Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Рівняння з частинними похідними першого порядку та їх застосування

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Тутевич Ольга Петрівна
Керівник: доктор технічних наук, професор
Бичков Олексій Сергійович
Рецензент: доктор технічних наук, професор, директор ННІ автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного господарства та природокористування
Мартинюк Петро Миколайович

Рівне 2024 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівняння з частинними похідними першого порядку є розділом математичного аналізу та мають широке застосування в різних наукових та інженерних галузях. Ці рівняння описують зміну функцій кількох змінних, коли залежність між змінами описується похідними першого порядку. Такий рівень використовується для моделювання процесів у фізиці, хімії, біології, економіці, інформатиці та інших дисциплінах. Наприклад, застосовуються в задачах тепло- і масопереносу, аеродинаміки, механіки, екологічного прогнозування та фінансового аналізу. Розв'язування рівнянь з частинними похідними дозволяє отримати важливу інформацію про тип поведінки складних систем та передбачити їх розвиток за певних умов.

Актуальність дослідження обумовлена постійним зростанням складності технологічних процесів, які потребують точного математичного моделювання. У сучасних умовах, коли наукові відкриття та технічні досягнення неможливі без надійних математичних моделей, знання теорії та практичних методів розв'язування рівнянь з частинними похідними стає надзвичайно важливим. Різноманітність застосувань цих рівнянь у фізиці, хімії, економіці, а також в екології, підкреслює необхідність їхнього глибокого вивчення та вдосконалення методів розв'язування.

Метою дослідження є вивчення основних властивостей рівнянь з частинними похідними першого порядку, а також аналіз різноманітних методів їх розв'язування та практичних застосувань. Це дослідження має на меті також визначити основні труднощі, з якими стикаються студенти під час роботи з такими рівняннями, та запропонувати можливі шляхи їх подолання.

Об’єктом дослідження є рівняння з частинними похідними першого порядку, їх структура, методи розв'язування та застосування в різних сферах. Це дозволяє розширити знання про самі рівняння, а також про їх практичну значимість у реальних задачах.

Предметом дослідження є методи розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку, включаючи аналітичні та чисельні методи, а також застосування цих методів у різних прикладних задачах. Дослідження зосереджено на порівнянні ефективності різних підходів до розв'язування та їх переваг.

Відповідно до мети, об’єкта та предмета роботи визначено наступні **завдання:**

– розкрити теоретичні засади рівнянь з частинними похідними першого порядку;

– розглянути основні поняття та класифікацію диференціальних рівнянь;

– записати формулювання задачі Коші та крайових задач для ДРЧП першого порядку;

– проаналізувати основні методи розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку;

– розкрити практичне застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку;

– здійснити доведення властивостей рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Інформаційною базою дослідження слугують наукові статті, монографії, дисертації, а також матеріали міжнародних конференцій, присвячених теорії та практиці застосування рівнянь з частинними похідними. Аналіз наукових джерел надає змогу сформувати цілісну картину сучасного стану досліджень у цій галузі.

Методи дослідження включають теоретичний аналіз, порівняльний аналіз існуючих підходів до розв'язання рівнянь з частинними похідними. Ці методи дозволяють виявити переваги і недоліки різних технік, а також визначити найбільш ефективні підходи до їх застосування.

Практичне значення роботи полягає в розробці рекомендацій щодо вибору методів розв'язування рівнянь з частинними похідними в залежності від конкретних задач, а також в можливості її використання для самостійного вивчення даної теми.

Кваліфікаційна робота включає три розділи, в яких послідовно розглянуто теоретичні основи, методи розв'язування та приклади застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку. Перший розділ присвячено визначенню базових понять, класифікації диференціальних рівнянь і постановці задачі Коші та крайових задач, а також аналізу основних методів розв'язування таких рівнянь. У другому розділі розглянуто практичне застосування рівнянь з частинними похідними у різних наукових сферах, включаючи аналіз динамічних систем, моделювання процесів і прогностичні моделі. Третій розділ зосереджується на доведенні властивостей розв'язків рівнянь першого порядку, конкретному прикладі задачі Коші та застосуванні отриманих результатів до практичної задачі.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1. Основні поняття та класифікація диференціальних рівнянь

Рівняння з частинними похідними (РЧП) є одним із основних інструментів математичного моделювання, що дозволяють описувати процеси, що відбуваються в природі, техніці та інших наукових галузях. Вони визначаються як рівняння, що включають частинні похідні функції багатьох змінних. Однією з ключових характеристик цих рівнянь є їх порядок, який визначається порядком старшої похідної, що входить до складу рівняння [5], [39]. У даному випадку слід розглядати рівняння першого порядку, що містять перші частинні похідні.

Диференціальні рівняння можна розділити на кілька основних категорій (рис. 1.1).

