

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

**Формування ключових компетентностей при розв'язуванні геометричних
задач в сучасній школі**

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи М-2
факультету математики та інформатики
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Шумелянко Марія Володимирівна

Керівник: канд. пед.наук, проф. кафедри
математики з МВ Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз-мат наук, доцент кафедри
вищої математики Сапіліді Тамара Михайлівна

канд. пед.наук, доцент кафедри математики з
МВ Генцінська-Антонюк Наталія Олександрівна

Рівне - 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ	5
1.1.Сутність понять «компетентність» та «компетентнісний підхід».....	5
1.2.Формування ключових компетентностей	10
1.3. Основні математичні компетентності та напрями їх набуття. Компоненти математичної компетентності	12
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ	22
2.1.Загальні поняття геометричних задач та їх класифікація.....	22
2.2.Шляхи формування компетентностей учнів на різних етапах уроку математики.....	49
2.3.Розв'язування задачі, що базується на компетентнісному підході.....	53
2.4. Педагогічний експеримент та його результати.....	58
ВИСНОВКИ	61
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	63

ВСТУП

Актуальність теми.

Концепція модернізації освіти поставила перед загальноосвітньою школою низку завдань, одне з яких - формування ключових компетенцій, які визначають сучасну якість змісту освіти. Під ключовими компетенціями розуміється цілісна система універсальних знань, умінь, навичок, а так само досвід самостійної діяльності й особистої відповідальності учнів. Такий підхід вимагає від педагога чіткого розуміння того, які універсальні (ключові) і спеціальні (кваліфікаційні) якості особистості необхідні випускнику загальноосвітньої школи в його подальшій професійній діяльності. Це, у свою чергу, передбачає вміння педагога складати орієнтовну основу діяльності - сукупність відомостей про діяльність, яка включає опис предмета, засобів, цілей, продуктів і результатів діяльності. Від педагога вимагається навчити дітей тих знань, навчити тим умінням і розвинути ті навички, якими сучасна людина зможе скористатися у своєму подальшому житті. Природньо, що реалізовувати даний підхід слід як у початковій, так і в середній школі. Однак більшість шкільних програм, що використовуються на сучасному етапі, створювалися до появи компетентнісного підходу. Тому велика частина роботи з його впровадження в освітній процес лягає на педагогів загальної освіти, що не завжди буває ефективним в силу різноманітних причин. Таким чином, **дослідження** полягає в пошуку ефективних шляхів формування ключових компетентностей школярів на рівні уроків *математики*.

Саме тому, надзвичайна актуальність і недостатня розробленість даної проблеми у сучасній науці зумовила вибір теми дослідження: Формування ключових компетентностей при розв'язуванні геометричних задач в сучасній школі.

Мета роботи полягає у вивченні особливостей формування ключових компетентностей при розв'язуванні геометричних задач в сучасній школі.

Об'єктом дослідження є здійснення компетентнісного підходу при розв'язуванні геометричних задач.

Предметом дослідження є особливості формування ключових компетентностей в сучасній школі.

Досягнення поставленої мети було поставлено такі **завдання**:

- визначити особливості компетентнісного підходу;
- дослідити загальні поняття геометричних задач та їх класифікацію;
- виявити можливості компетентнісного підходу при розв'язанні геометричних задач та шляхи його реалізації на уроках математики;
- реалізувати ключові компетентності на практиці розв'язування геометричних задач.

Методом дослідження є описово-аналітичний метод, що полягає у зібранні та упорядкуванні матеріалу.

Структура та обсяг. Кваліфікаційна робота складається із вступу, двох розділів, загального висновку, списку використаних джерел з 58 од.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

1.1. Сутність понять «компетентність» та «компетентнісний підхід»

Завдання системи освіти завжди полягало в формуванні у підростаючого покоління тих знань, поведінкових моделей, цінностей, які дозволять йому бути успішним поза стінами школи. У сучасній економіці конкурентоспроможність людини на ринку праці багато в чому залежить від її здатності опановувати нові технології, адаптуватися до мінливих умов праці, орієнтуватися в гігантських інформаційних потоках. Таким чином, ідея компетентнісно орієнтованої освіти стала відповіддю системи освіти на нові запити світу праці. Сьогодні освіта стоїть перед вирішенням завдання, яке розглядають освітні системи всіх розвинених країн - формування ключових компетентностей громадян засобами освіти.

У тлумачному словнику *компетентність* визначається як «обізнаність, авторитетність», а компетенція має два значення: «1. Коло питань, явищ, в яких дана особа володіє авторитетністю, пізнанням, досвідом», «2. коло повноважень якої-небудь організації, установи, особи». У педагогічній літературі ці терміни часто використовуються. Їх широке застосування цілком виправдано, особливо у зв'язку з необхідністю модернізації змісту освіти. Згідно І. С. Фішман, *компетентність* - результат освіти, що виражається в оволодінні учнями певним набором способів діяльності, по відношенню до певного предмета». За І. С. Фішман, *знання* - це інформація, придбана людиною. *Уміння* - підготовленість до практичних і теоретичних дій, точне, швидке і свідоме виконання на основі засвоєних знань і життєвого досвіду, які, удосконалюючись і автоматизуючись, перетворюються в навички. *Навички* - дії, що виконуються автоматично».

Слід зазначити, що поділ на компетентності умовний, оскільки в реальній діяльності одночасно кілька складних умінь відокремити в чистому вигляді неможливо. У той же час і педагогам, і адміністраторам усіх рівнів потрібна

якась класифікація, що дозволяє всередині системи освіти чітко означити результати освіти і працювати на їх досягнення.

- **Компетентність у сфері самостійної пізнавальної діяльності**, заснована на засвоєнні способів отримання знань із різних джерел інформації, в тому числі позашкільних;

- **Компетентність у сфері соціально-трудової діяльності** (у тому числі вміння аналізувати ситуацію на ринку праці, оцінювати власні професійні можливості, орієнтуватися в нормах і етиці взаємовідносин, навички самоорганізації);

- **Компетентність у побутовій сфері** (включає аспекти власного здоров'я, сімейного буття та інші);

- **Рефлексивна компетентність**: готовність організовувати свою діяльність відповідно до позицій Що я роблю (робив, буду робити?), Навіщо я це роблю (робив, буду робити?), Як я це роблю (робив, буду робити?), Що я отримаю (отримав) в результаті?;

- **Технологічна компетентність**: здатність і готовність до розуміння інструкції, описи технології, алгоритму діяльності, до чіткого дотримання технології діяльності;

- **Проектна компетентність**: готовність аналізувати ситуацію, виділяти проблеми, висувати ідеї, що сприяють вирішенню проблем, ставити цілі і співвідносити їх з прагненнями інших людей, програмувати і планувати свою діяльність, оцінювати результати своєї діяльності;

- **Комунікативна компетентність**: готовність отримувати необхідну інформацію, представляти і цивілізовано відстоювати свою точку зору в діалозі і в публічному виступі на основі визнання різних позицій і шанобливого ставлення до цінностей (релігійних, етнічних, професійним, особистісних і т.п.) інших людей;

- **Інформаційна компетентність**: готовність робити аргументовані висновки, здійснювати інформаційний пошук і витягувати інформацію з різних

джерел на будь-яких носіях, використовувати інформацію для планування і здійснення своєї діяльності;

- **Соціальна компетентність:** здатність співвідносити свою наполегливість з інтересами інших людей і соціальних груп, продуктивно взаємодіяти з членами команди, вирішуючи загальну задачу.

- **Загальнокультурна компетентність** - використання відомостей з різних областей знань, формування грамотної, логічної, вірної вимови, здатність аналізувати і діяти з позиції окремих галузей людської культури, а також прийняття відмінностей, повага до інших та здатність жити з людьми інших культур, мов і релігій;

- **Навчально-пізнавальна компетентність** - прищеплення інтересу до навчання, здатність вчитися протягом життя;

- **Інформаційна компетентність** - вміння добувати потрібну інформацію, використовуючи доступні джерела. Володіння технологіями, розуміння їх застосування слабких і сильних сторін і способів до критичного судження стосовно інформації, яка поширюється засобами масмедіа та рекламою.

З даних позицій ключовими освітніми компетенціями є наступні.

1.Ціннісно-смілова компетенція. Це компетенція у сфері світогляду, пов'язана з ціннісними уявленнями учня, його здатністю бачити і розуміти навколишній світ, орієнтуватися в ньому, усвідомлювати свою роль і призначення, вміти вибирати цільові і смислові установки для своїх дій і вчинків, приймати рішення. Ця компетенція забезпечує механізм самовизначення учня в ситуаціях навчальної або іншої діяльності. Від неї залежить індивідуальна освітня траєкторія учня і програма його життєдіяльності в цілому.

2.Загальнокультурна компетенція- коло питань, в яких учень повинен бути добре обізнаний, володіти знаннями та досвідом діяльності. Це особливості національної та загальнолюдської культури, духовно-моральні основи життя людини і людства, окремих народів, культурологічні основи

сімейних, соціальних, суспільних явищ і традицій, роль науки та релігії в житті людини, їх вплив на світ, компетенції у побутовій та культурно-дозвіллевій сфері, наприклад, володіння ефективними способами організації вільного часу.

3. Навчально-пізнавальна компетенція. Це сукупність компетенцій учня у сфері самостійної пізнавальної діяльності, що включає елементи логічної, методологічної, загальнонавчальної діяльності, співвіднесені з реальними пізнаваними об'єктами. Сюди входять знання та вміння планування, аналізу, рефлексії, самооцінки навчально-пізнавальної діяльності. Учень оволодіває креативними навичками продуктивної діяльності: отримання знань безпосередньо з реальності, володіння прийомами дій в нестандартних ситуаціях, евристичними методами вирішення проблем. У рамках цієї компетенції визначаються вимоги відповідної функціональної грамотності: вміння відрізняти факти від домислів, володіння вимірювальними навичками, використання імовірнісних, статистичних та інших методів пізнання.

4. Інформаційна компетенція. За допомогою реальних об'єктів (телевізор, магнітофон, телефон, факс, комп'ютер, принтер, модем, копір) та інформаційних технологій (аудіо-і відеозапис, електронна пошта, ЗМІ, Інтернет) формуються вміння самостійно шукати, аналізувати і відбирати необхідну інформацію, організувати, перетворити, зберегти і передати її. Ця компетенція забезпечує навички діяльності учня з інформацією, що міститься в навчальних предметах і освітніх галузях, а так само в навколишньому світі.

5. Комунікативна компетенція включає знання необхідних мов, способи взаємодії з оточуючими і віддаленими людьми і подіями, навички роботи в групі, володіння різними соціальними ролями у колективі. Учень повинен вміти уявити себе, написати листа, анкету, заяву, поставити запитання, вести дискусію і ін. Щоб освоїти цю компетенцію в навчальному процесі, фіксується необхідна і достатня кількість реальних об'єктів комунікації і способів роботи з ними для кожного учня, ступеня навчання в рамках кожного досліджуваного предмета чи освітньої галузі.

6. Соціально-трудова компетенція означає володіння знаннями і досвідом у цивільно-громадській діяльності (виконання ролі громадянина, спостерігача, виборця, представника), в соціально-трудої сфері (права споживача, покупця, клієнта, виробника), в області сімейних відносин і обов'язків, в питаннях економіки і права, у професійному самовизначенні. У цю компетенцію входять, наприклад, вміння аналізувати ситуацію на ринку праці, діяти відповідно до особистої та громадської вигоди, володіти етикою трудових і цивільних взаємовідносин. Учень оволодіває мінімально необхідними для життя в сучасному суспільстві навичками соціальної активності та функціональної грамотності.

7. Компетенція особистісного самовдосконалення спрямована на те, щоб освоювати способи фізичного, духовного та інтелектуального саморозвитку, емоційну саморегуляцію. Реальним об'єктом тут виступає сам учень. Він опановує способи діяльності у власних інтересах і можливостях, що виражаються в його безперервному самопізнанні, розвитку необхідних сучасній людині особистісних якостей, формуванні психологічної грамотності, культури мислення і поведінки. До цієї компетенції відносяться правила особистої гігієни, турбота про власне здоров'я, статева грамотність, внутрішня екологічна культура. Сюди ж входить комплекс якостей, пов'язаних з основами безпечної життєдіяльності.

1.2.Формування ключових компетентностей

Ключеві компетентності нової української школи «Національні стратегії розвитку освіти України на 2012–2021 рр.» не тільки зупинять розвиток негативних тенденцій, але й дозволять виховати творчих людей, відповідальних, активних громадян, готових до співпраці у новому європейському суспільстві. Проект Нової української школи широко обговорюється у пресі, зокрема у статтях міністра освіти і науки України Л.М. Гриневич, роботах науковців О.Б. Бігич, Л.В. Калініної, В.Г. Редька та ін.

Відповідно до проекту нового базового Закону України «Про освіту» визначено 10 ключових компетентностей для Нової української школи: [12, с. 23-24].

1. Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовою. Це вміння усно і письмово висловлювати й тлумачити поняття, думки, почуття, факти та погляди (через слухання, говоріння, читання, письмо, застосування мультимедійних засобів). Здатність реагувати мовними засобами на повний спектр соціальних і культурних явищ – у навчанні, на роботі, вдома, у вільний час. Усвідомлення ролі ефективного спілкування.

