Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота магістра
на тему:

Методика вивчення перетворень раціональних та ірраціональних виразів у шкільному курсі математики

Виконала: студентка 2 курсу магістратури, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання

Катерина Володимирівна Сіра

Керівник: кандидат фізико-математичних наук, професор

Олександр Васильович Крайчук

Рецензент: Кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри Інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем’янчука»

Юрій Геогійович Лотюк

Рівне – 2024 року

ЗМІСТ

ВСТУП

У зв'язку з необхідністю розвитку творчої активності людей у всіх сферах діяльності перед педагогічною наукою і практикою сьогодні постають ряд завдань щодо удосконалення організації, змісту і методів навчання: потрібно підвищити якість навчання і виховання, забезпечити більш високий науковий рівень викладання предметів, міцного знання основ наук. Це вимагає удосконалення форм, методів і засобів навчання, активнішого залучення учнів до роботи з підручником та іншими джерелами знань, надання допомоги їм у виробленні самостійності мислення, виявленні творчої активності, підготовки їх до неперервної освіти і самоосвіти.

У той самий час і шкільна практика, і наукові дослідження показують, що існують більш індивідуальні відмінності як у здібностях дітей, так і в рівні розумового розвитку взагалі. Саме тому школа сьогодні повинна створити сприятливі умови для відстаючих школярів і для тих, які здатні випереджати у навчанні, оволодівати знаннями на підвищеному рівні, тобто дати можливість кожному учневі відчути успіх у своїй навчальній діяльності, радість пізнання і подолання труднощів, дати кожному учневі однаковий шанс у досягненні високого рівня математичної підготовки. Розв'язання цієї сучасної проблеми, поставленої перед школою, можливе внаслідок індивідуалізації навчання, основним засобом якої в умовах класно-урочної системи є диференціація.

Важливим засобом і метою навчання математики є формування умінь і навичок. Даний етап виконує ряд функцій навчального та розвиваючого характеру. Велика роль полягає в розвитку логічного мислення учнів, у формуванні в них наукового світогляду, умінь і навичок у практичному застосуванні математики, впливає на якість навчання, розвиток ступеня підготовленості учнів до майбутньої трудової діяльності.

Вивчення математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу, природничих предметів, продовження навчання у вищих навчальних закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів.

Звісно, як було вказано вище, для успішної самореалізації особистості, необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідне більш повне опанування понять, законів, теорій. Використання інноваційних технологій навчання та організація дослідницької і проектної діяльності в сфері математики.

Кожна людина, після здобуття середньої освіти постає перед важливим вибором – вибір професії. Беззаперечним фактом є те, що необхідною умовою для вступу до вищих навчальних закладів є участь у НМТ/ЗНО, де більшість випускників складають тести з математики. Результати НМТ/ЗНО показують, що на сьогоднішній день багато випускників допускають помилки при тотожних перетвореннях виразів, у тому числі раціональних та ірраціональних.

Матеріал, пов'язаний з раціональними та ірраціональними виразами, становить значну частину шкільного курсу математики. У школі раціональним та ірраціональним виразам приділяється досить мало уваги. Вміння виконувати тотожні перетворення з раціональними та ірраціональними виразами знадобляться при спрощенні виразів, розв'язанні нерівностей, доведенні тотожностей, розв'язуванні задач.

Завдання по темі «Раціональні вирази» та «Ірраціональні вирази» зустрічаються на вступних іспитах, і вони досить часто стають «каменем спотикання».

Тому при спрощенні раціональних та ірраціональних виразів в школі застосовуються тотожні перетворення, але найчастіше виникають помилки, які зазвичай пов'язані з неправильно підібраними формулами в процесі тотожних перетворень. Тому необхідно розглянути такі ситуації, показати як їх розпізнавати і як з ними можна боротися.

Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів розглядаються як ефективний засіб формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження як засобу їх математичного розвитку. Проте, не зважаючи на постійне удосконалення форм і методів роботи вчителів, аналіз практики навчання показав, що в умінні учнів при тотожних перетвореннях раціональних та ірраціональних виразів є прогалини.

Однією з причин появи помилок учнів є формальне, поверхневе заучування навчального матеріалу, невміння бачити в ньому принципову відмінність від попереднього. Несвоєчасне виявлення прогалин у знаннях школярів призводить до поступового «запускання» знань. Складається ситуація, коли учень перестає розуміти вчителя, втрачає інтерес до навчання, віру в себе і на тривалий час залишається пасивним спостерігачем.

Актуальність дослідження. Методика викладання математики – це наука, яка займається розробкою засобів, форм і методів навчання математики, на основі поставлених навчальною програмою цілей. Методика математики належить до циклу педагогічних наук, яка спирається на математичну науку, виділяючи з неї і піддаючи дидактичній обробці зміст навчального матеріалу. Вона потрібна, насамперед, учителям математики, щоб успішно навчати учнів. Кожен вчитель, безперечно, повинен добре знати свій предмет. Слід зауважити, що теми раціональності та ірраціональності в математиці є дуже неоднозначною та їхнє сприйняття вимагає від школярів неабиякого характеру та прикладної спрямованості: розвиток інтелекту, алгоритмічної культури, математичної інтуїції, пам'яті та уваги. Дані елементи є необхідними для математичного розвитку особистості, для формування її світоглядної позиції та культури розумової праці, усвідомлення ролі математики у пізнанні дійсності. Отже, тема цієї роботи є актуальною і в плані формування всебічно розвинутої особистості учня, передусім у розвитку його логічного, конструктивного мислення, алгоритмічної та інформаційної культури. На актуальність даної проблеми також вказують проблеми шкільної практики: завдання, пов'язані з розумінням тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів, часто трапляються на шкільних олімпіадах різних рівнів, на різноманітних конкурсах. Потрібно звернути увагу на те, що результати зовнішнього оцінювання показали, що значних труднощів викликали в учнів тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів.

Мета дослідження – розробити і теоретично обґрунтувати методику навчання тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів в школі, а також виявити можливості використання загальних способів тотожних перетворень.

Тема дослідження – методичні особливості тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів тотожно перетворювати раціональні та ірраціональні вирази.

Предмет дослідження – зміст і методика навчання учнів тотожним перетворенням раціональних та ірраціональних виразів.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що застосування розробленої системи цільових завдань при вивченні тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів підвищить рівень знань, вмінь та навичок учнів, сприятиме раціональному вибору, застосовувати різні методи тотожних перетворень, у тому числі ті, які не були розглянуті в шкільних підручниках.

Мета та висунута гіпотеза визначили основні **завдання дослідження**:

• проаналізувати діючі підручники алгебри і додаткову літературу по темі дослідження для виявлення в них методики тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів;

• систематизувати різні методи і прийоми викладання теми «Методичні особливості тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів» та проаналізувати ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки та шляхи їх усунення;

• розробити самостійні та контрольні роботи по темі дослідження;

• проведення педагогічного експерименту.

Методологічною основою дослідження стали підручники для учнів, для студентів математичної спеціальності про викладання теми "Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів", про використання різних методів і прийомів для кращого засвоєння учнями різних понять, психолого-методичні посібники про поведінку дітей на уроці, про рівень засвоєння ними нового матеріалу, про можливості допущення помилок на певних етапах тотожних перетворень виразів, посібники в таблицях і схемах для методичного оформлення матеріалу, програми для загальноосвітніх навчальних закладів про тематичне планування, посібники з цікавим матеріалом, який можна використати на уроках алгебри.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані методичні твердження та висновки можна використовувати для вдосконалення навчально-виховного процесу.

Апробація. Основні положення та результати дослідження були представлені на V Міжнародній науково-практичній конференції «CURRENT TRENDS IN SCIENTIFIC RESEARCH DEVELOPMENT» (12-14 грудня 2024 року Бостон, США). Результати роботи також були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів і студентів Рівненського державного гуманітарного університету у 2023 та 2024 роках та анонсовані в роботі [30].

РОЗДІЛ І
ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РАЦІОНАЛЬНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.

1.1. Психологічні погляди на вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів шкільному курсі математики.

Для тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів на їх потрібно дивитись як на «задачу» з психологічної точки зору. Єдиного трактування поняття «задача» не існує. Психологія розглядає задачу як мету, задану в певних умовах, як особливу характеристику діяльності суб’єкта. Задача тут тлумачиться як суб’єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб’єкта [27].

Процес розв’язування задачі як розумову діяльність досліджує психологія і аналізує методика математики. Зазвичай розрізняють основні чотири функції задач – навчальна, розвивальна, виховна і контролююча.

Навчальна функція полягає у формуванні в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах її засвоєння. В процесі розв’язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв’язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення у школярів, на формування у них прийомів ефективної розумової діяльності, алгоритмічного мислення.

Виховну функцію задач спрямовано на формування в учнів наукового світогляду, вона розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю та ін.).

Контролююча функція задач направлена на встановлення навченості, рівня загального математичного розвитку, можливості до самостійного навчання математики [23].

Жодна з названих функцій не може реалізовуватися ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель повинен виділити провідну функцію і при необхідній цільовій умові прагнути до її реалізації в першу чергу.

Нині у дослідженнях психологи, дидакти і методисти переконливо показали, що вміння школярів розв’язувати задачі прямо не залежить від кількості розв’язаних задач. Якщо навіть учень розв’язав багато задач, але в нього не сформований загальний підхід до задачі, її аналізу, пошуку плану розв’язування, самостійно розв’язувати задачі він не зможе. Отже, однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є навчання учнів методів і способів розв’язування задач, самостійного пошуку розв’язку задач [24].

Найважливішим завданням навчання математики в школі є навчання учнів математичних методів. У методиці математики методом розв’язування задач називають сукупність прийомів розумової діяльності, або логічних математичних дій та операцій, за допомогою яких розв’язується великий клас задач. Поняття «спосіб розв’язування задачі» вживається при розв’язуванні окремої задачі, або невеликої сукупності задач певного виду [29].

Процес розв’язання задачі повинен складатися з наступних етапів:

1) аналіз формулювання задачі, тобто відокремлення того, що в ній дано і що потрібно знайти;

2) пошук плану розв’язування;

3) здійснення плану, перевірка і дослідження знайденого розв’язку;

4) обговорення (аналіз) знайденого способу розв’язування з метою з’ясування його раціональності [14].

Що стосується класів фізико-математичного профілю, то досвід їх роботи та психологічні дослідження показують, що найвдалішою формою організації навчального процесу в них є лекційно-практична система, в якій велика увага приділяється самостійній роботі учнів, вивченню різних методів доведень та розв’язування задач, усвідомленню ідеї аксіоматичної побудови математики. Все це в сукупності забезпечує засвоєння, закріплення і поглиблення знань, відкриває широкі можливості для розвитку самостійного, логічного мислення школярів, формування раціональних прийомів розумової праці [7].

Питання про перетворення виразів – одне з найважливіших в шкільному курсі математики. Без знання тотожних перетворень не можна було б розв’язувати рівняння, доводити теореми, не можна вивчати й вузівську математику.

1.2. Педагогічні засади вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів в шкільному курсі математики.

1.2.1. Основні типи тотожних перетворень і етапи їх вивчення.

Вивчення різних перетворень виразів і формул займає значну частину учбового часу в курсі шкільної математики. Прості перетворення, що спираються на властивості арифметичних операцій, виробляються вже в початковій школі в IV—V класах. Але основне навантаження по формуванню умінь і навичок виконання перетворень несе на собі курс шкільної алгебри. Це пов’язано як з різким збільшенням кількості і різноманітності здійснюваних перетворень, так і з ускладненням діяльності по їх обґрунтуванню і з’ясуванню умов застосування, з виділенням і вивченням узагальнених понять тотожності, тотожного перетворення, рівносильного перетворення, логічного дотримання.

Можна виділити наступні етапи освоєння застосувань перетворень буквено-числових виразів і формул [19, с.90].

Початки алгебри. На цьому етапі використовується нерозчленована система перетворень; вона представлена правилами виконання дій над однією або обома частинами формули. Наведемо типовий приклад.

Приклад. Розв’язати рівняння:

а) $5x-3x=2$; б) $5x=3x+2$; в) $6(2-4y)+5y=3(1-3y)$.

Загальна ідея розв’язання полягає в спрощенні даних формул за допомогою декількох правил. У першому завданні спрощення досягається за допомогою застосування тотожності (розподільного закону): $5x-3x=(5-3)x$. Засноване на цій тотожності тотожне перетворення переводить дане рівняння в рівносильне йому рівняння $2x=2$. Друге рівняння вимагає для свого розв’язання не лише тотожного, але і рівносильного перетворення; у такій якості тут використовується правило перенесення членів рівняння з однієї частини рівняння в іншу із зміною знаку [19, с.91]. Видно, що вже у вирішенні такого простого завдання використовуються обидва типи перетворень — і тотожне і рівносильне. Це положення зберігається, звичайно, і для більш громіздких завдань, таких, як третє.

Мета цього етапу — досягти побіжності у виконанні завдань на розв’язання найпростіших рівнянь, спрощення формул, що задають функції, в раціональному проведенні обчислень з опорою на властивості дій.

Формування навиків вживання конкретних видів перетворень. Система прийомів і правил проведення перетворень, використовувана на етапі початків алгебри, має дуже широку область додатків: вона використовується у вивченні всього курсу математики. Проте саме через свою малу специфічність ця система потребує додаткових перетворень, що враховують особливості структури перетворюваних виразів і властивості знову введених операцій і функцій. Освоєння відповідних видів перетворень починається з введення формул скороченого множення. Потім розглядаються перетворення, пов'язані з операцією піднесення до степеня, з різними класами елементарних функцій – показникових, степеневих, логарифмічних, тригонометричних. Кожен з цих типів перетворень проходить етап вивчення, на якому увага зосереджується на засвоєнні їх характерних особливостей [19, с.91].

У міру накопичення матеріалу з'являється можливість виділити і загальні межі всіх даних перетворень і на цій основі ввести поняття тотожного і рівносильного перетворень.

Слід звернути увагу на те, що поняття тотожного перетворення дається в шкільному курсі алгебри не в повному обсязі, а лише в застосуванні до виразів. Перетворення розділяються на два класи: тотожні перетворення — це перетворення виразів, а рівносильні — перетворення формул. У випадку, коли виникає потреба в спрощенні однієї частини формули, в цій формулі виділяється вираз, який і служить аргументом застосованого тотожного перетворення. Відповідний предикат при цьому вважається незмінним. Наприклад, рівняння $5x-3x=2$ і $2x=2$ вважаються не просто рівносильними, а однаковими.

Організація цілісної системи перетворень (синтез). Основна мета цього етапу, як було відмічено, полягає у формуванні гнучкого і потужного апарату, придатного для використання у розв'язанні всіляких шкільних завдань.

Розгортання другого етапу вивчення перетворень відбувається впродовж всього курсу алгебри неповної середньої школи. Перехід до третього етапу здійснюється при підсумковому повторенні курсу в ході осмислення вже відомого матеріалу, засвоєного по частинах, по окремих типах перетворень.

В курсі алгебри і початків аналізу цілісна система перетворень, в основних межах вже сформована, продовжує поступово удосконалюватися. До неї також додається деякий новий вигляд перетворень (наприклад, що відносяться до тригонометричних функцій), проте вони лише збагачують її, розширюють її можливості, але не міняють її структуру. Методика вивчення цих нових перетворень практично не відрізняється від вживаної в курсі алгебри [19, с.92].

Необхідно згадати про один тип перетворень, специфічний для курсу алгебри і початків аналізу. Це перетворення виразів, що містять граничні переходи, і перетворення, засновані на правилах диференціювання і інтегрування. Пояснимо основну відмінність цих, «аналітичних» перетворень від перетворень «алгебраїчних», що розглядаються в даній главі. Воно полягає в характері множини, яку пробігають змінні в тотожності. У алгебраїчних тотожностях змінні пробігають числові області, а в аналітичних цією множиною є певна множина функцій. Найбільш виразно це видно в простому прикладі формули, яка виражає правило диференціювання суми: $(f+g)' = f' + g'$; тут f і g — змінні, що пробігають множину диференціюючих функцій із загальною областю визначення. Не дивлячись на те, що відмічена відмінність не фіксується у вченні в курсі алгебри і початків аналізу, практика показує, що розглянуті перетворення засвоюються досить упевнено; цьому сприяє їх зовнішня схожість з перетвореннями алгебраїчного типу. Аналогію між ними можна підкреслити, користуючись зворотами мови типу «алгебра границь», «алгебра диференціювання». Заглиблюватися ж в пояснення відмінностей алгебраїчних і аналітичних тотожностей в основному курсі шкільної математики, мабуть, недоцільно. Це тема факультативних занять.