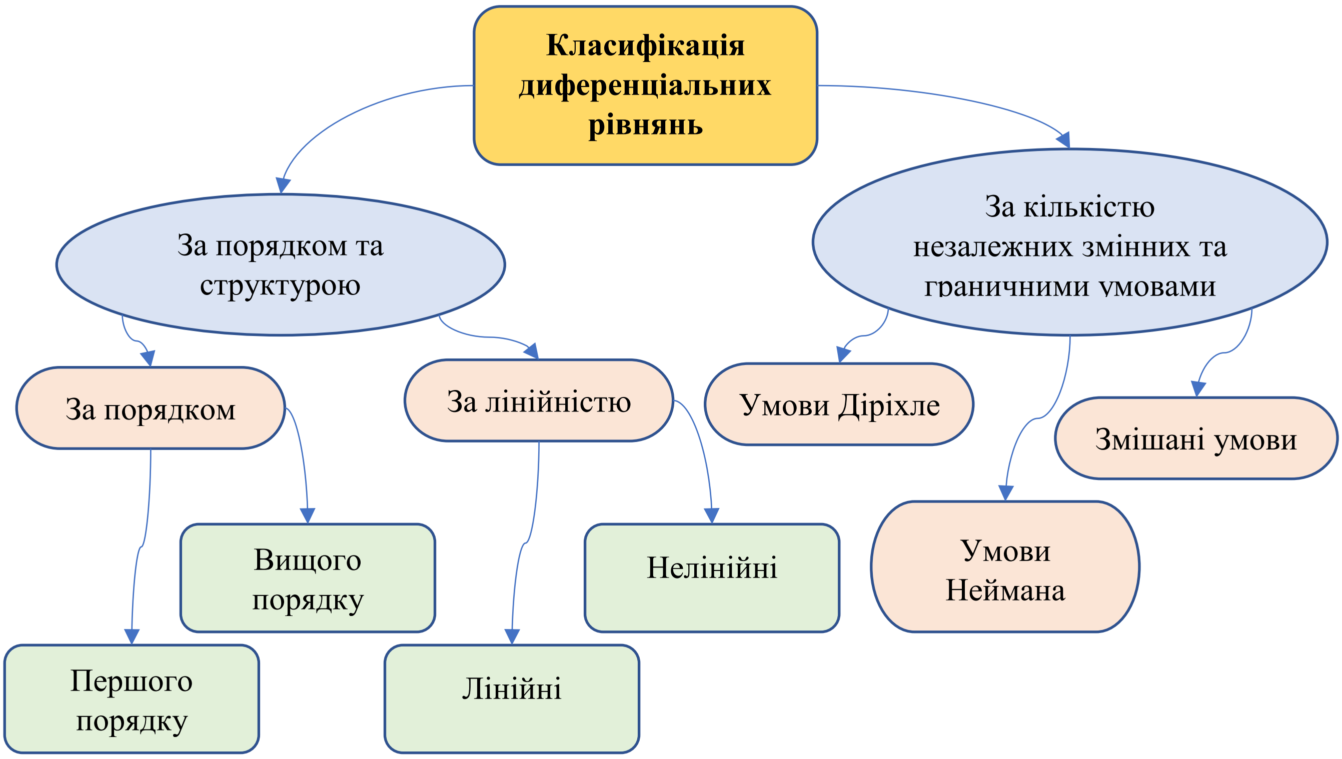

Рис. 1.1. Класифікація диференційних рівнянь

Рівняння з частинними похідними поділяються на кілька основних категорій залежно від порядку та лінійності.

За порядком РЧП поділяють на:

1) РЧП першого порядку – включають лише перші похідні функції. Наприклад, рівняння має загальний вигляд

$$F\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \qquad (1.1)$$

такий тип рівнянь часто використовується для моделювання процесів переносу, наприклад, тепла або маси в матеріалах [40].

2. РЧП вищих порядків: Багато прикладних задач вимагають моделювання процесів з урахуванням вищих порядків похідних. Наприклад, у механіці деформованого тіла можуть використовуватись рівняння другого або третього порядку [1].

За структурою РЧП поділяють на:

1) Лінійні рівняння. Лінійним називається РЧП, у яке невідома функція та її ЧП входять лінійно наприклад:

$$a_{ij}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.2)$$

де u є функцією, яку необхідно знайти, а f — задана функція [2, 37]. Такі рівняння забезпечують можливість використання суперпозиції розв’язків, що значно спрощує процес їх розв’язування. Зокрема, методи розв’язування лінійних РЧП з використанням оператора Лапласа дозволяють звести (1.2) до алгебраїчних рівнянь [3].

2) Однорідне лінійне рівняння. Нехай точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$ належить області $D \square R^n$, $n>=2$.

В області D необхідно розглянути однорідне лінійне рівняння в частинних похідних першого порядку у вигляді

$$A_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (1.3)$$

Нехай коефіцієнти $A_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$ – неперервно неперервно диференційовані в D функції, для яких

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2(x) \neq 0, \forall x \in D \qquad (1.4)$$

Рівнянню (1.3) можна дати наступну геометричну інтерпретацію. Якщо вважати коефіцієнти $A_i(x)$ компонентами вектора $A(x)$ в n-вимірному просторі, то рівняння (1.3) означає рівність нулю похідної функції $u(x)$ вздовж напрямку вектора A.

Очевидно, що рівняння (1.3) має розв'язок виду $u \equiv C$, де C — константа. Але рівняння (1.3) має безкінечно багато розв'язків, відмінних від константи. Наприклад, розв'язком рівняння $\partial u/\partial x_1=0$ є будь-яка неперервна функція Φ, не залежна від x_1, тобто $u(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(x_2,\ldots,x_n)$ (цей розв'язок отримується інтегруванням рівняння за змінною x_1). У загальному випадку пошук розв'язків рівняння (1.3) зводиться до побудови розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь.

Необхідно співставити рівнянню (1.3) систему звичайних диференціальних рівнянь, називаємих рівняннями характеристик:

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n(x_1,\ldots,x_n)} \qquad (1.5)$$

Цю систему називають системою диференціальних рівнянь в симетричній формі, відповідною однорідному лінійному рівнянню з частинними похідними (1.3) (або характеристичною системою). У випадку двох незалежних змінних вона складається з одного рівняння. При зроблених припущеннях щодо коефіцієнтів $A_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,A_n(x_1,\ldots,x_n)$ система (1.5) має рівно $n-1$ незалежних перших інтегралів.

Визначення. Першим інтегралом системи (1.5) називається неперервна або постійна функція $\psi(x_1,\dots,x_n)$, яка тотожно рівна деякій константі на всіх точках $(x_1,\dots,x_n)$ інтегральної кривої системи (5).

Часто першим інтегралом називають не функцію ψ, а співвідношення $\psi=C$, де C — константа.

Інтегральні криві системи рівнянь (1.5) називають характеристиками рівняння з частинними похідними (1.3).

Теорема 1. Будь-який розв'язок $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ рівняння (1.3) є першим інтегралом системи (1.5), і навпаки, будь-який перший інтеграл $\psi(x_1, \dots, x_n)$ системи (1.5) є розв'язком рівняння (1.3).

Наприклад, для рівняння:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (1.6)$$

відповідає система диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial y}{2y} = \frac{\partial z}{-z} = 0 \qquad (1.7)$$

яка має такі інтеграли:

$$\psi_1 = xz \qquad (1.8), \qquad \psi_2 = x\sqrt{y} \qquad (1.9)$$

Тоді функції $u_1 = xz$ і $u_2 = x\sqrt{y}$ є розв'язками цього рівняння.