2. Спілкування іноземними мовами. Уміння належно розуміти висловлене іноземною мовою, усно і письмово висловлювати і тлумачити поняття, думки, почуття, факти та погляди (через слухання, говоріння, читання і письмо) у широкому діапазоні соціальних і культурних контекстів. Уміння посередницької діяльності та міжкультурного спілкування.

3. Математична компетентність. Уміння застосовувати математичні (числові та геометричні) методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності. Здатність до розуміння і використання простих математичних моделей. Уміння будувати такі моделі для вирішення проблем.

4. Компетентності у природничих науках і технологіях. Наукове розуміння природи і сучасних технологій, а також здатність застосовувати його в практичній діяльності. Уміння застосовувати науковий метод, спостерігати,

аналізувати, формулювати гіпотези, збирати дані, проводити експерименти, аналізувати результати.

5. Інформаційно-цифрова компетентність передбачає впевнене, а водночас критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, в публічному просторі та приватному спілкуванні; інформаційна й медіаграмотність, основи програмування, алгоритмічне мислення, робота з базами даних, навички безпеки в інтернеті та кібербезпеці; розуміння етики роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність тощо).

6. Уміння вчитися впродовж життя. Здатність до пошуку та засвоєння нових знань, набуття нових вмінь і навичок, організація навчального процесу (власного і колективного), зокрема через ефективне керування ресурсами та інформаційними потоками, вміння визначати навчальні цілі та способи їх досягнення, вибудовувати свою освітньо-професійну траєкторію, оцінювати власні результати навчання, навчатися впродовж життя.

7. Соціальні і громадянські компетентності. Усі форми поведінки, які потрібні для ефективної та конструктивної участі у громадському житті, на роботі. Уміння працювати з іншими на результат, попереджати і розв'язувати конфлікти, досягати компромісів.

8. Підприємливість. Уміння генерувати нові ідеї й ініціативи та втілювати їх у життя з метою підвищення як власного соціального статусу та добробуту, так і розвитку суспільства і держави. Здатність до підприємницького ризику.

9. Загальнокультурна грамотність. Здатність розуміти твори мистецтва, формувати власні мистецькі смаки, самостійно виражати ідеї, досвід та почуття за допомогою мистецтва. Ця компетентність передбачає глибоке розуміння власної національної ідентичності як підґрунтя відкритого ставлення та поваги до розмаїття культурного вираження інших.

10. Екологічна грамотність і здорове життя. Уміння розумно та раціонально користуватися природними ресурсами в рамках сталого розвитку,

усвідомлення ролі навколишнього середовища для життя і здоров'я людини, здатність і бажання дотримуватися здорового способу життя [5, с. 13-14].

1.3. Основні математичні компетентності та напрями їх набуття.

Компоненти математичної компетентності

Математичні компетентності складають основу для формування ключових компетентностей. За визначенням С.А. Ракова, математична компетентність — це спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень.

Складові математичної компетентності:

1. Процедурна компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі, необхідно:

- використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач;
- уміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміти розпізнавати типову задачу або зводити її до типової;
- уміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язувань типових задач (підручник, довідник, Інтернет-ресурси).

2. Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, необхідно:

- володіти і використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, визначення понять; висловлювання, аксіоми, теореми і їх доведення, контрприклад до теорем тощо);
- відтворювати дедуктивні доведення теореми та доведення правильності процедур розв'язувань типових задач;
- здійснювати дедуктивні обґрунтування правильності розв'язання задач та шукати логічні помилки у неправильних дедуктивних міркуваннях;

- використовувати математичну та логічну символіку на практиці.

3. Технологічна компетентність – володіння сучасними математичними пакетами. (пакети символічних перетворень, динамічної геометрії – Gran – 2Д(3Д), електронні таблиці (Excel), необхідно:

- розв’язувати типові задачі з використанням основних типів навчального математичного програмного забезпечення;
- оцінювати похибки при використанні наближених обчислень;
- будувати комп’ютерні моделі для предметної області задачі з метою їх евристичного, наближеного або точного розв’язання;
- досліджувати комп’ютерні моделі за допомогою комп’ютерних експериментів.

4. Дослідницька компетентність – володіння методами дослідження практичних та прикладних задач математичними методами, необхідно:

- формулювати математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач (специфікація у професійному ліцеї);
- будувати аналітичні та алгоритмічні моделі задач;
- висувати та перевіряти справедливості гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень;
- інтерпретувати результати, отримані формальними методами;
- систематизувати отримані результати, досліджувати межі справедливості отриманих результатів, установлювати зв’язки з попередніми результатами, шукати аналогії в інших розділах математики.

5. Методологічна компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв’язання практичних та прикладних задач, необхідно:

- аналізувати ефективність розв’язання задач математичними методами;
- рефлексія власного досвіду розв’язування задач та подолання перешкод з метою постійного вдосконалення власної методології проведення досліджень.

Компоненти математичної компетентності

Природа компетентності така, що вона може проявлятися лише в органічній єдності з цінностями людини, тобто в умовах глибокої особистої зацікавленості в даному виді діяльності.

Компонентами математичної компетентності, як і будь-якої іншої, є:

- мотиваційний – внутрішня мотивація, інтерес;
- змістовний – комплекс математичних знань, умінь та навичок;
- дійовий – навички навчальної праці (самостійність, самооцінка, самоконтроль).

Формування **мотиваційного компонента** здійснюється через забезпечення позитивного ставлення учнів до математичної діяльності; виховання пізнавального інтересу. Використання на уроках висловів відомих особистостей. Шифровані вправи дають можливість швидко перевірити якість знань учнів та познайомитись з відомими математиками.

Внутрішня мотивація у багатьох учнів ще нестійка і залежить від ситуації. Тому необхідно пропонувати логіко розвивальні завдання, цікаві факти з життя знаменитих людей, різноманітні історичні матеріали, ігрові ситуації, розв'язання ситуативних задач. Мотивувати вивчення в школі векторів, тригонометричних функцій, інтегралів, похідних, комплексних чисел тим, що цей матеріал знадобиться у вузі недоцільно – така мотивація буде дуже слабкою. А от показати, що набуті знання застосовуються для розв'язання практичних задач, розглянути задачу з іншого предмета – важливо.

При узагальненні й систематизації знань учнів про функції та їхні властивості мотивувати навчальну діяльність можна словами відомого математика Е. Вігнера, що уся глибина думки, закладеної у формулюванні математичних понять, згодом розкривається тим умінням, з яким це поняття використовується. За допомогою тієї самої функції можна досліджувати будь-які за своєю природою процеси. Здавалося б, що спільного між збільшенням

поток інформації та зменшенням атмосферного тиску при збільшенні висоти над рівнем моря? Відповідь проста: ці явища можна вивчити й описати за допомогою тієї самої функції. Сьогодні ми повторимо все, що ви знаєте про функцію, адже без цього неможливий подальший рух уперед.

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності і навичками їх застосувань до розв'язування прикладних задач. У процесі роботи над задачами такого типу здійснюється навчання учнів елементам математичного моделювання; вони не лише засвоюють найважливіші математичні поняття, але й відчують взаємозв'язок теорії з практикою, усвідомлюють значення та необхідність вивчення теми, формують ключові компетентності. Прикладні задачі, особливо ті, які не втратили своєї актуальності впродовж століть, забезпечують гармонійну взаємодію учнів із суспільством.

Уроки повинні бути заповнені задачами прикладного спрямування тому, що їх використання спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь та навичок, робота з ними розвиває вміння осмислювати зміст понять та застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки, розширює світогляд учнів.

Тестові арифметичні задачі відображають типові життєві ситуації, тому кожна з них можна сприймати як документ свого часу, а збірник задач як збірник документів.

Прикладні задачі економічного змісту розвивають економічне мислення, що є однією з найважливіших умов формування творчої та соціально адаптованої компетентної особистості.

Формування **змістовного компоненту** математичної компетентності здійснюється на основі індивідуально-диференційованого підходу. При цьому використовують різні форми організації навчальної діяльності учнів: індивідуальну, групову, фронтальну, роботу в парах.

Одним із найбільш доступних і перевірених практикою шляхів підвищення ефективності уроку, активізації учнів на уроці являється відповідна

організація самостійної навчальної роботи. Вона займає важливе місце на сучасному уроці тому, що учень набуває знань тільки в процесі особистої самостійної діяльності.

Наприклад, при вивченні теми «Логарифми та їх властивості» після пояснення нового матеріалу можна запропонувати скласти по 2-3 приклади на вивчення властивостей логарифмів.

При вивченні теми «Показникова функція» учні виконують тренувальні вправи. Можна дозволити користуватися підручником, записами в зошиті, таблицями. До тренувальних відносяться завдання на розпізнавання різних об'єктів та їх властивостей. Наприклад, які з даних графіків являються графіком показникової функції? В таких умовах слабші учні включаються в роботу і виконують її.

Великий інтерес в учнів викликають творчі самостійні роботи. Це завдання на пошук другого, третього способу розв'язування задач. Так, учні складають прикладні задачі за поданою схемою з теми «Відсотки».

Для формування оцінки рівня сформованості ключових математичних компетентностей використовуються інтерактивні технології:

- тести з відкритими завданнями;
- включення учнів у дослідницьку діяльність;
- постановка та розв'язання проблемних завдань;
- математичні диктанти;
- графічні диктанти;
- «Мікрофон»;
- «Навчаючи учусь»;
- «Закінчи речення»;
- «Відтвори і озвуч формулу».

Формуючи **дійовий компонент** математичної компетентності треба створити для учнів оптимальні умови для поступового переходу від дій під керівництвом учителя до самостійних, даючи їм змогу самим шукати шляхи розв'язання пізнавальних та практичних завдань.

Успіх роботи учня значною мірою залежить від його здатності контролювати й оцінювати свої дії. Якщо оцінка оптимальна, то сприяє саморозвитку і самореалізації, низька – гальмує самореалізацію.

Фіксація власного ставлення до уроку на кожному його етапі за допомогою зорових сигналів, схем, усної відповіді формує свідомість, критичне мислення учнів щодо знань або інформації, отриманої на уроці, готовності використовувати її в житті.

Для підвищення інтересу учнів до вивчення математики доцільно використовувати нестандартні уроки:

Ділова гра – урок удосконалення вмінь учнів розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності.

Брейн-ринг – урок узагальнення й систематизації знань з теми «Інтеграл та його застосування».

Урок – практикум «Тотожні перетворення тригонометричних виразів».

Урок – захист проектів «Правильні многогранники» та ін.

Всебічний розвиток обдарувань школярів здійснюється не тільки в ході навчальної діяльності, а й під час проведення позакласних заходів. Залучення учнів до математичних конкурсів, олімпіад дає позитивні результати. Математичні турніри, конкурси, змагання розширюють і поглиблюють здобуті на уроках знання, показують застосування їх на практиці, розвивають мислення, математичні здібності, допомагають увійти у світ наукових і технічних ідей, сприяють формуванню математичних компетентностей школярів. Знання історії математики, вкладу вітчизняних учених у її розвиток забезпечує підвищення рівня мотивації учнів щодо вивчення математики, розвиває пізнавальний інтерес та математичну культуру, дає можливість учням знайти для себе взірці для наслідування, сприяє вихованню патріотизму.

Формування вмінь і навичок застосування прийомів розумової діяльності здійснюється за етапами:

1. Знайомство учнів з окремими прийомами мислення при вивченні відповідного матеріалу.

2. Переконання в раціональності застосування даного прийому (не обтяжує, а полегшує розуміння матеріалу).

3. Визначення особливостей теми чи завдання, завдяки яким доцільно застосовувати саме цей прийом.

4. Навчання комплексному використанню різних прийомів мислення в різних комбінаціях.

5. Напрацювання звички самостійно застосовувати прийоми мислення. Для цього потрібно постійно нагадувати учням про доцільність тих чи інших дій, якщо вони самі забувають про це.

Часто діти не розуміють наведеного в підручнику доведення теореми саме через те, що певний факт не обґрунтовується, а вважається й так зрозумілим учневі. Тому працювати з підручником теж треба вчитися, тим більше, що опанування навичок роботи з інформацією стане для них у нагоді протягом всього життя.

Можна запропонувати такі форми роботи:

- Учні читають різні тексти, а потім переказують (пояснюють) один одному прочитане.
- Скласти питання (систему питань) до тексту та запропонувати іншим на них відповіді.
- Встановити зв'язок між уже знайомими поняттями (темами) і новими (наприклад, порівняти ознаки рівності й подібності трикутників).
- Скласти тези, конспект, зробити виписки.
- Придумати приклади, які б ілюстрували прочитане.
- Скласти завдання за матеріалом теми.
- Викласти матеріал із помилками, які інші учні повинні знайти.
- Серед завдань, що містяться в підручнику, вибрати ті, що відповідають темі уроку.

В сучасному житті велику роль відіграє вміння працювати на комп'ютері. Учням він допомагає оволодіти навичками самостійного пошуку та

опрацювання інформації. На уроках математики комп'ютер також стане у нагоді: зручно проводити тестування, будувати графіки, демонструвати навчальний матеріал із окремих тем. Існують комп'ютерні навчальні програми з математики, але для їх використання необхідний поділ класу на групи та наявність вільного комп'ютерного класу, що не завжди можливо. Учні старших класів можуть створювати навчальні програми в межах написання курсової роботи з інформатики або презентації з викладом певної теми (при цьому вони систематизують знання з математики).