Тотожність, що вивчається в шкільному курсі алгебри і алгебраїчному матеріалі курсу алгебри і початків аналізу, можна розділити на два класи. Перший складається з тотожностей скороченого множення, справедливих в будь-якому комутативному кільці, і тотожності $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$, $a\neq 0$ справедливого в будь-якому полі. Другий клас утворений тотожностями, що зв’язують арифметичні операції і основні елементарні функції, а також композиції елементарних функцій. Більшість тотожностей другого класу також мають загальну математичну основу, що полягає в тому, що степенева, показникова і логарифмічна функції є ізоморфізмами різних числових груп. Наприклад, має місце твердження: існує єдине безперервне ізоморфне відображення f адитивної групи дійсних чисел в мультиплікативну групу додатних дійсних чисел, при якому 1 відображується в задане число $a>0$, $a\neq 1$; це відображення задається показниковою функцією з основою a: $f(x)=a^x$. Аналогічні твердження існують і для степеневої і логарифмічної функцій. З їх допомогою можуть бути строго доведені всі тотожності, що вивчаються в курсі шкільної математики, для даних функцій. Дещо складніше провести математичний опис тотожності для тригонометричних функцій, проте і тут можна показати, що ця тотожність пов'язана з поняттям гомоморфізму груп.

Методика вивчення тотожності обох класів володіє багатьма спільними характеристиками. Тому її опис буде проведено спільно, відзначаючи в міру необхідності особливості вивчення кожного з вказаних класів.

1.2.2. Особливості організації системи завдань при вивченні тотожних перетворень.

Основний принцип організації будь-якої системи завдань — пред’явлення їх від простого до складного з врахуванням необхідності подолання учнями посильних труднощів і створення проблемних ситуацій. Вказаний основний принцип вимагає конкретизації стосовно особливостей даного учбового матеріалу. Для опису різних систем завдань в методиці математики використовується поняття **циклу вправ** [19, с.93]. Цикл вправ характеризується з'єднанням в послідовності вправ декількох аспектів вивчення і прийомів розміщення матеріалу. По відношенню до тотожних перетворень уявлення про цикл може бути дане таким чином.

Цикл вправ пов'язаний з вивченням однієї тотожності, довкола якої групуються інші тотожності, що знаходяться з нею в звичайному зв'язку. До складу циклу входять завдання, що вимагають розпізнавання застосовності даної тотожності. Тотожність, що вивчається, застосовується для проведення обчислень на різних числових областях. Враховується специфіка тотожності; зокрема, організовуються пов'язані з ним звороти мови.

Завдання в кожному циклі розбиті на дві групи. До першої відносяться завдання, що виконуються при первинному знайомстві з тотожністю. Вони служать учбовим матеріалом для декількох уроків, що йдуть підряд, об'єднаних однією темою, як, наприклад, в виділений окремий пункт про властивість степеня [15]. Друга група вправ пов'язує тотожність, що вивчається, з різними застосуваннями. Ця група не утворює композиційної єдності — вправи тут розкидані по різних темах.

Описана структура циклу відноситься до етапу формування навиків застосування конкретних видів перетворень. На завершальному етапі — етапі синтезу цикли видозмінюються. По-перше, об'єднуються обидві групи завдань, створюючі «розгорнутий» цикл, причому з першої групи виключаються найбільш прості по формулюваннях або по складності виконання завдання. Типи завдань, що залишилися, ускладнюються [19, с.94]. По-друге, відбувається злиття циклів, що відносяться до різної тотожності, через що підвищується роль дій з розпізнавання застосовності тієї або іншої тотожності.

Наведемо конкретний приклад циклу.

Приклад 1. Цикл завдань для тотожності $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Виконання першої групи завдань цього циклу відбувається в наступних умовах. Учні тільки що ознайомилися з формулюванням тотожності (вірніше, з двома формулюваннями: «Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку суми і різниці даних виразів» і «Добуток суми і різниці двох виразів рівний різниці квадратів двох виразів»), його записом у вигляді формули, доведенням. Після цього приведено декілька зразків використання заснованого на цій тотожності перетворення; в кількість розібраних прикладів, зокрема, можуть входити приклади, аналогічні приведеним нижче. Нарешті, учні приступають до самостійного виконання вправ.

Перша група завдань

а) Представити у вигляді добутку:

а$_1$) $a^2 - b^2$; а$_2$) $c^2 - 5^2$; а$_3$) $121 - k^2$.

б) Перевірити вірність рівності $(100+1)\cdot(100-1) = 10000 - 1$.

в) Розкрити дужки у виразі $(4xy + 5x^2)\cdot(4xy - 5x^2)$.

г) Обчислити: г$_1$) $49\cdot 51$; г$_2$) $25^2 - 24^2$; г$_3$) $(10^4 - 1)\cdot(10^4 + 1)$.

д) Розкласти на множники:

д$_1$) $k^2 - p^2$; д$_2$) $16(ab)^2 - 9c^2$; д$_3$) $x^4 - y^4$.

е) Спростити вираз $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

Друга група завдань

ж) Використовуючи тотожність $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ при $a \ge 0$, розкласти на множники многочлен $x^2 - 5$.

з) Виключити ірраціональність в знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

і) Довести, що якщо k — непарне число, то $k^2 - 1$ ділиться на 4.

к) Функція задана аналітичним виразом $f(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 1}$. Позбавитися від знаку модуля, розглянувши два випадки: $x \ge 0$ і $x < 0$.

л) Розв’язати рівняння $x^3 - 4x = 15$.

Приступимо до методичного аналізу представленої системи типів завдань.

Завдання а$_1$) має на меті фіксувати структуру тотожності, що вивчається. Це досягається заміною букв, використовуваних в нормативному записі тотожності (x і y), іншими буквами. Завдання цього типу дозволяють уточнити зв’язок між словесним виразом і символічною формою тотожності. Завдання а$_2$) орієнтовано на встановлення зв’язку даної тотожності з числовою системою. Виконання завдання спирається на зіставлення знакових структур тотожності і перетворюваного виразу; останнє являється уже не чисто буквеним, а буквено-числовим. Для опису вироблюваних дій необхідно використовувати поняття заміщення букви числом в тотожності. Розвиток навиків застосування операції заміщення і поглиблення уявлення про неї здійснюються при виконанні завдань типу г$_2$).

Наступний крок в освоєнні тотожності для різниці квадратів ілюструється завданням а$_3$). У цьому завданні запропонований для виконання перетворення вираз не має вигляду різниці квадратів; перетворення стає можливим лише тоді, коли учень відмітить, що число 121 можна представити у вигляді квадрата числа і що, отже, є повний збіг структури даного виразу і структури лівої частини тотожності. Таким чином, виконання цього завдання виробляється не в один крок, а в два: на першому відбувається розпізнавання можливості приведення даного виразу до вигляду різниці квадратів, на другому виробляється перетворення, що використовує тотожність. На перших порах освоєння тотожності виробляється запис кожного кроку: $121 - k^2 = 11^2 - k^2 = (11-k)(11+k)$, надалі деякі операції по розпізнаванню виконуються учнями усно. У даному прикладі розпізнавання здійснюється особливо просто; у завданнях д$_2$), д$_3$), ж) воно ускладнюється, причому відразу в двох відношеннях. По-перше, тотожність, що вивчається, виконує в цих прикладах прикладну роль, тобто мета завдань полягає у вказівці можливих способів його використання [19, с.95]. По-друге, знакові структури виразів, з якими доводиться діяти, вже не настільки прості, як раніше: у прикладі $д_2$) потрібне встановлення зв'язку даної тотожності і інших, що відносяться до дій з одночленами; в $д_3$) виявляється можливим застосувати тотожність для різниці квадратів двічі; у ж) учням доведеться здолати певний психологічний бар'єр, здійснюючи вихід в область ірраціональних чисел. Приклад ж) поміщений в другу частину циклу, тому що його «природне» місце в курсі алгебри — в розділі, присвяченому знаходженню формули кореня квадратного рівняння.

Завдання типу б) направлені на формування навиків заміни $(x-y)(x+y)$ на x^2-y^2. В подальшому вивченні тотожності воно розглядається як основа для проведення двосторонніх перетворень. Аналогічну роль грають завдання типу в). Приклади типу г), яких потрібно вибрати один з напрямів перетворень, завершує розвиток цієї ідеї в циклі. Окрім вказаної, завдання типів б) — е) виконують і інші навантаження. Наприклад, до проведення викладень притягуються «супутні» тотожності $\left(a^k\right)^2=a^{2k}$ і ін. Надалі у вирішенні однієї вправи використання декількох тотожностей стає звичайним явищем. Слід зазначити поступове зростання ролі операцій по розпізнаванню застосовності тотожності і оцінці доцільності його вживання; цей аспект завдань найчіткіше видно в прикладі $г_1$).

В цілому завдання першої групи орієнтовані на засвоєння структури тотожності, операції заміщення в простих, принципово найбільш важливих випадках, і уявлення про оборотність перетворень, здійснюваних тотожністю. Дуже важливе значення має також збагачення мовних засобів, що показують різні аспекти тотожності. Уявлення про ці аспекти дають тексти завдань; вчителеві необхідно спеціально звертати на них увагу учнів.

Основні особливості і цілі, розкриті при розгляді першої групи завдань приведеного циклу, відносяться до будь-якого циклу вправ, що формує навики використання тотожності. Не дивлячись на те, що у міру вивчення матеріалу курсу алгебри і надалі, в курсі алгебри і початків аналізу, відбувається поступове формування елементів алгебраїчної культури, для будь-якої тотожності, що знов вводиться, перша група завдань в циклі повинна зберігати описані тут особливості; відмінності можуть бути лише в кількості завдань, на яких вчитель розглядає ті або інші особливості тотожності, що вивчається [19, с.96].

На відміну від першої, друга група завдань в циклі направлена на можливо повніше використання і урахування специфіки саме даної тотожності. Завдання другої групи передбачають вже сформовані навики використання тотожності, що вивчається, для різниці квадратів (у найбільш простих випадках); мета завдань цієї групи — поглибити розуміння тотожності за рахунок розгляду всіляких застосувань його в різних ситуаціях, у поєднанні з використанням матеріалу, що відноситься до інших тем курсу математики.

Розглянемо з цієї точки зору вирішення завдання л):

$x^3 - 4x = 15 \Leftrightarrow x^3 - 9x = 15 - 5x \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 5(3-x) \Leftrightarrow x = 3$, або $x(x+3) = -5$.

Рівняння $x(x+3) = -5$ коренів (дійсних) не має, тому $x = 3$ — єдиний корінь рівняння.

Видно, що використання тотожності для різниці квадратів складає лише частину у вирішенні прикладу, будучи провідною ідеєю проведення перетворень.

Відзначимо особливості циклів завдань, пов’язаних з тотожністю для елементарних функцій. Ці особливості обумовлені тим, що, по-перше, відповідна тотожність вивчається у зв'язку з вивченням функціонального матеріалу і, по-друге, вони з'являються пізніше тотожностей першої групи і вивчаються з використанням вже сформованих навиків проведення тотожних перетворень.

Кожна елементарна функція, що знову вводиться, різко розширює область чисел, які можуть бути позначені і названі індивідуально. Тому в першу групу завдань циклів повинні увійти завдання на встановлення зв'язку цих нових числових областей з вихідною областю раціональних чисел. Наведемо приклади таких завдань.

Приклад 2. Обчислити:

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{2}$;	$\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$;
$2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$;	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
$\lg 2 + \lg 3$;	$\lg a + \lg b = \lg ab$;
$\cos^4 22{,}5° - \sin^4 22{,}5°$;	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Поряд з кожним виразом вказана тотожність, в циклах по яких можуть бути присутніми пропоновані завдання [19, с.97]. Мета таких завдань — в освоєнні особливостей записів, що включають символи нових операцій і функцій, і в розвитку навиків математичної мови.

Значна частина використання тотожних перетворень, пов'язаних з елементарними функціями, доводиться на розвязання ірраціональних і трансцендентних рівнянь. У цикли, що відносяться до засвоєння тотожності, входять лише найбільш прості рівняння, але вже тут доцільно проводити роботу по засвоєнню прийняття рішення таких рівнянь: зведення його шляхом заміни невідомого до алгебраїчного рівняння.

Послідовність кроків при цьому способі розв'язання така: а) знайти функцію φ, для якої дане рівняння $f(x) = 0$ представлене у вигляді $F(\varphi(x)) = 0$; б) виробити підстановку $y = \varphi(x)$ і вирішити рівняння $F(y) = 0$; в) розв'язати кожне із рівнянь $\varphi(x) = y_k$, де $\{y_k\}$— множна коренів рівняння

$F(y)=0$. При використанні описаного способу частенько крок б) виконується в неявному вигляді, без введення позначення для $\varphi(x)$. Крім того, учні частенько вважають за краще з різних шляхів, які ведуть до знаходження відповіді, вибирати той, який швидше і простіше приводить до алгебраїчного рівняння.

Велику користь приносять завдання, в яких тотожні перетворення використовуються для побудови графіків при спрощенні формул, задаючих функції. Цей прийом ефективно використовується в теорії квадратичної функції (виділення повного квадрата), при вивченні графічного методу розв’язання рівнянь і нерівностей.

Новим питанням, яке необхідно враховувати при вивченні тотожностей з елементарними функціями, є розгляд області визначення. При вивченні тотожності з раціональними виразами ця необхідність проявляє себе лише при виконанні операції скорочення алгебраїчних дробів.

1.2.3. Доведення тотожностей.

Значна частина тотожностей, що вивчаються в курсах алгебри та алгебри і початків аналізу, доводиться в них або принаймні пояснюється. Ця сторона вивчення тотожностей має велике значення для обох курсів, оскільки доказові міркування і них з найбільшою чіткістю і строгістю проводяться саме по відношенню до тотожностей [19, с.99]. За межами цього матеріалу доказу зазвичай менш повні, вони не завжди виділяються із складу вживаних засобів обгрунтування.

В якості опори, на якій будуються доведення тотожностей, використовуються властивості арифметичних операцій. Незрідка, особливо при вивченні тотожностей для тригонометричних функцій, до доведень притягуються геометричні поняття і методи, головним чином, пов’язані з геометричними величинами і з координатною площиною. Слід зазначити, що геометричні докази деякої тотожності не лише повчальні і наочні, але і сприяють посиленню міжпредметних зв'язків; їх тому корисно розглядати поряд з доказами алгебраїчного характеру.

Доведення тотожностей можна розділити на три типи залежно від того, наскільки вони задовольняють вимогам строгості:

а) неповністю строгі міркування, що вимагають використання методу математичної індукції для надання ним повній строгості. Ці докази застосовуються для виведення правил дій з многочленами, властивостей степенів з натуральними показниками;

б) повністю строгі міркування, що спираються на основні властивості арифметичних дій (тобто на властивості, що служать аксіомами для поняття поля) і не використовують інших властивостей числової системи. Основна сфера застосування таких доведень — тотожності скороченого множення;

в) повністю строгі міркування, що використовують умови розв'язування рівнянь виду $\varphi(x) = a$, де φ — елементарна функція, що вивчається. Такі доведення характерні для виведення властивостей степеня з раціональним показником і логарифмічної функції.

Наведемо приклади, що показують особливості методики вивчення доведень кожного типу.

Приклад 1. (доведення типу а). До цього типу належить доведення основної властивості степеня для натуральних показників: $a^k a^p = a^{k+p}$. Запис цього доведення має вигляд:

$$a^k a^p = (\underbrace{a\ldots a}_{k\ \text{разів}})(\underbrace{a\ldots a}_{p\ \text{разів}}) = \underbrace{a\ldots a}_{(k+p)\ \text{разів}} = a^{k+p}.$$

Для того щоб доведення було засвоєним, після нього розглядаються приклади на походження степенів з однаковою основою і числовими показниками степеня; може зустрітися, скажімо, такий приклад: $a^3 a^4 = (aaa)(aaaa) = a^7$, викладки тут відтворюють викладки при доведенні загального факту. Однак такі приклади добре ілюструють тільки спосіб доведення для окремого випадку, але характерна особливість загального способу доведення тут не проявляється. Для виявлення структури доведення доцільно розглянути приклад, в якому показники степеня були б досить великі, наприклад $a^{111}a^{222} = a^{333}$; тут спрощення, пов'язані з тим, що викладення можуть бути проведені повністю, в кінцевому вигляді, не застосовні. На таких даних відтворення схеми доведення зберігає найбільш істотний момент – зображення великої кількості співмножників (однакових) за допомогою спеціального знаку «…»:

$$a^{111}a^{222} = \underbrace{(a\ldots a)}_{111\,разів}\underbrace{(a\ldots a)}_{222\,разів} = \underbrace{a\ldots a}_{(111+222)\,разів} = a^{111+222}.$$

У цьому міркуванні числа (показники степенів) грають ролі змінних. За наведеним зразком можна повторити роздуми для будь-якого іншого набору показників степеня, так що воно має загальний характер. Відзначимо, що деякі доведення тверджень, істотних для курсу алгебри, можна провести в ньому тільки на такому роді прикладів. Зокрема, правила дій з многочленами формуються в результаті розгляду декількох прикладів, які готують спільну словесну формулювання правила [19, с.100].