Слід припустити, що $A_n(x) \neq 0$ в D і знайдено $n - 1$ незалежних перших інтегралів системи (1.5):

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \qquad (1.10)$$

Умовою незалежності інтегралів (1.10) є відмінність від нуля якобіана [32][35]:

$$J = \frac{D(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0, \forall x \epsilon D \tag{1.11}$$

Введеуо нові незалежні змінні $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \psi_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\xi_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ &\xi_n = \psi_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1.12}$$

де функція $\psi_n(x_1, \dots, x_n)$ може бути будь-якою неперервно диференційованою в D функцією, але при якому перетворення (1.12) є невиродженим, і нове позначення для залежної змінної

$$\upsilon = \upsilon\,(\xi_{1, \dots}\, \xi_n), \text{ причому } u(x) = \upsilon(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) \tag{1.13}$$

Необхідно показати, що при заміні (1.12)-(1.13) рівняння (1.3) приводиться до простішого вигляду, коли легко побудувати його розв'язок. Дійсно, слід виразити похідні, що входять у рівняння (1.3), через нові змінні, використовуючи правило диференціювання складної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}, k = 1, \dots, n \tag{1.14}$$

Підставивши ці вирази у рівняння (1.3) і виконавши групування доданків, отримано рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1}(A_1(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n})\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_i} + (A_1(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n})\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_n} = 0 \qquad (1.15)$$

Оскільки функції ψ_i для *i= 1, ..., n - 1* є першими інтегралами системи (1.5), то, за теоремою 1, вони є розв'язками рівняння (1.3). Отже, останнє рівняння набуває вигляду

$$(A_1(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n})\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_n} = 0 \qquad (1.16)$$

А оскільки перетворення (1.12) є невиродженим, то функція ψ_nне може бути розв'язком рівняння (1.3), і отже, буде отримано

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_n} = 0 \qquad (1.17)$$

Таким чином, за допомогою невиродженого перетворення (1.12) рівняння (1.3) приведено до вигляду (1.17), який називається канонічним.

Інтегруючи рівняння (1.17) по ξ_n, отримано його розв'язок

$$\upsilon\ (\xi_{1,\ \ldots}\ \xi_n) = \Phi(\xi_{1,\ \ldots}\ \xi_{n-1}) \qquad (1.18)$$

де *Φ* - довільна функція, яка не залежить від ξ_n і має неперервні похідні по змінним ξ_1 , ..., ξ_{n-1}. Повертаючись до старих змінних, отримано розв'язок рівняння (1.3).

Теорема 2. [32] Будь-яке розв'язання u = φ(x_1 , …, x_n) рівняння (1.3) необхідно представити у вигляді

$$u = \Phi(\psi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots\ ,\ \psi_{n-1}(x_1,\ \ldots,\ x_n)) \qquad (1.19)$$

де $\Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1})$ - деяка диференційована функція своїх аргументів ψ_1, ..., ψ_{n-1}, а $\psi_i(x_1, ..., x_n)$ $(i = 1, ..., n - 1)$ - перші інтеграли системи (1.5), що задовольняють умову незалежності (1.11).

Формула (1.19) представляє загальне розв'язання рівняння (1.3). При цьому, що тут загальне розв'язання рівняння містить не довільні постійні (як у випадку звичайних диференціальних рівнянь), а довільну функцію.

Таким чином, задача побудови загального розв'язання рівняння (1.3) рівносильна задачі знаходження $n - 1$ незалежних перших інтегралів відповідної йому системи звичайних диференціальних рівнянь (1.5).

3) Квазілінійні рівняння. Нехай точка $x = (x_1, ..., x_n)$ належить області $D \subset R^n$. Необхідно розглянути квазілінійне рівняння

$$A_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + A_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = B(x,u) \qquad (1.20)$$

вважаючи, що $A_i(x, u)$ $(i = 1, ..., n)$ і $B(x, u)$ є диференційованими функціями аргументів x, u в деякій області $G \subset R^{n+1}$.

Рівнянню (1.20) варто поставинb у відповідність наступне лінійне рівняння:

$$A_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + A_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} + B(x,u)\frac{\partial \upsilon}{\partial u} = 0 \qquad (1.21)$$

з невідомою функцією $\upsilon = \upsilon(x,u)$.

В основі методу розв'язання квазілінійного рівняння лежить наступна теорема [32].

Теорема 3. Нехай $\upsilon = V(x,u)$ – розв'язання рівняння (1.21). Нехай рівняння $V(x,u)=0$ визначає в області D змінних $x=(x_1,\dots,x_n)$ деяку диференційовану функцію $u=\varphi(x)$, і нехай $\partial V/\partial u \neq 0$ в D для $u=\varphi$. Тоді $u=\varphi(x)$ є розв'язком рівняння (1.20).

Опис алгоритму побудови розв'язання квазілінійного рівняння.

1. Виписати характеристичну систему для лінійного рівняння (1.21):

$$\frac{dx_1}{A_1(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n(x,u)} = \frac{du}{B(x,u)} \qquad (1.22)$$

Характеристики лінійного рівняння (1.21) називаються характеристиками квазілінійного рівняння (1.20).

2. Знайти nn незалежних перших інтегралів системи (1.22):

$$\psi 1(x,u),\ldots,\psi n(x,u). \qquad (1.23)$$

3. За формулою (1.19) побудувати загальне розв'язання рівняння (1.21):

$$\upsilon\ (x,u)=\Phi(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u)). \qquad (1.24)$$

4. Вважаючи $\upsilon =0$, записати рівняння для визначення множини розв'язків рівняння (1.20):

$$\Phi(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u))=0. \qquad (1.25)$$

Вираз (1.25) називається загальним інтегралом, або загальним розв'язанням рівняння (1.20). Якщо uu входить тільки в один із перших інтегралів (1.24), наприклад, в останній, то загальне розв'язання можна записати і так:

$$\psi_n(x,u)=F(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}). \qquad (1.26)$$

де F - довільна диференційована функція. Якщо буде можливо розв'язати рівність (1.26) відносно u, то отримано загальне розв'язання рівняння (1.20) в явному вигляді.