Треба зазначити, що учням подобаються бінарні уроки, зокрема математики та інформатики. Такі уроки передбачають роботу школярів із комп'ютером, тому напередодні необхідно виконати «чорнову роботу» (запуск програм, робота з нею тощо), щоб на уроці ніщо не відволікало учнів від основної навчальної діяльності.

Мета роботи вчителя математики – розвиток особистості учня, його творчого потенціалу та пізнавальної активності, формування математичної компетентності через такі завдання:

- 1) поширення системних знань через міжпредметні зв'язки, що робить людину компетентною;
- 2) забезпечення засвоєння учнями практичних навичок, необхідних для життя в сучасному суспільстві.

Математична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Зрозуміло, що забезпечити набуття учнями математичних компетентностей може тільки компетентний учитель. Він повинен бути компетентним не тільки у своїй предметній галузі — математиці, а й у галузі педагогіки і психології.

Процес обговорення математичних компетентностей буде незавершений, якщо не обговорити методи навчання, які сприяють набуттю математичних компетентностей у процесі навчання, якщо не обговорити критерії набуття математичних компетентностей та засобів вимірювання їх рівня набуття.

Активні методи навчання:

- Метод конкретної ситуації (вчить школярів думати, узагальнювати, аналізувати, розглядати різні варіанти, складати свої задачі. Доцільніше розібрати кілька способів розв'язання однієї задачі, ніж кілька схожих задач).

- Метод інциденту (залучення учнів до участі в олімпіадах, у міжнародній грі «Кенгуру». Учні вчаться долати інертність, переборювати стресові ситуації, що так важливо у житті).

- Метод мозкового штурму (привчає учнів на поставлені запитання давати свої варіанти відповідей).

- Метод занурення (створюються ситуації, де учні занурюються в поставлені завдання, ефективно розв'язують їх).

- Метод евристичних питань (спонукає учнів думати, аналізувати).

- Кооперативний метод (використовується при роботі в групах).

- Дослідницький метод.

- Метод проектів (метод проектів стимулює учнів до розв'язання проблем; розвиває критичне мислення; учні набувають навичок роботи з інформацією; вчаться вирішувати пізнавальні, творчі завдання у співробітництві; проектна діяльність відкриває в учнях лідерів, які уміють організувати роботу в своїх групах; розвивається вміння співпрацювати, відчувати себе членом команди, брати відповідальність на себе, формується комунікативна компетентність).

Важливе завдання процесу навчання математики в школі — домогтися глибокого і міцного засвоєння учнями теоретичних знань: математичних понять, тверджень про їхні властивості (аксіоми, теореми), правил, законів; сформувати навички й уміння застосування теоретичних знань на практиці і оволодіння способами творчої діяльності.

Процес навчання — двосторонній процес взаємодії між тим, хто вчить, і тим, хто навчається. Закономірності процесу навчання, що об'єктивно існують, виступають як основні вимоги до практичної організації навчального процесу. Вони дістали назву дидактичних принципів.

Дидактичні принципи організації навчального процесу:

- Науковість і ідейно-політична спрямованість.
- Проблемність.
- Наочність.
- Активність і свідомість.
- Доступність.
- Систематичність і послідовність.
- Міцність.
- Єдність освіти, розвитку і виховання.

Внутрішня мотивація в багатьох учнів ще нестійка і залежить від ситуації. Тому необхідно пропонувати цікаві логікорозвивальні завдання, розв'язання ситуативних завдань, цікаві факти із життя знаменитих людей, різноманітні історичні матеріали, ігрові ситуації.

Розвитку пізнавальних інтересів та пізнавальної активності учнів сприяє: залучення їх до самостійного пошуку й «відкриття» нових знань, розв'язання задач проблемного характеру; якщо навчання потребує напруження думки, мислення, але посильне; коли навчальний матеріал пов'язаний з раніше вивченим; завдання практичного і прикладного характеру, зокрема і старовинні; використання диференційованих дидактичних матеріалів, комп'ютерної техніки, мультимедійних засобів навчання.

На уроках математики учні повинні розв'язувати задачі, які спонукають думати, зіставляти різні методи; сприяють розвитку мислення (творчого, критичного) і застосуванню різних способів вираження думки; інтуїції – здатності передбачати результат і знаходити шлях до розв'язання; знаходити їм практичне застосування.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

2.1. Загальні поняття геометричних задач та їх класифікація

У літературі з психології та педагогіки немає єдиного тлумачення поняття «задача». Залежно від підходу до взаємовідносин предмета та завдання, автори трактують його по-різному. Кібернетика, дидактика та методи навчання математики розглядають проблему як ситуацію зовнішньої діяльності, запропоновану окремо від предмета діяльності. Тому здебільшого під проблемою розуміють будь-яку вимогу щось обчислити, перетворити, побудувати чи довести. Психологія розглядає мету, поставлену в певних умовах, як особливу характеристику предмета. Проблема тут трактується як суб'єктивне психологічне відображення зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [16, с. 10].

Поняття задачі тлумачиться з різних точок зору. У психологічній літературі їх детальне вивчення проводив Г. О. Балл. На думку вченого, термін «задача» використовується для позначення об'єктів, які поділяються на три різні категорії:

- 1) призначення суб'єкта та вимоги, що пред'являються до нього;
- 2) ситуація, яка, крім мети, включає умови, за яких вона повинна бути досягнута;
- 3) словесне формулювання даної ситуації.

Г.О. Балл зазначає, що в психологічній літературі найпоширенішим є вживання терміна «задача» для позначення об'єктів другої категорії. Об'єкти першої категорії використовують вираз «мета дії», «вимога завдання», третьої – «постановка проблеми».

Аналізуючи різні трактування концепції проблеми, ми можемо зазначити, що в кожному з них погляди на взаємозв'язок суб'єкта та проблеми різняться. Прихильники проблеми як ситуації, в якій суб'єкт повинен діяти, включають її в саме поняття проблеми. До речі, більшість психологів та кібернетиків дотримуються такої ж думки. У методиці викладання математики така

інтерпретація терміна характерна для праць Ю. М. Колягіна. Дослідник зазначає, що без предмета не існує жодного завдання.

Прихильники третього тлумачення проблеми не включають предмет у це поняття. Ця точка зору найбільш чітко і послідовно відображена в працях Л. М. Фрідмана, який характеризує проблему як модель проблемної ситуації, виражену за допомогою знаків якоїсь природної чи штучної мови. На думку дослідника, проблемна ситуація виникає тоді, коли суб'єкт діяльності, спрямований на об'єкт, стикається з якоюсь складністю або перешкодою. Однак проблемна ситуація – це не тільки труднощі чи перешкода в діяльності суб'єкта, але й перешкода, яку сприймає суб'єкт, спосіб усунення якої він хоче знайти. Таким чином, Л. М. Фрідман включає тему в поняття задачі. Отже, задача – це модель ситуації, елементом якої є суб'єкт, який усвідомив труднощі своєї діяльності. Іншими словами, Л. М. Фрідман наділив цю концепцію «суб'єктивними генами», яких він намагається не помічати.

Варто зазначити, що різні автори по-різному трактують взаємозв'язок між поняттями «задача» та «проблемна ситуація». Наприклад, Л. М. Фрідман та деякі інші дослідники вважають концепцію проблемної ситуації первинною; психологи стверджують, що предмет є елементом проблемної ситуації; інші вчені (С. Л. Рубінштейн) розуміють проблему як якусь об'єктивну ситуацію, з якої починається процес мислення. На думку С. Л. Рубінштейна, задача є результатом аналізу людиною проблемної ситуації, яка містить деякі нерозкриті посилання. Тобто дослідник розглядає предмет як елемент проблеми. Однак існує протилежна точка зору, коли поняття проблеми вважається первинним, а поняття проблемної ситуації є другорядним відповідно. Останнє, у свою чергу, оцінюється як фактор, який розглядається стосовно предмета і передбачає його обов'язкову участь.

У процесі викладання математики Ю. М. Колягін початковою концепцією вважає систему «людина – проблемна ситуація», де другим компонентом означає сукупність (Р) взаємопов'язаних через деякі властивості та взаємозв'язки елементів. Якщо людина, яка контактувала з цією сукупністю, знає всі її

елементи, властивості та відношення, то така система (P) називається стаціонарною щодо цієї людини. Однак, коли людина не знає хоча б одного елемента, властивості чи відносин, система P називається проблематичною стосовно суб'єкта.

Вирішити проблему означає перетворити цю проблемну ситуацію на відповідно стаціонарну або встановити, що таке перетворення неможливе в цих умовах.

Інтерпретація концепції проблеми як особливої взаємодії між суб'єктом та об'єктом займає важливе місце в дослідженнях кібернетики. Так, у монографії В. М. Глушкова, В. І. Брановицького, А. М. Довгаля та ін., задача характеризується як проблемна система, що розглядається стосовно системи вирішення [16, с. 15]. Основними компонентами проблемної системи є предмет дії та вимога, а головними компонентами розв'язувальної системи – шляхи та засоби вирішення проблеми. Очевидно, що компоненти проблемної системи є об'єктивним фактором проблеми, а компоненти розв'язувальної системи є суб'єктивними. Оскільки стаціонарна система P і проблемна ситуації суб'єктивні, то вирішення буде суб'єктивним.

З огляду на вищевикладене, можна стверджувати, що найпоширенішим є визначення задачі як системи (Г. О. Балл, Ю. М. Колягін, Л. М. Фрідман, А. Ф. Єсаулов). Автори по-різному описують явища, пов'язані з цим поняттям. Найпоширенішим є вживання терміна «задача» для позначення ситуації, що включає мету та умови її досягнення. Це поняття характеризується двома сторонами: об'єктивною та суб'єктивною. Перша включає предмет дії, вимогу, місце в системі проблем, логічну структуру вирішення проблеми, визначеність чи невизначеність умови тощо, а другий – методи та засоби її вирішення.

Проблемі класифікації задач в методологічній, психологічній та кібернетичній літературі присвячено багато досліджень. У методиці викладання математики тривалий час була загальноприйнята класифікація, в основі якої – характер вимоги, це: проблеми на доведення; завдання на побудову; задачі на обчислення. Успіх цієї класифікації був зумовлений тим, що вона певною

мірою визначала вибір методу розв'язання кожного типу задач. Завдяки розширенню цілей навчання та ролі завдань у їх реалізації, проблеми, що не відповідають традиційній типології, стали «проникати» в шкільний курс математики. Їхні функції у навчанні демонструються за допомогою такої класифікації задач: проблема з дидактичними функціями; проблема з когнітивними функціями; проблема з розвитком функцій (К.І. Нешков та А.Д. Семущин). Ця класифікація дозволяє обґрунтовано підбирати завдання, хоча на практиці важко виділити їх типи. Задачі з дидактичними функціями призначені для засвоєння теоретичного матеріалу; у процесі розв'язування задач другого типу студенти поглиблюють теорію та методи їх розв'язання; задачі третього типу відображають не тільки зміст базового курсу математики, а й застосовують вже вивчені питання курсу.

Навчальний матеріал з математики з метою більш ефективного аналізу можна подати у вигляді трьох великих блоків:

- 1) теоретичні знання – факти, визначення, теореми, алгоритми, методи доведення математичних тверджень;
- 2) математичні задачі – виявлення функцій задач на певну тему або абзац; визначення методів навчальної роботи, які потребують оновлення або формування на етапі пошуку розв'язання;
- 3) встановлення взаємозв'язку між теоретичними знаннями та математичними проблемами.

Задачі в шкільній освіті є метою та засобом навчання, оскільки з їх допомогою формуються основні математичні поняття та розкривається суть математичних фактів у реальній ситуації. Тому необхідно, щоб майбутній вчитель мав навички виконання методичного аналізу завдань.

Під методичним аналізом математичних задач мають на увазі певну послідовність дій вчителя, зокрема:

1. Визначення функцій завдання за певною темою або абзацом;
2. Визначення систем задач, що реалізують ідею розвивального та навчального навчання математики;

3. Аналіз стану проблеми: виявлення наслідків прямо зазначеної інформації та переклад задач на мову певної теорії;

4. Вибір відповідних етапів вирішення проблеми: пошук вирішення (доказу) та процес розв'язування (доведення);

5. Визначення конкретних (математичних) та загальноосвітніх дій, які є основою процесу розв'язування;

6. Виявлення труднощів: математичні – розуміння основної ідеї процесу вирішення проблеми; психологічні – встановлення певних властивостей досліджуваних об'єктів шляхом включення їх у систему нових зв'язків і відносин; методичний – використання наочних посібників, ТЗН.

7. Встановити рівень, на якому пропонується завдання: відтворення, розуміння або передача.

8. Визначення рівня знань, який повинен формуватися в учнів у процесі виконання завдань [18, с. 30-31].

Якість знань студентів, яка формується в ході вирішення проблем, повинна характеризуватися гнучкістю, коли студент розуміє структуру власної діяльності та володіє прийомами навчання для її перебудови, може переосмислити результат, отриманий при розв'язанні та змістовність: оперуючи тим чи іншим поняттям, демонструє здатність застосовувати його в різних ситуаціях, при вирішенні проблеми здатний робити умовиводи та обґрунтовувати, на основі якого математичного факту робиться той чи інший висновок.

У. Р. Рейтман та Ю. М. Колягін робили спроби класифікувати проблеми за масштабом проблеми. Таким чином, Ю. М. Колягін, залежно від того, які компоненти задачі (умова – А, висновок – В, розв'язок – R, основа для розв'язання задачі – С) невідомі тим, хто її розв'язує, визначає таку типологію завдань:

Тип I – усі компоненти відомі (ACRB).