Приклад 2. (доведення типу б). Доведення цього типу найбільш характерні для курсу алгебри і одночасно найбільш прості. У них використовуються тільки порівняно міцні навички проведення дій з буквеними виразами – «розкрити дужки», «звести подібні доданки», «виділити загальний множник» та ін. В силу своєї простоти і доступності саме ці доведення доцільно проводити в розгорнутому вигляді, пояснюючи всі зроблені переходи. При цьому учні зможуть усвідомити сенс і прийоми використання основних властивостей арифметичних дій.

Багато з тверджень, які виражаються формулами скороченого множення, допускають наочно-геометричну ілюстрацію. Доцільно розглянути декілька подібних прикладів, моделюючи на них алгебраїчні викладки, і одночасно підкреслити, що алгебраїчне формулювання і доведення мають широку область застосування – вони охоплюють і додатні і від’ємні числа, і нуль [19, с.101].

Приклад 3. (Доведення типу в). Такі докази відносяться до найтяжчих в курсі шкільної математики. Складність їх проведення обумовлюється кількома причинами. Найсуттєвіша з них полягає в тому, що на відміну від розібраних вище доведення цього типу використовують досить складні логічні засоби.

Як приклад розглянемо доведення властивості арифметичного квадратного кореня:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{1.1}$$

Доведення спирається на наступне нове формулювання визначення квадратного кореня: для невід’ємних чисел x, y рівності $y^2 = x$ і $y = \sqrt{x}$ рівносильні, при цьому число y визначено однозначно як функція від x. З цього нового формулювання випливає, що (1.1) рівносильне

$$\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 \tag{1.2}$$

Рівність (1.2) довести вже порівняно просто, проте приводить до нього шлях дуже важкий для учнів.

Певну роль тут відіграє те, що в порівнянні з доказом формули (1.2) перехід (1.1)$\Rightarrow$(1.2) відбувається миттєво, і для з’ясування цього переходу потрібне серйозне напруження уваги учня.

Ще одна причина, яка ускладнює засвоєння наведеного доведення, відноситься вже не до нього, а до положення, яке займають доведення в системі вивчення властивостей арифметичного квадратного кореня. Розглянута властивість використовується в доведенні інших властивостей, наприклад $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a|\sqrt{b}$, які доводяться набагато легше, без залучення описаних тут переходів. Тому прийом, на якому ґрунтується доведення властивості (1.1), залишається нерозвиненим.

Тому доцільно посилити увагу до наведеного типу доведень. Цього можна досягти за рахунок підкреслення основної ідеї доведення:

зіставлення двох операцій (або функцій) - прямої і оберненої до неї. Для виділення зазначеної ідеї можна розглядати в порівнянні її застосування в різних ситуаціях. Наприклад, корисно зіставити доведення, наведене тут, з доведенням основної властивості логарифмів. Наведене доведення грає роль зразка, з яким послідовно порівнюються дії, вироблені при доведенні відповідної властивості логарифма. Записи зручно розташувати у дві колонки:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\lg xy = \lg x + \lg y$
$\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2$	$10^{\lg xy} = 10^{\lg x + \lg y}$
$a \cdot b = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2$	$xy = 10^{\lg x} \cdot 10^{\lg y}$
$a \cdot b = a \cdot b$	$xy = xy$

1.3. Історичні відомості про раціональні та ірраціональні вирази.

« Джерелом алгебраїчних ірраціональностей є двозначність або багатозначність завдання, бо було б неможливо виразити одним і тим же обчисленням багато значення, що задовольняють однієї і тієї ж задачі, інакше, ніж за допомогою коренів ...; вони ж хіба тільки в окремих випадках можуть бути зведені до раціональності ».

(Лейбніц Г.)

Однією з конкретних причин появи математичних теорій було відкриття ірраціональностей. Спочатку це сталося в межах геометричних вишукувань у вигляді встановлення факту несумірності двох відрізків прямої. Значення цього відкриття в математиці важко переоцінити. У математику, чи не вперше, увійшла складна теоретична абстракція, яка не має аналога в донаучному загальнолюдському досвіді. Ймовірно, найпершою ірраціональністю, відкритої давньогрецькими математиками, було число $\sqrt{2}$. Можна з певною впевненістю вважати, що вихідним пунктом цього відкриття були спроби знайти загальну міру за допомогою алгоритму поперемінного віднімання, відомого зараз як алгоритм Евкліда. Можливо також, що деяку роль зіграла завдання математичної теорії музики: розподіл октава, що приводить до пропорції $1 : n = n : 2$. Не останню роль зіграв і характерний для піфагорійської школи загальний інтерес до теоретико-числових проблем.

Стародавні математики знайшли досить швидко логічно строге доведення ірраціональності числа $\sqrt{2}$ шляхом зведення цього є докази до формальної суперечності. Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де m і n – взаємно прості числа. Тоді $m^2 = 2n^2$, звідки випливає, що m^2 парне і, отже, n^2 парне. Парне, отже і n. Отримане протиріччя (n не може бути одночасно і парним і непарним) вказує на невірність посилання, що число $\sqrt{2}$ раціональне.

Для дослідження знову відкритих квадратичних ірраціональностей відразу ж виявилося необхідним розробляти теорію подільності чисел. Справді, нехай $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, де p і q – взаємно прості, а n є твором тільки перших ступенів співмножників. Звідси $p^2 = nq^2$. Якщо t – простий дільник n, то p^2 (а значить і p) ділиться на t. Отже p^2 ділиться на t^2. Але в n міститься тільки перша ступінь t. Значить q^2 (так само як і q) ділиться на t. Але цей результат формально суперечить припущенню, що p і q взаємно прості.

Слідом за ірраціональністю числа $\sqrt{2}$ було відкриті багато інших ірраціональностей. Так, Архіт (близько 428-365 до н.е.) довів ірраціональність чисел виду $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор з Кірени (V ст. до н. е.) встановив ірраціональність квадратного кореня з чисел 3, 5, 6, ..., 17, які не є повним квадратом. Теетет (410 - 369 до н.е.) дав одну з перших класифікацій ірраціональностей.

З появою ірраціональностей у давньогрецькій математиці виникли серйозні труднощі як у теоретико-числовому, так і в геометричному плані.

Велике значення для розвитку поняття ірраціонального числа мали праці Стевіна, Ньютона, Лейбніца. Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки у другій половин XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса.

Обґрунтуванню змісту методів, засобів, організаційних форм навчання та активізації пізнавальної діяльності присвячені роботи М. І. Бурди, М. І. Жалдака, М. Я. Ігнатенка, З. І. Слєпкань, Т. М. Хмари, М. І. Шкіля та інших.

Ірраціональність у філософському вченні. У філософії з'ясовується можливість визначення змісту поняття «ірраціональне», однією з головних рис якого є прагнення до універсальності.

Ірраціоналізм (лат. *irrationalis* – несвідоме, нерозумне) – філософські течії, що проголошують верховенство почуттєвого начала і роблять його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття.

Ірраціональність у гуманітарному вченні. Значення поняття «ірраціональне» розглянуто у гуманітарному знанні, точніше – в психології. Виявлено, що в психології терміном «ірраціональна» позначають настанову людини, якщо вона породжує, її неадекватну поведінку у якомусь конкретному випадку.

Ірраціональність у мистецтві. Також ірраціоналізм був основою культурного розвитку кінця XIX – початку XX ст. розчарування в силі розуму пізнати дійсність було однією з основних причин виникнення ірраціоналізму, так, наприклад, ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму, особливо помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві.

1.4. Поняття «виразу», «раціонального виразу» та «ірраціонального виразу», «тотожних перетворень», «ірраціональності»

Запис, який складається з чисел, позначених цифрами або буквами і сполучених знаками дій, називається **виразом** [2, с.176]. Однак, це речення не можна вважати строгим означенням. Бо, по-перше, в ньому не зовсім зрозумілий вислів «сполучених знаками дій» (де знак дії у виразі a^2?). По-друге, у виразі можуть бути і дужки, а в сформульованому вище реченні про них нічого не сказано. По-третє, не вказано конкретно про які знаки дій ідеться. Адже учням, коли вони ознайомлюються з виразами, відомі лише чотири знаки дій (+, –, ·, :). Чи тільки ці знаки можуть бути в виразі, чи й інші, з якими учні ознайомляться пізніше? Про це також не сказано в означенні. Тому й не можна його вважати строгим. Як показує аналіз, поняттю «вираз» дати строге загальноприйняте означення взагалі дуже важко. І в школі не треба намагатись пропонувати учням яких-небудь означень цьому поняттю. Написавши кілька чисел, сполучених знаками дій, наприклад, 9 · 3 + 17, бажано сказати: це – **числовий вираз** [2, с.177].

Алгебраїчним виразом називається один або декілька алгебраїчних величин (чисел або букв), сполучених між собою алгебраїчними діями (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до раціонального степеня, добування кореня) і знаками послідовності цих дій (різного виду дужок) [14, с.127].

Якщо алгебраїчний вираз не містить ділення на змінні і добування кореня із змінних, то він називається **цілим**.

Якщо алгебраїчний вираз складений з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з натуральним показником і ділення на вирази із змінними, то він називається **дробовим**.

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами** [13, с.5]. З дробових раціональних виразів слід виділити раціональні дроби.

Якщо в алгебраїчному виразі використовується добування кореня із змінних (або піднесення змінних до дробового степеня), то такий алгебраїчний вираз називається **ірраціональним**.

Таким чином, алгебраїчні вирази можуть бути раціональними та ірраціональними. Раціональні вирази, у свою чергу, бувають цілими і дробовими. Раціональні дробові вирази нерідко називають дробово-раціональними.

Дробом називають кожен вираз виду $\frac{a}{b}$, де a і b - довільні вирази. Наприклад,

$$\frac{2a+x}{3a+2x-5},\ \frac{a}{1+\frac{1}{b}},\ \frac{\sqrt{a-b}}{a+b},\ \frac{\lg x}{1-\lg x}$$

– все це дроби, але тільки два перших з них можна назвати раціональними. Усі ці дроби містять змінні, але можуть бути дроби і числовими виразами, наприклад $\frac{2}{3}$, $\frac{0,25}{8}$.

Чи можна вважати дробами вирази

$$x-\frac{1}{a+\frac{b}{x}},\ (a-b):(a-c)?$$

Перший – ні, бо це не частка, а різниця; другий також ні, бо в ньому частка записана не за допомогою риски. Зрозуміло, що і перший, і другий вирази неважко записати у вигляді дробу, але поки це не дроби.

Ввівши поняття дробу, треба спинитися на знаходження їх числових значень. Учні повинні вміти знаходити, наприклад, числові значення дробу $\frac{2x}{3x-9}$ при будь-яких допустимих значеннях x і записувати: «даний вираз має зміст при $x \neq 3$». Вводити поняття області допустимих значень в 7 класі не рекомендується, але термін «допустимі значення змінної» учні повинні розуміти. Обов'язково треба уточнити (розширити) поняття тотожних виразів.

Два вирази називаються **тотожно рівними**, якщо при всіх значеннях вхідних у них змінних, що належать спільній області визначення, відповідні значення цих виразів рівні. Наприклад:

$$x + x \text{ і } 2x,\ (a+3)a \text{ і } a^2 + 3a,\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Тоді ми розглядали тільки цілі вирази.

Тепер уточнимо це значення, щоб воно було справедливим і для дробових виразів. Розглянемо, наприклад, дроби

$$\frac{a+2}{a^2-4} \text{ і } \frac{1}{a-2}.$$

Складемо таблицю їх значень для кількох значень змінної a.

A	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{a+2}{a^2-4}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{a-2}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Як видно з таблиці, при a, що дорівнює -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, відповідні значення обох виразів рівні. Рівні вони і при інших значеннях a, крім $a = 2$ і $a = -2$. Значення $a = -2$ недопустиме для першого, значення $a = 2$ недопустиме для обох дробів.

Таким чином, ці два вирази мають рівні числові значення при кожному **допустимому** значення змінної a. Такі вирази також прийнято вважати тотожньо рівними. Отже, надалі необхідно дотримуватись такого означення. Рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, що входять до неї, називається **тотожністю**.

Будь-який числовий вираз після виконання усіх наявних в ньому дій набуває конкретного значення, яке виражається деяким числом. Подібно до того як знаходять значення числового виразу, виконують перетворення раціональних виразів. Заданий вираз змінюють іншим – тотожним йому. Такі перетворення називають **тотожними перетвореннями**.

Тотожні перетворення раціональних виразів виконують частинами або «ланцюжком» на основі відомих правил дій над дробами і цілими виразами. Якщо вираз містить кілька дій різних ступенів, то їх виконують у такій послідовності, що й при перетворенні числових виразів:

1) дії в дужках;
2) дії третього ступеня (піднесення до степеня);
3) дії другого ступеня (множення, ділення);
4) дії першого ступеня (додавання, віднімання).

Кожний раціональний дробовий вираз можна подати у вигляді дробу, а деякі – навіть у вигляді цілого виразу. Розглянемо, наприклад, вирази:

$$a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}};\ \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}.$$

Перший з них можна перетворити так:

1) $1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$;

2) $a:\frac{a+1}{a}=\frac{a^2}{a+1}$;

3) $a-\frac{a^2}{a+1}=\frac{a^2+a-a^2}{a+1}=\frac{a}{a+1}$.

Отже, $a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+1}$.

Подібним способом (частинами) можна спростити і другий вираз. А можна перетворити його і «ланцюжком»:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}=\frac{y+x}{xy}:(x+y)-\frac{1}{xy}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{xy}=0\,.$$

Дріб, чеслівник і знаменник якого є многочленами, називається **раціональним (алгебраїчним)**.

Область допустимих значень (ОДЗ) раціонального дробу $\frac{a}{b}$ є множина всіх числових виразів, що відповідають набору многочленів a та b, для кожного з яких значення многочленна b не дорівнює нулю.

1.5. Аналіз підручників по вивченню тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів

Проведемо аналіз деяких підручників алгебри з точки зору використання різних підходів введення поняття виразу, тотожного перетворення, раціонального та ірраціонального виразів.

1) В підручнику алгебри 7 класу [10], автором якого є О. С. Істер , в розділі "Вирази" з’ясовано, що таке числовий вираз, значення виразу, буквений вираз, цілий вираз, що таке тотожне перетворення виразу, викладено основні формули, на основі яких можна здійснювати перетворення виразів.

Щодо особливостей, то матеріал, який вивчатимуть учні, поділено на три розділи, 30 параграфів (розділ «Вирази» складається з 18 параграфів). Кожний параграф розпочинається викладом теоретичного матеріалу. В теоретичному матеріалі подані приклади розв’язування вправ. Це підказка. Вона допомагає учням ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв’язування та навчає правильно записувати розв’язання. Деякі параграфи містять додатковий матеріал з цікавими фактами з історії виникнення математичних понять і символів у рубриці «А ще раніше…».

Завдання для письмового розв'язування вправ поділено на чотири рівні. Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв'язання задач, учням варто спочатку розв'язувати усні вправи і простіші задачі (початковий рівень), а відтак переходити до складніших (середній, достатній рівні). Задачі високого рівня – для найкмітливіших – тих, хто хоче вміти та знати більше й отримувати найвищі оцінки. «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено синім кольором. Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, використовуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі та «Завдання перевірки знань».

Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника «Завдання для перевірки знань за курс 7 класу». Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «відомості з курсу математики 5-6 класів» та «Вправи на повторення курсу математики 5-6 класів».

2) В підручнику алгебри 8 класу [11], автором якого є О. С. Істер, в параграфі «Раціональні вирази» учні мають змогу: пригадати основні властивості звичайного дробу та основні властивості рівнянь; ознайомитися з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу, раціонального рівняння, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа; навчитися скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами, розв'язувати раціональні рівняння.

Підручник розділено на три розділи, 26 параграфів (розділ «Раціональні вирази» складається з 12 параграфів). Кожний параграф розпочинається викладом теоретичного матеріалу. В теоретичному матеріалі подані приклади розв'язування вправ, які допомагають учням ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчають правильно записувати розв'язання. Деякі параграфи містять додатковий матеріал.

Завдання для письмового розв'язування вправ поділено на чотири рівні. Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв'язання задач, учням варто спочатку розв'язувати усні вправи і простіші задачі (початковий рівень), а відтак переходити до складніших (середній, достатній рівні). Задачі високого рівня – для найкмітливіших – тих, хто хоче вміти та знати більше й отримувати найвищі оцінки. «Цікаві задачі для учнів неледачих» та «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Для самостійної роботи вдома, рекомендовано задачі, номери яких виділено синім кольором. Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, використовуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання перевірки знань».

Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника «Завдання для перевірки знань за курс 8 класу». Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5-6 класів та курсу алгебри 7 класу» та «Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них розглядаються на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки подано у рубриці «А ще раніше…»

3) В підручниках алгебри 9 класу та алгебри і початків аналізу 10 та 11 класів не відведено жодного параграфа по вивченню чи повторенні

тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів, що є досить негативним явищем, оскільки більш-менш складні раціональні та ірраціональні вирази є традиційною складовою частиною багатьох варіантів письмових вступних іспитів, зокрема і зовнішнього тестування чи НМТ. Як відомо, не існує єдиного методу, слідуючи якому вдалося б вирішити будь-яке таке тотожне перетворення. У кожному конкретному прикладі необхідно знайти свій спосіб перетворення даного виразу. Успіх тут може забезпечити лише хороше знання методів перетворення раціональних та ірраціональних виразів і уміння грамотно проводити математичні розрахунки, що виробляється тільки достатньою практикою і власним досвідом. Звичайно, багато раціональних та ірраціональних виразів допускають декілька способів тотожних перетворювань, залежно від того, на якій ідеї воно будується. Втім, на іспиті перетворити заданий вираз треба яким-небудь одним (бажано – найбільш простим і коротким!) способом, і ніякі перетворення відповіді в інші форми проводити не потрібно.

Шкільні посібники і збірники конкурсних задач з математики містять дуже багато різних вправ по тотожних перетвореннях раціональних та ірраціональних виразів. Можливо, саме тому абітурієнти, в більшості випадків, порівняно, непогано справляються з тотожними перетвореннями. Але у значної частини школярів спостерігається досить некритичне відношення до отриманого результату. Саме тому робота над помилками та їх аналіз також включаються у зміст дослідження.

Знання різних методів тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів безперечно неабияк допоможе учням легше і швидше спрощувати раціональні та ірраціональні вирази, а також розв’язувати рівняння та нерівності, які містять ці вирази, однак можливість і вміння аналізувати використаний метод краще сприятиме уникненню помилок при розв’язуванні.

РОЗДІЛ ІІ
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РАЦІОНАЛЬНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ.

2.1. Методичні властивості вивчення тотожних перетворень раціональних виразів

2.1.1. Цілі раціональні вирази.

Цілими раціональними виразами називаються всі числові вирази, а також вирази зі змінними, які можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення змінних до натурального степеня. Якщо розглядати вирази від однієї змінної, то найпростішим прикладом цілого раціонального виразу є многочлен степеня $n \in N$: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$, $a_0 \neq 0$.

Інші приклади цілих раціональних виразів: $5x - \frac{1}{4}xy^2$, $ab + 7a^2$, $0{,}1ax^5 - abcxy$. Вирази $5xy^{-2}$, $\frac{y^2}{15x+7}$, $\frac{5x-3y}{x^2+5y}$ не є цілими раціональними, оскільки містять операції піднесення до цілого від'ємного степеня і ділення на змінні.

2.1.2. Дробові раціональні вирази. Основна властивість раціонального дробу.

Дробовими раціональними виразами (дробово-раціональними виразами) називаються вирази зі змінними, які можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення змінних до натурального степеня і ділення на вирази зі змінними. Якщо розглядати вирази від однієї змінної, то прикладом дробово-раціонального виразу є відношення двох многочленів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1} x + b_m}.$$

Інші приклади дробових раціональних виразів: $\frac{x^2-5x+6}{x+9xyz}$; $\frac{m-n^2}{m^3+3nx}$; $\frac{m}{n}+\frac{6x}{x^2+5y}$; $\frac{x^3}{x+1}$.

Раціональним дробом називається вираз $\frac{P}{Q}$, де P і Q - раціональні вирази, причому Q обов'язково містить змінні. Приклади раціональних дробів: $\frac{1}{x^2+x+1}$; $\frac{a^2+bc}{ax^2+bx+c}$; $\frac{a^2+a+1}{m^2+3mn}$; $\frac{x+10}{x^3-x^2+2}$; $\frac{x^5+3x+2}{x^4+x^2+1}$.

Основна властивість дробу полягає в тому, що чисельник і знаменник дробу можна помножити або поділити на одне і те саме відмінне від нуля число, одночлен або многочлен, виражена тотожністю $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ справджується при будь-яких значеннях a, b і c, де $bc\neq 0$, де c – цілий раціональний вираз.

Наприклад:

$$\frac{21ax^2}{28a^2x^3}=\frac{3\cdot 7ax^2}{4ax\cdot 7ax^2}=\frac{3}{4ax}, \quad \frac{x^2-4}{ax+2a}\frac{(x-2)(x+2)}{a(x+2)}=\frac{x-2}{a}.$$

2.1.3. Скорочення раціональних дробів.

Скоротити дріб – це значить поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Можливість подібного скорочення обумовлена основною властивістю дробу.

Для того, щоб скоротити раціональний дріб, потрібно спробувати розкласти на множники чисельник і знаменник. Якщо чисельник і знаменник мають спільні множники, то дріб можна скоротити. Якщо спільних множників немає, то перетворення дробу за допомогою скорочення неможливо.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}$.

Розв'язання.

$$\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)}{2(x+y)}=\frac{x-y}{2}.$$

Приклад 2. Скоротити дріб $\frac{3a-6b}{a^2-4b^2}$.

Розв’язання.

$$\frac{3a-6b}{a^2-4b^2}=\frac{3(a-2b)}{a^2-(2b)^2}=\frac{3(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{3}{a+2b}.$$

2.1.4. Зведення раціональних дробів до спільного знаменника.

Спільним знаменником двох або декількох раціональних дробів називається цілий раціональний вираз, який ділиться на знаменник кожного дробу.

Наприклад, спільним знаменником дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{7x+3}{2x+1}$ є многочлен $(x-1)(2x+1)$, однак не тільки він, але і многочлени $2(x-1)(2x+1)$, $7x(x-1)(2x+1)$, $9x^2(x-1)^4(2x+1)^7$ і т. д. Краще взяти **найменший спільний знаменник** – такий найпростіший спільний знаменник, що будь-який інший спільний знаменник ділиться на цей найпростіший. Найменшим спільним знаменником дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{7x+3}{2x+1}$ є $(x-1)(2x+1)$. Можна записати:

$$\frac{5}{x-1}=\frac{5(2x+1)}{(x-1)(2x+1)};\quad \frac{7x+3}{2x+1}=\frac{(7x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}.$$

Зведення початкових дробів до найменшого спільного знаменника (надалі будемо називати його просто спільним знаменником) було досягнуто множення чисельника і знаменника першого дробу на $(2x+1)$, а чисельника і знаменника другого дробу – на $(x-1)$. Многочлени $(2x+1)$ і $(x-1)$ називають додатковими множниками для першого і другого дробів відповідно. Таким чином, **додатковий множник** для даного дробу дорівнює частці від ділення спільного знаменника на знаменник даного дробу.

Для того, щоб кілька раціональних дробів звести до спільного знаменника, необхідно:

1) розкласти знаменник кожного дробу на множник, якщо це можливо;

2) скласти спільний знаменник, включивши до нього як співмножники всі різноманітні множники, отримані в пункті 1); якщо деякий множник є в кількох розкладеннях, то він береться з показником степеня, що дорівнює найбільшому з наявних;

3) визначити додаткові множники для кожного з дробів, для чого спільний знаменник поділити на знаменник кожного дробу;

4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на додатковий множник.

Приклад. Звести дроби до спільного знаменника.

$$\frac{1}{9a(a^2-4b^2)};\ \frac{5n}{36a^4-72a^3b};\ \frac{3m}{20a^3+40a^2b}.$$

Розв'язання.

$9a(a^2-4b^2)=9a(a-2b)(a+2b)$; $36a^4-72a^3b=36a^3(a-2b)$; $20a^3+40a^2b=20a^2(a+2b)$. Найменшим спільним кратним чисел 9, 36, 20 є число 180. Звідси спільний знаменник має вигляд $180a^3(a-2b)(a+2b)$. Додаткові множники: $20a^3$, $5(a+2b)$, $9a(a-2b)$, – для першого, другого і третього дробів відповідно.

Остаточно дістаємо:

$$20a^2$$

$$\frac{1}{9a(a^2-4b^2)}=\frac{1}{9a(a-2b)(a+2b)}=\frac{20a^2}{180a^3(a-2b)(a+2b)};$$

$$5(a+2b)$$

$$\frac{5n}{36a^4-72a^3b}=\frac{5n}{36a^3(a-2b)}=\frac{25n(a+2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)};$$

$$9a(a-2b)$$

$$\frac{3m}{20a^3+40a^2b}=\frac{3m}{20a^2(a+2b)}=\frac{27am(a-2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)}.$$

2.1.5. Додавання і віднімання раціональних дробів.

Сума (різниця) двох раціональних дробів з **однаковими знаменниками** тотожно дорівнює дробу з тим же знаменником і з чисельником, що дорівнює сумі (різниці) чисельників початкових дробів:

$$\frac{P_1}{Q}\pm\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1\pm P_2}{Q}.$$

Приклад 1. $\frac{2a+5}{a-1}+\frac{2-3a}{a-1}=\frac{2a+5+2-3a}{a-1}=\frac{7-a}{a-1}$, $(a\neq 1)$.

Приклад 2. $\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=x+y$, $(x\neq y)$.

При додаванні (або відніманні) раціональних дробів з **різними знаменниками** потрібно звести дроби до спільного знаменника і виконати додавання (або віднімання) дробів із спільним знаменником:

$\frac{P}{Q}\pm\frac{P_1}{Q_1}=\frac{Pm\pm P_1n}{S}$, де m – додатковий множник для першого дробу $\left(m=\frac{S}{Q}\right)$; n – додатковий множник для другого дробу $\left(n=\frac{S}{Q_1}\right)$; S – спільний знаменник.

Зауваження. Наведені правила справедливі для будь-якого скінченого числа дробів.

Приклад 3. $\overset{x+1}{\frac{5}{x-1}}-\overset{x-1}{\frac{4}{x+1}}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{5(x+1)-4(x-1)+2}{x^2-1}=$

$$=\frac{5x+5-4x+4+2}{x^2-1}=\frac{x+11}{x^2-1}.$$

Приклад 4. Спростити вираз $\frac{1}{b}-\frac{3a}{b^2+3ab}-\frac{b}{b^2-9a^2}$.

Розв’язання.

$b^2+3ab=b(b+3a)$, $b^2-9a^2=b^2-(3a)^2=(b-3a)(b+3a)$.

$$\frac{1}{b}-\frac{3a}{b^2+3ab}-\frac{b}{b^2-9a^2}=\frac{1}{b}-\frac{3a}{b(b+3a)}-\frac{b}{(b-3a)(b+3a)}=$$

$$=\frac{(b+3a)(b-3a)-3a(b-3a)-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{b^2-9a^2-3ab+9a^2-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=$$

$$=\frac{-3ab}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{-3ab}{b(b^2-9a^2)}=\frac{3ab}{b(9a^2-b^2)}.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{3ab}{b(9a^2-b^2)}\right\}$.

2.1.6. Множення і ділення раціональних дробів.

Добуток двох раціональних дробів тотожно дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників дробів, що перемножуються:

$$\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2}.$$

Це правило розповсюджується на добуток будь-якого скінченного числа дробів.

Частка від ділення двох раціональних дробів тотожно дорівнює дробу, чисельник якого дорівнює добутку чисельника першого дробу і знаменника другого дробу, а знаменник – добутку знаменника першого дробу і чисельника другого дробу:

$$\frac{P_1}{Q_1}:\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot Q_2}{Q_1\cdot P_2}.$$

Якщо дріб множиться або ділиться не на дріб, а на многочлен $R(x)$, то зазначені вище правила залишаються дійсними, але многочлен $R(x)$ необхідно зобразити у вигляді $R(x)=\dfrac{R(x)}{1}$.

На практиці при множенні або діленні раціональних дробів звичайно попередньо розкладають на множники чисельники і знаменники початкових дробів (якщо це можливо).

Приклад 1. Спростити вираз $\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)}\cdot\frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3}=A$.

Розв’язання.

$$\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)}=\frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2};$$

$$\frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3}=\frac{x^3(x-2)(x+2)}{(x+2)^3}=\frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2};$$

$$A=\frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2}=\frac{x}{3(x-2)}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{x}{3(x-2)}\right\}$.

Приклад 2. Спростити вираз $\left(a+\frac{b-a}{1-ab}\right):\left(a+\frac{ab-a}{1-ab}\right)=A$.

Розв’язання.

$1-ab$

$$a+\frac{b-a}{1-ab}=\frac{a(1-ab)+b-a}{1-ab}=\frac{a-a^2b+b-a}{1-ab}=\frac{b-a^2b}{1-ab}=\frac{b(1-a^2)}{1-ab}=$$
$$=\frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab};$$

$$a+\frac{ab-a}{1-ab}=\frac{a(1-ab)+ab-a}{1-ab}=\frac{a-a^2b+ab-a}{1-ab}=\frac{ab-a^2b}{1-ab}=\frac{ab(1-a)}{1-ab};$$

$$A=\frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab}:\frac{ab(1-a)}{1-ab}=\frac{b(1-a)(1+a)(1-ab)}{(1-ab)ab(1-a)}=\frac{1+a}{a}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{1+a}{a}\right\}$.

2.1.7. Піднесення раціональних дробів до степеня.

Степінь раціонального дробу тотожно дорівнює дробу, у якого чисельник – степінь чисельника, а знаменник – степінь знаменника: $\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}$.

Наприклад: $\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$;

$\left(\frac{3ab^2}{2c^3}\right)^4=\frac{(3ab^2)^4}{(2c^3)^4}=\frac{3^4a^4b^8}{2^4c^{12}}=\frac{81a^4b^8}{16c^{12}}$.

2.1.8. Розв’язання прикладів на тотожні перетворення раціональних виразів.

Перетворення раціонального виразу зводиться до додавання, віднімання, множення і ділення раціональних дробів, а також до піднесення дробу до цілого степеня. Метою тотожного перетворення раціональних виразів звичайно є перетворенням їх у дріб, чисельник і знаменник якого – цілі раціональні вирази.

Приклад 1. Спростити вираз $\left(\frac{a}{a^2-4}+\frac{2}{2-a}+\frac{1}{a+2}\right):\left(a-2+\frac{10-a^2}{a+2}\right)=A$.

Розв’язання.

Перетворимо спочатку вирази в дужках, а потім виконаємо ділення. Розв’язок здійснюється в кілька етапів.

а) $\frac{a}{a^2-4}+\frac{2}{2-a}+\frac{1}{a+2}=\frac{a}{(a-2)(a+2)}-\frac{2}{a-2}+\frac{1}{a+2}=\frac{a-2(a+2)+a-2}{(a-2)(a+2)}=$

$=\frac{a-2a-4+a-2}{(a-2)(a+2)}=-\frac{6}{(a-2)(a+2)}$;

б) $(a-2)+\frac{10-a^2}{a+2}=\frac{(a+2)(a-2)+10-a^2}{a+2}=\frac{6}{a+2}$;

в) $A=-\frac{6}{(a-2)(a+2)}:\frac{6}{a+2}=\frac{(-6)(a+2)}{(a-2)(a+2)6}=-\frac{1}{a-2}=\frac{1}{2-a}$.

Відповідь: $\left\{\frac{1}{2-a}\right\}$.

Приклад 2. Спростити вираз

$$M=\left(\frac{a}{ax-2x^2}-\frac{2}{(a+a^2-2ax-2x}\left(1+\frac{3a+a^2}{a+3}\right)\right)^{-1}.$$

Розв’язання.

Виконаємо перетворення безпосередньо, не розбиваючи розв'язання на кілька етапів.

$$M=\left(\frac{a}{ax-2x^2}-\frac{2}{(a+a^2-2ax-2x}\left(1+\frac{3a+a^2}{a+3}\right)\right)^{-1}=\left(\frac{a}{x(a-2x)}-\frac{2}{(1+a)(a-2x)}(1+a)\right)^{-1}=$$

$$\left(\frac{a}{x(a-2x)}-\frac{2}{a-2x}\right)^{-1}=\left(\frac{a-2x}{x(a-2x)}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}=\left(x^{-1}\right)^{-1}=x.$$

Відповідь: $\{x\}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2+\frac{x+7}{x+9}=A$.

Розв'язання.

Здійснюємо розв'язання в кілька етапів

а) $$\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}=\frac{x+5}{(x-9)(x+9)}+\frac{x+7}{(x-9)^2}=\frac{(x-9)(x+5)+(x+9)(x+7)}{(x-9)^2(x+9)}=$$

$$=\frac{x^2+5x-9x-45+x^2+7x+9x+63}{(x-9)^2(x+9)}=\frac{2x^2+12x+18}{(x-9)^2(x+9)}=\frac{2(x^2+6x+9)}{(x-9)^2(x+9)}=\frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2(x+9)};$$

б) $$\frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2(x+9)}:\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2=\frac{2(x+3)^2(x-9)^2}{(x-9)^2(x+9)(x+3)^2}=\frac{2}{x+9};$$

в) $$A=\frac{2}{x+9}+\frac{x+7}{x+9}=\frac{2+x+7}{x+9}=\frac{x+9}{x+9}=1.$$

Відповідь: $\{1\}$.