Примітка 1. Не виключена можливість, що можуть бути такі розв'язання рівняння (1.20), для яких рівняння (1.21) задовольняється не тотожно по *(x, u)*, а тільки при $u = \varphi(x)$ тотожно по x. Такі розв'язання не містяться у формулі (1.25) і називаються спеціальними. Спеціальне розв'язання - випадок виключний [32], і тому далі їх розглядати не потрібно.

Примітка 2. Описаним способом може бути побудоване розв'язання і лінійного рівняння:

$$A_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + A_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = B(x)u + f(x) \qquad (1.27)$$

4) Нелінійні рівняння. Нелінійні РЧП можуть включати похідні, що знаходяться в нелінійній залежності від функції u, наприклад, у формі $\frac{\partial u^2}{\partial x_i}$ або інших складних функцій від u та її похідних [39]. Нелінійні рівняння часто виникають у фізиці, наприклад, у гідродинаміці або теорії хвильових процесів, де відбувається взаємодія кількох динамічних факторів.

РЧП також класифікуються за кількістю незалежних змінних. Наприклад, рівняння з двома змінними зазвичай описують явища в просторі та часі, такі як дифузія тепла або коливання хвиль [13]. Рівняння з трьома незалежними змінними є важливими у тривимірних фізичних моделях, наприклад, при моделюванні розподілу температури в твердих тілах [15].

Крайові умови є важливою складовою для правильного визначення задачі. Вони задають поведінку розв'язку на межах області:

Умови Діріхле визначають значення шуканої функції u на межі області, тобто $u|_{\partial\Omega}$— область, в якій визначено рівняння.

Умови Неймана визначають значення похідної функції u на межі області, що використовується в задачах теплообміну та переносу маси.

Змішані умови комбінують аспекти обох типів умов і можуть варіюватися в залежності від задачі [6].

Кожне рівняння з частинними похідними першого порядку можна записати у загальному вигляді:

$$F\ (x_1, x_2,\ \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \qquad (1.28)$$

де u є функцією, що залежить від незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [2]. Важливі терміни у вивченні РЧП показані на рис. 1.2 та описані в таблиці 1.1.

Рис. 1.2 – Важливі терміни у вивченні рівнянь з частинними похідними

Таблиця 1. Важливі терміни у вивченні рівнянь з частинними похідними

№	Термін	Опис
1	Розв'язок	Функція $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, яка задовольняє рівнянню та граничним умовам
2	Крайові умови	Умови, що накладаються на рішення на межах області, які можуть бути як функціональними, так і диференційними
3	Ізотропність	Властивість, що вказує на однорідність матеріалу або середовища, де властивості не залежать від напрямку

Рівняння з частинними похідними (РЧП) відіграють важливу роль у багатьох прикладних науках, оскільки дозволяють описувати процеси, що залежать від декількох незалежних змінних. Вони є основним інструментом для моделювання фізичних, інженерних, економічних та біологічних явищ.

РЧП часто використовуються для моделювання фізичних явищ, таких як теплопровідність, електромагнітні поля та механіка рідин. Наприклад, рівняння теплопровідності може бути записано у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \tag{1.29}$$

де u — температура, t — час, α — коефіцієнт дифузії, а ∇^2 — оператор Лапласа. Це рівняння описує, як температура у заданому середовищі змінюється з часом [40].

У економіці РЧП використовуються для моделювання різних процесів, таких як динаміка цін, попиту та пропозиції. Наприклад, рівняння Блека-Шоулза, яке використовується для оцінки опціонів, можна записати у формі:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1.30}$$

де V — ціна опціону, S — ціна базового активу, r — безризикова процентна ставка, а σ — волатильність. Це рівняння допомагає оцінити ризики та можливості на фінансових ринках [38], [39].

В інженерних науках РЧП застосовуються для моделювання поведінки матеріалів під навантаженням. Наприклад, рівняння Нав'є-Стокса, яке описує рух в'язкої рідини, має форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 u + f \tag{1.31}$$

де u — вектор швидкості, p — тиск, ρ — густина рідини, ν — кінематична в'язкість, а f — зовнішні сили. Це рівняння використовується для моделювання потоків рідин у різних інженерних системах [1].

У біології РЧП допомагають описувати зміни в популяціях, еволюційні процеси та поширення хвороб. Наприклад, рівняння реакції-дифузії для моделювання поширення хвороби може бути записане як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f(u) \tag{1.32}$$

де D — коефіцієнт дифузії, $f(u)$ — функція, що описує взаємодії між особинами популяції [2].

Таким чином, рівняння з частинними похідними є незамінним інструментом у прикладних науках, оскільки вони дозволяють моделювати складні процеси, що залежать від кількох змінних. Використання РЧП допомагає в отриманні точних прогнозів і розумінні механізмів, що лежать в основі різних явищ у природі та суспільстві. Застосування РЧП в таких галузях, як фізика, економіка, інженерія та біологія, підкреслює їхню універсальність та важливість у сучасному науковому дослідженні [3], [18], [22].

Таким чином, дослідження рівнянь з частинними похідними першого порядку не лише сприяє розвитку теоретичних аспектів математики, а й має суттєве практичне значення в ряді прикладних дисциплін, що підтверджується їх широким використанням у науці та техніці.

1.2. Формулювання задачі Коші та крайових задач для ДРЧП першого порядку

Рівняння з частинними похідними першого порядку являють собою ключовий елемент у теорії диференціальних рівнянь, який знаходить своє застосування у численних наукових і практичних сферах, включаючи фізику, інженерію та економіку. Для розв'язання таких рівнянь важливим є чітке формулювання задачі, яке дозволяє з'ясувати умови, за яких розв'язок може бути знайдений. Дві основні категорії задач, що виникають у контексті РЧП першого порядку, — це задача Коші та крайові задачі.

Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку визначається на основі початкових умов. Зокрема, вона передбачає, що розв'язок шукається у вигляді функції, що задовольняє певному рівнянню з частинними похідними та одночасно виконує умови на початковій гіперплощині.

