини натуральних чисел (Z_+), чисел, протилежних їм (Z_-), та числа 0 (нуль), тобто $Z = Z_+ \cup Z_- \cup \{0\}$.

Означення: два цілих числа називаються числами одного і того ж самого знаку, якщо вони обидва або додатні, або від'ємні. Два цілих числа називаються числами різних знаків, якщо одне з них додатне, а друге - від'ємне.

Означення: модулем або абсолютною величиною цілого числа (символічно $|a|$) називається таке число, що виконуються умови: 1) $|a|=a$, якщо $a \geq 0$; **2)** $|a|=-a$, якщо $a<0$.

Означення: пряму p з вибраними на ній точкою O – початком відліку, точкою A_1 – одиничною точкою і додатнім напрямком від точки O до точки A_1, називають числовою чи координатною прямою.

Ввівши поняття числової прямої, ми можемо зобразити будь-яке ціле число точкою цієї прямої. Справа в дужках біля назви точки пишуть число, яке називають координатою точки і яке показує, на якій відстані від початку відліку, тобто від точки $\boldsymbol{O}$, знаходиться дана точка. Точки, що мають додатні координати зображають справа від початку відліку, а точки з від’ємними координатами – зліва.

Означення: множину $\boldsymbol{M}$, що визначається рівністю $\boldsymbol{M=M_{+}\cup M_{-}\cup\{0\}}$, називають множиною цілочисленних точок числової прямої.

Із наведеного означення можна зробити висновок: кожному цілому числу відповідає точка числової прямої, але не кожній точці числової прямої відповідає ціле число. Отже, між цілими числами та точками числової прямої не існує взаємно однозначної відповідності.

Для подальшої побудови множини цілих чисел надзвичайно важливо ввести способи порівняння цілих чисел так, щоб вони не суперечили раніше прийнятим способам порівняння натуральних чисел. Отже, в наступному будемо керуватися наступними правилами порівняння цілих чисел:

1. Додатні цілі числа порівнюються за правилами порівняння натуральних чисел.
2. Кожне додатне ціле число більше від від’ємного цілого числа.
3. Нуль менше, ніж будь-яке додатне ціле число.
4. Нуль більший за будь-яке від’ємне ціле число.
5. Із двох від’ємних цілих чисел більшим буде те, модуль якого менше.

Якщо використати числову пряму для порівняння цілих чисел, то наведені вище правила можна звести до одного: із двох цілих чисел більшим буде те, яке розміщене на числовій прямій правіше (із двох цілих чисел меншим буде те, яке розміщене на числовій прямій лівіше). За допомогою вказаних правил порівняння цілих чисел ми задали на множині цілих чисел відношення рівності та більше (менше), тобто відношення порядку.

Враховуючи все вищесказане можна сформулювати наступні властивості множини цілих чисел.

Властивість 1: множина цілих чисел нескінченна.

Властивість 2: множина цілих чисел дискретна.
Властивість 3: множина цілих чисел впорядкована.
Властивість 4: множина цілих чисел зчисленна.

52.Додавання, віднімання, множення, ділення цілих чисел, теореми про існування та єдиність цих операцій, закони операцій додавання і множення.

Означення: сумою двох цілих чисел ***a*** і ***b***, називається таке третє ціле число ***a+b***, що виконуються наступні правила:
1) сума двох цілих чисел з однаковими знаками дорівнює сумі їх модулів, взята із спільним знаком;
2) сума двох цілих чисел з різними знаками дорівнює різниці модулів цих чисел, яка взята із знаком більшого модуля;
3) сума протилежних чисел дорівнює нулю;
4) додавання з нулем не змінює цілого числа.
У математиці доведено, що операція додавання у множині цілих чисел існує, єдина та підкоряється комутативному й асоціативному законам. Пропонуємо студентам сформулювати відповідні теореми.
Означення: різницею цілих чисел ***a*** і ***b*** називається таке ціле число ***c=a-b***, що ***c+b=a***.
Для того, щоб довести теорему про існування та єдиність різниці, слід довести таке допоміжне твердження: «для будь-яких цілих чисел ***a*** і ***b*** виконується рівність ***a-b=a+(-b)***». Справді, оскільки для кожного цілого числа ***b*** існує протилежне йому ціле число ***–b і b+(-b)=0***, то ***(a+(-b))+b=a***. Звідси маємо ***a-b=a+(-b)***. Доведене твердження дає змогу операцію віднімання цілих чисел звести до операції додавання. Наприклад, 12-(-8)=12+8=20.
Означення: добутком двох цілих чисел ***a*** і ***b***, називається таке третє ціле число ***ab***, що виконуються наступні правила:
1) добуток двох цілих чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому із знаком плюс;
2) добуток двох цілих чисел з різними знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому із знаком мінус;
3) добуток будь-якого цілого числа на нуль дорівнює нулю;

4) добуток будь-якого цілого числа на одиницю дорівнює цьому цілому числу.

Оскільки в означенні нічого не говориться про існування, єдиність та властивості операції множення, то в множині цілих чисел слід сформулювати та довести відповідні теореми.

Означення: часткою цілих чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називається таке ціле число $\boldsymbol{c=a:b}$, що $\boldsymbol{cb=a}$.

Якщо $\boldsymbol{a=0}$, то для будь-якого цілого числа $\boldsymbol{b\neq 0}$ частка існує і $\boldsymbol{0:b=0}$. Якщо $\boldsymbol{a=0}$ і $\boldsymbol{b=0}$, то вираз $\boldsymbol{0:0}$ не має смислу. Якщо $\boldsymbol{a\neq 0}$ і $\boldsymbol{b=0}$, то ні для жодного цілого числа $\boldsymbol{c}$ не може виконуватися рівність $\boldsymbol{c\cdot 0=a}$. Саме тому частка $\boldsymbol{a:0}$ не існує. Таким чином, і в множині цілих чисел ділити на нуль неможливо. В математиці доведено справедливість наступної теореми «частка цілих чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{b\neq 0}$, існує тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{a=cb}$, де $\boldsymbol{c\in Z}$». Отже, ми означили в множині цілих чисел всі чотири арифметичні операції так, щоб вони, по-перше, не суперечили правилам виконання цих дій над натуральними числами, по-друге, підкорялися тим же законам.

53.Необхідність розширення множини цілих чисел

Розширення множини цілих чисел є природним етапом у розвитку математичних уявлень дитини та в історії самої математики.

Необхідність цього розширення виникає з таких потреб:

Практична необхідність

У реальному житті часто зустрічаються ситуації, які неможливо описати лише за допомогою натуральних чисел. Наприклад:

- Борги (–5 грн),
- Температура нижче нуля (–10 °C),
- Рух у протилежному напрямку (наприклад, назад або вниз),
- Зміна висоти (нижче рівня моря — від’ємна висота).

Ці ситуації потребують від’ємних чисел, яких у множині натуральних чисел *N* немає.

Теоретико-множинна потреба

Операція віднімання не завжди визначена в межах натуральних чисел:

- $7-3=4$— визначено в N,
- але $3-7=?$— у N не визначено.

Щоб мати можливість виконувати віднімання будь-яких чисел, потрібно ввести від'ємні числа — так формується множина цілих чисел Z.

Формування абстрактного мислення

Ознайомлення з цілими числами сприяє розвитку абстрактного й логічного мислення школярів.
Діти вчаться : працювати з напрямками на числовій прямій, розуміти поняття «більше» і «менше» в розширеному сенсі, оперувати симетрією відносно нуля.

54.Поняття дробу і рівносильності дробів; основна властивість дробів, скорочення дробів та їх зведення до спільного знаменника, нескоротні дроби

Означення: Символ виду $\frac{k}{n}$, де k,n натуральні числа, називається звичайним дробом в якому чисельник - k і знаменник - n.

Знаменник дробу показує на скільки рівних частин поділене ціле, а чисельник – скільки таких частин взято.

Означення: Дроби, що позначають одне і те саме дробове число, називаються рівносильними або еквівалентними.

Приклад: $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \ldots; \frac{\mathrm{n}}{2n}$

Означення: Два дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ називаються рівними, якщо $mq=np$.

Основною властивістю дробів є **теорема:** якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на довільне натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному.

Виявляється, що основна властивість дробів знайшла широке застосування при виконанні таких операцій над дробами як скорочення дробів і зведення дробів до спільного знаменника.

Означення: <u>скороченням</u> дробу називається операція ділення чисельника і знаменника дробу на їхні спільні дільники, в результаті якої дріб замінюється рівносильним йому дробом з меншими числами.

Означення: <u>зведенням дробів до спільного знаменника</u> називається операція множення чисельника і знаменника на одне і те ж саме, відмінне від нуля число, в результаті якої даний дріб замінюється рівносильним йому, але з вказаним знаменником.

Означення: якщо чисельник дробу менший за знаменник, то дріб називають правильним. Якщо чисельник дробу більший за знаменник або дорівнює йому, то дріб називають неправильним.

Означення: дріб називають нескоротним, якщо найбільший спільний дільник чисельника і знаменника дорівнює 1.

Прикладом правильних дробів серед наступних $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}.$ є перший, другий і четвертий, а неправильним є третій. Прикладом нескоротних дробів є наступні $\frac{7}{8}, \frac{15}{17}.$

55.Додатні раціональні числа; додавання і віднімання додатних раціональних чисел, теореми про існування й єдиність суми і різниці, властивості (закони) додавання

Відношення рівності дробів має властивості рефлективності, симетричності, транзитивності, тобто є відношенням еквівалентності. Тому дане відношення розбиває множину всіх дробів на класи еквівалентності, до кожного з яких входять рівносильні дроби.

Означення: Кожен з класів еквівалентності, на які відношення рівності дробів розбиває множину всіх дробів, називається додатним раціональним числом.

Множину додатних раціональних чисел позначають Q_+.

Приклад $\frac{1}{2}$ - це $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{4};\frac{3}{6};\frac{4}{8};...;\frac{n}{2n}...\right\}$.

Серед всіх цих дробів особливим є нескоротний дріб.

Теорема: Для будь-якого додатного раціонального числа існує один і тільки один нескоротний дріб, що його представляє.

Визначаючи операції над додатними раціональними числами, необхідно це зробити так, щоб сутність операцій над цілими числами не змінилась. Для цього будь-яке ціле число будемо розглядати як дріб із знаменником 1.

$$1=\frac{1}{1};2=\frac{2}{1};n=\frac{n}{1}.$$

Означення: Сумою двох дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого дорівнює сумі чисельників, а знаменник дорівнює їх спільному знаменнику.

$$\frac{a}{c}+\frac{в}{c}=\frac{a+в}{c}.$$

Коли дроби мають різні знаменники, то необхідно їх звести до спільного знаменника і додати за попереднім означенням.