2.2. Методичні властивості вивчення тотожних перетворень ірраціональних виразів

2.2.1. Корінь n-го степеня з дійсного числа.

Дійсне число x називається **коренем *n*-го степеня з дійсного числа *a***, якщо $x^n=a \quad (n\in N, n\geq 2)$. Корінь n-го степеня позначається символом $\sqrt[n]{a}$. Відповідно до визначення $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. Число a називається **підкореневим числом** чи **підкореневим виразом,** n **- показником кореня**. Якщо $n=2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають цей вираз

квадратним коренем. $\sqrt[3]{a}$ називають **кубічним коренем**. Замість терміна **«корінь»** уживають термін **«радикал»**.

Приклад. а) $\sqrt{4}=2$, тому що $2^2=4$; б) $\sqrt[4]{81}=3$, тому що $3^4=81$; в) $\sqrt{0}=0$; г) $\sqrt{1}=1$; д) $\sqrt[3]{8}=2$; е) $\sqrt[3]{27}=3$; ж) $\sqrt[5]{243}=3$.

Дія, за допомогою якої відшукується корінь n-го степеня, називається **добуванням кореня *n*-го степеня.**

Корінь парного степеня добувається тільки з невід’ємного числа, тобто якщо $a<0$, то $\sqrt[2n]{a}$ не існує. Наприклад, вирази $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-3}$ не мають змісту в області дійсних чисел. Корінь непарного степеня добувається і з від’ємного числа. Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-3$, тому що $(-3)^3=-27$; $\sqrt[3]{-1}=-1$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt[5]{-32}=-2$. Для коренів непарного степеня $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$. Для коренів парного степеня ця властивість не виконується, тобто $\sqrt[2n]{-a}\neq-\sqrt[2n]{a}$ (вона виконується тільки для $a=0$). Таким чином, $\sqrt[2n]{a}$ існує при $a\geq 0$, $\sqrt[2n+1]{a}$ існує для будь-якого $a\in R$.

Щоб уникнути двозначності кореня n-го степеня з дійсного числа a, уводиться поняття арифметичного кореня.

Арифметичним коренем називається **невід’ємний корінь** n-го степеня зn-го степеня з невід’ємного числа. Для коренів парного степеня умовилися брати тільки арифметичний корінь. Таким чином, можемо записати: $\sqrt{a^2}=|a|\geq 0$, $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|\geq 0$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{100}=10$. Помилково записувати $\sqrt{9}=\pm 3$, $\sqrt{100}=\pm 10$.

Зауваження. Іноді арифметичним коренем називають невід’ємний корінь **парного степеня** з невід’ємного числа.

2.2.2. Основні властивості коренів (правила дій з радикалами).

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$;

5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$;

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

7) $\sqrt{a^2} = |a|$;

8) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Зауваження 1. Наведені вище властивості 1) – 6) справедливі для $a \geq 0$, $b \geq 0$, якщо розглядати корені парного степеня. Властивості 7) – 8) справедливі для $a \in R$.

Якщо ж розглядати корені непарного степеня, то ці властивості 1) – 8) справедливі для $a \in R$, $b \in R$.

Зауваження 2. Формули 1) – 5) часто застосовуються у зворотному порядку, тобто справа наліво. Наприклад:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{5\cdot 3} = \sqrt{15};\ \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{22}{11}} = \sqrt{2};\ \sqrt[3]{2^5} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^5;\ \sqrt[6]{7} = \sqrt[3]{\sqrt{7}};\ \sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}.$$

2.2.3. Винесення множника з-під кореня.

Якщо показник степеня множника під коренем більше, ніж показник кореня, то раціональний множник можна винести з-під знака кореня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m},\ a > 0.$$

Приклад. Винести множник з-під кореня:

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}$.

Розв’язання.

а) $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5\cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2^2} = 2\cdot\sqrt[5]{4}$;

б) $\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{2^2\cdot 6} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{625\cdot 4} = \sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{4} = 5\cdot\sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4} = \sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b^3\cdot b} = \sqrt[3]{a^9\cdot b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b} = a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Відповідь: а) $\left\{2\sqrt[5]{4}\right\}$; б) $\left\{2\sqrt{6}\right\}$; в) $\left\{5\sqrt{2}\right\}$; г) $\left\{a^3b\sqrt[3]{a^2b}\right\}$.

2.2.4. Внесення множника під корінь.

Якщо раціональний множник стоїть перед коренем, то його можна внести під корінь. Для цього потрібно цей множник піднести до степеня кореня: $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$, якщо $a\ge 0,\ b\ge 0$.

Для коренів парного степеня в залежності від знака a маємо: $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, якщо $a\ge 0,\ b\ge 0$; $a\cdot\sqrt[2n]{b}=-\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, якщо $a\le 0,\ b\ge 0$.

Зокрема, для квадратних коренів:

$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, якщо $a\ge 0,\ b\ge 0$; $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$, якщо $a\le 0,\ b\ge 0$.

Приклад. Внести множник під корінь: а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}$.

Розв'язання.

а) $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$;

б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$.

Відповідь: а) $\left\{\sqrt[3]{162}\right\}$; б) $\left\{\sqrt[5]{a^{10}b}\right\}$.

2.2.5. Зведення підкореневого виразу до цілого виду.

Звести підкореневий вираз до цілого виду – це значить звільнити підкореневий вираз від знаменника (якщо він є):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^k\cdot b^{n-k}}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}.$$

Приклад 1. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5}{5^2\cdot 5}}=\frac{\sqrt[3]{3\cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{15}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Відповідь: $\left\{\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}\right\}$.

Спростити корінь – це значить:

1) винести множник з-під кореня;

2) скоротити показники кореня і підкореневого виразу;

3) звести підкореневий вираз до цілого виду.

Приклад 2. Спростити корінь $\sqrt[4]{\dfrac{7ab^5}{2m^3n}}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{\frac{7ab^5}{2m^3n}}=\sqrt[4]{\frac{b^4 7ab}{2m^3n}}=b\cdot\sqrt[4]{\frac{7ab}{2m^3n}}=b\cdot\sqrt[4]{\frac{7\cdot 2^3\cdot m\cdot n^3\cdot a\cdot b}{2\cdot 2^3\cdot m^3\cdot m\cdot n^3\cdot n}}=b\cdot\sqrt[4]{\frac{7\cdot 8\cdot a\cdot b\cdot m\cdot n^3}{2^4\cdot m^4\cdot n^4}}=$$

$$=b\cdot\sqrt{\frac{56abmn^3}{2mn}}=\frac{b}{2mn}\cdot\sqrt[4]{56abn^3}\text{, де } a\ge 0,\ b\ge 0,\ mn>0.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{b}{2mn}\cdot\sqrt[4]{56abn^3}\right\}$.

2.2.6. Звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику дробу або в чисельнику дробу.

Дріб можна звільнити від ірраціональності (від ірраціонального виразу) в чисельнику або в знаменнику, наприклад, так:

$\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}\Rightarrow$ дріб $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ звільнили від ірраціональності в знаменнику;

$\dfrac{\sqrt{a}}{b}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{b\sqrt{a}}=\dfrac{a}{b\sqrt{a}}\Rightarrow$ дріб $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ звільнили від ірраціональності в чисельнику.

Щоб звільнити дріб від ірраціональності в чисельнику або в знаменнику, можна застосовувати формули скороченого множення, що стосовно до коренів мають вигляд:

а) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$;

б) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b$;

в) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a-b$.

Вирази $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ і $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ називаються **взаємно спряженими виразами**. Їхній добуток дорівнює різниці підкореневих виразів: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$, $(a\ge 0, b\ge 0)$.

Приклад. Звільнити дроби від ірраціональності в знаменнику:

а) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; в) $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Розв'язання.

а) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

б) $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

в) $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\frac{xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}$.

Відповідь: а) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; б) $\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$; в) $\frac{xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}$.

2.2.7. Подібні радикали.

Множник, що стоїть перед коренем, називається його **коефіцієнтом**. Наприклад, у виразі $4\sqrt{5}$ коефіцієнтом є число 4. корені (радикали) називаються **подібними**, якщо вони мають однакові показники коренів і однакові підкореневі вирази, а відрізняються тільки коефіцієнтом. Наприклад, радикали $\sqrt[3]{108}$ і $\sqrt[3]{32}$ подібні, тому що $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27\cdot 4}=3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=2\sqrt[3]{4}$.

2.2.8. Степінь дійсного числа з раціональним показником.

Якщо $m\in Z$, $n\in N$, $n\geq 2$, $a>0$, то думають за визначенням $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Наприклад, $6^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{6^2}=\sqrt[3]{36}$; $5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}=\sqrt[4]{125}$.

Зауваження. Формула $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ має значення не тільки при $a>0$. Якщо $n=2k+1$ ($k\in N$), то формула $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ справедлива при $a\in R\setminus\{0\}$. Якщо $\frac{m}{n}>0$, то вираз $\sqrt[n]{a^m}$ має значення не тільки при $a>0$, але і при $a\leq 0$, причому $\sqrt[n]{0^m}=0$. Наприклад, мають значення такі вирази, які можна записати за допомогою радикалів: $(-2)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32} = -\sqrt[3]{32}$; $(-0{,}5)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-0{,}5)^2} = \sqrt[5]{0{,}25}$; $(-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 9$; $0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$; $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0$.

2.2.9. Степінь дійсного числа з дійсним показником.

Степінь дійсного числа з дійсним показником має ті ж властивості, що і степінь з натуральним, цілим, раціональним показниками. Запишемо ці властивості, припускаючи, що $a > 0$, $b > 0$, $x \in R$, $y \in R$.

Властивості степеня дійсного числа з дійсними показниками

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

3) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$;

4) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

6) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

7) $a^0 = 1$;

8) $a^1 = a$;

9) $1^x = 1$.

Приклад.

а) $\dfrac{9^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 9 \cdot \sqrt[3]{9}$;

б) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{16}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1^4}{3^4} = \dfrac{1}{81}$.

Зауваження 1. Вираз a^x звичайно розглядається при $a>0$, тому що при $a>0$ вираз a^x має значення завжди. Однак при $a<0$ має значення в таких випадках:

а) для невід'ємних цілих $x \geq 0$;

б) для раціональних чисел $x=\frac{p}{q}$, у яких знаменник q – непарне число;

в) коли x – ціле від'ємне число.

Наприклад, вирази $(-9)^{-4}$, $(-5)^0$, $(-0{,}8)^{-\frac{1}{5}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $(-2{,}5)^{-\frac{2}{3}}$ існують (мають значення); вирази $(-7)^{\frac{1}{2}}$, $(-3)^{\frac{3}{4}}$, $(-0{,}5)^{\frac{5}{6}}$, $(-5)^{\frac{1}{2}}$ не існують в області дійсних чисел.

Зауваження 2. Звичайно змінні позначаються буквами x, y, z, u, ϑ, w, а сталі (або параметри) – буквами a, b, c, α, β, γ, δ і т. д. Якщо основу степеня позначити через x, показник степеня через α, то степінь набуває вигляду x^α. Тому що перетворення зі степенями виду x^α зустрічаються досить часто, то запишемо властивості степеня 1) – 9), умовно назвавши їх *властивостями степеня зі змінною основою і фіксованим показником степеня* $(x>0,\ y>0,\ \alpha\in R,\ \beta\in R)$.

1) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; 2) $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$;

3) $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$; 4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$; 6) $x^{-\alpha}=\frac{1}{x^\alpha}$;

7) $x^0=1$; 8) $x^1=x$; 9) $1^\alpha=1$.

Зауваження 3. Вираз x^α звичайно розглядають при $x>0$, тому що при $x>0$ x^α має зміст завжди. Однак при $\alpha>0$ (α – ціле) x^α визначено для будь-якого $x\in R$; якщо α – ціле від'ємне число, то x^α визначено при $x\in R\setminus\{0\}$; якщо $\alpha=\frac{p}{q}$, де q – непарне число, то x^α визначено не тільки при $x>0$, але і при $x<0$.

2.2.10. Розв’язання прикладів на перетворення ірраціональних виразів.

При розв’язанні прикладів на перетворення ірраціональних виразів використовуються властивості радикалів і властивості степеня з раціональним показником.

Приклад 1. Спростити $\sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Розв’язання.

1 спосіб. $x^4 \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\left(x^4\right)^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^{12} \cdot x} = \sqrt[3]{x^{13}} \Rightarrow \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{13}}} = \sqrt[15]{x^{13}}$.

2 спосіб. $\sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[15]{x} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{4}{5}+\frac{1}{15}} = x^{\frac{12+1}{15}} = x^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{x^{13}}$.

Відповідь: $\left\{\sqrt[15]{x^{13}}\right\}$.

Приклад 2. Спростити $\left(\sqrt[7]{a^3}\right)^5$.

Розв’язання.

$\left(\sqrt[7]{a^3}\right)^5 = \sqrt[7]{a^{3\cdot 5}} = \sqrt[7]{a^{15}} = \sqrt[7]{a^{14} \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a}$.

Відповідь: $\left\{a^2 \cdot \sqrt[7]{a}\right\}$.

Приклад 3. Спростити $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}$.

1 спосіб. Зведемо радикали до одного показника:

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{\left(x^2\right)^2} = \sqrt[6]{x^4}$. Тоді $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^4} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^4 \cdot x} = \sqrt[6]{x^5}$.

2 спосіб. $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{4+1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$.

Відповідь: $\left\{\sqrt[6]{x^5}\right\}$.

Приклад 4. Спростити $\sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

Розв’язання.

$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2x4 + 4^2 = (x-4)^2$. Тому $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$.

Відповідь: $\{|x-4|\}$.

Приклад 5. Спростити вираз $\dfrac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}} \cdot b}{1 - \sqrt{a^{-1} \cdot b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}} \cdot b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b}} = A$.

Розв’язання.

Розв’язання проведемо в декілька етапів.

а) $$\frac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}\cdot b}{1-\sqrt{a^{-1}\cdot b}}=\frac{\sqrt{a}-\frac{b}{\sqrt{a}}}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-b}{\sqrt{a}\left(1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

б) $$\frac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}\cdot b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}-b}{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[6]{a}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^3}-b}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

в) $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{b}$.

Відповідь: $\{2\sqrt{b}\}$.

2.3. Методика навчання учнів тотожних перетворень

2.3.1. Методика навчання учнів тотожних перетворень раціональних виразів.

Правила дій над раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Розв’язання.

Як і обчислення значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій, спрощення даного виразу можна виконати по діях, визначаючи порядок виконання відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення, і наприкінці — віднімання:

1) $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\overset{a-2}{\frac{3a}{a-2}}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$

$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a$.

Відповідь: $\{a\}$.

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не по окремих діях, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на наступному прикладі.

Приклад 2. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення a.

Розв’язання.

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=$$

$$=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях a значення даного виразу дорівнює 3.

Приклад 3. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}.$$

Розв’язання.

У цьому випадку для перетворення лівої частини даної рівності доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\overset{a+1}{\frac{1}{a}}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=$$

$$=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено.

Приклад 4. Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Розв’язання.

Записавши даний вираз у вигляді частки чисельника і знаменника, отримуємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Заданий вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме помножити його чисельник і знаменник на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}\right\}$.

2.3.2. Методика навчання учнів тотожних перетворень ірраціональних виразів.

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt{48}$ подано у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають **винесенням множника з-під знака кореня.** У даному випадку було винесено з-під кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають **внесенням множника під знак кореня.**

Приклад 1. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a < 0$.

Розв’язання.

1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є квадратом раціонального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8}\sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}$.

3) З умови випливає, що $b \geq 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = \left|b^{17}\right|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

4) З умови випливає, що $b \leq 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = \left|b^{17}\right|\sqrt{-b} = b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) З умови випливає, що $b \geq 0$. Тоді

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$$

Приклад 2. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$;

3) $\left(7 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right)$.

Розв’язання.

1) Маємо:

$$\sqrt{54a}+\sqrt{24a}-\sqrt{600a}=\sqrt{9\cdot 6a}+\sqrt{4\cdot 6a}-\sqrt{100\cdot 6a}=$$

$$=3\sqrt{6a}+2\sqrt{6a}-10\sqrt{6a}=\sqrt{6a}(3+2-10)=\sqrt{6a}\cdot(-5)=-5\sqrt{6a}.$$

2) $\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}\right)^2=6+\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$.

3) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена і добуток суми та різниці двох виразів), отримуємо:

$$\left(7-3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)=7^2-2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right)=$$

$$=49-42\sqrt{2}+18-(10-5)=62-42\sqrt{2}.$$

Приклад 3. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Розв’язання.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

2.4. Розробка самостійних та контрольних робіт для 7 класу

2.4.1. Самостійна робота № 1. Числові вирази. Значення числових виразів.