Задача Коші є важливим елементом теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), оскільки вона визначає умови, за яких можливо знайти розв'язок даного рівняння. Основним завданням є знайти функцію, що задовольняє диференціальне рівняння разом із заданими початковими умовами.

Задача Коші для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку може бути формалізована як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, xu, \frac{\partial u}{\partial x}), u(t_0, x) = u_0(x), x \in I \tag{1.33}$$

де u є невідомою функцією, F — функція, що описує відношення між незалежними змінними та невідомою функцією з її похідною, а $u_0(x)$ — початкова умова, яка задається на інтервалі I у момент часу t_0 [39].

Задача Коші має великий практичний сенс, оскільки часто виникає у фізичних, біологічних та економічних моделях, де потрібно знайти еволюцію процесу в часі, спостерігаючи за його початковими умовами.

Для формулювання задачі Коші для ДРЧП першого порядку варто розглянути загальний вигляд рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, u(0, x) = f(x), x \in [a, b] \tag{1.34}$$

де a — константа, що характеризує швидкість зміни функції u по просторовій координаті x, а $f(x)$ — початкова умова, яка задається на деякому інтервалі x [40]. Це дозволяє досліджувати, як зміна початкових умов впливає на розв'язок рівняння, що є ключовим у теорії.

Початкові умови можуть варіюватися в залежності від конкретного застосування. Наприклад, для рівняння теплопровідності:

$$u(0,x) = u_0(x), x \in [0, L] \tag{1.35}$$

де $u_0(x)$ є функцією, що задає початковий розподіл температури по стержню довжиною L [1]. Іншим прикладом можуть бути умови, що описують популяцію, де:

$$u(0,x) = u_0,\ \forall x \tag{1.36}$$

де u_0 — це початкова чисельність популяції.

Для задачі Коші важливими є умови існування та єдиності розв'язку. Однією з основних теорій, що визначають ці умови, є теорія Ліпшиця. Вона стверджує, що якщо функція F є Ліпшицевою по своїй третій змінній, тобто:

$$|F(t, x, u_1, p) - F(t, x, u_2, p)| \leq L|u_1 - u_2| \tag{1.37}$$

для всіх u_1 і u_2 в околі точки, то задача Коші має єдиний розв'язок у деякому інтервалі навколо початкового моменту [3]. Ці умови є критично важливими для підтвердження того, що в заданому просторі розв'язок буде унікальним, а також для забезпечення стабільності розв'язків до зміни початкових умов.

Існує декілька методів розв'язування задачі Коші для ДРЧП першого порядку, які можна поділити на аналітичні та чисельні.

Аналітичні методи включають:

метод характеристик, який перетворює диференціальне рівняння в систему звичайних диференціальних рівнянь, що можна розв’язати за допомогою класичних методів. Для рівняння типу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.38}$$

характеристики задаються лініями в просторі, по яких u залишається сталою:

метод інтегруючих множників, який дозволяє звести рівняння до більш простого вигляду для його подальшого розв'язання [29].

З іншого боку, чисельні методи, такі як метод скінченних різниць або метод скінченних елементів, дозволяють отримати наближені розв’язки, коли аналітичні методи виявляються непридатними або занадто складними для застосування. Ці методи широко використовуються в комп'ютерному моделюванні для вирішення задач, що виникають у фізичних системах, таких як теплообмін, механіка рідин, і електромагнетизм.

Крайова задача для диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП) першого порядку формулюється у вигляді рівняння разом із встановленими крайовими умовами. Загальний вигляд ДРЧП першого порядку може бути записано у формі:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \tag{1.39}$$

де $u(x,t)$ — шуканий розв’язок, a — константа, а $f(x,t)$ — задана функція. Крайовою умовою може бути значення функції u на межах області визначення. Наприклад, якщо область визначення $\Omega=[x_0,x_1]\times[t_0,t_1]$, то крайові умови можуть бути задані на межах $x=x_0$ та $x=x_1$ для всіх t у $[t_0, t_1]$.

Крайові задачі, в свою чергу, формулюються за певних умов на межі області, в якій шукається розв'язок. Такі задачі зазвичай постають у фізичних задачах, де необхідно врахувати поведінку системи на межах. Наприклад, крайова задача для РЧП першого порядку може виглядати так:

$$\begin{cases} F\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0, & (x,y)\epsilon D \\ u(x,y) = g\,(x,y), & (x,y)\epsilon\partial D \end{cases} \tag{1.40}$$

де $g\,(x,y)$ — це функція, яка визначає значення розв'язку на межі ∂D області D. У таких випадках умови, накладені на межі, є вирішальними для забезпечення існування і єдиності розв'язків. Основним підходом для розв'язування крайових задач є метод характеристик, який дозволяє переводити РЧП у звичайні диференціальні рівняння по певних характеристичних лініях, що проходять через область визначення задачі.

Крайові умови визначаються для функції u в точках, що обмежують область визначення. Наприклад, для задачі першого порядку можуть бути задані умови вигляду:

$$u(x_0, t) = g_1(t), u(x_1, t) = g_2(t), t \in [t_0, t_1], \quad (1.41)$$

де $g_1(t)$ та $g_2(t)$ — задані функції.

Крім того, можуть бути вказані умови для частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = h_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) = h_2(t) \quad (1.42)$$

Для опису процесу теплопровідності в стержні можна взяти рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.43)$$

де $u(x,t)$ — температура в стержні в момент часу t в точці x, а k — коефіцієнт теплопровідності. Крайові умови можуть бути задані як температура на обох кінцях стержня:

$$u(0,t) = T_0, u(L,t) = TL, t \geq 0. \quad (1.44)$$

Для коливань струни можна розглянути рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.45)$$

де c — швидкість хвилі в струні. Крайові умови можуть бути:

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t\geq 0, \quad (1.46)$$

що відповідає закріпленим кінцям струни.