Означення: Сумою двох додатних раціональних чисел $\frac{a}{в}$ і $\frac{c}{d}$ називається число $\frac{ad+вc}{вd}$.

Теорема: Сума додатних раціональних чисел існує і притому єдина.

Теорема: Операція додавання додатних раціональних чисел має властивості комутативності та асоціативності (переставний і сполучний закони).

1. $\frac{a}{в}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{в}$.

2. $(\frac{a}{в}+\frac{c}{d})+\frac{к}{n}=\frac{a}{в}+(\frac{c}{d}+\frac{к}{n})$.

Означення: Суму натурального і дробового числа, записаних поряд без знаку додавання називається мішаним числом.

$$8+\frac{2}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Щоб представити мішане число дробом, потрібно цілу частину помножити на знаменник і додати до чисельника, а знаменник залишити той самий.

$$8\frac{2}{3}=\frac{8\cdot 3+2}{3}=\frac{26}{3}.$$

Якщо $\frac{a}{в}$ - неправильний дріб і a кратне $в$, то цей дріб є записом натурального числа. Якщо a не кратне $в$, то воно ділиться на $в$ з остачею, тому $a=вq+r$. Тоді $\frac{a}{в}=\frac{вq+r}{в}=q+\frac{r}{в}=q\frac{r}{в}$.

Щоб перетворити неправильний дріб у мішане число, треба поділити чисельник на знаменник, частку записати в цілу частину, остачу в чисельник дробу, а знаменник залишити той самий. Ця операція називається виділення цілої частини з неправильного дробу. $\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.

Означення: Відняти від дробового числа $\frac{a}{в}$ дробове число $\frac{c}{d}$ означає знайти таке дробове число $\frac{к}{n}$, яке в сумі з дробовим числом $\frac{c}{d}$ дає дробове число $\frac{a}{в}$.

Означення: Різницею двох дробових чисел з однаковими знаменниками називається таке дробове число, чисельник якого дорівнює різниці чисельників, а знаменник – спільному знаменнику.

$$\frac{a}{c}-\frac{в}{c}=\frac{a-в}{c}$$

Означення: Різницею двох додатних раціональних чисел $\frac{a}{в}$ і $\frac{c}{d}$ називається число $\frac{ad-вc}{вd}$.

Теорема: Різниця двох додатних раціональних чисел існує тоді і тільки тоді, коли $\frac{a}{в} \geq \frac{c}{d}$ і причому єдина.

56.Відношення порядку на множині додатних раціональних чисел

Означення: З двох дробів з однаковими знаменниками більшим буде той, в якого чисельник більший. З двох дробів з однаковими чисельниками більшим буде той, в якого знаменник менший. Щоб порівняти дроби з різними чисельниками і знаменниками, потрібно звести їх до одного знаменника або чисельника і порівняти за попередніми правилами.

Означення: Дріб $\frac{a}{в}$ називається меншим дробу $\frac{c}{d}$, якщо $ad<bc$.

Для довільних додатних раціональних чисел виконується лише одне із трьох співвідношень =, >, <.

<u>Властивості відношення «менше»(«більше»)</u>

1. Антирефлексивності : $\overline{\frac{a}{в} < \frac{а}{в}}$.
2. Антисиметричності: $\frac{a}{в} < \frac{c}{d} \Rightarrow \overline{\frac{c}{d} < \frac{a}{b}}$.
3. Транзитивності: $\frac{a}{в} < \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} < \frac{k}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{k}{n}$.

За допомогою відношення менше множину додатних раціональних чисел можна лінійно впорядкувати.

57.Множення і ділення додатних раціональних чисел, теореми про існування й єдиність добутку та частки, властивості (закони) множення

Означення: Добутком двох дробів будемо називати дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників.

$\frac{a}{c} \cdot \frac{в}{к} = \frac{a \cdot в}{c \cdot к}$.

Теорема: Добуток двох додатних раціональних чисел існує і єдиний.

Теорема: Операція множення додатних раціональних чисел має властивості комутативності, асоціативності та дистрибутивності відносно додавання (переставний, сполучний та розподільний закони).

1. $\frac{a}{в} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{в}$.
2. $(\frac{a}{в} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{к}{n} = \frac{a}{в} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{к}{n})$.
3. $(\frac{a}{в} + \frac{c}{d}) \cdot \frac{к}{n} = \frac{a}{в} \cdot \frac{к}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{k}{n}$.

Означення: Часткою додатних раціональних чисел $\frac{a}{в}$ і $\frac{c}{d}$ називається таке додатне раціональне число $\frac{к}{n}$, яке в добутку з $\frac{c}{d}$ дає $\frac{a}{в}$.

Щоб поділити два звичайні дроби, потрібно перший дріб помножити на обернений дріб до другого. $\frac{a}{c} : \frac{в}{к} = \frac{a \cdot k}{c \cdot b}$.

Теорема: Частка двох додатних раціональних чисел завжди існує і єдина.

58.Властивості множини додатних раціональних чисел

Властивості множини додатних раціональних чисел

1. У множині додатних раціональних чисел немає ні найменшого, ні найбільшого числа.
2. Множина додатних раціональних чисел щільна в собі (між будь-якими двома різними її елементами міститься безліч елементів цієї множини).
3. Множина додатних раціональних чисел монотонна (якщо $a<b$, то $a+c<b+c$).
4. Множина додатних раціональних чисел зчисленна (тобто існує взаємно однозначна відповідність між множиною

додатних раціональних чисел і множиною натуральних чисел).

59.Десяткові дроби, їх порівняння, операції над ними; перетворення десяткових дробів у звичайні та звичайних у десяткові

Означення: десятковим дробом називається звичайний дріб із знаменником, що дорівнює степені десяти, записаний в десятковій позиційній системі числення (0,18; 0,39852; 5,09,…)

Означення: цифри, що стоять у десятковому дробі після коми, називаються десятковими знаками.

Теорема 1: множення десяткового дробу на $\mathbf{10^n}$ досягається перенесенням коми на **n** знаків (цифр) вправо.
Теорема 2: ділення десяткового дробу на $\mathbf{10^n}$ досягається перенесенням коми на **n** цифр вліво.
Теорема 3: дописування або відкидання у десятковому дробі нулів, які стоять наприкінці десяткового дробу, не змінює його величини.
Теорема 4: для зведення десяткових дробів до спільного знаменника достатньо приписати до того десяткового дробу, в якого менше десяткових знаків, стільки нулів, щоб десяткових знаків в обох дробах стало порівну.
На основі цієї теореми можна вважати, що всі десяткові дроби зведені до спільного знаменника.
Означення: число, яке стоїть у десятковому дробові до коми, називається цілою частиною. Число, яке стоїть у десятковому дробові після коми, називається дробовою частиною.
Теорема 5: із двох десяткових дробів більшим є той, у якого ціла частина більша. Із двох десяткових дробів з рівними цілими частинами більшим є той, у якого більший перший з нерівних десяткових знаків.
З шкільного курсу математики відомо, що легко перетворити будь-який десятковий дріб у звичайний, а от не всякий

звичайний дріб можна перетворити у десятковий. Для перетворення десяткового дробу в звичайний його записують із знаменником, який є степенем числа 10, а потім, по можливості, проводять скорочення звичайного дробу до нескоротного. Відповідь про можливість перетворення звичайного дробу у десятковий дає наступна теорема.

Теорема 6: для того, щоб нескоротний дріб можна було записати у вигляді десяткового дробу, необхідно і достатньо, щоб до канонічного розкладу знаменника входили лише прості множники 2 і 5.

Для перетворення звичайного дробу в десятковий (якщо це можливо) необхідно поділити чисельник дробу на знаменник, наприклад, $\frac{3}{8}$ =0,375. Практично досить часто використовують десяткові дроби з сталим знаменником 100 чи 1000. такі дроби легко порівнювати та виконувати над ними арифметичні дії.

Правила виконання арифметичних операцій над десятковими дробами:

Правило 1: щоб додати два десяткових дроби, потрібно підписати їх один під одним так, щоб кома була під комою, виконати додавання, не звертаючи уваги на кому, а в результаті кому поставити під комою.

Правило 2: щоб відняти два десяткових дроби, потрібно підписати їх один під одним так, щоб кома була під комою, виконати віднімання, не звертаючи уваги на кому, а в результаті кому поставити під комою.

Правило 3: щоб помножити два десяткових дроби потрібно, перемножити їх як натуральні числа, а в добутку відокремити комою справа наліво стільки десяткових знаків, скільки їх було в обох співмножниках разом.

Правило 4: щоб поділити два десяткових дроби потрібно, в діленому і дільнику перенести кому на стільки десяткових знаків вправо, щоб дільник став цілим числом, а потім виконати ділення на натуральне число.

Якщо розглядаються десяткові дроби з однаковими чи різними знаками, то для визначення знаку результату слід користуватися тими ж правилами, що і для звичайних дробів.

60.Додатні раціональні числа як нескінченні періодичні десяткові дроби, чисті та мішані періодичні дроби та їх перетворення у звичайні

Означення: нескінченний десятковий дріб, у якого одна цифра або група цифр весь час повторюється називається нескінченним періодичним дробом.
Означення: одна цифра або група цифр, яка повторюється, називається періодом.
Нескінченні періодичні дроби прийнято позначати так: 0,2131313…=0,2(13), 0,373373373…=0,(373). Число, утворене цифрами, що стоять після коми до періоду, називають доперіодичною частиною. Серед нескінченних періодичних дробів виділяють чисті та мішані періодичні дроби.
Означення: чистим періодичним дробом називається нескінченний десятковий дріб, у якого період починається одразу після коми.
Означення: мішаним періодичним дробом називається нескінченний десятковий дріб, у якого період починається не одразу після коми.
Таким чином, ми з'ясували, що при перетворенні звичайних дробів у десяткові, ми можемо зустрітися з двома випадками: 1) ділення чисельника на знаменник призводить до скінченного десяткового дробу; 2) ділення чисельника на знаменник призводить до нескінченного десяткового дробу, в якому одна цифра чи група цифр весь час повторюється. Отже, можна стверджувати, що нескінченні періодичні дроби існують. У зв'язку з цим виникає питання про перетворення чистих і мішаних періодичних дробів у звичайні. У математиці доведені теореми, на яких ґрунтуються наступні правила перетворення періодичних дробів у звичайні.
Правило 1: чистий періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробові, чисельником якого є число, що стоїть у

періоді, а знаменником – число, яке записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.

Правило 2: мішаний періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробові, чисельник якого є різниця між числом, що стоїть після коми до кінця періоду, та числом, що стоїть після коми до періоду, а знаменником є число, яке записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, та стількома нулями, скільки є цифр до періоду.