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}$; б) $\frac{4}{15}-\frac{2}{13}$; в) $2\frac{3}{5}+5\frac{4}{15}$.

2. Знайти значення виразу:

27,31 + 18,84 – 13,59 + 16,91.

3. Знайти добуток або частку:

а) $3\frac{3}{5}\cdot 1\frac{1}{9}$;

б) $-1\frac{2}{3}:1\frac{1}{10}$.

4. Обчислити значення виразу:

$$4{,}8:\left(-\frac{6}{25}\right)-2\frac{2}{3}\cdot 3{,}75+12\frac{5}{6}:3\frac{2}{3}.$$

5. Якою цифрою закінчується результат:

а) 19^2; б) 83^3?

Варіант 2

1. Обчислити:

а) $\frac{5}{9}+\frac{1}{4}$; б) $\frac{7}{12}-\frac{3}{11}$; в) $4\frac{5}{12}+5\frac{1}{6}$.

2. Знайти значення виразу:

12,39 + 17,37 – 19,54 + 16,49.

3. Знайти добуток або частку:

а) $3\frac{5}{6}\cdot 1\frac{7}{23}$;

б) $10\frac{1}{3}:\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

4. Обчислити значення виразу:

$$4{,}8:\left(-\frac{6}{25}\right)-2\frac{2}{3}\cdot 3{,}75+12\frac{5}{6}:3\frac{2}{3}.$$

5. Якою цифрою закінчується результат:

а) 97^2; б) 72^3?

2.4.2. Самостійна робота № 2. Вирази із змінними.

Варіант 1

1. Знайти значення виразу:

а) $2a+3b+10b$, якщо $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{2}{5}$.

б) $2{,}5m+4{,}9n-1$, якщо $m=4$, $n=-5$.

2. Порівняти значення виразу:

$2m+10$ при $m=\frac{1}{4}$ і $m=0$.

3. При яких значеннях змінної a має зміст вираз:

а) $\frac{a-4}{2a-10}$; б) $\frac{7+a}{18}$?

4. Для яких значень x числові значення виразів:

$2x+3(x-1)$ і $5x$ дорівнюють один одному?

5. Скласти вираз для розв'язання задачі:

На одному складі a тонн вугілля, а на другому b тонн вугілля. Щоденно на кожний склад поступає m тонн вугілля. Скільки вугілля буде на обох складах через k днів.

Варіант 2

1. Знайти значення виразу:

а) $5x-2b+3x+4b$, якщо $x=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{7}{8}$.

б) $3{,}7a-3{,}8b+4$, якщо $a=9$, $b=-4$.

2. Порівняти значення виразу:

$3a+8$ при $a=0$ і $a=\frac{2}{9}$.

3. При яких значеннях змінної b має зміст вираз:

а) $\frac{b+5}{18-2b}$; б) $\frac{1-b}{2}$?

4. Для яких значень a числові значення виразів:

$4a-2(1-a)$ і $8a$ дорівнюють один одному?

5. Скласти вираз для розв'язання задачі:

Моторний човен, який має власну швидкість $\vartheta\,км/год$, рухається за течією річки $t\,год$. Який шлях подолає моторний човен за цей час, якщо швидкість течії річки $\vartheta_1\,км/год$.

2.4.3. Самостійна робота № 3. Тотожні перетворення виразів.

Варіант 1

1. Знайти значення виразу:

$15{,}6 \cdot 32 - 15{,}6 \cdot 19$.

2. Чи є тотожно рівними вирази:

$15x + 3$ і $15 \cdot (x+1)$?

3. Звести подібні доданки:

$2m + 10k - 4k + 8m$.

4. Спростити вираз:

$3 \cdot (2x - 4) - 5 \cdot (4x + 10)$.

5. Довести, що сума:

$34 \cdot 19 + 16 \cdot 19$ ділиться на 25.

Варіант 2

1. Знайти значення виразу:

$14{,}7 \cdot 27 + 14{,}7 \cdot 29$.

2. Чи є тотожно рівними вирази:

$21x + 9y$ і $3 \cdot (3y + 7x)$?

3. Звести подібні доданки:

$3x - 9x + 10k - 18k$.

4. Спростити вираз:

$-4 \cdot (3x - 1) + 5 \cdot (2x + 2)$.

5. Довести, що різниця:

$39 \cdot 47 - 47 \cdot 21$ ділиться на 18.

2.4.4. Контрольна робота № 1. Числові вирази. Вирази із змінними. Тотожності.

Варіант 1

1. Обчислити:

$$6{,}6\cdot 1\frac{2}{3}+0{,}75:\frac{9}{16}-2\frac{3}{4}.$$

2. Знайти значення виразу:

$3x-10y+18x$, якщо $x=2{,}5$; $y=-3{,}5$.

3. Перетворити вираз у тотожно рівний:

$2{,}3\cdot(2x-3y+5z)$.

4. Спростити вираз:

$2x-(3x-(4x-2))$.

5. Турист першого дня пройшов $5a$ км, а другого на $3m$ км більше, ніж першого. Скільки кілометрів пройшов турист за два дні?

Обчислити при $a=4{,}5$; $m=2\frac{1}{2}$.

6. Якою цифрою закінчується сума:

114^2+7^3?

Варіант 2

1. Обчислити:

$$8\frac{3}{4}+6\frac{1}{4}:2{,}5-\frac{4}{9}\cdot 1{,}8.$$

2. Знайти значення виразу:

$4k+10k-13m$, якщо $k=-1{,}3$; $m=5{,}2$.

3. Перетворити вираз у тотожно рівний:

$-4{,}8\cdot(5m-2k+3p)$.

4. Спростити вираз:

$6a-(92a-(3a-5))$.

5. Лижник здійснив пробіг за два дні. Першого дня він пройшов $2S$ км, а другого на $1{,}5n$ км менше, ніж першого дня. Скільки кілометрів пройшов лижник за два дні?

Обчислити при $S = 15{,}4$; $n = 4$.

6. Якою цифрою закінчується різниця:

$116^3 - 15^2$?

2.4.5. Самостійна робота № 4. Степінь з натуральним показником. Множення і ділення степенів.

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $(-3)^4$;   б) $(0{,}2)^2$;   в) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

2. Знайти значення виразу:

$29 - x^2$, якщо $x = 18$.

3. Подати у вигляді степеня:

а) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^8$;   б) $m^8 : m^2$.

4. Порівняти значення виразів:

а) $(-0{,}8)^4$ і $(-0{,}9)^3$;

б) $(-1{,}9)^6$ і $(-1{,}9)^8$.

5. Не будуючи графіка функції $y = -2x^3$, з'ясувати, чи належить точка $A(2;-16)$ графіку цієї функції.

Варіант 2

1. Обчислити:

а) $(-4)^4$;   б) $(0{,}3)^2$;   в) $\left(1\frac{2}{3}\right)^3$.

2. Знайти значення виразу:

$13 - k^2$, якщо $k = 19$.

3. Подати у вигляді степеня:

а) $b^7 \cdot b \cdot b^5$; б) $n^{10} : n^6$.

4. Порівняти значення виразів:

а) $(-1{,}4)^4$ і $(-9{,}7)^5$;

б) $(-2{,}7)^3$ і $(-2{,}7)^5$.

5. Не будуючи графіка функції $y = x^3$, зясувати, чи належить точка $M(-1;-3)$ графіку цієї функції.

2.4.6. Самостійна робота № 5. Піднесення до степеня добутку і степеня.

Варіант 1

1. Спростити вираз:

а) $\left(\frac{2}{5}x^5y^4\right)^2$; б) $\left(-2a^9b^4\right)^3$.

2. Замінити * степенем з основою a так, щоб виконувалась рівність:

$a^4 \cdot * = a^{10}$.

3. Знайти значення виразу:

$0{,}5^4 \cdot 20^4$.

4. Обчислити:

$\frac{5^8 \cdot 5^4}{5^{10}}$.

5. Записати вираз у вигляді степеня:

$-8a^6b^3$.

Варіант 2

1. Спростити вираз:

а) $\left(\frac{2}{3}a^4b^7\right)^2$; б) $\left(-3x^2y^6\right)^3$.

2. Замінити * степенем з основою b так, щоб виконувалась рівність:

$* : b^7 = b^2$.

3. Знайти значення виразу:

$0{,}2^5 \cdot 50^5$.

4. Обчислити:

$$\frac{4^8 \cdot 4^{15}}{4^{18}}.$$

5. Записати вираз у вигляді степеня:

$25a^4b^6$.

2.4.7. Контрольна робота № 2. Степінь з натуральним показником. Дії з степенями.

Варіант 1

1. Знайти значення виразу:

$(a-b)^3+9$, якщо $a=94,\ b=89$.

2. Спростити вираз:

а) $\left(-5a^2b^3\right)^2$;

б) $\left(-2{,}5x^2y^3z\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3y\right)^2$.

3. Порівняти значення виразів:

$-a^2$ і $(-a)^2$, якщо $a=-3;\ 2$.

4. Обчислити:

$$\frac{2^8 \cdot 3^4}{9^2 \cdot 4^3}.$$

5. Розв'язати рівняння:

$(2a-5)^6=0$.

6. При яких натуральних значеннях k правильна нерівність:

$9<5^k<1825$?

Варіант 2

1. Знайти значення виразу:

$(x-y)^3-11$, якщо $x=-45,\ y=-50$.

2. Спростити вираз:

а) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$;

б) $\left(-3b^2c\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}b^8c^2\right)^3$.

3. Порівняти значення виразів:

$(-b)^2$ і $-b^2$, якщо $b=-2;\ 4$.

4. Обчислити:

$\frac{4^3 \cdot 3^8}{27^2 \cdot 2^4}$.

5. Розв'язати рівняння:

$(3x-15)^5 = 0$.

6. При яких натуральних значеннях p правильна нерівність:

$23 < 4^p < 800$?

2.4.8. Самостійна робота № 6. Одночлен і його стандартний вигляд. Множення одночленів.

Варіант 1

1. Звести одночлен до стандартного вигляду:

а) $3x^2x^3x^4$; б) $9x^2y\cdot(-5xy^2)$; в) $-3y\cdot 0{,}2x^2y^2$.

2. Знайти значення одночлена:

$27a^2$, якщо $a=-5$; 0,7.

3. Подати вираз $5c^2k\cdot 2{,}5c^3k^2\cdot 4c^6k$ у вигляді одночлена стандартного вигляду і назвати:

а) його коефіцієнт;

б) його степінь.

4. Знайти значення x, при якому значення одночлена $5{,}7x$ дорівнює: 0; -1.

5. При яких значеннях a одночлен $0{,}45a^2$ приймає:

а) додатні значення;

б) невід’ємні значення?

Варіант 2

1. Звести одночлен до стандартного вигляду:

а) $-5y^5y^6y^2$; б) $3yz^2\cdot(-2yz^3)$; в) $-4y\cdot 0{,}3y^2z^6$.

2. Знайти значення одночлена:

$-3{,}8b^2$, якщо $b=-3$; 0,9.

3. Подати вираз $6ck^3\cdot 8{,}4c^2k^3\cdot 8c^2k^2$ у вигляді одночлена стандартного вигляду і назвати:

а) його коефіцієнт;

б) його степінь.

4. Знйти значення y, при якому значення одночлена $8{,}4y$ дорівнює: 0; -1.

5. При яких значеннях b одночлен $4{,}72b^2$ приймає:

а) додаттні значення;

б) невід'ємні значення?

2.4.9. Самостійна робота № 7. Піднесення одночлена до степеня.

Варіант 1

1. Виконати множення:

а) $\frac{5}{7}x\cdot 14x^3y^2$; б) $0{,}2x^3y^2\cdot(-x^2y)$; в) $0{,}5x^2y^4\cdot 3{,}5xy^3$.

2. Піднести одночлен до степеня:

а) $(-5a)^3$; б) $\left(\frac{1}{2}a^2b^3\right)^4$; в) $\left(0{,}6ab^3\right)^2$.

3. Перетворити вираз в одночлен стандартного вигляду:

$(-4ac)^3\cdot\left(0{,}5a^3c^2\right)^2$.

4. Подати даний одночлен $-21x^3b^4z^2$ у вигляді добутку яких-небудь одночленів.

5. Замінити * таким одночленом стандартного вигляду, щоб виконувалась рівність:

$6x^2\cdot * = -48x^3y^2$.

Варіант 2

1. Виконати множення:

а) $\frac{2}{11}y\cdot 44y^2z^5$; б) $0{,}3y^2z^3\cdot(-y^2z)$; в) $0{,}4y^5z^4\cdot 3{,}1y^2z^3$.

2. Піднести одночлен до степеня:

а) $\left(-6b^2\right)^4$; б) $\left(\frac{1}{5}b^2c^3\right)^3$; в) $\left(0{,}4b^2c^5\right)^2$.

3. Перетворити в одночлен стандартного вигляду вираз:

$$\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)^3\cdot\left(-9x^4\right)^2.$$

4. Подати даний одночлен $-35a^3b^7$ у вигляді добутку яких-небудь одночленів.

5. Замінити * таким одночленом стандартного вигляду, щоб виконувалась рівність:

$$*\cdot 9a^2b^4=-36a^8b^6.$$

2.4.10. Контрольна робота № 3. Одночлени.

Варіант 1

1. Звести до стандартного вигляду одночлен:

а) $2\frac{1}{7}x^2y^3\cdot\left(-\frac{7}{45}x^2y^2\right)$;

б) $\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)^4$.

2. Порівняти вирази:

$-2x^4$ і $(-2x)^4$, якщо $x=\frac{1}{2}$.

3. Знайти значення виразу:

$1-4a^2$, якщо $a=-5$.

4. Розв’язати рівняння:

$$(0{,}2a)^3=0{,}008.$$

5. Що більше:

15^9 чи $3^9 \cdot 5^{10}$?

6. Спростити вираз:

$$\frac{2^{2n+1} \cdot 3^{2n}}{6^{2n}}.$$

Варіант 2

1. Звести до стандартного вигляду одночлен:

а) $-3\frac{9}{22}x^3y^2z \cdot \frac{11}{15}x^4y^5z^6$;

б) $\left(-0{,}2m^3n^4\right)^3$.

2. Порівняти вирази:

$\frac{1}{3}y^3$ і $\left(\frac{1}{3}y\right)^4$, якщо $y = -3$.

3. Знайти значення виразу:

$2 - 27p^3$, якщо $p = -\frac{1}{3}$.

4. Розв’язати рівняння:

$(0{,}4b)^3 = 0{,}064$.

5. Що більше:

$8^{10} \cdot 9^{11}$ чи 72^{10}?

6. Спростити вираз:

$$\frac{4^{3n+2} \cdot 5^{3n}}{20^{3n}}.$$

2.4.11. Самостійна робота № 8. Піднесення до квадрата суми і різниці двох виразів.

Варіант 1

1. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

а) $(-2a + 3b)^2$;

б) $\left(1{,}6m^2 - n^3p\right)^2$.

2. Замінити * одночленом так, щоб утворена рівність була тотожністю:

$$(*+3x^2)^2 = 16y^2 + 24xy + 9x^2.$$

3. Спростити вираз:

$$(-13x-7)^2 - 49.$$

4. Розв’язати рівняння:

$$(x-3)^2 - x(x+9) = 2x - 25.$$

5. Спростити вираз:

$(2a-3)^2 - (5a-2)^2$ і знайти його значення при $a = -2\frac{1}{3}$.

Варіант 2

1. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

а) $(-5m-2n)^2$;

б) $(x^2y+0{,}3)^2$.

2. Замінити * одночленом так, щоб утворена рівність була тотожністю:

$$(4x^2 - *)^2 = 16x^4 - 40x^2 + 25.$$

3. Спростити вираз:

$$(-12-5x)^2 - 144.$$

4. Розв’язати рівняння:

$$y(y-4) - (y+2)^2 = 7 - 3y.$$

5. Спростити вираз:

$(2a+1)^2 - a(a+1)$ і знайти його значення при $a = -1\frac{1}{3}$.

2.4.12. Самостійна робота № 9. Розкладання на множники з допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці.

Варіант 1

1. Перетворити тричлен у квадрат двочлена:

а) $4y^2 - 4y + 1$;

б) $25x^2 - 10xy + y^2$.

2. Замінити * таким одночленом, щоб утворений вираз можна було подати у вигляді квадрата двочлена:

$a^2 + 10ab + *$.

3. Знайти значення виразу:

$81x^2 - 36x + 4$, якщо $x = \frac{1}{9}$; -2.

4. Розв’язати рівняння:

$\frac{1}{5}x \cdot (4x^2 - 20x + 25) = 0$.