Існування та єдиність розв'язку крайової задачі для ДРЧП першого порядку зазвичай забезпечуються за допомогою теорії функцій. Для задачі Коші або крайової задачі важливим є виконання умов Ліпшиця для функції $f(x,t,u)$ по змінній u. Зокрема, якщо функція f задовольняє умові Ліпшиця в області визначення, то розв'язок крайової задачі існує і є єдиним у класі розв'язків, що задовольняють дані крайові умови.

Розв'язання крайових задач для ДРЧП першого порядку може бути виконане через декілька методів.

Для деяких типів рівнянь можна використовувати метод характеристик, де розв'язок задається вздовж характеристичних кривих, що визначаються умовами крайової задачі.

Метод розділення змінних:

Для лінійних рівнянь дієвим методом розв’язування є метод відокремлених змінних, згідно якого функція може бути представлена як добуток двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної.

У випадку, коли аналітичний розв'язок складний або не існує, можуть бути використані чисельні методи, такі як метод скінченних різниць або метод скінченних елементів.

Ці методи можуть бути адаптовані для розв'язування крайових задач, однак слід зазначити, що умови для існування та єдиності розв'язку можуть бути складнішими, ніж у випадку задачі Коші, що потребує додаткового аналізу.

Крайові задачі для ДРЧП першого порядку є важливим елементом теорії диференціальних рівнянь, оскільки вони дозволяють моделювати реальні фізичні процеси. Застосування різних методів розв'язування крайових задач дозволяє знайти розв’язки, що задовольняють заданим умовам, що є критично важливим у багатьох наукових і технічних застосуваннях.

Дослідження задач Коші та крайових задач для рівнянь з частинними похідними першого порядку є надзвичайно актуальним у контексті сучасної науки та техніки. Ці задачі знаходять широке застосування у різних дисциплінах, таких як механіка, термодинаміка, теорія електромагнітних полів, де вони моделюють динаміку різних фізичних процесів. Для якісного розуміння та дослідження даних задач важливе знання базових концепцій та методів, що стосуються як теорії, так і практики.

Серед методів, що використовуються для розв'язання таких задач, можна виділити як аналітичні підходи, так і чисельні методи. Аналітичні методи, такі як метод характеристик або метод інтегрування, дозволяють знаходити точні розв'язки у випадках, коли це можливо, тоді як чисельні методи, включаючи методи скінченних різниць або елементів, застосовуються в ситуаціях, коли аналітичне розв'язання є складним або неможливим [7], [8], [39], [40].

Таким чином, формулювання задачі Коші та крайових задач для рівнянь з частинними похідними першого порядку є важливим етапом у дослідженні цих рівнянь. Розуміння основних принципів, що лежать в основі цих задач, дозволяє не лише глибше вникнути в математичні основи, але й ефективно застосовувати отримані знання в практичній діяльності, зокрема в наукових дослідженнях та інженерній практиці.

1.3. Основні методи розв'язання рівнянь з частинними похідними першого порядку

Рівняння з частинними похідними першого порядку займають важливе місце в математичній теорії, оскільки вони часто використовуються для моделювання різноманітних фізичних і технологічних процесів. У розділі розглянуто основні методи розв'язання РЧП першого порядку, зокрема метод характеристик, метод функцій, метод оберненої задачі та чисельні методи.

Метод характеристик є одним з найбільш розповсюджених підходів для розв'язання РЧП першого порядку. Основна ідея полягає в тому, щоб перетворити вихідне рівняння в систему звичайних диференціальних рівнянь. Для рівняння загального вигляду:

$$F(x, y, u, u_x, u_y)= 0, \tag{1.47}$$

вводять параметри, які дозволяють описати траєкторії (характеристики) у просторі *(x,y)*. Розв'язуючи цю систему, можна отримати функцію *u*, яка задовольняє первісному рівнянню. Метод характеристик дозволяє з'ясувати, які області простору впливають на розв'язок і як вони взаємодіють. Це важливо для задач, пов'язаних із динамікою та хвильовими процесами, де зміни в одній області можуть відображатися в інших.

Метод функцій передбачає представлення шуканої функції у вигляді комбінації базових рішень, що задовольняють початкові або крайові умови. Застосування рядів Тейлора або Фур'є дозволяє знайти апроксимацію функції. Цей метод особливо корисний, коли розв’язок можна представити в простій формі, але він вимагає глибокого розуміння теорії функцій і може бути складним у випадках, коли рівняння має особливості або невизначеності. Таким чином, метод функцій є важливим інструментом для побудови аналітичних розв’язків, але має свої обмеження у складних випадках [39], [40].

Метод оберненої задачі використовується для знаходження розв'язків, що відповідають заданим умовам на межі. Процес включає аналіз граничних умов і структурних особливостей розв'язків, що можуть виявити нові аспекти задачі. Часто застосовуються ітераційні методи для уточнення результатів, оскільки РЧП можуть бути нелінійними, що вимагає додаткових зусиль для отримання точних розв'язків. Цей підхід дозволяє враховувати специфічні характеристики задачі та її умови [1].

Серед чисельних методів, метод скінченних різниць є одним з найбільш поширених. Він полягає у дискретизації вихідного рівняння на певній сітці, що дозволяє отримати чисельні наближення розв'язків. Це дуже корисно для задач, де аналітичні розв’язки або взагалі неможливі, або важко отримати. Метод скінченних різниць дозволяє розв’язувати РЧП в складних геометричних областях, а також за умов неоднорідності. Технологічний прогрес у комп'ютерних обчисленнях підвищив популярність чисельних методів, оскільки вони дозволяють швидко отримувати результати для практичних задач [2].

У підсумку, існує кілька підходів до розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку, кожен з яких має свої сильні та слабкі сторони. Метод характеристик є потужним інструментом для розв'язування задач, пов'язаних з динамічними процесами. Метод функцій підходить для побудови аналітичних розв’язків, тоді як метод оберненої задачі дозволяє враховувати специфічні крайові умови [31]. Чисельні методи забезпечують гнучкість у розв'язуванні складних задач, що робить їх незамінними в сучасній математиці та її застосуваннях. Використання цих методів дозволяє не тільки отримати розв'язки, але й отримати глибше розуміння властивостей самих рівнянь, що важливо для наукових і технологічних досліджень.