Тип II – один компонент невідомий: XCRB; AXRB; AШB; ACRX.

Тип III – два компоненти невідомі: AXYB; XCRY; XYRB та інші.

Тип IV – три компоненти невідомі: XYZB; AXYZ; XCYZ; XYRZ.

Проблеми цих типів Ю. М. Колягін називає стандартними, навчальними, пошуковими, проблемними [8, с. 120-121].

Запропонована класифікація охоплює багато типів завдань, але, на наш погляд, має певні недоліки. Адже конкретну проблему можна віднести до відповідного типу лише стосовно знань того, хто її вирішує. Крім того, існування багатьох типів проблем є дуже сумнівним, зокрема тих, у яких невідомий стан, висновок, основа, але відоме вирішення.

Задачі також можна згрупувати за методами їх розв'язання: проблема геометричних перетворень, проблема векторів тощо. Залежно від кількості об'єктів, доступних в умові, та взаємозв'язків між ними, існують складні та прості завдання. Крім того, існують стандартні та нестандартні, теоретичні та практичні, усні та письмові завдання тощо. Зверніть увагу, що певні класифікації відносні і не відповідають логічним вимогам щодо класифікації об'єктів. Тому правильніше було б сперечатися про інтеграцію завдань у групи.

Останнім часом набула поширення типологія завдань, при якій кожен тип співвідноситься із компонентами навчальної діяльності: організаційні та ефективні, стимулюючі, контрольні та оціночні. Враховуючи наведене порівняння, існують такі типи завдань: завдання, що стимулюють навчально-пізнавальну діяльність; завдання, в процесі виконання яких здійснюється контроль та самоконтроль ефективності навчально-пізнавальної діяльності. Залежно від специфіки навчальної діяльності класифікація буде наповнюватися конкретним змістом: завдання, що стимулюють набуття знань, умінь та навичок; завдання, під час виконання яких набувають знань, умінь та навичок; завдання, що контролюють засвоєння знань, умінь та навичок.

Термін «вправа» використовується поряд із терміном «завдання». Звідси виникає питання, як ці поняття співвідносяться?

У науковій літературі існують різні тлумачення терміна «вправа». Зокрема, це трактується як засіб своєрідного навчання, розвитку відповідних навичок. Визначення термінів «вправа» та «завдання» ставить під сумнів

доцільність використання різних термінів для позначення єдиного поняття. Однак очевидно, що поняття «завдання» ширше за значенням, ніж поняття «вправа». Для того, щоб зрозуміти різницю в їх значеннях, необхідно вказати видові відмінності вправи.

При взаємодії людини і проблемної ситуації змінюється як проблемна ситуація, так і тема. Зміни в проблемній ситуації зумовлені вимогою проблеми і передбачають перетворення умови, зміну взаємозв'язків між об'єктами тощо. Зміни в предметі характеризуються формуванням відповідних знань, умінь та навичок. Зміни в проблемній ситуації або зміни особистості студента, який вирішує проблему, стають важливими в цій взаємодії. Метою проблеми є результат, який характеризує зміну в системі «людина – проблемна ситуація». Враховуючи цю термінологію, можна стверджувати, що безпосереднім продуктом проблеми є зміна проблемної ситуації або зміна особистості вирішувача проблем. Вправою можна вважати завдання, безпосереднім продуктом якого є набуття знань, умінь і навичок.

Застосування методологічних концепцій системи та цілісності дозволяє пояснити сучасний процес навчання. Загальним у його інтерпретаціях, заснованих на діяльнісному підході (М.І. Махмутов) та розумінні змісту освіти як соціального досвіду людства, є оволодіння методами діяльності, що є елементом змісту навчання. Ці методи реалізуються за допомогою спеціальних об'єктів – їх носіїв, і взаємодія з ними має забезпечувати засвоєння методів діяльності – безпосереднього продукту (результату) цієї взаємодії. Таким чином, цей об'єкт є одночасно носієм дій і засобом їх засвоєння. Зазначимо, що психологія розглядає знання як діяльність, що оцінюється з точки зору її результату. З огляду на цю концепцію знань, їх засвоєння передбачає, перш за все, оволодіння діями, адекватними знанню.

Вивчення процесу навчання показує, що це взаємопроникнення споглядання, мислення та практики. Хоча навчання характеризується різноманітними рівнями та типами практики, але загалом є перевага практики в

єдності із застосуванням наукових знань . Більше того, практика може не тільки формувати знання, але й передувати їм і супроводжувати їх.

Враховуючи вищесказане, ми робимо висновок, що вправа є різнобічним явищем, яке характеризується як: здійснення дій, адекватних змісту викладання математики; засіб цілеспрямованості умінь і навичок; метод організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів; одна з форм реалізації методів навчання; засіб зв'язку теорії з практикою. Ця модель вправ показує, що з огляду на зміст навчання, вправи є носієм дії, з точки зору методів навчання – одна з форм їх прояву, з навчального процесу – засіб цілеспрямованого формування знань, умінь та навичок. В контексті діяльності вправи є одним із способів організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів.

Отже, беручи до уваги вищесказане, ми робимо висновок, що в контексті підручників математики шкільні задачі є вправами, тому розглянуті типології задач можна розглядати як типології вправ. Однак, враховуючи традицію використання терміна «завдання» у шкільних підручниках, ми вважаємо за необхідне слідувати йому.

На додаток до терміна «вправа», завдання іноді асоціюється з категорією «запитання».

Аналіз найважливіших форм наукового пізнання – питань, визначень, наукових пояснень тощо – призводить до парадоксальної ситуації: досліджуваний об'єкт є одночасно і об'єктом дослідження, і способом (засобом, методом) цього дослідження. Так, якщо ми хочемо відповісти на питання, що таке визначення, спочатку ми повинні використовувати це визначення як засіб вивчення себе. Таким чином, існує потреба у вивченні об'єкта з метою застосування методу, який є об'єктом дослідження.

Взаємодія вчителя та учня за допомогою форми запитань і відповідей застосовувалася з давніх часів. Питання розглядалося як стимул для творчих роздумів, як засіб наближення учня до істини і навіть самовідкриття.

Мистецтво відповідати на запитання, які не вимагали пам'яті, але «зрілі» міркування, високо цінувалось і культивувалось.

У Словнику української мови та Великому тлумачному словнику сучасної української мови термін «питання» трактується як: прохання когось щось дізнатись; що потрібно уточнити; тема, на яку слід відповісти під час перевірки знань учня чи збору якоїсь інформації тощо; вимоги, запити на будь-яку інформацію чи офіційні роз'яснення щодо чого-небудь.[6, с. 56] Логічний словник-довідник дає таке визначення поняття «питання»: проблема, яку потрібно вирішити, невідома; речення, що містить недостатньо інформації про який-небудь предмет, наділене особливою формою та інтонацією і вимагає відповіді, пояснення.

Термін «питання», на думку М. І. Махмутова, трактується як лінгвістична категорія, що виражає не лише словесне формулювання думки, а й гносеологічне та психологічне, що має глибший зміст, невідоме явище дійсності, яке базується на суперечності між відомим та невідомим. Це протиріччя є джерелом мислення.

Більшість дослідників вважають питання окремим типом проблем. Вони не вимагають особливих зусиль для їх вирішення, наприклад, для визначення поняття, формулювання закону, називання основних частин пристрою тощо. До речі, питання менш інформаційне порівняно із завданням, і тому, на думку М. І. Кондакова не завжди повинно мати форму запитального речення. [29, с. 92],

Питання – це твердження, яке фіксує невідомі елементи, які потребують уточнення. Зазвичай воно виражається запитальним реченням або фразою і має складну структуру, зокрема включає проблемні та напористі компоненти. Останнє характеризує тему питання, висвітлюючи особливості того, що вже відомо і те, що потрібно знайти, а також окреслює можливі значення невідомого. Ця сторона питання іноді виходить на перший план і набуває самостійного значення. З точки зору цінностей істини, питання поділяються на змістовні та безглузді. Питання в основному подається у формі запитального

речення. Кожне запитання має два елементи: що відомо і що потрібно визначити.

Терміни «питання» та «завдання» зазвичай тісно пов'язані.

У теорії проблем питання – це вимога пізнавальної чи комунікативної проблеми, виражена в символічній формі, зокрема у словесній, або складова такої вимоги, яка передбачає визначення принаймні одного з невідомих проблемних об'єктів [3, с. 76].

Отже, наприклад, питанням можна вважати не лише речення «Чому дорівнює периметр квадрата?», Але й – «Знайти периметр квадрата». Отже, тут використовується не граматична, а логічна концепція питання. Характеризуючи це поняття, вони також вказують на «дуже складний взаємозв'язок з граматичними формами їх вираження» [10, с. 772].

Л. М. Фрідман у роботі «Психологічний аналіз проблем» виділяє поняття «завдання» та «питання» і зазначає, що питання (або завдання) правильно поставлене, якщо воно включає наступні вимоги:

- 1) у питанні повинні бути вказані всі елементи предметної області;
- 2) усі предикати, зазначені у питанні, повинні бути визначені щодо тих елементів предметної області, щодо яких ці предикати наведені в задачі;
- 3) діапазон значень кожної зі змінних (суб'єкта чи предиката), зазначених у задачі (питанні), не повинен бути «порожнім»;
- 4) усі твердження, наведені в умові задачі (питання), повинні бути правдивими;
- 5) в умові задачі повинні бути представлені лише дані, що не суперечать її умові.

Враховуючи вищевикладене, слід зазначити, що якщо не враховано хоча б одну з цих вимог, питання вважаються некоректними, а тому можуть бути використані в процесі навчання лише як приклад неправильності.

Розглянемо тлумачення поняття «питання» як тип проблеми. Так, психологи стверджували, що проблема – це питання, яке потрібно вирішити, і сам процес постановки питання є необхідним моментом будь-якої розумової

діяльності. Таким чином, психологи конкретизували це твердження: питання – є обов'язковою складовою будь-якого завдання, яке ставить людина; усвідомлене питання визначає весь процес вирішення проблеми; будь-яке пропущення або «втрата» питання відхиляє думку від вирішення; в ході вирішення проблеми питання постійно співвідноситься з вихідними даними, які можна проаналізувати; саме питання аналізується та з'ясовується; конкретне питання полегшує вирішення проблем.

Отже, «питання» як продуктивна форма думки дуже близька до «пізнавального завдання», але ці поняття потребують певної різниці. Питання як форма думки є обов'язковою складовою пізнавального завдання, тоді як когнітивне завдання містить вихідні дані, тобто на що можна покластися для його вирішення. Запитання як форма думки в процесі навчання можуть також використовуватися без вихідних даних. Завдяки цьому питання є більшою одиницею і, отже, використовується у навчанні частіше, ніж завдання.

Якщо когнітивне завдання, як правило, спрямоване на вирішення учнями, то складні запитання вимагають від учнів більше думати, знаходити конкретні відповіді на питання.

Коли доцільніше використовувати запитання, а коли доцільно використовувати завдання? Для цього слід враховувати такі фактори: особливість даного матеріалу; час, відведений для вирішення; рівень підготовки учнів.

Що стосується визначення поняття «навчальна задача», то, на наш погляд, це проблема, яка вирішується за наявності певної системи конкретних навчальних питань та вправ. Якщо учні стикаються з труднощами при вирішенні проблеми, то таке навчальне завдання стає проблемою проблемного характеру.

Навчальне завдання розглядається як складна динамічна система, яка постійно розвивається, оскільки: по-перше, це навчальна система, відкрита з точки зору кількості учасників, залучених до її вирішення, а отже, і кількості можливих навчальних контактів постійно змінюються; по-друге, для кожного

суб'єкта навчальної діяльності характер цих контактів змінюється; по-третє, під час реалізації навчального завдання відбувається розвиток кожного суб'єкта навчально-пізнавальної взаємодії через мотивацію навчання шляхом реалізації його результатів [5, с. 137-138].

Отже, навчальне завдання можна трактувати як: пізнавальне середовище, що сприяє зміні певного суб'єкта діяльності; вид пізнавальної діяльності учня (прочитати текст, підготувати реферат, виконати вправу, провести експеримент); об'єкт дії учня; модель пізнавальної ситуації, яка спрямована на засвоєння змісту математичної освіти.

Розв'язання геометричних задач. Одним з основних засобів досягнення високого рівня творчої активності учнів є розв'язання геометричних задач. Відомо, що «мистецтво розв'язування геометричних задач чимось нагадує хитрощі ілюзійоністів – іноді, навіть знаючи проблему, важко зрозуміти, як про неї думати». Зрозуміло, що учнів потрібно навчати цього мистецтва.

Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній за заданими елементами необхідно знайти інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних відношеннях, або визначити розміри, окремі елементи.

Стандарти розв'язування задач як в алгебрі, так і геометрії не існують і не можуть існувати (є лише приклади запису розв'язування задач).

Мета запису учнів, що розв'язують задачі та вправи – записати процес міркувань, логічність та обґрунтованість висловлювань.

Запис учнями вирішення проблем, з одного боку, є документальним підтвердженням процесу міркування учня, на основі якого проводиться оцінка, тому учень змушений це робити. З іншого боку, цей запис характеризує культуру письмової математичної мови, яка є частиною математичної підготовки учнів, і суттєво відрізняється від усного пояснення, яке практикується. Записи часто (за браком часу) опускають, а моделювання розв'язання задач замінюється просто числовими розрахунками. Тому учні часом не розуміють, що правильне обчислення та розв'язання задачі – це не

завжди одне й те саме, так само як словесне позначення не завжди є повним розв'язком.