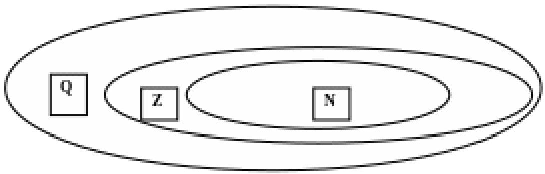
61.Множина раціональних чисел, модуль раціонального числа, операції над раціональними числами, властивості множини раціональних чисел.

Означення: об'єднання множини цілих чисел та множини додатних і від'ємних дробів називається множиною раціональних чисел.

Означення: від'ємним раціональним числом називають число виду $-a$, де $a \in Q_+$.

Означення: множиною раціональних чисел називають об'єднання множин Q_+, Q_- і $\{0\}$.

Символічно прийняте означення можна записати так: $Q=Q_+\cup Q_-\cup\{0\}$, причому множини Q_-, Q_+ і $\{0\}$ попарно не перетинаються. Множину раціональних чисел будемо позначати латинською літерою Q, співвідношення між розглянутими множинами можна записати так: $Q\supset Z\supset N$. На діаграмах Ейлера-Венна співвідношення між розглянутими множинами представлене на **діаграмі1.**



Діаграма1. Співвідношення між числовими множинами q, z, n.

Означення: модулем або абсолютною величиною раціонального числа (символічно $|a|$) називається таке число, що виконуються умови: 1) $|a|=a$, якщо $a\geq 0$; 2) $|a|=-a$, якщо $a<0$.

Правила порівняння раціональних чисел:

1. Додатні раціональні числа порівнюються за правилами порівняння цілих чисел.
2. Кожне додатне раціональне число більше від від’ємного раціонального числа.
3. Нуль менше, ніж будь-яке додатне раціональне число.
4. Нуль більший за будь-яке від’ємне раціональне число.
5. Із двох від’ємних раціональних чисел більшим буде те, модуль якого менше.

Якщо використати числову пряму для порівняння раціональних чисел, то наведені вище правила можна звести до одного: із двох раціональних чисел більшим буде те, яке розміщене на числовій прямій правіше (із двох раціональних чисел меншим буде те, яке розміщене на числовій прямій лівіше). За допомогою вказаних правил порівняння раціональних чисел ми задали на множині раціональних чисел відношення рівності та більше (менше), тобто відношення порядку. В математиці доведено, що кожному раціональному числі відповідає точка числової прямої, але не кожній точці числової прямої відповідає раціональне число. Це твердження свідчить про те, що раціональні числа не вичерпують всіх точок числової прямої.

Означення 1: сумою двох раціональних чисел a і b, називається таке третє раціональне число $a+b$, що виконуються наступні правила: 1) сума двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює сумі їх модулів, взятій із спільним знаком; 2) сума двох раціональних чисел з різними знаками дорівнює різниці модулів цих чисел, яка взята із знаком більшого модуля; 3) сума протилежних чисел дорівнює нулю; 4) додавання з нулем не змінює раціонального числа.

Означення 2: добутком двох раціональних чисел ***a*** і ***b***, називається таке третє раціональне число ***ab***, що виконуються наступні правила: 1) добуток двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому із знаком плюс; 2) добуток двох раціональних чисел з різними знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому із знаком мінус; 3) добуток будь-якого раціонального числа на нуль дорівнює нулю; 4) добуток будь-якого раціонального числа на одиницю дорівнює цьому раціональному числу.

Означення 3: часткою двох раціональних чисел ***a*** і ***b≠0***, називається таке третє раціональне число ***a:b***, що виконуються наступні правила: 1) частка двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює частці їх модулів, взятій із знаком плюс; 2) частка двох раціональних чисел з різними знаками дорівнює частці їх модулів, взятій із знаком мінус; 3) частка будь-якого раціонального числа на нуль не існує; 4) частка будь-якого раціонального числа на одиницю дорівнює цьому раціональному числу; 5) частка нуля на будь-яке раціональне число дорівнює нулю.

Властивості множини раціональних чисел:

Властивість 1: множина ***Q*** раціональних чисел щільна в собі.

Властивість 2: множина ***Q*** раціональних чисел зчисленна.

Властивість 3: множина ***Q*** раціональних чисел впорядкована.

Властивість 4: множина ***Q*** раціональних чисел замкнена відносно операції додавання.

Властивість 5: множина ***Q*** раціональних чисел замкнена відносно операції віднімання.

Властивість 6: множина ***Q*** раціональних чисел замкнена відносно операції множення.

Властивість 7: множина ***Q*** раціональних чисел замкнена відносно операції ділення, крім ділення на нуль.

Таким чином, множина невід'ємних раціональних чисел виявилася замкненою відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення, крім ділення на нуль, тобто такою, в якій ці операції завжди виконуються.

62.Необхідність розширення множини раціональних чисел; додатні ірраціональні числа, додатні дійсні числа; відношення порядку на множині додатних дійсних чисел

Площа квадрата зі стороною 1 дорівнює 1. Діагональ такого квадрата дорівнює$\sqrt{2}$. Але не існує жодного раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Отже,$\sqrt{2} \notin Q$.
Отже, для розв'язання багатьох геометричних, фізичних, алгебраїчних задач ***потрібно вийти за межі Q***, тобто розширити числову множину.

Ірраціональне число — це дійсне число, яке не є раціональним. Його не можна подати у вигляді дробу.
До множини додатних ірраціональних чисел належать усі ірраціональні числа, що більші за нуль. Позначимо їх множиною Q^+/R^+, де R^+— додатні дійсні числа, Q^+— додатні раціональні ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots$).

Дійсні числа — це об'єднання раціональних та ірраціональних чисел. Множину дійсних чисел позначають $\boldsymbol{R}$.
Додатні дійсні числа (R^+) — це всі дійсні числа більші нуля:

$$R^+ = Q^+ \cup (R^+/Q^+)$$

Дійсні числа можна геометрично відобразити як точки на числовій прямій, що повністю заповнює її без "пропусків" (на відміну від раціональних чисел).

Множина додатних дійсних чисел є впорядкованою множиною. Тобто для будь-яких $a,b \in R^+$виконується одне з трьох:

- $a<b$
- $a=b$
- $a>b$

Означення: два додатних дійсних числа називаються рівними, якщо в їхніх зображеннях за допомогою нескінченного неперіодичного десяткового дробу збігаються як цілі частини, так і всі десяткові знаки вправо від коми.

Означення: із двох додатних дійсних чисел більшим (меншим) буде те, у якого більша (менша) ціла частина, а якщо цілі частини рівні, то більшим (меншим) буде те, у якого більшим (меншим) буде перший із нерівних десяткових знаків.

Так само, як і при порівнянні від'ємних раціональних чисел, для порівняння від'ємних дійсних чисел введемо поняття модуля дійсного числа.

Означення: модулем дійсного числа *a* називають відстань від початку відліку числової прямої до точки цієї прямої, яка зображає число *a*.

63.Додавання і віднімання додатних дійсних чисел

Означення: сумою двох дійсних чисел одного знаку називається сума їх модулів, взята з тим самим знаком, які мають обидва доданки.

Означення: сумою двох дійсних чисел з різними знаками називається різниця між більшим і меншим модулем даних чисел, взята із знаком числа, модуль якого більший.

Означення: сума двох протилежних дійсних чисел дорівнює нулю, тобто $a+(-a)=0$.

Означення: сума двох дійсних чисел, одне з яких нуль, дорівнює другому доданку, тобто $a+0=0+a=a$.

Виходячи із означення суми дійсних чисел легко довести справедливість такої теореми.

Теорема: сума дійсних чисел існує, єдина та підкоряється комутативному та асоціативному законам.

Означення: різницею двох дійсних чисел a і b називають таке третє дійсне число c, яке в сумі з числом b дає число a.

Символічно це означення можна записати так: $(c=a-b)\leftrightarrow(b+c=a)$. Легко довести справедливість такої теореми та переконатися у справедливості наступного правила.

Теорема: різниця двох дійсних чисел завжди існує та єдина.

Правило: щоб знайти різницю двох дійсних чисел потрібно до зменшуваного додати число протилежне від'ємнику.

Символічно це виглядає так $a-b=a+(-b)$. Для практичного виконання віднімання дійсних чисел, які виражені нескінченними неперіодичними десятковими дробами, використовують їхні десяткові наближення. Як відомо, нерівності протилежного смислу можна почленно віднімати.

Правило: різниця двох дійсних чисел ***a*** і ***b*** більша або дорівнює різниці числа ***a*** з недостачею та числа ***b*** з надлишком і менша або дорівнює різниці числа ***a*** з надлишком і числа ***b*** з недостачею.

64.Множення і ділення додатних дійсних чисел

Означення: добутком двох дійсних чисел ***a*** і ***b≠0*** називають таке третє дійсне число ***c***, яке в частці з числом ***b*** дає число ***a***.

Правило: добуток двох додатних дійсних чисел ***a*** і ***b*** більший або дорівнює значення добутку десяткових наближень цих чисел, взятих з недостачею та менший або дорівнює значення добутку десяткових наближень цих чисел, взятих з надлишком.

Це правило можна поширити на будь-яку скінченну кількість співмножників.

Виходячи із означення добутку дійсних чисел легко довести справедливість такої теореми.

Теорема: добуток дійсних чисел існує, єдиний, підкоряється комутативному та асоціативному законам і пов'язаний з дією додавання дистрибутивним законом.

Означення: часткою двох дійсних чисел ***a*** і ***b*** називають таке третє дійсне число ***c***, яке в добутку з числом ***b*** дає число ***a***.

Символічно це означення можна записати так: $(c=a:b)\leftrightarrow(b\times c=a)$. Легко довести справедливість такої теореми та переконатися у справедливості наступного правила.

Теорема: частка двох дійсних чисел ***a* і *b≠0*** завжди існує та єдина.

Правило: щоб знайти частку двох дійсних чисел потрібно ділене помножити на число, обернене до дільника.

Правило: частка двох дійсних чисел ***a* і *b≠0*** більша або дорівнює частки числа ***a*** з недостачею та числа ***b*** з надлишком і менша або дорівнює частки числа ***a*** з надлишком і числа ***b*** з недостачею.

65.Множина дійсних чисел та її властивості

Означення: об’єднання множини раціональних чисел та множини додатних і від’ємних ірраціональних чисел називають множиною дійсних чисел.

Основними властивостями цієї множини є наступні.

Властивість 1: множина дійсних чисел впорядкована.

Властивість 2: множина дійсних чисел незчисленна.

Властивість 3: множина дійсних чисел замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення та ділення, крім ділення на нуль.

Властивість 4: між множиною дійсних чисел і множиною точок числової прямої існує взаємно однозначна відповідність.

Означення: говорять, що множина $\boldsymbol{A}$ має потужність континууму, якщо вона еквівалентна множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$.