Приклад 1. Знайти загальне розв'язання $u = u(x, y)$ рівняння

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Розв'язання. Необхідно скласти рівняння характеристик

$$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{-x}$$

Це рівняння має розв'язок

$$x^2 + y^2 = C.$$

Отже, першим інтегралом є функція:

$$\psi = x^2 + y^2$$

Тоді загальне розв'язання має вигляд

$$u = \Phi(x^2 + y^2)$$

і воно представляє собою сімейство поверхонь обертання з віссю обертання *Ou*. Зокрема, при $\Phi(\psi) = \psi$, отримано параболоїд обертання:

$$u = x^2 + y^2,$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$, отримано конус:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Побудувати перші інтеграли характеристичної системи (1.5) для випадку $n>2$ часто вдається шляхом відшукання інтегрованих комбінацій. Інтегрованою комбінацією називають диференціальне рівняння, яке є наслідком системи рівнянь (1.5) і інтегрується в квадратах. З кожної інтегрованої комбінації виходить перший інтеграл системи (1.5).

Приклад 2. Знайти загальне розв'язання u=u(x,y,z) рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Розв'язання. Необхідно скласти рівняння характеристик у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x-y}$$

Розв'язуючи систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \\ \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{y}{x} = 1 + \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

таким чином знаходяться два перших інтеграли:

$$xy=C_1 \text{ і } z-y-x=C_2.$$

Тоді загальне розв'язання заданого рівняння має вигляд:

$$u(x,y,z)=\Phi(xy,z-x-y),$$

де $\Phi(a,b)$ - довільна неперервно диференційована функція.

Для складання інтегрованих комбінацій системи (1.5) можна скористатися наступним правилом рівних дробів. Якщо маються рівні дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

і довільні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такі, що $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \neq 0$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n}$$

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння

$$(x+z)u_x'+(y+z)u_y'+(x+y)u_z'=0.$$

Рішення. Для знаходження незалежних перших інтегралів складено рівняння характеристик у симетричній формі

$$\frac{dx}{x+z}=\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{x+y}$$

За властивістю рівних дробів отримано

$$\frac{dx-dz}{z-y}=\frac{dy-dz}{z-x}\Longrightarrow (x-z)d(x-z)=(y-z)d(y-z)$$

Інтегруючи останню рівність, буде отримано перший інтеграл

$$\psi_1(x,y,z)=(x-z)^2-(y-z)^2=(x-y)(x+y-2z).$$

За властивістю рівних дробів складено ще одну рівність

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dx-dy}{x-y}\Leftrightarrow\frac{d(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{2d(x-y)}{x-y}$$

інтегрування якої дає ще один перший інтеграл

$$\psi_2(x,y,z)=\frac{(x+y+z)}{(x-y)^2}$$

Тоді загальне рішення заданого рівняння має вигляд:

$$u(x,y,z) = \Phi\ ((x-y)(x+y-2z), \frac{x+y+x}{(x-y)^2})$$

де *Φ(a,b)* - довільна неперервно диференційована функція.

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння

$$xu_x' + yu_y' + xyu_z' = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Розв'язання. Необхідно скласти характеристичну систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xz} \qquad (*)$$

Один перший інтеграл знайдено, розв'язуючи рівняння

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1$$

Отже, $\psi_1(x,y,z)=x/y$. Ще один перший інтеграл знайдемо, розглядаючи друге рівняння характеристичної системи (*)

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

виключивши з нього x за допомогою вже знайденого першого інтеграла ψ_1. Так як $x=C_1y$, то буде отримано

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{C_1y^2} \Rightarrow C_1ydy = dz \Rightarrow C_1y^2 - 2z = C_2 \Rightarrow xy - 2z = C_2$$

Отже,

$$\psi_2(x,y,z)=xy-2z,$$

і загальний розв'язок заданого рівняння запишеться у вигляді

$$u(x,y.z) = \Phi(\frac{x}{y}, xy-2z)$$

Що стосується лінійного рівняння загального виду (1.27), то побудувати його загальний розв'язок можна наступним чином. Перш за все треба знайти перші інтеграли відповідної характеристичної системи (1.5). І виконавши заміну (1.12)-(1.13), привести рівняння (1.27) до канонічного вигляду

$$\tilde{A}(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi_n} = \tilde{B}(\xi)v + \tilde{f}(\xi) \quad (1.48)$$

Тут коефіцієнт $\tilde{A}(\xi)$ і права частина $\tilde{B}(\xi)v + \tilde{f}(\xi)$ визначаються відповідно виразами

$$A_1(x)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x)\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \quad \text{та} \ B(x)u + f(x)$$

в яких старі змінні x = (x_1, ..., x_n), використовуючи заміну (1.48), виражені через нові ξ = (ξ_1, ..., ξ_n). Потім треба розв'язати отримане рівняння (1.48), використовуючи методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, коли незалежною змінною є ξ_n. Інші змінні ξ_i, $i = 1, ..., n - 1$, розглядаються при цьому як фіксовані параметри, від яких буде залежати довільна функція в записі загального розв'язку. Отримавши таким чином розв'язок рівняння (1.48), далі слід повернутися до старих змінних.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x\,u'_x + y\,u'_y = u,\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

Розв'язання. Необхідно скласти рівняння характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Його першим інтегралом є функція

$$\psi(x, y,) = \frac{y}{x}$$

Необхідно ввести нові незалежні змінні за наступним правилом:

$$\xi = \frac{y}{x}, \eta = x$$

Треба показати, що таке перетворення є невиродженим при $x\neq 0$ та $y\neq 0$. Необхідно ввести позначення v для невідомої функції при переході до нових незалежних змінних ξ і η:

$$\upsilon(\xi, \eta) = \upsilon(\frac{y}{x}, x) = u(x, y) \qquad (*)$$

Так як для похідних u'_x і u'_y одержано:

$$u'_x = -\frac{y}{x^2}\upsilon'_\xi - \upsilon'_\eta, u'_y = \frac{1}{x}\upsilon'_\xi$$

то їх підстановка в задане рівняння приводить його до вигляду:
$x\upsilon'_\eta = \upsilon$. Враховуючи заміну $\eta = x$, буде отримано рівняння

$$\eta \upsilon_\eta = \upsilon$$

Розглядаючи отримане рівняння як рівняння з розділеними змінними, можна побудувати його загальний розв'язок у вигляді

$$\upsilon(\xi, \eta) = \eta \varphi(\xi)$$

де φ - довільна диференційована функція. Тоді загальний розв'язок заданого рівняння, згідно заміни (*), описує функція

$$u(x, y) = x\varphi(\frac{y}{x})$$

Примітка. Загальний розв’язок рівняння (1.27) може бути побудований і методом рішення квазілінійних рівнянь, які не вимагають приведення рівняння (1.27) до канонічного вигляду.