5. Довести, що значення виразу:

$(x-3)^2 - (x-9)(x+3)$ не залежить від x

Варіант 2

1. Перетворити тричлен у квадрат двочлена:

а) $x^2 + 8x + 16$; б) $c^2 + 4bc + 4b^2$.

2. Замінити * таким одночленом, щоб утворений вираз можна було подати у вигляді квадрата двочлена:

$* - 28ab + 49b^2$.

3. Знайти значення виразу:

$4x^2 + 12x + 9$, якщо $x = \frac{1}{2}$; -8.

4. Розв’язати рівняння:

$3x \cdot (49x^2 - 28x + 4) = 0$.

5. Довести, що значення виразу:

$(x-5)^2 + (12-x)(x+2)$ не залежить від x.

2.4.13. Контрольна робота № 4. Квадрат суми і квадрат різниці.

Варіант 1

1. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

$$2\cdot(3b^2+2)-(3b-4)^2.$$

2. Довести, що многочлен:

$x^2-10x+25$ набуває лише невід'ємних значень.

3. Знайти значення виразу:

$(3y+5)(y+2)-(y+4)^2-6$, якщо $y=-\dfrac{3}{4}$.

4. Розв'язати рівняння:

$$(x+8)^2-28=(x-6)^2.$$

5. Довести тотожність:

$$(9x^2-1)-(3x-4)^2=24x-17.$$

6. Подати у вигляді многочлена:

$$((2a+b)^2)^2.$$

Варіант 2

1. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

$$5\cdot(x^2-y)+(y^2-x)^2.$$

2. Довести, що многочлен:

$49x^2-56x+16$ набуває лише невід'ємних значень.

3. Знайти значення виразу:

$25(x^2+y^2)-(3x+4y)^2-13x^2-9y^2$, якщо $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{8}$.

4. Розв'язати рівняння:

$$(1+3x)^2-2=(3x-1)^2.$$

5. Довести тотожність:

$$(x+7)(x+3)-(x+4)^2=2x+5.$$

6. Подати у вигляді многочлена:

$$((3x-y)^2)^2.$$

2.4.14. Самостійна робота № 10. Множення різниці двох виразів на їх суму.

Варіант 1

1. Записати вираз у вигляді многолена:

а) $(6a-5y)(6a+5y)$;

б) $(0,3x^3+5ay)(5ay-0,3x^3)$.

2. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

$(3a-1)(1+3a)-2(a-1)$.

3. Знайти значення добутку:

$72\cdot 68$.

4. Розв’язати рівняння:

$(2x+3)^2-(2x+5)(2x-5)=38$.

5. Довести, що значення виразу:

$(a-5)(a+5)-(a+10)(a-10)$ не залежить від значення змінної.

Варіант 2

1. Записати вираз у вигляді многолена:

а) $(7m+2n)(7m-2n)$;

б) $(1,5a^2-4bc)(4bc+1,5a^2)$.

2. Перетворити вираз у многочлен стандартного вигляду:

$6(x-1)-(5x-1)(1+5x)$.

3. Знайти значення добутку:

$47\cdot 53$.

4. Розв’язати рівняння:

$(3y+1)(3y-1)-(3y-4)^2=7$.

5. Довести, що значення виразу:

$(m-4)(4+m)-(m+3)(m-3)$ не залежить від значення змінної.

2.4.15. Самостійна робота № 11. Розкладання різниці квадратів на множники.

Варіант 1

1. Розкласти на множники:

а) $144a^2b^2 - 81c^2$;

б) $(a+b)^2 - 4$.

2. Обчислити:

$59^2 - 49^2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $16x^2 - 9 = 0$;

б) $25y^2 = 1$.

4. Довести тотожність:

$4m^2 + 12m - 4(m-1)(m+1) = 12m + 4$.

Варіант 2

1. Розкласти на множники:

а) $4a^2b^2 - 25c^2$;

б) $49 - (a+b)^2$.

2. Обчислити:

$67^2 - 57^2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $81 - 4y^2 = 0$;

б) $16 = 9m^2$.

4. Довести тотожність:

$(9k^2 + 6k + 1) - (3k+2)(3k-2) = 6k + 5$.

2.4.16. Контрольна робота № 5. Різниця квадратів.

Варіант 1

1. Подати у вигляді многочлена:

а) $(2m-k)(2m+k)+k^2$;

б) $(a+2)(a-2)-(a-7)(a+7)$.

2. Розкласти на множники:

а) $25-36a^2b^2$;

б) $(2x+1)^2-(3x+4)^2$.

3. Знайти значення дробу:

$$\frac{59^2-17^2}{152}.$$

4. Розв'язати рівняння:

$$(4x+1)^2-8\cdot(2x-1)(2x+1)=-7.$$

5. Довести, що при будь-якому натурльному n значення виразу:

$(2n+5)^2-4n^2$ ділиться на 5.

6. Знайти значення виразу:

$$(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1).$$

Варіант 2

1. Подати у вигляді многочлена:

а) $9a^2-(b+3a)(b-3a)$;

б) $(a-9)(a+9)-(a-8)(a+8)$.

2. Розкласти на множники:

а) $16x^2y^2-45$;

б) $(3m-1)^2-(5m+2)^2$.

3. Знайти значення дробу:

$$\frac{138}{45^2-24^2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

$$(3x+4)^2-(3x-1)(3x+1)=65.$$

5. Довести, що при будь-якому натурльному k значення виразу:

$(5л+9)^2-25л^2$ ділиться на 9.

6. Знайти значення виразу:

$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$.

2.4.17. Самостійна робота № 12. Розкладання на множники суми і різниці кубів.

Варіант 1

1. Розкласти на множники многочлен:

а) $27x^3-8y^3$; б) $125+a^3$.

2. Подати у вигляді многочлена:

$(a+4)(a^2-4a+16)$.

3. Перемножити многочлени:

a^2+5 і $a^4-5a+24$.

4. Подати у вигляді добутку:

$(x-2)^3-27$.

5. Розв’язати рівняння:

$(1-a)(1+a+a^2)=0$.

Варіант 2

1. Розкласти на множники многочлен:

а) $125a^3-64b^3$; б) $27+x^3$.

2. Подати у вигляді многочлена:

$(7-b)(49+7b+b^2)$.

3. Перемножити многочлени:

$4-y^2$ і $16+4y^2+y^4$.

4. Подати у вигляді добутку:

$(a+4)^3+125$.

5. Розв’язати рівняння:

$(1+k)(1-k+k^2)=0$.

2.4.18. Самостійна робота № 13. Розкладання многочлена на множники з використанням декількох способів.

Варіант 1

1. Розкласти на множники:

а) $3x^2 - 12$; б) $2x^2y - 2y^3$.

2. Подати у вигляді добутку:

$3a^2 - 6ab + 3b^2$.

3. Розкласти на множники:

$m^2 - 25 + m + 5$.

4. Розв'язати рівняння:

$4x^2 - 9 = 0$.

5. Довести, що значення виразу $27^3 + 54^3$ ділиться на 81.

Варіант 2

1. Розкласти на множники:

а) $4a^2 - 16$; б) $5a^2b - 5b^3$.

2. Подати у вигляді добутку:

$2m^2 + 24m + 72$.

3. Розкласти на множники:

$x^2 - 49 - x - 7$.

4. Розв'язати рівняння:

$25x^2 - 1 = 0$.

5. Довести, що значення виразу $95^3 - 84^3$ ділиться на 11.

2.4.19. Контрольна робота № 6. Формули скороченого множення.

Варіант 1

1. Розкласти на множники:

а) $54a^3 - 16$;

б) $m^6 - k^6$.

2. Знайти значення виразу:

$(m-3)(m^2+3m+9)$, якщо $m=\frac{1}{3}$.

3. Розкласти на множники вираз:

$x^2-2xy+y^2-4$.

4. Спростити вираз:

$(x^2-2x)^2-x^2(x+3)(x-3)+2x(3x+5)$.

5. Розв'язати рівняння:

$3\cdot(x+2)(x-2)-5(x+1)^2=2(3-x^2)+7$.

6. Знайти корінь рівняння:

$(a+2)(a^2-2a+4)=0$.

Варіант 2

1. Розкласти на множники:

а) $640m^3+10$;

б) a^3-m^{12}.

2. Знайти значення виразу:

$(a-4)(a^2+4a+16)$, якщо $a=\frac{1}{4}$.

3. Розкласти на множники вираз:

$9-a^2+2ab-b^2$.

4. Спростити вираз:

$(3m-m^2)^2-m^2(m-2)(m+2)+2m(7+3m^2)$.

5. Розв'язати рівняння:

$3(x+4)^2-3\cdot(x+5)(x-5)=10$.

6. Знайти корінь рівняння:

$(m-3)(m^2+3m+9)=0$.

2.5. Розробка самостійних та контрольних робіт для 8 класу

2.5.1. Самостійна робота № 1. Раціональні вирази.

Варіант 1

1. Розкласти на множники вираз:

а) $25a^2 + 10a + 1$; б) $64a^2 – 9c^2$; в) $15a^4 – 25ac$.

2. Спростити вираз $(2x – 3)(2x + 3) – 2x(2x – 1)$.

3. Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз:

а) $a(2a – 3)(a – 7)$; б) $(a^2 + 4)(a – 2)(a + 2)$.

4. Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз:

$(a – 2b – 3c)(a + 2b – 3c)$, використавши формулу скороченого множення.

Варіант 2

1. Розкласти на множники вираз:

а) $49a^2 + 14a + 1$; б) $25a^2 – 16b^2$; в) $12a^5 + 20ac$.

2. Спростити вираз $(8x + 3)(8x - 3) – 4x(16x – 2)$.

3. Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз:

а) $x(3x + 2)(x – 1)$; б) $(a - 3)(a^2 + 9)(a + 3)$.

4. Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз:

$(a + 4b – 5c)(a - 4b – 5c)$, використавши формули скороченого множення.

2.5.2. Самостійна робота № 2. Раціональні дроби і їх основні тотожні перетворення.

Варіант 1

1. Звести дріб:

а) $\frac{5a}{a-7}$ до знаменника $7a - 49$;

б) $\frac{a}{a-5}$ до знаменника $a^2 – 25$.

2. Скоротити дріб:

а) $\frac{a-3}{7a-21}$; б) $\frac{a(a+5)}{a^2+10a+25}$; в) $\frac{x^3+16x^2+64x}{x^2-64}$.

3. Довести тотожність:

$$\frac{ax+ay+x+y}{a^2+2a+1}=\frac{x+y}{a+1}.$$

Варіант 2

1. Звести дріб:

а) $\frac{8a}{a-9}$ до знаменника $4a$ - 36; ;

б) $\frac{x}{x+9}$ до знаменника $x^2 - 81$.

2. Скоротити дріб:

а) $\frac{a+5}{6a+30}$; б) $\frac{c(c-6)}{c^2-12c+36}$; в) $\frac{5x+15}{x^2+6x+9}$.

3. Довести тотожність:

$$\frac{ax-ay+x-y}{a^2-1}=\frac{x-y}{a-1}.$$

2.5.3. Самостійна робота № 3. Сума і різниця раціональних дробів.

Варіант 1

1. Виконати дії:

а) $\frac{a-5}{2}+\frac{a+5}{2}$; б) $\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{x^3}$; в) $\frac{3a}{a^2-b^2}+\frac{3}{a+b}$.

2. Подати у вигляді дробу:

а) $\frac{5}{21a^3b}+\frac{3}{14ab^2}$;

б) $x+\frac{y^2}{x-y}+y$;

в) $\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3}{4y^2-9x^2}$.

3. Довести тотожність:

$$\frac{4}{1+a^4}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}=\frac{8}{1-a^8}.$$

Варіант 2

1. Виконати дії:

а) $\frac{a+9}{7}+\frac{a-9}{7}$; б) $\frac{2}{x^3}-\frac{1}{3x^4}$; в) $\frac{c^2}{c^2-4}-\frac{c}{c-2}$.

2. Подати у вигляді дробу:

а) $\frac{5}{27x^4y}-\frac{7}{18x^3y^3}$;

б) $x+\frac{y^2}{x-y}+y$;

в) $\frac{2}{9a-12b}-\frac{3}{9a+12b}+\frac{5a}{16b^2-9a^2}$.

3. Довести тотожність:

$$\frac{8x^7}{1+x^8}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=\frac{16x^{15}}{x^{16}-1}.$$

2.5.4. Контрольна робота № 1.

Варіант 1

1. Скоротити дріб:

а) $\frac{a+3}{5a+15}$; б) $\frac{2(c-5)}{c^2-10c+25}$

2. Виконати дії:

а) $\frac{5}{16a^4b}+\frac{1}{24ab^3}$;

б) $\frac{8}{12a+8}-\frac{6a}{9a^2+12a+4}$;

в) $a+\frac{81}{a-9}+9$.

3. Подати у вигляді дробу:

$$\frac{2}{10a-15}-\frac{12}{4a^2-9}-\frac{1}{10a+15}.$$

4. Спростити дріб:

$\frac{ax-9a+3x-27}{x^2-81}$ і знайти його значення, якщо a = 27 і x = -6.

5. Довести тотожність:

$$\frac{1}{a}-\frac{3}{a(a+3)}-\frac{3}{(a+3)(a+6)}-\frac{3}{(a+6)(a+9)}-\frac{3}{(a+9)(a+12)}-\frac{3}{(a+12)(a+15)}=\frac{1}{a+15}.$$

Варіант 2

1. Скоротити дріб:

а) $\frac{a+6}{7a+42}$; б) $\frac{3(b+9)}{b^2+18b+81}$.

2. Виконати дії:

а) $\frac{3}{20a^6b}+\frac{1}{30ab^2}$;

б) $\frac{5}{42a-12}-\frac{a}{49a^2-28a+4}$;

в) $2a+\frac{25}{2a-5}+5$.

3. Подати у вигляді дробу:

$$\frac{3}{8a-10}-\frac{5}{16a^2-25}-\frac{1}{8a+10}.$$

4. Спростити дріб:

$\frac{ax-9a+3x-27}{x^2-81}$ і знайти його значення, якщо a = 46 і x = -14.

5. Довести тотожність:

$$\frac{1}{a}-\frac{4}{a(a+4)}-\frac{4}{(a+4)(a+8)}-\frac{4}{(a+8)(a+12)}-\frac{4}{(a+12)(a+16)}=\frac{1}{a+16}.$$

2.5.5. Самостійна робота № 4. Добуток і частка раціональних дробів.

Варіант 1

1. Подати у вигляді дробу:

а) $\frac{6a}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{2a}$;   б) $\frac{x+5}{2}:\frac{3x+15}{5}$.

2. Виконати дії:

а) $\frac{a^2-ab-3a+3b}{a+x+ax+x^2}:\frac{3a-9}{a^2-x^2}$;

б) $\frac{x^4+27x}{x^2-9}\cdot\frac{x^3+6x^2+9x}{x^2-3x+9}:(x^3+3x^2)$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

$$\frac{\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}}{\frac{x^2+2xy}{x-y}}.$$

5. Довести тотожність:

$$\frac{a^2+7a+12}{a^2-ab+3a-3b}:\frac{a^2+4a}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a}.$$

Варіант 2

1. Подати у вигляді дробу:

а) $\frac{10x}{x^2-y^2}\cdot\frac{x+y}{5x}$;   б) $\frac{a+4}{3}:\frac{5a+20}{2}$.

2. Виконати дії:

а) $\frac{5b-15}{a^2-ab+a-b}:\frac{ab-3a+2b-6}{a^2-b^2}$;

б) $\frac{x^4-8x}{x^2-10x+25}\cdot\frac{x^3-25x}{x^2+2x+4}:(x^3-2x^2)$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

$$\frac{\dfrac{x^2+5x}{x^2-9}}{\dfrac{x^2-25}{x^2-3x}}.$$

5. Довести тотожність:

$$\frac{a^2+7a+10}{a^2+2a+3ab+6b}:\frac{a^2+5a}{a^2-9b^2}=\frac{a-3b}{a}.$$

2.5.6. Самостійна робота № 5. Тотожні перетворення раціональних виразів на основі правил арифметичних дій.

Варіант 1

1. Виконати дії:

а) $\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right):(2a+1)$;

б) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right):\frac{xy}{x+y}$;

в) $\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{6}{2-2a^2}-\frac{a+3}{2a+2}\right):\frac{3}{4a^2-4}$.

2. Виконати дії:

а) $\left(\frac{1}{ab+b^2}-\frac{6}{a^2+ab}+\frac{9}{a^3+a^2b}\right)\left(\frac{a}{b^2}-\frac{6}{b}+\frac{9}{a}\right)$;

б) $\left(\frac{3-x}{x^2-2x+1}-\frac{2}{1-x}\right)\left(\frac{x(x-3)}{x^3+3x^2+3x+1}+\frac{1}{1+2x+x^2}\right)$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

$$1+\frac{a}{1-\dfrac{a}{a+2}}.$$

Варіант 2

1. Виконати дії:

а) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3a+1}\right):(2a+1)$;

б) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{b}$;

в) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}-\frac{8a}{4-a^2}\right):\frac{a-4}{a-2}$.