У математиці доведено, що будь-який числовий проміжок числової прямої є множиною потужності континууму.

66.Числові вирази, їх види, числове значення виразу та порядок обчислення значень числових виразів; числові рівності і нерівності та їх властивості

Означення: <u>числовим виразом</u> називається запис, що містить числа, знаки арифметичних дій (+, −, ×, ÷) та дужки. Він може мати одне або кілька чисел і операцій, які треба виконати.

Види числових виразів:

1. **Прості** — містять лише одну арифметичну дію.
2. **Складені** — містять кілька дій та/або дужки.

<u>Числове значення виразу</u> — це результат обчислення числового виразу.

Наприклад:

- ✓ Вираз: 7 + 3 → значення: **10**.
- ✓ Вираз: (6 + 2) × 3 → значення: **24**.

Правила порядку обчислення значень числових виразів:

1. Спочатку виконують дії в дужках.
2. Потім множення і ділення в порядку їх слідування.
3. Потім додавання і віднімання в порядку їх слідування.

Означення. Два числових вирази сполучені знаком рівності називається *числовою рівністю.*

Числова рівність може бути істинною і хибною, залежно від того чи рівні їх числові значення.

Властивості істинних числових рівностей

Властивість 1. Якщо $a=b$ - істинна числова рівність , а c – будь-яке дійсне число, то $a+c=b+c$ також істинна числова рівність.

Якщо до обох частин істинної числової рівності додати одне й те ж саме дійсне число, то знову одержимо істинну числову рівність. Ця властивість дозволяє перемістити числа з однієї частини рівності в іншу, змінивши їх знак на протилежний.

Властивість 2. Якщо $a=b$ - істинна числова рівність і c – будь-яке дійсне число, крім 0, то $ac=bc$ також істинна числова рівність.

Якщо обидві частини істинної числової рівності помножити на одне й теж саме, відмінне від нуля дійсне число, то одержимо істинну числову рівність.

Означення. Два числових вирази, сполучені одним із знаків $>,<,\geq,\leq$ утворюють висловлення , яке називається числовою нерівністю.

Числові нерівності бувають, так як і висловлення, істинними або хибними.

Нерівності *a>b і c>d (або a<b і c<d...)* називаються нерівностями одного знаку. Нерівності *a>b* і *c<d* – нерівностями протилежного знаку. Нерівності *a>b*, *c<d* називаються строгими нерівностями, нерівності $a\geq b, c\leq d$ нестрогими. Кажуть *a>b*, якщо $a-b>0$; $a<b$, якщо $a-b<0$; $a=b$, якщо $a-b=0$.

Властивості числових нерівностей

Властивість 1. $(\forall a,b)$ $a>b \Rightarrow b<a$

Властивість 2.(Властивість транзитивності**).**
$(\forall a,b,c)\ (a>b)\wedge(b>c)\Rightarrow a>c.$

Властивість 3. (антирефлексивності) $(\forall a)$ нерівності $a>a$ і $a<a$ хибні.

Властивість 4. (монотонності відносно додавання) $\forall(a,b,c)$**.** Якщо $a>b$, то $a+c>b+c.$

Властивість 5. (монотонності відносно множення) $(\forall a,b,c)$**,** якщо

$$a>b\wedge c>0, \text{то}\ ac>bc,$$
$$a>b\wedge c<0, \text{то}\ ac<bc.$$

Властивість 6. Нерівності однакового знаку можна почленно додавати, залишивши спільний знак нерівності: $a>b$ і $c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

Властивість 7. Нерівності протилежного знаку можна почленно віднімати, поставивши знак тієї нерівності, від якої віднімали: $a>b,\ c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

Властивість 8. Нерівність одного знаку з додатними членами можна почленно множити, поставивши спільний знак нерівності: $a>b, c>d\Rightarrow ac>bd$; $a,b,c,d>0$.

Властивість 9. Нерівності протилежного знаку з додатними членами можна почленно ділити, поставивши знак тієї нерівності, яку ділити: $a>b, c<d\Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$, $a,b,c,d>0$.

67.Вирази від змінної, їх область визначення; тотожні перетворення виразів, тотожності.

Змінні – це знаки, які відіграють роль порожніх місць у математичному тексті, які дозволяється заміняти іменами елементів з деяких множин, які складають область значень.
Вирази, які містять змінні називаються *виразами із змінними.* Вирази бувають з однією, двома і т.д змінними. Вираз із змінною не є висловленням, ні предикатом. Якщо замість змінної підставити деяке її значення ми отримаємо числовий вираз. Вирази із змінними позначають $f(x)$, $g(y)$, $F(x,y,z)$.

Означення. Множина значень, яких може набувати змінна x, для того щоб вираз $f(x)$ мав зміст, називається *множиною* *допустимих значень змінної* або *областю визначення виразу* $f(x)$.

Означення. Два вирази $f(x)$ і $g(x)$ називаються тотожно рівними по множині X, якщо виконуються наступні умови:

1) множини допустимих значень в цих виразах співпадають;
2) $(\forall x_0 \in X)$ виконується рівність $f(x_0) = g(x_0)$.

Якщо сполучити два тотожно рівних вирази знаком рівності, то одержимо запис, який називається тотожністю.
Приклад: $5a + b = b + 5a$.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають тотожним перетворенням виразу.
Наприклад $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

У математиці доведено цілий ряд тотожностей, які використовують при тотожних перетвореннях виразів:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - квадрат суми двох чисел;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ - квадрат різниці;
3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ - різниця квадратів;
4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ - куб суми;
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ - куб різниці;
6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ - сума кубів;
7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ - різниця кубів.

68.Поняття рівняння з однією змінною як предиката виду f(x)=φ(x), x∈X; рівносильні рівняння, теореми про рівносильність рівнянь

Означення.1. Рівнянням з однією змінною називається одномісний предикат виду $f(x) = g(x)$ заданий на області визначення X, для якого вимагається знайти ті значення змінної x, при якій предикат перетворюється в істинну числову рівність.

Розв'язати рівняння означає знайти значення змінної x, при якому предикат (тобто рівняння) перетворюється в істинну числову рівність.

Оскільки рівняння - предикат то з ним пов'язно дві множини:
1) область визначення предиката – множина допустимих значень змінної;
2) область істинності предиката - множина коренів (або розв'язків) рівняння. Причому множина коренів рівняння є підмножиною множини допустимих значень змінної, тобто $T \subset X$.

Нехай на множині X задано два рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$, нехай T_1, T_2 - відповідно множини їх розв'язків. Для множин T_1 і T_2 можливі такі співвідношення $T_1 \subset T_2$, $T_2 \subset T_1$, $T_1 = T_2$.

Означення 2. Два рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ задані на одній і тій самій області визначення X називаються <u>рівносильними</u>, якщо всі розв'язки першого рівняння є розв'язками другого рівняння і навпаки, тобто множини їх розв'язків співпадають.

Рівняння, множини розв'язків яких порожні, також прийнято вважати рівносильними.

Означення 3. Якщо множина розв'язків рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ є підмножиною множини розв'язків рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, то друге рівняння є наслідком першого (тобто, якщо кожен корінь першого рівняння задовольняє друге рівняння).

Інше <u>**означення**</u> рівносильних рівнянь: два рівняння називаються рівносильними тоді і тільки тоді, коли кожне з них є наслідком іншого.

При розв'язуванні рівнянь виконують заміну попереднього рівняння рівносильним йому, але простішого виду. Інколи доводиться переходити до нерівносильного рівняння, тобто його наслідка тоді множина розв'язків розширюється і потрібна перевірка коренів.

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння $f(x) = g(x)$ додати один і той самий вираз $\varphi(x)$, який визначений на тій же області визначення *X*, то дістанемо рівняння $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ яке рівносильне даному.

<u>Наслідок 1</u>. Члени рівняння можна переносити з однієї частини в іншу, змінивши при цьому їх знаки на протилежні.
<u>Наслідок 2</u>. Якщо у рівнянні в обох частинах є однакові вирази, то їх можна опустити.

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння $f(x) = g(x)$ заданого на множині X помножити на однин і той самий вираз $\varphi(x)$ визначений на області визначення рівняння і який не перетворюється в нуль, то одержимо рівняння $f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)\cdot\varphi(x)$ рівносильне даному.
<u>Наслідок 1</u>. Якщо всі члени рівняння мають спільний множник, то на нього можна поділити всі члени (скоротити).

<u>Приклад</u>. $2x+8=6x-4 \,|\, :2,$ $\qquad x+4=3x-2$

<u>Наслідок 2.</u> Якщо деякі члени рівняння є дробово-раціональними виразами, то помноживши рівняння на спільний знаменник цих дробів дістанемо рівняння з цими коефіцієнтами

Якщо рівняння має вигляд $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, то множина розв'язків рівняння є об'єднанням множин розв'язків рівнянь

$$f_1(x)=0 \cup f_2(x)=0 \cup\ldots\cup f_n(x)=0 \qquad x\in X$$

69.Рівняння з двома змінними, рівняння лінії та кола, рівняння прямих

Означення: Рівняння з двома змінними — це рівняння, яке містить дві змінні, зазвичай x і y, і записується у вигляді:
f(x,y) або ax+by=c
де x і y — змінні, a, b, c — дійсні числа, причому хоча б одне з коефіцієнтів a або b не дорівнює нулю
Розв'язком такого рівняння є пара чисел (x,y), яка задовольняє рівняння при підстановці.
Множина всіх розв'язків такого рівняння утворює лінію (пряму) на координатній площині.
Означення: Рівняння прямої — це математичний вираз, який встановлює залежність між координатами x і y усіх точок, що

належать цій прямій. Рівняння має загальний вигляд: $Ax+By+C=0$, де $A,B,C \in R$, A і B не одночасно нулі.

Канонічне рівняння прямої

Пряма, яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{v}=(a,b)$:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}, a\neq 0, b\neq 0$$

Кутова форма рівняння прямої

$y=kx+b$

де k— кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу до осі x), а b— ордината точки перетину з віссю y.

Означення: Коло — це множина всіх точок на площині, які на однаковій відстані (радіусі) від заданої точки (центра).

Загальне рівняння кола:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

де (a,b)— координати центра кола, R— радіус.

70.Системи та сукупності рівнянь з двома змінними та способи (алгебраїчні та графічний) їх розв'язування

Означення: системою двох рівнянь з двома невідомими називається кон’юнкція двох рівнянь з двома змінними.

Означення: сукупністю двох рівнянь з двома невідомими називається диз’юнкція двох рівнянь з двома змінними.