Свідченням математичної культури учнів є чітке усвідомлення стану проблеми, здатність моделювати рішення та визначати логічні етапи доведення, стислість записів, правильне та раціональне використання позначень та математичної символіки.

Процес розв'язування геометричної задачі, зазвичай, передбачає такі кроки:

- малювання чи креслення (за необхідності);
- розуміння того, які характеристики фігур наведені, а які шукаються (може виглядати як скорочений запис умова проблеми);
- доказ використаних відносин і не збігається із твердженнями умови;
- розрахунок (якщо цього вимагає умова);
- вибір серед отриманих рішень правильного.

Слід зазначити, що малюнок не є обов'язковим елементом вирішення проблеми, оскільки він є лише ілюстрацією, а не обґрунтуванням (доказом), тобто цифра не є підставою (довідковим фактом) для висновків.

Розв'язання задач (як в алгебрі, так і в геометрії) повинно містити обґрунтування використаних тверджень і не збігатися з твердженнями про умову задачі, а впливати з останнього. Відсутність відповідних логічних кроків слід описувати не як приклад стислого вирішення, а як фактичну помилку логічного характеру.

Логічні кроки для обґрунтування розв'язання задач з алгебри та геометрії повинні базуватися на підтверджених фактах. Такими фактами є відомі математичні твердження, відношення, які є основою для логічних висновків. Це можуть бути:

- математичні твердження, що містяться в теоретичному матеріалі шкільних підручників та посібників: визначення, аксіоми, теореми, ознаки, властивості (зауважте, що відповідні ознаки та властивості також можуть бути результатом вирішення певних проблем),

- інформація, отримана учнями поза шкільною програмою під керівництвом викладача або самостійно.

Проте при використанні підтверджуючих фактів для обґрунтування вирішення проблеми доведення цих фактів не потрібно надавати. Однак, якщо завдання просить учня довести відомий йому підтверджуючий факт, то в цьому випадку необхідно написати відповідний доказ [37, с. 160-161].

Для використання підтверджуючих фактів оцінка може зменшуватись лише тоді, коли твердження хибні.

Задачі на обчислення. Під задачею на обчислення розуміють таку задачу, в якій вимагається дані про геометричну фігуру довести до встановлення числового результату. Задача на обчислення характеризується вимогою встановити дані про невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних вкладень з використанням алгебраїчних залежностей.

Питання про смисл геометричної задачі на обчислення досить детально розроблене в методичній літературі. Воно обговорювалось у свій час на сторінках журналу «Математика в школі» та в інших роботах. Задача на обчислення з числовими даними є окремим випадком задачі з параметричними даними, тому часто виникає потреба розглядати саме їх. Вважається, що в розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними повинно ввійти дослідження області існування геометричної фігури. Такого погляду дотримується Л. М. Фрідман, який стверджує, що розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними зводиться до задання функції-формули, яка показує, «які операції і в якому порядку треба виконати над значеннями параметрів, щоб знайти розмір шуканого елемента. Але для задання якої-небудь функції недостатньо назвати закон відповідності, а необхідно ще вказати область її визначення» [1, с. 44-45].

Функціональний підхід до трактування поняття розв'язування задачі можна зберегти, якщо розглядати його як доведення відповідної теореми,

складеної за умовою даної задачі. Суть цього підходу проілюструємо прикладом.

Задача 1. Довжина сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , двогранний кут при основі дорівнює α . Обчисліть об'єм піраміди.

Будемо вважати, що нам дано (або вона існує) правильну трикутну піраміду із стороною основи a та двограним кутом α при основі. Треба обчислити об'єм цієї піраміди.

Виходитимемо з того, якщо дано правильну трикутну піраміду із стороною основи a і двограним кутом α при основі, то висота піраміди дорівнює $\frac{1}{b} a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$, а об'єм дорівнює $\frac{1}{24} a^3 \operatorname{tg} \alpha$.

Суть розв'язування задачі полягає в тому, що ми замінюємо його доведенням теореми: Якщо в правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , а двогранний кут при основі дорівнює α , то її об'єм дорівнює $\frac{a^3}{24} \operatorname{tg} \alpha$.

Отже, задачу буде розв'язано, якщо доведемо щойно сформульовану теорему.

Вираз для об'єму піраміди є функцією від параметрів a та α , знаходження якої становить мету розв'язування задачі.

З логічної точки зору розв'язування геометричної задачі на обчислення схематично можна подати так: Якщо фігура F існує і має властивості A , то вона має також властивості B .

Припущення про існування геометричної фігури, заданої умовою задачі, потрібно обґрунтувати, тобто знайти умови, при яких фігура існує. Необхідними умовами в задачі 1 будуть: $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Щоб переконатися, що вони є достатніми досить довести можливість побудови правильної трикутної піраміди із стороною основи a і двограним кутом α при основі, де $a > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі на обчислення, щоразу доводиться враховувати особливості конфігурації, описаної в умові

задачі. Часто це складне завдання, яке вимагає високої культури обчислень і розуміння суті знайдених залежностей.

Отже, вважати геометричну задачу на обчислення розв'язаною можна лише тоді, коли, крім обчислення шуканої величини, встановлено необхідні і достатні умови існування фігури, про яку йдеться в задачі.

Задачі на доведення. Одним із стратегічних і найскладніших завдань вчителя математики є формування в учнів математичної грамотності, логічної компетентності – вміння оволодівати та застосовувати математичні методи доведення та спростування тверджень.

Потреба в доведенні є насамперед наслідком одного з основних законів логіки – підстав, де сказано, що довільне твердження повинно бути чітко обґрунтоване, тобто воно повинно супроводжуватися достатньо вагомими аргументами для підтвердження його істинності. Доказ також необхідний, щоб точно стверджувати, що твердження, яке ми доводимо, є загальним, тобто воно може застосовуватися до всіх часткових випадків. Крім того, геометричні істини ведуть до цілісної системи наукових знань, яка виявляє всі внутрішні зв'язки між різними властивостями просторових форм.

Слово «доведення» у найширшому розумінні – це процедура встановлення істинності твердження (що називається тезою цього доказу) як за допомогою деяких логічних міркувань, так і безпосередньо за допомогою чуттєвого сприйняття певних фізичних об'єктів і явища. Доказовість – головна риса математичної науки, яка наводить приклади точності міркувань.

З давніх часів говорити «математика» означає говорити «доведення». Вчений-геометр Фалес, який був батьком грецької математики, вперше ввів ідею доведення в геометрії. Коментарі Прокла свідчать про величезний внесок Фалеса в геометрію. Прокл повідомляє, що Фалес довів ряд важливих геометричних тверджень:

- діаметр ділить коло навпіл;
- вертикальні кути рівні;
- кути в основі рівнобедреного трикутника рівні;

- трикутники з рівною стороною та двома рівними кутами;
- кут, вписаний півколом – пряма лінія.

Ніхто не заперечить, що теореми та аксіоми відіграють надзвичайно важливу роль у геометрії. Доказ будь-якого твердження T складається із тверджень, істинність яких підтверджується раніше доведеними істинними твердженнями $T1, T2, \dots$. Оскільки ряд раніше доведених тверджень не може бути нескінченним, існує необхідність прийняти без доказу кілька істинних тверджень (аксіоми).

Залежно від логічної структури розрізняють чотири види теорем: пряма, зворотна, протилежна, контрапозитивна (інакше кажучи, зворотна протилежній).

Як відомо, існує три види умов, що стосуються умовних тверджень: необхідні, достатні, необхідні і достатні. Умову називають необхідною, якщо без її наявності висновок не може виконуватися. Наприклад: «Для того, щоб чотирикутник був квадратом, необхідно, щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярні». Очевидно, що наведена умова є необхідною, але далеко не достатня, так як при цій умові існує нескінченно багато форм чотирикутників, які не будуть квадратами. Умову називають достатньою, якщо при її наявності висновок обов'язково виконується (будь-яка умова, з якої випливає, що дане твердження справедливо). Наприклад: «Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то такий чотирикутник – паралелограм». Дійсно, наведена умова є достатньою, але вона не буде необхідною, так як і без неї чотирикутник може бути паралелограмом. Умову називають необхідною і достатньою, якщо без її виконання висновок не може виконуватися і в разі її виконання висновок обов'язково виконується. Наприклад: «Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник ромб».

У своїй роботі «Міркування про метод» Рене Декарт писав: «Метод - це спосіб правильно направити свій розум і відшукати істину». На уроках математики учні знайомляться з різними методами доведення

- методом доведення від протилежного ,

- методом математичної індукції,
- методом геометричних перетворень (центральна і осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія і подібність)
- алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний методи,
- найбільш важливими методами - аналітичним, синтетичним і аналітико-синтетичним.

Для кращого усвідомлення методів і структури доведення теорем (завдань) дуже важливо з найперших уроків вчити учнів загальних (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування і узагальнення, класифікація і систематизація) та специфічних розумових дій і прийомів розумової діяльності, які лежать в основі умінь доводити математичні твердження.

Аналітичне міркування намагається передати послідовність руху думки, тому воно починається з постановки проблеми, яку необхідно вирішити, а не з аксіом і раніше доведених тверджень, як в синтетичному методі. Синтетичний метод доведення «не показує, яким чином було знайдено рішення», тому все ж перевага за аналітичним методом. При аналітичному методі пошук доведення здійснюється відповідно до умови.

Зміст аналітичного методу можна показати на прикладі організації діяльності учнів під час знаходження формули для площі трапеції.

Задача 1. Довести, що площа трапеції обчислюється за формулою

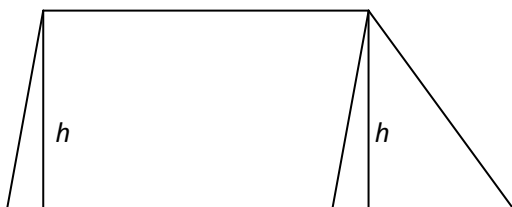
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(a+b), \text{ де } h - \text{ висота трапеції, } a \text{ та } b - \text{ основи трапеції.}$$

Дано: $ABCD$ – трапеція, $BC = a$, $AD = b$ (рис. 1.1).

$$BK = CL = h$$

$$\text{Довести: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(a+b)$$

В а С



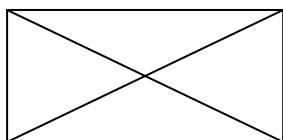
A K b E L D

Рисунок 1.1. Трапеція

Синтетичний метод широко використовується в курсі геометрії вже при доведенні перших теорем. Саме на цьому методі базується практично більша частина доведень теорем в підручнику з геометрії. Для прикладу можна розглянути наступну теорему.

Теорема. Діагоналі прямокутника рівні (рисунок 1.2).

AB



Дано: $ABCD$ – прямокутник (рисунок 1.2).

D C Довести: $AC=BD$

Рисунок 1.2.

Доведення: Нехай $ABCD$ – даний прямокутник. Розглянемо відповідно два прямокутних трикутники BAD та CDA . У них кути BAD і CDA прямі, катет AD – спільний, а катети AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма. Отже, за першою ознакою рівності трикутника дані трикутники будуть рівні. А з рівності прямокутних трикутників випливає, що їх гіпотенузи рівні, тобто $AC = BD$, а це і є діагоналі прямокутника. Теорему доведено.

Синтетичний метод успішно застосовується тоді, коли «ланцюжок висновків легко відкрити», коли саме формулювання проблеми прямо вказує, які висновки впливають із цих умов.

Експериментальні дослідження показують, що формування в учнів навичок аналізу та синтезу сприяє свідомому засвоєнню теоретичного матеріалу, активному вирішенню проблем різного типу.

Аналітично-синтетичний метод доведення полягає в тому, що пошук доведення починається з аналітичного методу (доведення починається з вимоги), але міркування не закінчуються, і, зупинившись на певному кроці, починають міркувати навпаки.

Приклад задачі на доведення цим методом.

Завдання. Доведіть, що для чотирикутника, описаного навколо кола, сума довжин відповідає сумі довжин протилежних сторін.

Доведення. Щоб довести, що $AB+CD=BC+AD$, досить довести, що $AM+BM+CK+DK=DL+AL+BN+CN$, де M, N, K, L – точки дотиків кола і чотирикутника (рисунок 1.3).

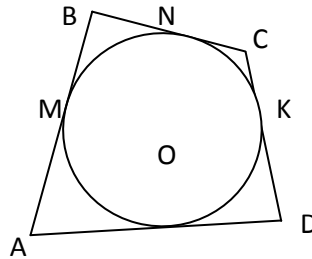


Рисунок 1.3. Точки дотиків кола і чотирикутника

Розглянемо умову теореми за властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола, $AM=AL$, $BM=BN$, $CK=CN$, $DK=DL$. Додавши ці рівності почленно дістанемо $AM+BM+CK+DK=AL+BN+CN+DL$, що і потрібно було довести.

У цьому доведенні міркування здійснювалось послідовно: від висновку теореми, потім від умови. Рух у протилежні сторони, як правило, здійснюється до тих пір, поки міркування не дійде до спільного висловлювання або суперечливих висновків.

Аналітично-синтетичний метод особливо зручний, коли перетворення лише умови або лише висновку теореми (задачі) не приводить до бажаної мети.