2. Виконати дії:

а) $\left(\frac{2a}{a+1}-\frac{2}{1-a}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a+1}+\frac{4a}{1-a^2}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{2a-1}-\frac{a-3}{4a^2-4a+1}-\frac{a^2+2a-2}{8a^3-12a^2+6a-1}\right)\cdot\left(\frac{6a+1}{a}-\frac{2a+11}{a+1}\right)$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

$$\frac{a}{a+\frac{1}{a+\frac{a}{1+a}}}.$$

2.5.7. Контрольна робота № 2

Варіант 1

1. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{x^2-9}{10}:(x+3)$;

б) $\frac{15x-10}{x^6}\cdot\frac{x^2}{3x-2}$;

в) $\left(\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x+5}\right):\frac{x-5}{5}$.

2. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{36x^2y^2}{z^4}:\left(\frac{2x^3}{z}\right)^2$;

б) $\frac{7x-63}{3x^2-24x+48}\cdot\frac{x^2+18x+81}{7}:\frac{x^2-81}{30x-120}$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{2a-ab-14+7b}{ab-3a+7b-21}:\frac{ab-a-7b+7}{ab-2a+7b-14}$;

б) $\left(\frac{a+5}{5-a}-\frac{5-a}{5+a}-\frac{4a^2}{a^2-25}\right):\left(\frac{a^2}{125-25a^2}+\frac{a}{25-a^2}\right)$.

Варіант 2

1. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{x^2-16}{15}:(x-4)$;

б) $\frac{21x-9}{x^8}\cdot\frac{x^2}{7x-3}$;

в) $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right):\frac{x-2}{2}$.

2. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{32a^{12}}{b^4c^8}:\left(\frac{4a^5}{b^2c}\right)^2$;

б) $\frac{15x-20}{75x^2+30x+3}\cdot\frac{9x^2+24x+16}{5}:\frac{9x^2-16}{30x+6}$.

3. Подати у вигляді раціонального дробу:

а) $\frac{a-ab+8-8b}{ab-4a-8b+32}:\frac{ab-5a+8b-40}{ab-a-8b+8}$;

б) $\left(\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{a+b}\right):\left(a-b-\frac{2b-b^2}{a+b}\right)^2$.

2.5.8. Самостійна робота № 6. Арифметичний квадратний корінь.

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;

б) $\sqrt{1\frac{1}{16}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{17}}$;

в) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$.

2. Записати між якими послідовними натуральними числами знаходиться $\sqrt{53}$.

3. Добути корінь:

а) $\sqrt{49x^2}$, якщо $x \geq 0$;

б) $\sqrt{\dfrac{36}{y^2}}$, якщо $y > 0$.

4. Спростити вираз:

$\sqrt{0{,}0049(x^3)^4 x^2 y^6}$, якщо $x < 0$, $y > 0$.

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$;

б) $\sqrt{1\dfrac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\dfrac{3}{13}}$;

в) $\left(-3\sqrt{5}\right)^2 - 3\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$.

2. Записати між якими послідовними натуральними числами знаходиться $\sqrt{90}$.

3. Добути корінь:

а) $\sqrt{25a^2}$, якщо $a < 0$;

б) $\sqrt{\dfrac{49}{b^2}}$, якщо $b > 0$.

4. Спростити вираз:

$\sqrt{0{,}0064(x^5)^4 x^2 y^{10}}$, якщо $x > 0$, $y < 0$.

2.5.9. Самостійна робота № 7. Перетворення виразів, які містять квадратні корені.

Варіант 1

1. Спростити вираз:

$4\sqrt{8}+\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{2}{3}\sqrt{18}$;

2. Внести множник під знак кореня:

а) $a\sqrt{a}$; б) $a\sqrt{3}$, де $a > 0$; в) $b\sqrt{2}$, де $b < 0$.

3. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{a+4}-2}$; б) $\frac{a-1}{\sqrt{a+3}-2}$.

4. Спростити вираз:

$\sqrt{2a}+\sqrt{0,18a}+\sqrt{0,72a}+\sqrt{1,28a}$.

5. Виконати дії:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{a-b}{a^2+ab}.$$

Варіант 2

1. Спростити вираз:

$\sqrt{50}-\frac{1}{2}\sqrt{32}+2\sqrt{72}$;

2. Внести множник під знак кореня:

а) $x\sqrt{x}$; б) $x\sqrt{5}$, де $x > 0$; в) $x\sqrt{3}$, де $x < 0$.

3. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{a+25}+5}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a+9}+3}$.

4. Спростити вираз:

$\sqrt{3a}+2\sqrt{0,27a}+\sqrt{0,48a}+\sqrt{0,75a}$.

5. Виконати дії:

$$\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{a-b}{a-\sqrt{2a}}\cdot\frac{a-2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

2.5.10. Контрольна робота № 3.

Варіант 1

1. Обчислити:

$$\left(-2\sqrt{5}\right)^{2}-2\sqrt{(-5)^{2}}+2\sqrt{3}\sqrt{27};$$

2. Записати у порядку зростання числа:

$3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{11}$.

3. Спростити вираз:

а) $8\sqrt{8}+\frac{1}{4}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$;

б) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{3a}-2\sqrt{0{,}12a}+\sqrt{0{,}27a}-2\sqrt{0{,}75a}$.

4. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$\frac{1}{\sqrt{a+4}+2}.$$

Варіант 2

1. Обчислити:

$$\left(-3\sqrt{2}\right)^{2}-4\sqrt{(-2)^{2}}+5\sqrt{2}\sqrt{18};$$

2. Записати у порядку зростання числа:

$5\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; 7.

3. Спростити вираз:

а) $2\sqrt{27}-5\sqrt{12}+2\sqrt{48}$;

б) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{2a}-3\sqrt{0{,}18a}-\sqrt{0{,}32a}-2\sqrt{0{,}5a}$.

4. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$\frac{1}{\sqrt{a+25}+5}.$$

РОЗДІЛ III
ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ.

В Чемернянській гімназії Сарненської міської ради Рівненської області був проведений педагогічний експеримент з метою кращого засвоєння знань, умінь та навичок учнів, для підвищення інтересу до математики.

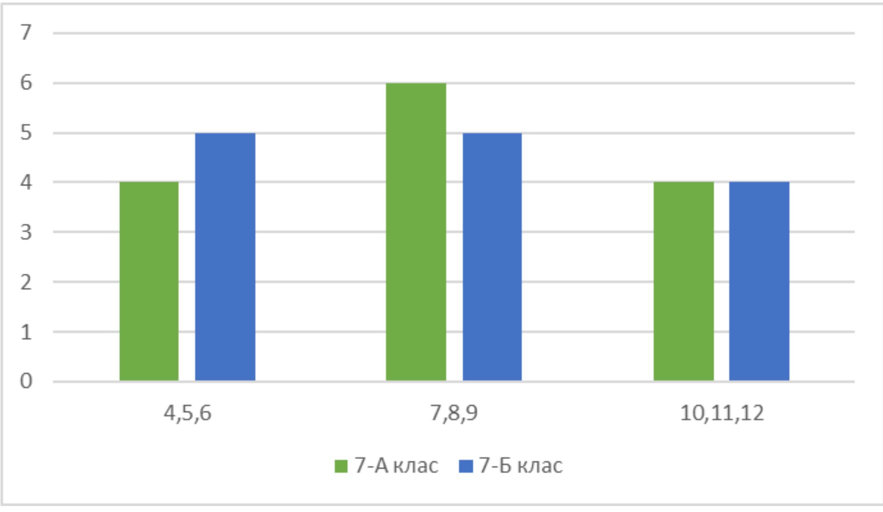
Для експерименту було вибрано два класи 7-А і 7-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий.

Спочатку була проведена нульова контрольна робота у цих двох класах. Вона дала такі результати.

Таблиця 1

Бали	Класи	
	7-А	7-Б
	Кількість учнів	
	14	14
	Позитивні результати	
4-6	4	5
7-9	6	5
10-12	4	4

Результати нульової контрольної роботи на діаграмі показані.



Під час вивчення в алгебрі розділу «Числові вирази. Вирази із змінними. Тотожності» у 7-А класі, а саме з теми «Тотожні перетворення виразів», на уроках було використано інформаційні технології, програму MathCad. Під час уроку учні могли перевірити правильність виконання тотожних перетворень в даній програмі. В результаті вони зацікавились вивченням теми «Тотожні перетворення» та навчилися робити перевірку з використанням програми.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у 7-А і 7-Б класах. Після опрацювання результатів виконання підсумкової контрольної роботи, було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів.

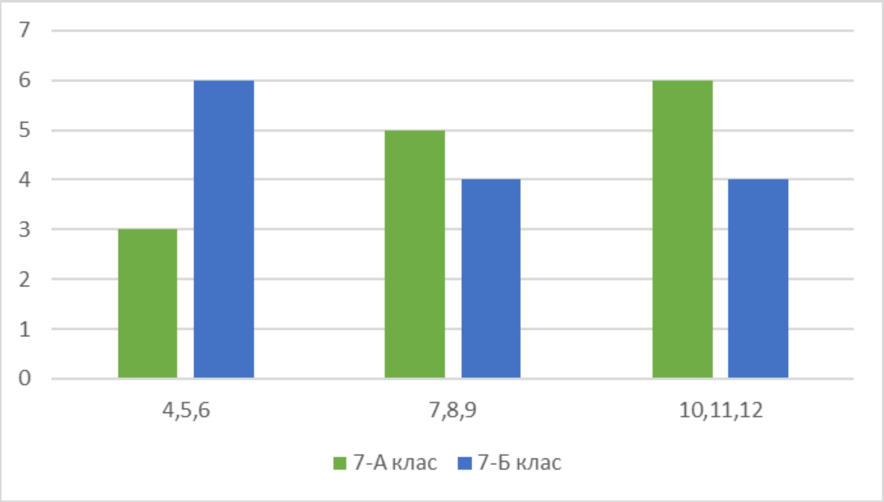
Рівень засвоєння розв’язування завдань на тотожні перетворення в учнів 7-А класу помітно зріс. Це видно із результатів виконання контрольної роботи.

Результати виконання контрольної роботи подані в таблиці.

Таблиця 2

Бали	Класи	
	7-А	7-Б
	Кількість учнів	
	14	14
	Позитивні результати	
4-6	3	6
7-9	5	4
10-12	6	4

Результати контрольної роботи після проведених уроків з використанням комп’ютерних технологій.



Отже, результати контрольної роботи свідчать про те, що учні 7-А класу показали кращу успішність, ніж учні 7-Б класу. Бо використання інформаційних технологій (програми MathCad) дає змогу учням краще засвоїти матеріал, дає можливість перевірити свої знання, розвиває логічне мислення та зацікавлює дітей. Недоліком є те, що при використанні програми MathCad учні не бачать алгоритму виконання завдань.

Тому використання інформаційних технологій на уроках алгебри є важливим засобом в сучасному навчальному процесі. Адже підвищенню ефективності уроків математики сприяє використання програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри та геометрії: побудова графіків функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо.

ВИСНОВКИ

Основним завданням вивчення математики в освітньому закладі загальноосвітньої середньої школи є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і умінь, формування рівня математичної культури, що є необхідним у продовженні освіти та майбутній трудовій діяльності.

Дане дослідження зорієнтоване на розробку методики викладання теми «Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів» в шкільному курсі математики, що сприятиме розвитку особистості учня та формуватиме стійкий інтерес до предмету.

Для кращого засвоєння та ефективного використання матеріалу дослідження необхідно проаналізувати літературу по темі дослідження, систематизувати різні методи і прийоми її викладання та проаналізувати ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки та шляхи їх усунення, а також подати методичні рекомендації що до уникнення помилок при тотожних перетвореннях раціональних та ірраціональних виразів. Високий рівень засвоєння знань учня буде досягнутий у випадку, коли вчитель використовуватиме різні форми роботи, забезпечить сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів.

Робота містить вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел. В першому розділі викладені теоретичні основи вивчення теми «Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів в шкільному курсі математики» та психолого-педагогічне вивчення даної теми. Розглядаються поняття «виразу», «раціонального виразу» та «ірраціонального виразу», «тотожних перетворень», «ірраціональності», а також було проведено аналіз підручників по вивченню тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів.

В другому розділі розглядаються методичні особливості вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів, а також різні способи тотожних перетворень даних виразів. Також в другому розділі розроблені самостійні та контрольні роботи з даної теми.

Третій розділ має експериментальний характер, тобто в ньому експериментально підтверджена ефективність використання інформаційних технологій на підвищення рівня засвоєння знань учнів, про що свідчать результати педагогічного експерименту.

Отже, матеріал даного дослідження сприятиме систематизації, поглибленню і розширенню знань, умінь і навичок учнів по темі «Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів» та їх цілеспрямованому використанні під час виконання різних типів завдань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Виховання учнів математикою. Київ : Основа, 2004. 94 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник: 3-є вид., переробл. і доповн. Київ : Вища школа, 1989. 367 с : іл.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: навч. посібн. : 2-ге вид., доп. Київ : Либідь, 1993. 344 с.
4. Возняк Г. М., Маланюк М. П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики : посібник для вчителя. Київ : Радянська школа, 1999. 206 с.
5. Возняк Г. М., Возняк О. І. Прикладні задачі : від теорії до практики [Текст]. Тернопіль : Мандрівець, 2003. 136 с.
6. Грищенко В. А. Пояснення у структурі змісту навчання математики. // Математика в школі. 2007. №2. С. 25-28.
7. Дидактичні матеріали з математики : навч. посіб. для студ. ВНЗ. / Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. І. Київ : Вища школа, 2001. 269 с.
8. Загальна методика викладання математики: курс лекцій, практичні заняття: навч. посібник для студентів ІІІ курсу фіз.-мат. спец. пед. ін-тів та ун-тів. / Коваль В. В., Крайчук О. В., Клекоць Г. Я. Рівне: РДГУ, 2000. 110 с.
9. Запорожець О. І., Франчук Г. М., Боровик І. М. Основи охорони праці. Підручник. Київ : Центр учбової літератури, 2009. 264 с.
10. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2024. 288 с.
11. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8-го кл.закл. заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Київ : Генеза, 2021. 272 с.
12. Коваль В. В., Крайчук О. В., Клековець Г. Я. Загальна методика викладання математики. Рівне: РДГУ, 2005. 165 с.

13. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. 2-ге видання, переробл. Харків. : Гімназія, 2021. 240 с. : іл.
14. Методика викладання математики: наук.-метод. зб. / за ред. І. Є. Шиманського, Г. П. Бевза. К. : Рад. шк., 1964-1983 . Вип. 1-14.
15. Методика викладання математики: респ. науково-методичний збірник. Вип.5 / редкол.: І. Є. Шиманський (відп. ред.) та ін. К.: Радянська школа,1969. 203 с.
16. Мешко Г. М. Вступ до педагогічної професії : навч. посіб. Київ : Академвидав, 2010. 200 с.
17. Модельна навчальна програма з математики 7-9 кл. (інтегрований курс) Істер. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.intehrovanyy.kurs-Ister-12.09.2023.pdf
18. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку : навч. посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. Х.: фірма ―РЦНІТ‖, 1998. 160 с.
19. Основи охорони праці: Навчальний посібник / за ред. проф. В. В. Березуцького. Х.: Факт, 2005. 480 с.
20. Пасічник І. О., Пасічник Я. А. Мислительська діяльність учнів на уроках математики : методичні рекомендації. Львів, 1992. 146 с.
21. Прохорова О. В. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи // Математика в школах України. 2005. №31. С. 6-11.
22. Семко М. М., Ярова О. А., Скасків Л. В. Методика формування навиків тотожних перетворень в основній школі. *Scientific Collection «InterConf»*. 2023. № 144. С. 204–211. URL:https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/article/view/2505

23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл. К. : Зодіак-Еко, 2000. 512 с.
24. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
25. Слєпкань З. І. Психолого–педагогічні основи навчання математики. Київ : Радянська школа, 1989. 158 с.
26. Столяр А. А. Методика викладання математики в середній школі. Харків: Вища школа, 1992. 206 с.
27. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики : навчальний посібник. Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. 368 с.
28. Хміль В. П. Аналогії як засіб здобування нових знань з математики. Рад. шк., 1980. № 11. С. 437.
29. Швець В. О. Навчальні цілі і методика їх формування // Методика викладання математики і фізики : респ. наук. метод. зб. К. : Рад. шк., 1992. 288 с.
30. Сіра К.В., Крайчук О. В. Методика вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів в шкільному курсі математики. CURRENT TRENDS IN SCIENTIFIC RESEACH DEVELOPMENT: PROCEEDINGS OF V INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE DECEMBER 12-14, 2024, BOSTON, USA, P.346 – 353.