Систему двох рівнянь з двома невідомими, яка складається із рівнянь символічно позначають так: $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases}$

Сукупність двох рівнянь з двома невідомими, яка складається із рівнянь $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ і $f_2(x;y)=g_2(x;y)$ *символічно позначають так:* $f_1(x;y)=g_1(x;y) \vee f_2(x;y)=g_2(x;y)$**(I)**

$f_1(x;y)=g_1(x;y) \wedge f_2(x;y)=g_2(x;y)$**(II)**

Означення: пара чисел $(x_0; y_0)$, при підстановці яких в кожне рівняння системи замість змінних x і y, ми одержуємо правильні числові рівності, яка називається розв’язком системи (**I**).

Означення: пара чисел $(x_0; y_0)$, при підстановці яких хоча б в одне рівняння сукупності замість змінних x і y, ми одержуємо правильну числову рівність, яка називається розв'язком сукупності (**II**).

Означення: розв'язати систему рівнянь – це означає знайти множину її розв'язків.

Означення: дві системи рівнянь називаються рівносильними, якщо вони визначені на одній множні та всі розв'язки однієї системи рівнянь є розв'язками другої і навпаки.

Означення: дві сукупності рівнянь називаються рівносильними, якщо вони визначені на одній множині та всі розв'язки однієї сукупності рівнянь є розв'язками другої і навпаки.

Дві системи чи сукупності рівнянь можуть бути рівносильними в одній числовій області і нерівносильними в іншій. До <u>алгебраїчних методів</u> розв'язування систем рівнянь відносять такі методи:

а) Метод підстановки. Суть цього методу полягає в тому, що одне із рівнянь системи замінюють рівносильним йому рівнянням, але таким, в якому визначене одне із невідомих, і підставляють у друге рівняння. Внаслідок такої підстановки друге рівняння стає рівнянням з однією змінною.

б) метод алгебраїчного додавання. Розв'язуючи систему рівнянь цим методом, деякі її рівняння домножають на спеціально підібрані множники, що визначені при всіх допустимих значення змінних, так, щоб коефіцієнти при одній змінній стали рівними за модулем, а потім почленно додають ці рівняння одне до одного. В результаті таких перетворень одержують рівняння, яке є рівнянням з однієї змінною. Розв'язавши його, знаходять значення цієї змінної, а потім підставляють його в інше рівняння та знаходять значення другої змінної.

в) метод введення нових невідомих. Під час розв'язування деяких систем буває корисно ввести замість змінних X і нові змінні, введення яких спрощує розв'язування.

Означення: Графічний спосіб розв’язування системи рівнянь — це метод, який полягає у побудові графіків обох рівнянь на координатній площині та знаходженні точки їхнього перетину.

Алгоритм графічного способу:

1. Перетворити рівняння до вигляду ***y=kx+b*** (кутова форма прямої).
2. Обрати значення ***x*** (зазвичай 2), знайти відповідні *y*.
3. Побудувати графік кожного рівняння — пряму через дві знайдені точки.
4. Знайти точку перетину — це і є розв’язок системи.
5. Записати відповідь у вигляді координат точки (*x;y*)

71.Застосування рівнянь та їх систем до розв'язування текстових задач

Досить часто розв’язати задачу арифметичним способом досить складно, а от методом складання рівнянь це зробити набагато простіше. При розв’язуванні задач методом складання рівнянь потрібно:

1) провести розбір задачі з метою вибору основного невідомого та виявлення залежності між величинами, а також вираження цих залежностей на математичній мові у формі двох алгебраїчних виразів (одне із них може бути заданим);

2) знайти основу для сполучення цих виразів знаком “=” та скласти рівняння;

3) знайти розв’язок одержаного рівняння;

4) з’ясувати чи немає серед розв’язків цього рівняння таких, які сторонні для задачі;

5) встановити чи вичерпують розв’язки рівняння всі розв’язки задачі.

Всі ці етапи задачі логічно пов’язані між собою. Наприклад, при пошуку основи для сполучення двох виразів знаком рівності говориться як про особливий етап, але ж цілком зрозуміло, що на попередньому етапі вказані вирази утворюються не довільно, а із врахуванням можливості сполучити їх знаком рівності. В силу неподільності аналізу та синтезу, як методів дослідження, інакше і бути не може. Виявлення залежностей між величинами, переклад цих залежностей на математичну мову вимагає напруженої аналітико-синтетичної діяльності. Успіх в цій роботі залежить від того як учні знають в яких залежностях можуть знаходитися величини, а також як вони розуміють смисл відношень. Наприклад, смисл відношень, які виражені термінами: "пізніше на ...", "старший в ... разів" тощо. Крім цього потрібне розуміння якою саме математичною дією чи властивістю дії чи якою залежністю між компонентами та результатом дії тощо може бути описане те чи інше конкретне відношення.

72.Поняття нерівності з однією змінною як предиката виду f(x)>φ (x), x∈X; рівносильні нерівності, теореми про рівносильність нерівностей

Нерівність з однією змінною можна розглядати як **предикат** — тобто логічну формулу, значення якої залежить від змінної.
Форма: $f(x)>\varphi(x), x\in X$
Тобто, ми розглядаємо твердження, яке може бути **істинним** або **хибним** залежно від значення x з множини X. Це і є **предикат**.
Приклад: Нерівність $x^2-4x>0$ є предикатом, значення якого залежить від x. Для одних значень вона істинна, для інших — ні.
Означення: Рівносильні нерівності — це дві нерівності, які мають одну і ту ж множину розв'язків
$(f(x)>\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; g(x)>\psi(x))$
Це означає, що обидві нерівності істинні для одних і тих самих значень x.
Теорема 1 (Додавання однакових виразів)
Якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число або вираз, то отримаємо рівносильну нерівність:
$$f(x)>\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; f(x)+a>\varphi(x)+a$$
Теорема 2 (Множення на додатне число)

Якщо обидві частини нерівності помножити на додатне число a>0, то нерівність не змінює знака:

$$f(x) > \varphi(x) \iff af(x) > a\varphi(x)$$

Теорема 3 (Множення на від'ємне число)

Якщо обидві частини нерівності помножити на від'ємне число a<0, то знак нерівності змінюється на протилежний:

$$f(x) > \varphi(x) \iff af(x) < a\varphi(x)$$

Теорема 4 (Монотонні функції)

Якщо $\phi(x)$ — зростаюча функція, тоді:

$$f(x) > g(x) \iff \phi(f(x)) > \phi(g(x))$$

Якщо $\phi(x)$ — спадна, тоді:

$$f(x) > g(x) \iff \phi(f(x)) < \phi(g(x))$$

73.Системи та сукупності нерівностей з однією змінною

Означення. Системою нерівностей з однією змінною називають кон`юкцію нерівностей $f_1(x) > g_1(x) \wedge f_2(x) > g_2(x)$ і позначають $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$.

Розв'язати систему – означає знайти множину тих значень змінної *x* з області визначення *X*, при яких обидві нерівності одночасно перетворюються в істинні числові нерівності.

<u>Алгоритм розв'язування систем нерівностей</u>

1. Встановити, чи область визначення обох нерівностей однакова.
2. Знайти множини розв'язків кожної з нерівностей T_1 і T_2.
3. Знайти множину $T = T_1 \cap T_2$

Означення. Диз'юнкція нерівностей $f_1(x) > g_1(x) \vee f_2(x) > g_2(x)$ називається сукупність нерівностей з однією змінною і позначається $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{array}\right.$.

Розв'язати сукупність нерівностей означає знайти множину тих значень змінної *x* з множини *X*, при яких хоча б одна з нерівностей перетворювалася в істинну числову нерівність. Множина розв’язків сукупності нерівностей є об’єднання множин розв’язків обох нерівностей.

<u>Алгоритм розв’язування сукупності нерівностей.</u>

1.Встановити чи область визначення обох нерівностей однакова.

2. Знайти множини розв’язків кожної з нерівностей T_1 і T_2.

3. Знайти множину $T_1 \cup T_2$

До систем і сукупностей нерівностей приводять окремі види нерівностей:

1. $|x| < a$.

2. $|x| > a$

3. Дробово – раціональні нерівності:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad\qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Кожна із нерівностей замінюється сукупністю двох систем при цьому враховуються правила ділення чисел з однаковими ірраціональними знаками.

74.Нерівності та системи нерівностей з двома змінними, графічний спосіб їх розв'язування

Означення: <u>Нерівністю з двома змінними</u> називається така математична нерівність, яка містить дві змінні (зазвичай x і y) і має вигляд: $f(x;y)>0$, $f(x;y)<0$, $f(x;y)\geq 0$, $f(x;y)\leq 0$

Розв’язком є множина точок $(x;y)$, які задовольняють нерівність.

Означення: <u>Системою нерівностей з двома змінними</u> називається сукупність двох або більше нерівностей, кожна з яких містить ті самі дві змінні (зазвичай x і y), і яку потрібно розв’язати одночасно.

Форма: $\begin{cases} f_1(x;y)>0 \\ f_2(x;y)\leq 0 \\ \quad\ldots \end{cases}$

Розв'язком системи є множина всіх пар (*x;y*), які задовольняють усі нерівності системи одночасно.

Графічний спосіб розв'язання систем нерівностей:

1. Переписати кожну нерівність у вигляді рівняння (межа області).
2. Побудувати графік кожного рівняння:
   суцільна лінія при "≥" або "≤"
   пунктирна лінія при ">" або "<"
3. Визначити, яка частина площини задовольняє нерівність (використати тестову точку, наприклад (0,0)(0,0)(0,0)).
4. Заштрихувати відповідну півплощину.
5. У разі системи — знайти **область перетину всіх заштрихованих областей**.

75.Поняття числової функції, способи її задання, графік функції, властивості функцій

Означення 1. Відповідність між множиною *X* і множиною *Y*, при якій кожному елементу з множини *X* співставляється один і тільки один елемент множини *Y* називається *множиною*.

Означення 2. *Областю визначення* функції називається множина тих значень $x \in X$, яких може набувати аргумент *X*. *Множиною значень* функції називається множина всіх значень $y \in Y$, яких набуває функція.

Позначають $D(f)$ - область визначення.

$E(f)$ - область значень.

Нехай *X* і *Y* – деякі числові множини.

Означення 3.Числовою функцією, яка визначена на множині *X* і приймає значення з множини *Y*, називається відповідність *f*, яка кожному числу $x \in X$ ставить у відповідність єдине число $y \in Y$.

Означення 4. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок координатної множини $(x; y)$ таких, що $x \in D(f)$, а $y = f(x)$.

<u>Способи задання функції</u>

1) Аналітичний (за допомогою формули). Якщо при цьому не вказується область визначення функції, то це означає, що вона збігається з областю існування формули, яка задає функцію.

2) Графічний.

3) Табличний.

4) Словесний.

<u>Властивості числових функцій</u>

<u>Означення 5.</u> Функція $y = f(x)$ називається <u>парною</u>, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь – якого *x* з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

<u>Означення 6.</u> Функція $y = f(x)$ називається <u>непарною</u>, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-якого *x* з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Графіки непарних функцій симетричні відносно осі координат, а непарних функцій – відносно початку координат.