Геометрія особливо поважається серед усіх наук, причиною цього є єдиний факт, що її положення є абсолютно правильними та незаперечними, тоді як положення інших нематематичних наук певною мірою суперечливі, і завжди існує небезпека спростувати їх новими відкриттями. У геометрії немає і не може бути тверджень «напівдоведених» та «майжедоведених» [11, с. 97-99].

Задачі на побудову. Мета вирішення завдань на побудову – це побудова геометричних фігур із заданими властивостями за допомогою креслярських інструментів: циркуля і лінійки без вимірювальних поділів.

За допомогою лінійки можна провести: довільну пряму; пряму, що проходить через дану точку; пряму, що проходить через дві дані точки; за допомогою циркуля можна провести окружність (частина кола) довільного або заданого радіуса з довільним або заданим центром; відкласти від початку даного променя відрізок заданої довжини. Перераховані операції називають елементарними побудовами.

Вирішити завдання на побудову – значить: знайти послідовність елементарних побудов, після виконання яких шукана фігура вважається побудованою; довести, що саме ця фігура задовольняє умову задачі [31, с. 109].

Розглянемо п'ять основних геометричних побудов, у яких використовуємо згадані дії (побудова прямої та кола):

1. Побудова відрізка, що дорівнює даному.
2. Побудова кута, що дорівнює даному.
3. Побудова бісектриси кута.
4. Побудова перпендикулярних прямих.
5. Побудова середини відрізка.

Розгляньмо кожний спосіб побудови більш детально.

1. Побудова відрізка, що дорівнює даному (рисунок 1.4).

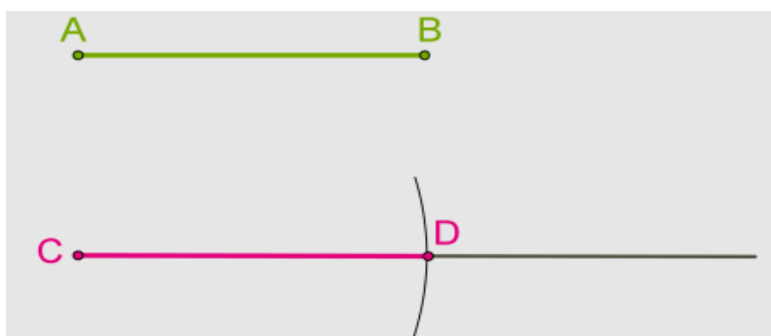


Рисунок 1.4. Побудова відрізка, що дорівнює даному

Таким чином можна отримати відрізок, який дорівнює даному. Відповідно до означення кола, він складається з точок, розташованих на рівній відстані (радіусі) від певної точки (центр кола).

Якщо центром є початкова точка променя C , радіусом — даний відрізок AB , то точка перетину кола і променя D і є шуканою кінцевою точкою відрізка CD , що дорівнює даному відрізку AB .

2. Побудова кута, що дорівнює даному (рисунок 1.5).

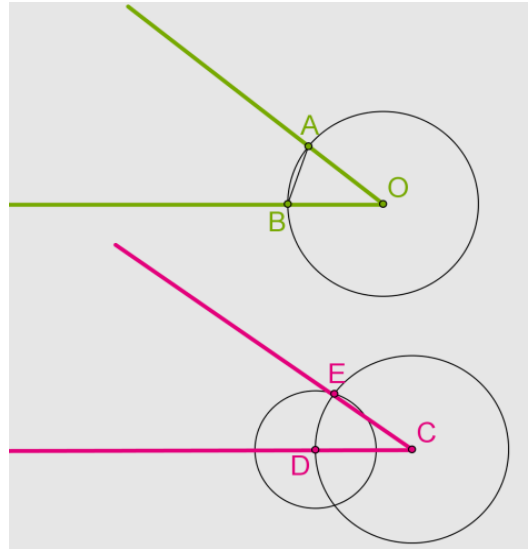


Рисунок 1.5. Побудова кута, що дорівнює даному

Доведемо, що побудований кут ECD і є той шуканий кут, що дорівнює даному куту AOB .

Якщо ми побудували коло з центром C (початковою точкою променя) і таким самим радіусом, як у кола з центром O , то $CD = OB$.

Якщо далі ми побудували коло з центром D і радіусом, рівним відрізку BA , і отримали точку перетину обох кіл E , то $BA = DE$.

Ми провели промінь CE . Очевидно, що $OA = CE$.

Отже, трикутники AOB і ECD рівні за третьою ознакою рівності трикутників. У рівних трикутників відповідні елементи рівні, зокрема кут ECD дорівнює куту AOB .

3. Побудова бісектриси кута (рисунок 1.6).

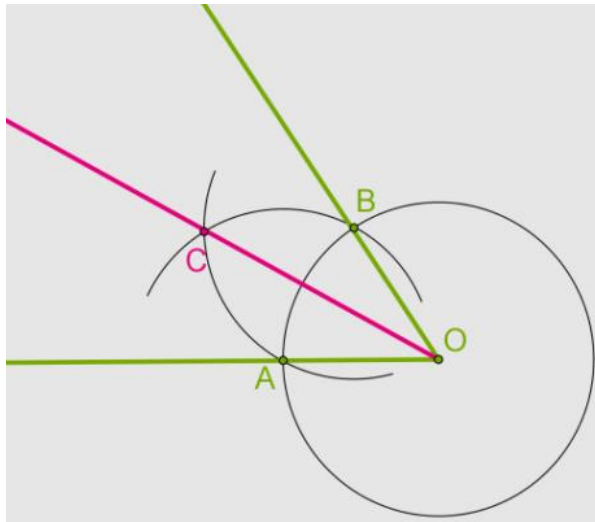


Рисунок 1.6. Побудова бісектриси кута

Щоб довести, що OC дійсно ділить кут AOB навпіл, достатньо розглянути трикутники AOC і BOC . $OA=OB$ як радіуси одного кола, а $AC=BC$, оскільки при побудові ми вибрали однакові радіуси для обох кіл, сторона OC – спільна.

Ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників, тож їх відповідні кути рівні.

Отже, AOC і BOC – дві рівні частини одного кута, і це означає, що промінь OC ділить кут навпіл.

4. Побудова перпендикулярних прямих (рисунок 1.7).

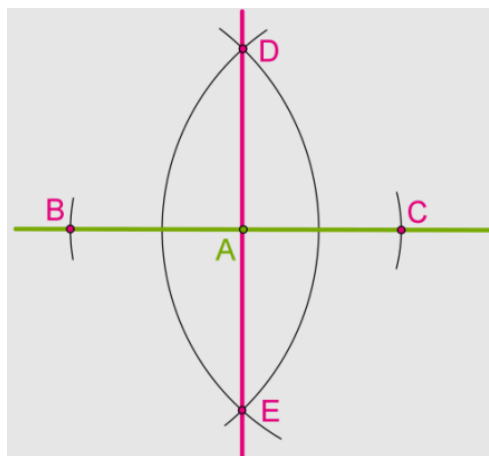


Рисунок 1.7. Побудова перпендикулярних прямих

Чому DE є перпендикулярною до BC ?

$AB=AC$, оскільки ці точки були відкладені при побудові.

$BD=CD$, оскільки обидва кола побудували з однаковими радіусами.

Отже, DA або EA – медіани до основи рівнобедрених трикутників ADB або AEB . Медіана в трикутнику є також висотою, тобто перпендикулярна до основи.

5. Побудова середини відрізка (рисунок 1.8).

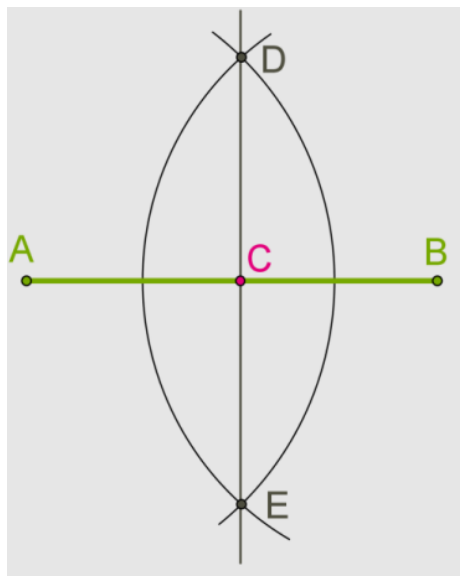


Рисунок 1.8. Побудова середини відрізка

Ця побудова така ж, як у випадку побудови перпендикулярних прямих, і вже доведено, що DC або EC ділить AB навпіл, тобто C – середина відрізка AB .

Таким чином, під завданням на побудову розуміється вимога: побудувати за допомогою інструментів геометричну фігуру, яка б задовольняла певну задану умову.

Розділ геометрії, в якому вивчаються задачі на побудову, називається конструктивною геометрією. Розв'язати таку задачу означає звести її до кінцевої кількості елементарних конструкцій, виконаних за допомогою циркуля та лінійки, на основі аксіом конструктивної геометрії.

План розв'язання проблем на побудову такий:

1. Аналіз. Проаналізуйте стан задачі, намалювавши фігуру із заданими властивостями, та встановіть зв'язок між її елементами. Визначте послідовність елементарних конструкцій.
2. Побудова. Складіть певну послідовність елементарних конструкцій.
3. Доведення. Доведіть, що побудована фігура має задані властивості.

4. Дослідження. Дослідіть, чи завжди можлива побудова та скільки розв'язків є.

Задачі на дослідження. При розв'язанні задач на дослідження вивчення геометрії спонукає до активного розвитку аналітичного мислення учнів та вміння застосовувати знання на практиці. Тому на сьогоднішній день питання методики викладання геометрії в школі є досить актуальним, оскільки це залежить від рівня знань та сили їх засвоєння учнями.

Розв'язування геометричних задач на дослідження покликане: зосередити освітню діяльність на нових досягненнях математичної науки; формувати вміння використовувати практичні методи вирішення проблем за допомогою досліджень; формувати просторове мислення школярів; формувати систему мислення, що виявляється в цілісному сприйнятті різних геометричних явищ, здатності встановлювати причинно-наслідкові зв'язки.

Організаційні форми та методи вивчення геометричних задач на дослідження повинні враховувати цілі та завдання вивчення геометрії в школі, вікові особливості учнів, особливості їх навчальної діяльності (потреби, мотиви, операції, методи діяльності), рівні навчальних досягнень та забезпечують діяльнісний підхід у процесі засвоєння геометричного матеріалу [21, с. 20].

Необхідно взяти до уваги наступні настанови: вивчення геометричних задач на дослідження повинно бути конкретним та активним, розвивати просторові уявлення учнів та логічне мислення, зацікавити дітей побачити практичне застосування нових знань.

Система таких завдань повинна відповідати вимогам: враховувати цілі теми, її зміст, рівні програмних вимог до підготовки учнів; сприяти розвитку навичок та вмінь; реалізовувати функції завдань у навчанні (розвивальні, навчальні, педагогічні, прогнозуючі, контрольні); забезпечити збільшення частки самостійної навчальної діяльності учнів тощо.

Вивчення методів і прийомів розв'язання геометричних задач на дослідження вдосконалюється, якщо раціонально поєднувати фронтальну,

групову та індивідуальну форми організації навчальної діяльності. Фронтальна форма роботи доцільна під час актуалізації опорних знань, ознайомлення з новими геометричними поняттями. На етапах засвоєння нових знань і методів діяльності, їх застосування та узагальнення рекомендується використовувати групові та індивідуальні форми організації навчальної діяльності [12, с. 36-37].

Педагогічна взаємодія в процесі розв'язання геометричних задач на дослідження, спрямована на стимулювання формування евристичної діяльності учня, є послідовним вдосконаленням педагогічної діяльності у напрямку своєї технології і проходить чотири етапи.

На першому етапі завдання на дослідження використовуються ситуативно для досягнення різних дидактичних цілей уроку (оновлення знань, заохочення сприйняття нового матеріалу, диференціація процесу засвоєння нових знань, контроль) та стимулювання пізнавального інтересу учнів, активізуючи їх пізнавальну діяльність.

На другому етапі для стимулювання пізнавальної самостійності учнів використовуються типові форми організації процесу вирішення проблеми на дослідження. Усна робота - для завдань певного змісту, діалогічна співпраця – для напіввизначених завдань та робота в групах – для невизначених завдань на дослідження.

На третьому етапі активно застосовується принцип «розвитку» проблеми, який стимулює прояв пізнавальної ініціативи учнів під час послідовного застосування всієї методологічної моделі.

Четвертий етап припускає творче застосування методики .

Дуже часто геометричні задачі вимагають теоретичних знань, знання теорем, це стосується і задач на дослідження. Вивчення теорем має також елементи дослідження, які згодом використовуються в процесі розв'язування геометричних задач на дослідження. Всі підручники з геометрії складено так, що спочатку готовий текст теореми подається з остаточно сформульованою необхідною залежністю, і учні можуть лише навчитися доводити справедливості заданої закономірності. Коли ми хочемо викликати у дітей

більший інтерес, викликати у них інтерес дослідницького характеру, було б доцільнішим розпочати нову теорему, яка б формулювала проблему в загальному цільовому напрямку, щоб вона була остаточно розшифрована і сформульована лише на кінець дослідження – доказ, тобто як це відбувається у кожного дослідника.