<u>Означення 7</u>. Функція $y = f(x)$ називається <u>зростаючою</u>, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

<u>Означення 8</u>. Функція $y = f(x)$ називається <u>спадною</u>, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

76.Лінійна функція, пряма та обернена пропорційність, квадратична функції, їх властивості та графіки

Означення. Лінійною функцією називають функцію виду *y=kx+b*, де *k* і *b* – сталі, *x*- незалежна змінна. При *b=0*, отримаємо функцію *y=kx* – пряму пропорційність.

Графік лінійної функції є пряма, яка утворена з прямої $y = kx$ паралельним перенесенням на b одиниць вздовж осі OY вверх, якщо $b > 0$ і вниз, якщо $b < 0$. Положення графіка функції визначається числами k і b.

Означення. Дві величини називаються <u>прямопропорційними</u>, якщо збільшенням (зменшенням) однієї величини у кілька разів у стільки ж разів збільшується (зменшується) інша величина при сталій третій величині.

Означення. <u>Прямопропорційною</u> називають функцію виду $y = kx$, де k – стала величина, $k \neq 0$, а x – незалежна змінна.

Графіком прямо пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

<u>Властивості</u>

1. Область визначення $D(f) = R$
2. При $k>0$ функція зростає на всій області визначення, при $k<0$ спадає.
3. Положення в системі координат залежить від:

   при $k>0$ в I і III чверті;

   при $k<0$ в II і IV чверті.
4. Функція є непарна: $f(-x) = k \cdot (-x) = -kx = -f(x)$. Її графік симетричний відносно початку координат.
5. Графік функції проходить через точку (1; k)
6. При $|k| > 1$ наближається графік до осі OY;

   $|k| < 1$ графік наближається до осі OX

<u>Означення.</u> Дві величини x та y перебувають в <u>обернено пропорційній залежності</u> тоді, коли із збільшенням (зменшенням) значення однієї з них у кілька разів значення другої величини зменшується (збільшується у стільки ж разів) при сталій третій величині.

<u>Означення</u>. <u>Обернено пропорційністю</u> називається функція виду $y = \frac{k}{x}$, де k – стала величина, і називається коефіцієнтом оберненої пропорційності, x – незалежна змінна, де $x \in R\{0\}$, y - залежна змінна, де $y \in R\{0\}$.

Отже, область визначення і область значень оберненої пропорційності є множина всіх дійсних чисел, крім нуля.

Властивості

1.Функція $y=\frac{k}{x}$ розривна в точці $x=0$.

2. Положення гіперболи в системі координат залежить від k : при $k>0$ графік розміщений в I і III чверті; при $k<0$ вітки розміщені в II і IV чверті.
3. Графік розміщено симетрично відносно початку координат. Функція є непарною:

   $f(x)=-f(x)$ $\qquad f(x)=\frac{k}{x};$ $\qquad f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}.$

   Отже, $f(x)=-f(x)$.
4. При $|k|>1$ вітки гіперболи глибше вгнуті до початку координат, чим більше k ; при $|k|<1$ вітки більше віддалені від початку координат.
5. При $k>0$ функція спадна $x_1<x_2 \Rightarrow y_1>y_2$;

   При $k<0$ функція є зростаючою $x_1<x_2 \Rightarrow y_1<y_2$.
6. Функція $y=\frac{k}{x}$ неперіодична, бо не існує такого числа Т , що $f(x \pm T)=f(x)$.
7. Функція $y=\frac{k}{x}$ обмежена: при $k>0$ ліва вітка обмежена зверху, а права знизу; при $k<0$ ліва вітка обмежена знизу, а права зверху. В обох випадках вітки обмежені прямої $y=0$ (віссю *OX*) і $x=0$ (віссю *OY*). Отже осі координат є асимптотами даної функції.

Означення. *Асимптотою* деякої функції $y=f(x)$ називають пряму, до якої як завгодно близько підходить графік функції але піком її не перетинає та не дотикається.

77.Поняття про аксіоматичний метод побудови геометрії та історію його розвитку у геометрії

Суть аксіоматичного методу побудови математичної теорії полягає в тому, що:
а) задається деяка множина *М* основних об'єктів теорії;
б) дається перелік основних відношень і операцій, визначених у множині *М*;
в) формулюються, приймаючись без доведень, основні властивості об'єктів, основних відношень і операцій над ними (ці твердження прийнято називати аксіомами);
г) зазначаються певні елементи множини *М*, які мають деякі особливості, що виділяють їх серед інших елементів (наприклад, нульовий і одиничний елемент). Після цього формулюють і обов'язково доводять всі твердження теорії.

У математиці існують різні тлумачення поняття аксіома. У середині III століття до н. е., під впливом філософії Аристотеля, під аксіомою розуміли очевидні твердження, які не потребують доведення. Вчення Канта закріпило погляд на аксіоми, як на апріорні істини.

З одного боку аксіома - це твердження деякої теорії, що приймається при дедуктивній побудові цієї теорії без доведення. З іншого боку аксіома – це твердження, яке перевірене багатовіковим досвідом людства і яке весь час при цьому залишалося істинним.

Приклади аксіоматичної побудови математичних теорій дозволяють зробити висновок про те, що для побудови теорії потрібно вибрати не одну, а систему аксіом, яка повинна задовольняти такі вимоги: **1) незалежність,** сутність якої полягає в тому, що серед вибраних аксіом не повинно бути таких, одна з яких є наслідком іншої; **2) несуперечливість**, яка полягає в тому, що серед аксіом системи не повинно бути таких, які б суперечили одна одній чи дозволяли вивести твердження, що суперечать одне одному; **3) повнота,** сутність якої полягає в тому, що системи аксіом повинно бути достатньо для побудови теорії.

В історії математики вважається, що у своєму розвитку аксіоматичний метод пройшов *три етапи*. *Перший етап* завершується в III-IУ столітті до н. е. першими спробами аксіоматичної побудови геометрії Евклідом. *Другий етап* закінчується наприкінці 19 ст., коли були науково обґрунтовані аксіоматичні побудови арифметики (Дж.Пеано) і геометрії (Д.Гілберт). *На третьому етапі*, який триває і понині, Д.Гілберт та його школа створили формальні системи та формалізовану аксіоматичну теорію. Спочатку аксіоматичний метод був застосований в геометрії, потім в арифметиці, теорії ймовірностей, теорії множин тощо. Застосування цього методу побудови наукових теорій знаходимо в деяких розділах фізики (механіка, термодинаміка, електродинаміка). Наявні спроби застосування аксіоматичного методу для побудови таких дисциплін як етика, соціологія, біологія тощо, але задовільних результатів це поки що не дало.

При аксіоматичній побудові геометрії основними, не означуваними поняттями є точка, пряма, віддаль, площина. Система аксіом включає п’ять груп аксіом (належності, віддалі, порядку, руху, паралельності). У шкільному курсі геометрії основними поняттями є точка, пряма, площина, віддаль. Система аксіом шкільного курсу геометрії містить 12 аксіом, які розбиті на 5 груп: **1) група аксіом належності**, які встановлюють відношення належності точок прямій і прямих площині; **2) група аксіом віддалі**, що виражають властивості віддалі; **3) група аксіом порядку**, які встановлюють відношення точок на прямій і площині; **4) група аксіом руху площини**, яка дає можливість робити на площині різноманітні переміщення; **5) група**, що складається з однієї аксіоми, аксіома паралельності. У шкільному курсі геометрії вказані групи аксіом вводять поступово та досить часто у вигляді не доводжуваних тверджень.

78.Основні геометричні побудови циркулем і лінійкою; основні методи геометричних побудов (метод ГМТ, методи осьової та центральної симетрії, метод паралельного перенесення, метод гомотетії, алгебраїчний метод)

Геометричні побудови — важлива частина геометрії, яка формує просторове мислення, логіку та уяву. Вони базуються на застосуванні циркуля та лінійки. Усі побудови виконуються лише з дотриманням певних правил.

Циркуль — використовується для побудови дуг, кіл, відкладання відрізків.

Лінійка — застосовується для проведення прямих та з’єднання точок.

Основні задачі на побудову циркулем і лінійкою:

1) побудова відрізка і кута, що дорівнює даному;
2) поділ даного кута або відрізка навпіл;
3) поділ даного відрізка на кілька рівних частин;
4) побудова прямої, перпендикулярної до даної прямої;
5) побудова прямої, паралельної даній прямій;
6) побудова трикутника: за трьома сторонами; за двома сторонами і кутом між ними; за стороною і прилеглими до неї двома кутами;
7) побудова прямокутного трикутника: за гіпотенузою і катетом; за гіпотенузою і гострим кутом; за двома катетами;
8) побудова кола, вписаного або описаного навколо чотирикутника;
9) побудова дотичних до даного кола, які проведені з даної точки;
10) побудова спільної дотичні до двох даних кіл.

Основні методи геометричних побудов

1.Метод геометричних місць точок (ГМТ)

Суть: побудова об'єкта через знаходження геометричного місця точок, які задовольняють певній умові.

Приклади:

- Побудова точки, яка рівновіддалена від двох прямих → бісектриса
- Побудова точки, яка рівновіддалена від двох точок → серединний перпендикуляр

2. Метод осьової симетрії

Суть: відображення фігур відносно прямої (ось симетрії).
Використовується: для побудови рівних фігур або пошуку симетричних точок/фігур.

3. Метод центральної симетрії

Суть: кожна точка фігури відображається через центр симетрії.

Приклад: побудова точки A', симетричної до точки A відносно центру O.

4. Метод паралельного перенесення

Суть: фігура переміщується на заданий вектор без обертання або деформації.

Використання: побудова паралельних відрізків, переміщення фігур.

5. Метод гомотетії

Суть: збільшення або зменшення фігури відносно заданого центру гомотетії у певному коефіцієнті.

Формула:

- Якщо точка A переходить у точку A' через гомотетію з центром O та коефіцієнтом k, то $\overrightarrow{OA'}=k\cdot\overrightarrow{OA}$

Використання: побудова подібних фігур.

6. Алгебраїчний метод

Суть: застосування координатної площини та рівнянь для побудов.

Приклад:

- Побудова точки, що лежить на середині відрізка AB у координатах:$M = (\frac{x_1+x_2)}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$
- Побудова перпендикуляра через нахил прямої.

79.Побудова правильних многокутників

Означення: Правильний многокутник — це опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні й усі кути рівні.

Правильний *n*-кутник:

- має *n* рівних сторін
- має *n* рівних внутрішніх кутів

- може бути вписаний у коло, тобто всі його вершини лежать на одному колі
- може бути описаний навколо кола, тобто всі сторони дотикаються до внутрішнього кола

<u>Формула внутрішнього кута</u> правильного n-кутника:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$$

Побудова правильних многокутників:

- <u>Правильний трикутник (рівносторонній)</u>

Кроки побудови:

1. Провести коло з довільним радіусом.
2. Відмітити довільну точку A на колі.
3. Виміряти циркулем радіус.
4. Відкласти його на колі кілька разів, щоб отримати точки B і C.
5. З’єднати точки A, B, C.

- **Правильний шестикутник**

Кроки побудови:

1. Провести коло з центром O.
2. Вибрати точку A на колі.
3. Відкласти радіус циркулем по колу шість разів (радіус = сторона шестикутника).
4. Позначити точки: A, B, C, D, E, F.
5. З’єднати сусідні точки.

Примітка: Правильний шестикутник легко побудувати, бо сторона дорівнює радіусу кола.

- **Правильний квадрат**

1. Провести коло з центром O.
2. Провести діаметр AB.
3. Побудувати перпендикуляр до AB у точці $\vec{0}$ це буде діаметр CD.
4. Позначити точки перетину з колом: A, B, C, D.
5. З’єднати послідовно точки A-B-C-D.

- **Правильний восьмикутник (октагон)**

1. Побудувати коло з центром O.

2. Побудувати два взаємно перпендикулярні діаметри (4 точки).
3. Побудувати ще два діаметри, що проходять під кутом 45° до перших (ще 4 точки).
4. З’єднати всі 8 точок по порядку.

- **Побудова правильного многокутника за допомогою поділу кола**

Метод загальний для *n*-кутників, де *n*=3,4,5,6,8,10,12:

1. Провести коло з центром О.

2.Поділити коло на *n* рівних дуг (з використанням транспортира або геометричних побудов).

3. Позначити точки A_1 , A_2 , ..., A□.

4. З’єднати послідовно всі точки.

80.Поняття многогранника, його елементів, види многогранників, теорема Л.Ейлера

Означення: многогранником називається тіло, поверхня якого складається із скінченого числа плоских многокутників.

Плоскі многокутники, які утворюють поверхню многогранника, називаються його гранями; сторони граней називаються ребрами, а вершини граней - вершинами многогранника.

Означення: многогранник називається опуклим, якщо всі його точки лежать по одну сторону від площин, що містить будь-яку з його граней.

Означення: многогранник називається простим, якщо виконуються наступні умови: 1) його поверхня складається із одного куска; 2) його поверхня шляхом неперервної деформації може бути перетворена в сферу.

Теорема (Л.Ейлера): у будь-якого простого многогранника сума числа граней і вершин на два більша числа його ребер.

Означення: *призмою* називається многогранник, який складається із двох плоских многокутників, що суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих многокутників.

Ці многокутники називаються основами, а відрізки, які сполучають вершину з точками основи, - бічними ребрами призми. Із властивостей паралельного перенесення випливають наступні властивості призми: 1) основи призми рівні; 2) основи призми лежать у паралельних площинах; 3) бічні ребра призми паралельні; 4) бічні ребра призми рівні; 5) бічні грані призми є паралелограмами.

Означення: висотою призми називається відстань між площинами її основ.

Означення: діагоналлю призми називається відрізок, що сполучає дві вершини, які не належать одній грані.

Означення: діагональним перерізом призми називається переріз площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані.

Означення: призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні основі.

Означення: пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.

Означення: *паралелепіпедом* називається призма, основами якої є паралелограми.

Означення: паралелепіпед називається прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Означення: прямий паралелепіпед називається прямокутним, якщо його основа є прямокутник.

Означення: *пірамідою* називається многогранник, який складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, що не лежить в площині основи, - вершини піраміди, і всіх відрізків, що сполучають вершину з точками основи.

Означення: висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи.

Означення: піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти співпадає з центром цього многокутника.

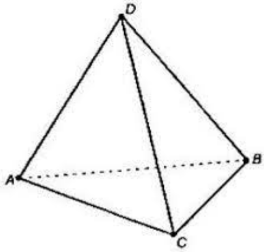
81.Правильні многогранники, їх види та зображення на площині

Означення: правильним називається опуклий многогранник, у якого всі грані рівні, правильні многогранники і всі многогранні кути рівні.

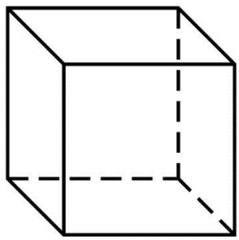
Усього існує **5** правильних многогранників, які називаються платоновими тілами:

1. **Тетраед**, який складається з 4 рівносторонніх трикутників, 4 вершин і 6 ребер.

На площині виглядає як піраміда з трикутною основою.

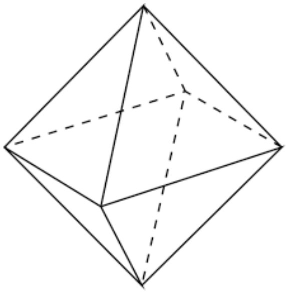


2. **Куб (гексаедр)**, який складається з 6 квадратів, 8 вершин і 12 ребер.

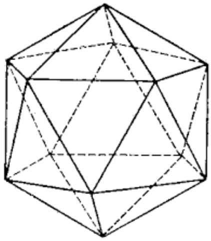


3. **Октаедр**, який має 8 рівносторонніх трикутників, 6 вершин та 12 ребер.

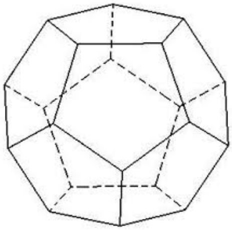
На площині виглядає як схожий на два з'єднаних основами тетраедри.



4. **Ікосаедр**, який складається з 20 рівносторонніх трикутників, 12 вершин і 30 ребер.



5. **Додекаедр**, який складається з 12 правильних п’ятикутників, 20 вершин та 30 ребер.
На площині зображення має форму складної кулі з п’ятикутними гранями.



82.Поняття тіла обертання, їх види (циліндр, конус, куля, сфера) та їх зображення

Означення: Тіло обертання — це просторове тіло, яке утворюється в результаті обертання плоскої фігури навколо деякої прямої (ось обертання).
Означення: *циліндром* називається тіло, яке складається із двох кругів, що сполучаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

Круги називаються основами циліндра, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл, - твірними циліндра. Із властивостей паралельного перенесення випливають наступні властивості циліндра: 1) основи циліндра рівні; 2) основи циліндра лежать в паралельних площинах; 3) твірні циліндра паралельні; 4) твірні циліндра рівні.
Означення: циліндр називається прямим, якщо його твірні перпендикулярні площинам основ.
Означення: висотою циліндра називається відстань між площинами основ.

Означення: віссю циліндра називається пряма, що проходить через центри основ циліндра.
Означення: циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо однієї з сторін.

Означення: *конусом* називається тіло, яке складається із круга – основи конуса, точки, що не лежить в площині цього круга, - вершини конуса, і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи
Означення: конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів.
Означення: висотою конуса називається перпендикуляр, опущений із його вершини на площину основи.

Означення: *кулею* називається тіло, яке складається з усіх точок простору, які знаходяться на відстані, не більшій за дану, від даної точки.
Означення: кулею називається тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра.

Означення: *сферичною поверхнею* або *сферою* називається границя кулі.

83.Відображення властивостей реального світу через поняття величини

Величини відображають різноманітні властивості реального світу. Поняття величини, виникло в результаті абстрагування від якісних особливостей, властивостей реальних об'єктів, щоб виділити тільки кількісні відношення. У процесі абстракції властивості об'єктів і явищ ідеалізуються, відбувається деяке віддалення від дійсності. У природі величини не існують відірвано від матеріальних об'єктів. Наприклад, не існує довжини, площі, сили, швидкості. Ці величини вводяться в процесі пізнання для опису явищ природи. Тому Величина – це не сама реальність, а лише її відображення. Поняття величини тісно пов'язане з поняттям вимірювання. Результат вимірювання виражається числовим значенням величини при певній одиниці вимірювання. Величини є складовою частиною змісту багатьох наук – математики, фізики, хімії, біології та ін. Без величин вивчення природи обмежилось би тільки спостереженнями і залишилося б на описовому рівні. Величини дають можливість перейти від описового до кількісного вивчення властивостей об'єктів.

84.Поняття величини та її вимірювання, види (адитивно-скалярні, векторні, тензорні, латентні) величин

Означення: величиною називається властивість об'єктів чи явищ, яка може бути кількісно охарактеризована через вимірювання або порівняння з іншими аналогічними властивостями.
Наприклад: довжина лінійки, маса яблука, температура повітря, сила тяжіння.
Означення: Вимірювання величини — це процес порівняння її з еталонною величиною (одиницею виміру). Результатом є числове значення в певних одиницях.

Класифікація величин

Означення1.*Адитивно-скалярними* називаються такі величини, які можна додавати алгебраїчно і результат не залежить від порядку додавання (довжина, маса, площа, об'єм, температура,…).
Вони описуються одним числом (скалярним); підкоряються звичайним арифметичним діям; мають одиницю вимірювання.
Означення2.*Векторними* називаються величини, що характеризуються не лише модулем (значенням), але й напрямком (швидкість, сила, прискорення, переміщення, електричне поле).
Вони мають напрямок і величину, зображуються як стрілки (вектори), підкоряються правилам векторної алгебри.
Означення3.*Тензорними* називаються фізичні величини, які змінюються залежно від напрямку та площини дії, описуються

тензорами (багатовимірними масивами чисел)(напруження в матеріалі, деформація, момент інерції).
Це складні математичні об'єкти, які відображають взаємозв'язок між кількома векторними величинами, використовуються в механіці, фізиці, інженерії.
Означення4.*Латентними* називаються величини, що не можуть бути безпосередньо виміряні, але можуть бути оцінені за допомогою опосередкованих ознак або поведінки (рівень інтелекту, мотивація учня, рівень задоволення або стресу).
Вони часто використовуються в психології, соціології, педагогіці; вимірюються через опитування, тести, статистичні моделі (наприклад, факторний аналіз).

85.Поняття довжини відрізка, її властивостей, способів вимірювання, одиниць вимірювання та співвідношень між ними

Означення: Довжиною відрізка називається додатна величина, визначена для кожного відрізка так, що:
1) рівні відрізки мають рівні довжини;
2) якщо відрізок складається із скінченого числа відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків;
3) існує відрізок, довжина якого дорівнює одиниці.
Наведені умови називають властивостями або аксіомами довжини. Визначена таким чином довжина відрізка задовольняє властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності, тому розбиває множину всіх відрізків на класи рівних відрізків.
Завдання вимірювання довжини відрізка полягає у послідовному відкладанні одиничного відрізка і його частин на даному відрізку, довжину якого треба виміряти. Процес вимірювання довжини відрізка грунтується на аксіомі Архімеда:
Нехай маємо два відрізка AB і PM, причому AB>PM. Який би не був великий відрізок AB і який би не був малий відрізок PM, завжди знайдеться таке натуральне число n, що n PM>AB.