Одним із важливих питань методології вивчення геометричних задач на дослідження є правильні задачі, які потрібно розв'язувати на уроці. На уроці бажано розглянути теорію та розв'язати найскладніші геометричні задачі на дослідження. Домашнє завдання має бути подібним до того, що виконується на уроці.

Для правильного вирішення різних питань методології геометричних задач на дослідження необхідно виходити з досить обґрунтованих загальних принципів. Одне з таких положень – завжди розглядати, що таке геометрична проблема дослідження і що означає розв'язання геометричної задачі на дослідження.

Формування прийомів і методів розв'язання геометричних задач на дослідження забезпечується:

1) дотриманням дидактичних принципів евристичного навчання у поєднанні з психолого-дидактичними принципами розвивального навчання;

2) систематичне залучення до мети навчання оволодіння евристичними навичками: аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення та використання аналогій;

3) включення до змісту викладання геометрії системи евристично орієнтованих задач;

4) орієнтація на цілеспрямоване та систематичне використання прийомів, методів дослідження, які органічно поєднуються з традиційними;

5) організація навчального процесу з геометрії шляхом актуалізації дослідницьких ситуацій, в основі яких лежить завдання на дослідження;

6) ефективне використання сучасних інформаційних технологій навчання поряд із традиційними засобами навчання

Розглянемо деякі методи розв'язання геометричних задач на дослідження.

Щоб полегшити розв'язання геометричних задач, досить визначити, до якого методу належить проблема, і можна використовувати алгоритм конкретного методу.

Методи розв'язування геометричних задач поділяються на геометричні методи та аналітичні методи.

До геометричних методів належать: використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур. Наприклад:

Задача 1. На бічних сторонах рівнобедреного трикутника ABC ($AB=BC$) від вершин A і C відкладено рівні відрізки AM і CH (рисунок 1.9). Відрізки CM і AN перетинаються в точці O . Дослідіть якого виду трикутник AOC .

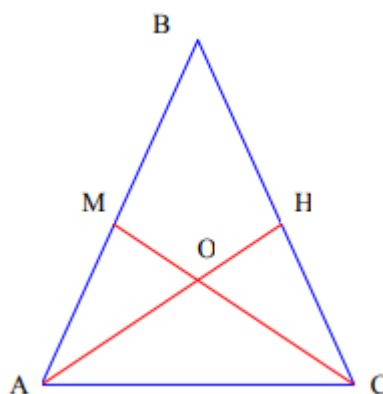


Рисунок 1.9.Рівнобедрений трикутник

Для того, щоб дослідити якого виду трикутник AOC , учневі потрібно розглянути два трикутники це AMC і AHC . Тоді, застосувавши першу ознаку рівності трикутників, учень мав би показати, що ці два трикутники рівні. Тоді $\angle ACM = \angle HAC$. А це свідчить про те, що трикутник AOC рівнобедрений.

2.2. Шляхи формування компетентностей учнів на різних етапах уроку математики

Очевидно, що формувати компетентності можна не тільки за допомогою завдань, тому, взявши за основу виділені прийоми реалізації ключових компетентностей на уроках математики, ми розробили таблицю (табл. 1), що містить приклади формування компетенцій на різних етапах уроку.

Таблиця 1 **Приклади формування компетентностей на різних етапах уроку**

<i>Етапи уроку</i>	<i>Мета, результативність</i>	<i>Види діяльності</i>
Перевірка домашнього завдання	<i>Мета:</i> активувати розумову діяльність учнів, розвивати критичне мислення, вчити оцінювати знання учнів <i>Результативність:</i> формування навчально-пізнавальної компетентності	Рецензування відповідей (домашнього завдання)
	<i>Мета:</i> розвивати самостійність мислення, формувати гнучкість і точність думки, розвивати увагу і пам'ять <i>Результативність:</i> формування компетентності комунікативної та предметної	Математичний диктант (По сторінках домашнього завдання з обмеженням часу виконання)
Пояснення нового матеріалу	<i>Мета:</i> вчити дослідній роботі <i>Результативність:</i> формування загальнокультурної компетентності	Доведення теорем, лем, складання математичного словника і т.п.
	<i>Мета:</i> вчити короткого раціонального запису, відпрацьовувати вміння робити висновки і узагальнення	Лекція з використанням здобутої учнями

Етапи уроку	Мета, результативність	Види діяльності
	<i>Результативність:</i> формування інформаційно-комунікаційної, загальнокультурної компетентностей	інформації
	<i>Мета:</i> вчити оперувати знаннями, розвивати гнучкість, використання знань <i>Результативність:</i> формування компетентностей навчально-пізнавальної, соціальної, комунікативної	Колективна експериментальна робота, дослідження
Закріплення, тренування, відпрацювання умінь і навичок	<i>Мета:</i> вивчити властивості дробу і т.п. <i>Результативність:</i> формування навчально-пізнавальної, предметної компетентностей	Навчальна самостійна робота
	<i>Мета:</i> закріпити отримані знання про знаходження відсотка величини, тощо; розробити правила (алгоритми) запам'ятовування <i>Результативність:</i> формування компетентностей предметної, соціальної, загальнокультурної	Дослідження різних видів пам'яті
	<i>Мета:</i> закріпити вміння розв'язувати задачі та приклади <i>Результативність:</i> формування всіх видів компетентностей в залежності від підібраних завдань	Розв'язування задач, прикладів з коментуванням
	<i>Мета:</i> закріпити знання учнів, формувати вміння перевіряти,	Математична естафета та ін.

Етапи уроку	Мета, результативність	Види діяльності
	<p>слухати, думати</p> <p><i>Результативність:</i> формування навчально-пізнавальної, загальнокультурної та комунікативної компетентностей</p>	
	<p><i>Мета:</i> розвивати особисту позицію учнів, спираючись на їх знання теми</p> <p><i>Результативність:</i> формування навчально-пізнавальної компетентностей і компетентностей предметної та міжпредметної</p>	Рішення завдань кількома способами
	<p><i>Мета:</i> навчати роботі з інформацією; закріпити знання тексту, розуміння теми</p> <p><i>Результативність:</i> формування комунікативної та навчально-пізнавальної компетентності, розвиток інформаційно-комунікаційної компетентності</p>	Робота з підручником (Навчальна практична робота)
Творча робота	<p><i>Мета:</i> показати на основі вивченого матеріалу вміння учнів створювати проекти</p> <p><i>Результативність:</i> формування загальнокультурної компетентності</p>	Створення проектів
	<p><i>Мета:</i> вчити учнів на основі своїх знань знаходити вирішення завдань прикладного характеру</p> <p><i>Результативність:</i> формування загальнокультурної,</p>	Засідання математичного гуртка

<i>Етапи уроку</i>	<i>Мета, результативність</i>	<i>Види діяльності</i>
	комунікативної та інформаційно-комунікаційної компетентності	
Контроль	<p><i>Мета:</i> вчити дітей уяві і вмінню абстрагуватися</p> <p><i>Результативність:</i> формування комунікативної, навчально-пізнавальної, інформаційно-комунікаційної компетентностей</p>	Створення реклами (презентації) досліджуваної теми (уроку), робота в групах з взаємною оцінкою
	<p><i>Мета:</i> вчити дітей, спираючись на отримані знання, самостійно працювати</p> <p><i>Результативність:</i> формування соціальної компетентності</p>	Самостійна робота з взаємоперевіркою; диференційована контрольна робота
Домашнє завдання	<p><i>Мета:</i> перевірити засвоєння матеріалу уроку, формувати вміння підбирати приклади</p> <p><i>Результативність:</i> формування компетентностей предметної та міжпредметної</p>	Скласти питання, завдання та приклади з теми уроку
	<p><i>Мета:</i> перевірити знання учнів згідно їх рівня підготовки</p> <p><i>Результативність:</i> формування соціальної, предметної компетентностей, а також інших різних видів компетентностей, в залежності від підібраних завдань</p>	Різнорівневі завдання: репродуктивні, особливої складності, на кмітливість, математичну логіку, і т.п.

На кожному етапі в даній таблиці представлені не всі можливі види діяльності, а лише найбільш цікаві і ті, які часто зустрічаються на уроках математики.

2.3. Розв'язування задачі, що базується на компетентнісному підході

У процесі розв'язування однієї задачі декількома способами, учні намагаються відшукати більш оригінальне, економне розв'язання. Для цього вони згадують багато теоретичних фактів, методи і прийоми, аналізують їх з точки використання до даної задачі, ситуації, накопичують певний досвід використання одних і тих знань до різних питань. При розв'язуванні задач одним способом в учнів одна мета – знайти правильну відповідь.

Досить часто при повторенні якогось розділу шкільного курсу геометрії вчителі вважають за раціональне, проводити урок «однієї задачі», зокрема, відбирається задача, яка розв'язується кількома способами і охоплює великий об'єм теоретичного матеріалу. Вважаємо доцільним використання однієї задачі і для відпрацювання системи математичних тверджень. Наприклад, учні досить часто плутають поняття означення та властивість, або забуваються якісь властивості конкретного поняття.

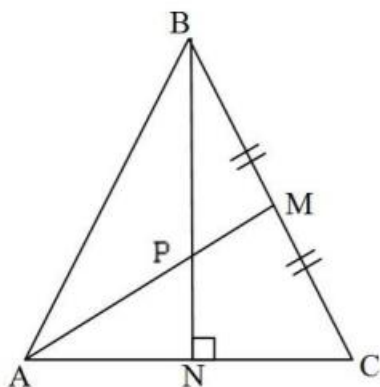
У шкільному курсі планіметрії учні у 7 класі при вивченні теми Трикутник і його елементи знайомляться з означенням поняття медіана трикутника. Згодом, у межах цієї теми учні вивчають властивість і ознаку рівнобедреного трикутника (у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з його вершини, збігаються; якщо медіана трикутника є його висотою або бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений) та у цьому ж класі, з'ясовують, що центр кола описаного навколо прямокутного трикутника – середина гіпотенузи. У 8 класі в межах вивчення теми Подібність трикутників передбачено вивчення теореми про медіани трикутника; у 9 класі, в залежності від авторів, учні з'ясовують, що якщо a, b, c сторони трикутника, то його медіана m_a обчислюється за формулою $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (наслідок з

властивості діагоналей паралелограма: у паралелограма сума квадратів всіх його сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей, яка доводиться з використанням векторного методу або застосуванням теореми косинусів). Як бачимо, для ефективного формування знань учнів про медіану та умінь використовувати необхідні твердження у процесі розв'язування задач, необхідно узагальнити та систематизувати наведені вище твердження.

Розглянемо задачу: у рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см. З вершини на основу провели перпендикуляр довжиною 12 см. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

Спосіб 1

Розв'язання:



- 1) За означенням медіани $BM = MC$;
- 2) За властивістю рівнобедреного трикутника (BN - висота, медіана, бісектриса)

$$AN = NC = AC : 2 = 6 : 2 = 3 \text{ см}$$

- 3) За властивістю медіан: $BP : PN = 2 : 1$. Нехай коефіцієнт пропорційності дорівнює x , тоді

$BP = 2x, PN = x$, складемо рівняння:

$$BP + PN = BN = 12$$

$$2x + x = 12$$

$$x = 4$$

$$PN = 4 \text{ см}$$

- 4) Розглянемо $\triangle APN$ ($\angle ANP = 90^\circ$). За теоремою Піфагора:

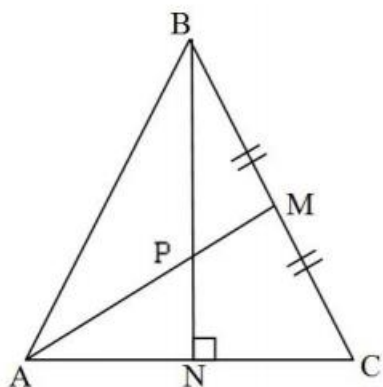
$$AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см)}.$$

- 5) Оскільки, AM – медіана за умовою задачі, то за властивістю медіан трикутника $AP : PM = 2 : 1$, тоді $AM = 5 : 2 \cdot 3 = 7,5 \text{ (см)}$.

Відповідь. 7,5 см.

Спосіб 2

(Використання формули $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$).



Розв'язання:

1) За властивістю рівнобедреного трикутника (BN – висота, медіана, бісектриса) $AN = NC = AC : 2 = 6 : 2 = 3$ (см).

2) $ABN = \triangle CBN$ (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо: $AB =$

$$BC = 3\sqrt{17}\text{см.}$$

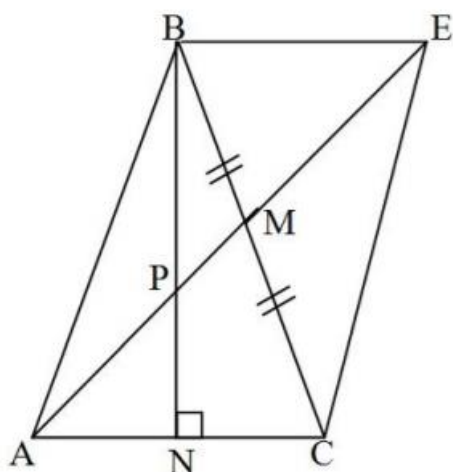
3) Застосуємо формулу $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ до трикутника ABC :

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2},$$

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 17 + 2 \cdot 36 - 9 \cdot 17} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Оскільки вивчення попередньої формули у навчальній програмі не передбачено і не всі її пам'ятають, то при розв'язуванні багатьох задач, де в умові або дано, або потрібно знайти медіану, доцільним є використання прийому побудови трикутника до паралелограма.

Спосіб 3



Розв'язання:

1) Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABEC$.

2) За властивістю діагоналей паралелограма маємо:

$$AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$AM = \frac{1}{2}AE = x$$

3) $\triangle ABN = \triangle CBN$ (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо: $AB = BC = 3\sqrt{17}$ см

4) Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$4x^2 + 9 \cdot 7 = 2(9 \cdot 17 + 36),$$

$$4x^2 + 153 = 378,$$

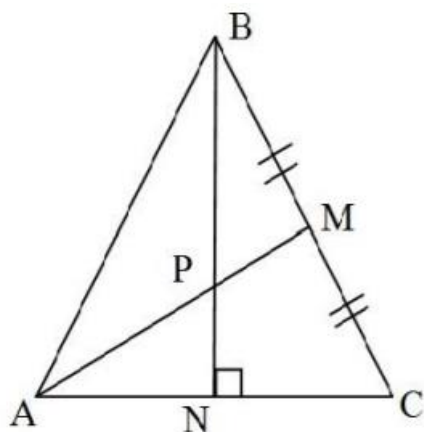
$$x^2 = 56,25,$$

$$x = 7,5$$

Отже, $AM = 7,5$ см.

Відповідь. 7,5 см.

Спосіб 4.



$$AM^2 = 36 + \frac{153}{4} - 26 \cdot \frac{3\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$AM = \sqrt{36 + 38,25 - 18}$$

і

отримаємо $AM = 7,5$ см.

Розв'язання:

1. За теоремою Піфагора з $\triangle NBC$

($\angle BNC = 90^\circ$) знайдемо

$$BC = 3\sqrt{17} \text{ см.}$$

2. У $\triangle NBC$ ($\angle BNC = 90^\circ$)

$$\cos C = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \text{тоді} \quad MC =$$

$$1,5\sqrt{17} \text{ см.}$$

3. За теоремою косинусів у $\triangle AMC$:

$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2AC \cdot CM \cdot$$

$$\cos C,$$

Підставимо значення:

Отже з вище наведеного прикладу ми бачимо, що розв'язування однієї задачі кількома способами активізує навчальну діяльність школярів, прививає інтерес до предмету. До розв'язування задач декількома способами учнів слід привчати поступово. Можна на уроці розглянути один або два способи, а пошук інших способів пропонується на домашнє завдання. Можливо, запропоновані учнями способи розв'язування не завжди раціональні, проте для навчальних і виховних цілей така робота дуже важлива: учні з великою зацікавленістю знаходяться у пошуках, перебираючи у пам'яті варіанти використання вивчених теорем, відомих прийомів і методів розв'язування задач.

2.4 Педагогічний експеримент та його результати

Під *педагогічним експериментом* сучасна педагогіка розуміє метод дослідження, який використовується з метою з'ясування ефективності застосування окремих методів і засобів навчання і виховання.

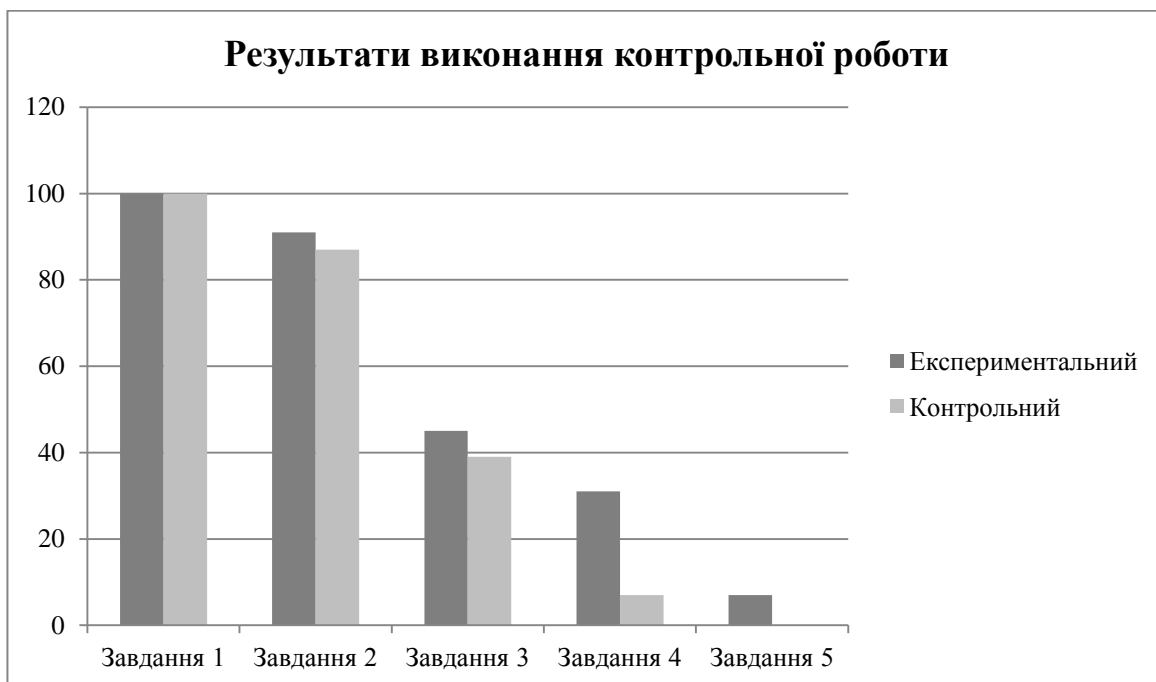
Експеримент - це дослідницька діяльність, призначена для перевірки висунутої мети, що розгортається в природних або штучних умовах, результатом якої є нове знання, що включає в себе виділення істотних факторів, які впливають на результати педагогічної діяльності.

Педагогічний експеримент - експеримент, завданням якого є з'ясування порівняльної ефективності застосовуваних у педагогічній діяльності технологій, методів, прийомів, нового змісту і т. д.

Для проведення експерименту було обрано два класи, експериментальний 9-А та контрольний 9-Б. Зміст педагогічного експерименту полягав у зміні одних умов забезпечення навчального процесу та збереження інших. У нашому експерименті до неварійованих умов віднесено: обсяг навчального матеріалу, що відповідає навчальній програмі з математики; одні й ті ж тексти контрольних робіт. Відмінне – практично-методичне забезпечення щодо реалізації навчального матеріалу. Для здійснення порівняльної ефективності

вибиралися класи, що співпадали за характеристиками: успішність навчання, результати контрольних і поточні оцінки перевірочних робіт.

Навчальні дослідження з математики є одним з ефективних способів одночасної реалізації розвиваючої та дидактичної функцій процесу навчання. Одним з показників виконання цих функцій є вміння розв'язувати геометричні задачі. Тому для виконання експерименту було використано підсумкову контрольну роботу, в яку включено п'ять завдань різного рівня складності. Перші три – завдання на рівні мінімальних програмних вимог і середнього рівня складності. Їх розв'язання передбачало вміння застосовувати знання в стандартних умовах або при невеликих відхиленнях від них. Щодо складності – вони відповідали більшості завдань підручника. Наступні два завдання для перевірки математичного розвитку учнів, що передбачали вміння застосовувати знання у нестандартних ситуаціях, тобто творчого використання знань.



На рисунку зображено діаграму, що характеризує співвідношення результатів контрольної роботи між учнями контрольних і експериментальних класів. Виконані роботи учнів експериментальних класів відрізнялися від розв'язань тих самих завдань учнями контрольних класів більшою обґрунтованістю, використанням більш раціональних шляхів розв'язання. Крім того помітна різниця у витратах часу на розв'язання запропонованих завдань

учнями відповідних груп. Час, що залишився, використовувався учнями експериментальних класів для виконання творчих завдань, що містилися у контрольній роботі.

Таким чином, запропонована нами методика суттєво впливає на якість процесу навчання та сприяє формуванню математичних ключових компетентностей учнів.

ВИСНОВКИ

Впровадження компетентнісного підходу до організації навчального процесу являється одним зі шляхів оновлення змісту освіти. Проблема формування математичної компетентності учня школи потребує глибшого і змістовного її вивчення.

Саме завдяки ключовим та предметним компетентностям урок сприяє мотивації позитивного відношення учнів до навчання. Також зараз у суспільстві відбувається широке впровадження інформаційно-комунікаційних технологій, то саме інформаційно-комунікаційна компетентність сприяє кращому засвоєнню знань на уроках математики і мотивує учнів до навчання та самовдосконалення.

Одним із завдань шкільної математики є розвиток логічного мислення учнів. Під логічним мисленням розуміють послідовне і доказове мислення. На уроках математики учні вчать давати означення, наводити аналогії, доводити, ознайомлюються з основними законами логіки.

Багатьом учням в майбутньому доведеться користуватися комп'ютером, таблицями, графіками. Отже, школа повинна підготувати до цього учнів, потрібно озброїти їх мінімумом знань, умінь, які їм необхідні для вивчення фізики, хімії, біології та інших предметів як у школі, так і в ВУЗах.

Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній на заданих елементах необхідно знайти інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних відношеннях, або визначити розміри окремих елементів.

Стандартів розв'язування задач як в алгебрі, так і геометрії не існує і не може існувати (є лише приклади запису розв'язування задач).

Процес розв'язування геометричної задачі, зазвичай, передбачає такі кроки: малювання чи креслення (за необхідності); розуміння того, які характеристики фігур наведені, а які шукаються (може виглядати як скорочений запис умови проблеми); розрахунок (якщо цього вимагає умова); вибір серед отриманих розв'язків правильного.

Розв'язання задач (як в алгебрі, так і в геометрії) спрямоване на формування та розвиток ключових (базових, основних) і предметних компетентностей особистості. Результатом такого процесу буде формування загальної компетентності людини, що є сукупністю ключових компетентностей, інтегрованою характеристикою особистості. Така характеристика має сформуватися у процесі навчання і містити знання, уміння, ставлення, досвід діяльності й поведінкові моделі особистості.

Логічні кроки для обґрунтування розв'язання задач з алгебри та геометрії повинні базуватися на підтверджуючих фактах. Підтверджуючими фактами є відомі математичні твердження, відношення, які є основою для логічних висновків.

У роботі ми ставили завдання: розглянути формування ключових компетентностей учнів загальноосвітньої школи при розв'язуванні геометричних задач.

Дане дослідження не вичерпує глибини вивчення даного питання й передбачає подальший пошук у напрямі поглибленого дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз В. Г. Історія математики. Харків: Основа, 2006. 144с.
2. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів. Київ: НПУ ім. Драгоманова, 2013. 360 с
3. Боровик Г. В. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики./ Методичний посібник для вчителя.
4. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 7 класу. Київ: «ЗодіакЕКО», 2007. 208с.
5. Бурда М.І. Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики // Проблеми сучасного підручника: зб. наук. праць / [ред. кол.; наук. ред. – О. М. Топузов]. Київ: Педагогічна думка, 2014. Вип. 14. 866 с.
6. Бурда М.І. Про нову програму з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика в сучасній школі. 2012. №10. С. 2-4.
7. Васільєва Д.В. Особливості навчання математики в сучасній школі URL:<https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/08/POSIBNYK-Kompetentnisno-orientovana-metodyka-navchannia-matematyky-v-osnovniy-shkoli.pdf>
8. Великий тлумачний словник сучасної української мови / уклад. і гол. ред. В. Т. Бусел. Київ. Ірпінь: Перун, 2002. 1440 с.
9. Веліховська А.Б. Готуємось до олімпіади з математики [Текст]. Харків: Видавнича група «Основа», 2007. 160 с.
10. Возняк Г.М., Возняк О.Г. Прикладні задачі: від теорії до практики. Тернопіль: Мандрівець, 2003. 136 с.
11. Гуревич Р. С. Теорія і практика навчання в професійно-технічних закладах: Монографія / Р. С. Гуревич. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2008. 410 с.
12. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: постанова Кабінету міністрів України від 23.11.2011 №1392. URL:<http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п>
13. Энциклопедия «Математика» /А. Н. Колмогоров. Математика. М.: БСЭ, 2004. 846 с.

14. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 184 с.
15. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 216 с.
16. Калугіна О. Р. Шляхи формування предметної компетенції на уроках математики. Освітянин. 2008. № 1.
17. Казначей І. В. Діяльнісний підхід та формування ключових компетентностей учнів на уроках математики /Методичний посібник для вчителів/ 2013 р.
18. Компетентнісна освіта: від теорії до практики. Збірка статей. Київ: Плеяди, 2005. 120 с. (Відкритий урок. Основна школа. Вип. 3-4).
19. Мерзляк А. Г. Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів; поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.
20. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Рабінович Ю.М., 2008 . с.352
21. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: «Гімназія». 2010. С.159-206.
22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: Підручник для 6 класу. Харків: Гімназія, 2016. 304 с.
23. Мислення в діяльності молодших школярів / за ред. Г. С. Костюка, Г. О. Балла. Київ: Рад. школа, 1981. 155 с.
24. Підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання 2012р. URL: <http://testportal.gov.ua/index.php/text/zno/>
25. Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: «Рута», 2021. 388с.
26. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2010. 512 с.

27. Якименко О. Вектори: урок-розв'язування задач з геометрії, 9-й клас. Математика. 2015. №20 (жовтень). С.9-16.

28. Ясінський В.А. Геометричні задачі: Готуємося до математичної олімпіади. Львів: Каменярь, 2003. 76 с.