На основі аксіоми Архімеда кожному відрізку AB при вибраній одиниці довжини e можна поставити у відповідність певне невід'ємне число, яке є його довжиною. Для доведення оберненого твердження необхідна аксіома Кантора.

Нехай на довільній прямій MK дано нескінчену послідовність відрізків

$A_1B_1, A_2B_2, \dots ,A_nB_n, \dots$ таку, що: 1) кожний наступний відрізок є частиною попереднього; 2) для будь-якого попереднього заданого відрізка CD знайдеться натуральне число n таке, що $A_nB_n<CD$.

Тоді на прямій MK існує єдина точка P, що належить усім відрізкам послідовності.

Розглянуті аксіоми дають можливість довести твердження про те, що між множиною відрізків і множиною невід'ємних дійсних чисел існує взаємооднозначна відповідність.

Основою встановлення системи вимірювання довжин відрізків, як і інших величин, є вибір зручних, чітко визначених одиниць вимірювання та точність виготовлення еталонів цих одиниць. Основою для міжнародної системи мір стала система одиниць вимірювання величин створена у Франції у XVIII ст. За основну одиницю довжини в ній було взято метр – одна сорокамільйонна частина довжини земного меридіана, який проходить через Париж.

Еталон 1м виготовлений із сплаву платини та у вигляді лінійки з штрихами і зберігається у Міжнародному бюро міри і ваги Національного архіву Франції. Були також введені похідні одиниці довжини: 1см=1/100м; 1дм=1/10м; 1мм=1/1000м; 1км=1000м. Нову систему мір назвали Метричною.

Наведемо приклади неметричних одиниць довжини:

1миля=7верств;

1верства=500саженів=1,0668км;

1сажень=3аршини=7футів=2,1336м;

1аршин=16вершнів=71,12см;

1фут=12дюймів=0,3048м;

1дюйм=1/12 фута=2,54см;

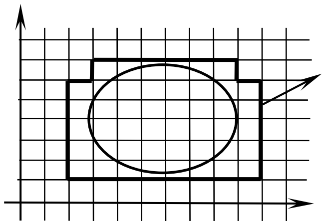
1вершок=$1^{3/4}$дюйма=4,45см.

86.Поняття площі плоскої фігури, її властивостей, способів вимірювання, одиниць вимірювання та співвідношень між ними; рівновеликі та рівноскладені многокутники

Означення: Фігура F називається квадратною, якщо вона повністю покривається ступінчастою фігурою, утвореною з квадратів сітки, і якщо існує хоча б один, як завгодно малий квадрат з покриття, який повністю складається з внутрішніх точок фігури F.

Якщо ці умови не виконуються, то площа фігури дорівнює нулю.

Ступінчаста фігура Ф, утворена з квадратів сітки, яка повністю покриває фігуру F, називається фігурою Ф.



Квадрати фігури покриття Ф поділяють на дві групи:

1) квадрати, утворені тільки внутрішніми точками фігури F і точками її контура;

2) квадрати, які містять як внутрішні, так і зовнішні точки фігури F.

Площу фігури F можна знайти, порахувавши квадрати. Якщо внутрішні квадрати нульового рангу не вичерпують фігури F, то переходимо до квадратів першого рангу і т.д.

Означення: Площею фігури називається невід'ємна скалярна величина, яка характеризує міру квадратності і має такі властивості:

1) Існує квадрат, площа якого дорівнює 1; це квадрат, сторона якого є одиницею довжини.

2) Рівні фігури мають рівні площі.

3) Якщо фігура складається з кількох частин без спільних внутрішніх точок, то їх площа дорівнює сумі площ цих частин. Прилад, з допомогою якого таким способом

вимірюють площу фігури, називається палеткою – прозора пластина з нанесеною на ній сіткою квадратів.
Метричні міри площі та співвідношення між ними:
$1м^2$; $1дм^2=0{,}01м^2$; $1а=100м^2$;
$1см^2=0{,}0001м^2$; $1ге=10000м^2$;
$1мм^2=0{,}000001м^2$; $1км^2=1000000м^2$.
Означення:Два многокутники, які мають рівні площі, називаються рівновеликими.
Зауважимо, що рівновеликі многокутники можуть бути й не рівними. Наприклад, прямокутники зі сторонами $4\cdot 6=24см^2$, $2\cdot 12=24см^2$ нерівні, але рівновеликі.
Означення: Два многокутники називаються рівноскладеними, якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників. Відношення рівноскладеності многокутників має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, тобто є відношенням еквівалентності.
Теорема1.Будь-які два рівноскладені многокутники рівновеликі і навпаки.
Теорема2.Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін; S=ab.
Теорема3.Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку катетів.
Теорема4.Площа паралелограма дорівнює добутку
сторони на висоту, яка проведена до цієї сторони.
Теорема5.Площа трикутника дорівнює половині добутка основи на висоту.
Теорема6.Площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей.
Теорема7.Площа трапеції дорівнює добутку пів суми її основ на висоту.

87.Площа прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції, квадрата

Площа прямокутника: $S = a \cdot b$,
Площа паралелограма: $S = ah$; $S = ab\ sin I$;

Площа трикутника: $S = \frac{1}{2}ah$; $S = \frac{1}{2}ab \cdot sin\gamma$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Ф – ла Герона) $p = a + b + \frac{c}{2}$

$S = \frac{abc}{4R}$; $S = \frac{1}{2}PR$

Площа трапеції: $S = \frac{a+b}{2h}$; $S = m \cdot h$, m-середня лінія.

Площа квадрата: $S = a^2$

88.Площі поверхонь многогранників та тіл обертання

Площа поверхні многогранника— це сума площ усіх його зовнішніх граней.

а) Куб

$S = 6a^2$- площа повної поверхні куба

де a — довжина ребра

б) Паралелепіпед

$S = 2(ab + bc + ac)$- площа повної поверхні паралелепіпеда,

де a,b,c— довжини ребер

в) Призма

$S_{біч.} = P_{осн.} \cdot h$ - площа бічної поверхні призми,

де P— периметр основи, h — висота

$S_{повн.} = S_{біч.} + 2S_{осн.}$- площа повної поверхні призми

г) Піраміда

$S_{біч.} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot l$ – площа бічної поверхні піраміди,

де l — апофема (висота бічної грані)

$S_{повн} = S_{біч.} + S_{осн.}$- площа повної поверхні піраміди

Площа поверхні тіл обертання — сума площ усіх фігур, що утворюються обертанням плоских фігур навколо осі.

а) Циліндр

$S_{біч.} = 2\pi RhS$ – площа бічної поверхні циліндра

$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$- площа повної поверхні циліндра

де R — радіус основи, h — висота

б) Конус

$S_{біч.} = \pi Rl$ – площа бічної поверхні конуса,

де l — твірна

$S = \pi R l + \pi R^2$ – площа повної поверхні конуса

в) Сфера

$S = 4\pi R^2$- площа повної поверхні сфери,

де R — радіус

89.Поняття об'єму тіла, його властивостей, способів вимірювання, одиниць вимірювання та співвідношень між ними

Об'єм геометричного тіла можна вимірювати так само, як і площу геометричних фігур двома способами: безпосередньо чи опосередковано, за допомогою формул. У першому випадку система координат у просторі розбивається на одиничні куби певного рангу. Їх можна отримати, якщо через точки поділу на координатних осях провести площини, паралельні координатним площинам. Відповідно до цього геометричне тіло розіб'ється на одиничні куби. При цьому можливі два випадки: 1) одиничні куби повністю вичерпують тіло, тоді його об'єм характеризуватиметься невід'ємним раціональним числом; 2) куби певного рангу не вичерпують всього тіла, а тому об'єм такого тіла характеризуватиметься додатнім ірраціональним числом. Отже, можна вважати, що об'єм геометричного тіла є мірою кубовності або це величина обмеженої частини простору, яку займає тіло.

Означення: <u>об'ємом</u> геометричного тіла називається невід'ємна скалярна величина, яка характеризує міру кубовності геометричного тіла та визначена для кожного геометричного тіла.

1. У множині ***M*** геометричних тіл існує нульовий куб $\mathbf{k_0}$ такий, що $\mathbf{m(k_0)=0}$ (символічно ця аксіома запишеться так: ($\mathbf{[(\exists k_0 \in M)(m(k_0)=0)]}$).

2. У множині ***M*** існує одиничний куб **k** такий, що **m(k)=1**, яким можна виміряти об'єм будь-якого геометричного тіла (символічно ця аксіома запишеться так: ($\mathbf{[(\exists k \in M)(m(k)=1)]}$).

3. Рівні геометричні тіла мають рівні об'єми (символічно ця аксіома запишеться так: ($\mathbf{[(\forall F,G \in M)((F=G) \leftrightarrow (m_k(F)=m_k(G))]}$).

4. Якщо геометричне тіло **F** складається із скінченного числа геометричних тіл $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3,...F_n}$, які не мають спільних внутрішніх точок, то об'єм геометричного тіла **F** дорівнює сумі об’ємів геометричних тіл $\mathbf{F_1,F_2,F_3,...F_n}$ (символічно: $\mathbf{[(\forall F,F_1,F_2,F_3,...,F_n \in M)((F=F_1+F_2+F_3+...+F_n) \leftrightarrow (m_k(F)=m_k(F_1)+ m_k(F_2)+m_k(F_3)+...+m_k(F_n))]}$).

90.Об'єми многогранників та тіл обертання

1. Об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто $\boldsymbol{V=abc}$.
2. Об'єм куба дорівнює кубу його ребра, тобто $\boldsymbol{V=a^3}$.
3. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на висоту, тобто $\boldsymbol{V=S_{осн.}H}$.
4. Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту, тобто $\boldsymbol{V=S_{осн.}H}$.
5. Об'єм будь-якої піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту, тобто $\boldsymbol{V=\frac{1}{3}S_{осн.}H}$.
6. Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту, тобто $\boldsymbol{V=\pi R^2H}$.
7. Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту, тобто $\boldsymbol{V=1\,\frac{1}{3}\pi R^2H}$.
8. Об'єм кулі дорівнює добутку однієї третини поверхні кулі на її радіус, тобто $\mathbf{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Навчальне видання

Відповіді на питання для підготовки до підсумкового контролю з навчальної дисципліни «Математика» для здобувачів ступеня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю А3 Початкова освіта : метод. рекомендації для здобувачів ступеня вищої освіти / уклад.: В. В. Сілков, Е. О. Сілкова ; за заг. ред. В. В. Сілкова. Рівне : РДГУ, 2026. 114 с.

Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання
33028, м. Рівне, вул. Пластова, 31