Приклад 6. В області $x>0, y>0$ знайти розв'язання рівняння

$$u_x + u_y = x + y,$$

Розв'язання. Рівняння є лінійним неоднорідним. Необхідно побудувати його розв'язання, використовуючи метод розв'язання квазілінійних рівнянь. Варто скласти рівняння характеристик у симетричній формі:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{x + y}$$

Розв'язуючи систему, знайдеуо два перших незалежних інтеграли:

$$\psi_1(x,y,u)=x-y, \qquad \psi_2(x,y,u)=xy-u.$$

Отже, розв'язання заданого рівняння визначаються з рівняння

$$\Phi(x-y,xy-u)=0$$

з довільною функцією Φ. Розв'язавши це рівняння відносно останнього аргументу, буде отримано

$$u(x,y)=xy+F(x-y),$$

де F – довільна неперервно диференційована функція.

Примітка. Використовуючи властивість рівних дробів, можна побудувати інтегровану комбінацію:

$$\frac{xdx+ydy}{x+y}=\frac{du}{x+y}\Rightarrow x^2+y^2-2u=C$$

Побудована комбінація дає перший інтеграл

$$\psi_2(x,y,u)=x^2+y^2-2u$$

який відрізняється від зазначеного вище. І тоді розв'язок заданого рівняння будується наступним чином

$$x^2+y^2-2u=F(x-y)\Rightarrow u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\tilde{F}(x-y)$$

При цьому отримане рішення по суті збігається з рішенням (*). Дійсно, в силу довільності функції $\tilde{F}$, справедливі наступні перетворення:

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \tilde{F}(x - y) = xy + \tilde{F}(x - y)$$

Приклад 7. Знайти розв'язок рівняння

$$sin\, y \cdot u_x + e^x \cdot u_y = 2x\, sin\, y \cdot u^2$$

Рішення. Очевидно, задане рівняння є квазілійнійним. Для побудови загального розв'язку буде знайдено два незалежних перших інтеграли системи рівнянь:

$$\frac{dx}{sin\, y} = \frac{dy}{e^x} = \frac{du}{2x\, sin\, y \cdot u^2}$$

Розглядаючи два рівняння

$$\frac{dx}{sin\, y} = \frac{dy}{e^x} \text{ та } \frac{dx}{sin\, y} = \frac{du}{2x\, sin\, y \cdot u^2}$$

Буде отримано

$$\psi_1(x, y, u) = e^x + cos\, y, \;\; \psi_2(x, y, u) = x^2 + \frac{1}{u}$$

Тоді загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд:

$$\Phi(e^x + cos\, y, x^2 + \frac{1}{u}) = 0$$

Розв'язуючи це рівняння відносно другого аргументу, буде отримано:

$$x^2 + \frac{1}{u} = F(e^x + \cos y) \Longrightarrow u = (F(e^x + \cos y) - x^2)^{-1}$$

де F - довільна неперервно диференційована функція.

Приклад 8. Знайти розв'язок рівняння

$$(2y-u)u'_x + yu'_y = u$$

Розв'язання. Необхідно скласти характеристичну систему

$$\frac{dx}{2y-u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

Розв'язуючи рівняння

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{y} = C_1$$

знайдено перший інтеграл

$$\psi_1(x, y, u) = \frac{u}{y}$$

Використовуючи правило рівних дробів, буде складено інтегровану комбінацію

$$\frac{dx}{2y-u}=\frac{2dy-du}{2y-u}\Rightarrow dx=2dy-du\Rightarrow x-2y+u=C_2$$

Звідки буде отримано ще один перший інтеграл

$$\psi_2(x,y,u)=x-2y+u.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\Phi(\frac{u}{y},x-2y+u)=0$$

де Φ – довільна неперервно диференційована функція.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку в аналізі динамічних систем

Рівняння з частинними похідними першого порядку мають широке застосування в моделюванні динамічних систем, зокрема, в описі процесів, які залежать як від часу, так і від просторових координат. Використання таких рівнянь дозволяє адекватно моделювати явища, що протікають у часі та просторі, зокрема, у механіці, фізиці та економіці [39], [40]. Основним прикладом РЧП першого порядку є рівняння переносу, яке описує процеси дифузії, теплопровідності, а також переміщення мас і енергії в динамічних системах [4], [6].

Формально, рівняння переносу записується як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

де u=$u(x,t)$ — функція стану (наприклад, концентрація речовини або температура), t — час, x — просторові координати, v — швидкість переносу [2], [7], [40].

Рівняння переносу використовується для моделювання таких процесів як теплопровідність в однорідних середовищах, коли тепло переноситься від точок з більшою температурою до точок з нижчою температурою. У випадку одновимірного потоку теплоти у стрижні постійної довжини рівняння набирає вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.2}$$

де D — коефіцієнт теплопровідності матеріалу [4], [8], [12].

Для аналізу динамічних систем у фізиці часто застосовують хвильове рівняння, яке описує коливальні процеси і моделює поширення хвиль у різних середовищах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.3}$$

де c — швидкість поширення хвилі в середовищі [10], [16]. У цьому випадку, функція $u(x,t)$ може представляти амплітуду хвилі в точці простору в момент часу t.

При моделюванні процесів у динамічних системах використовуються також рівняння з частинними похідними першого порядку для задач оптимального керування, що дозволяє знаходити найкращі стратегії зміни параметрів системи з метою досягнення оптимального результату [2], [17]. У таких задачах, зокрема, зручно використовувати методику Лагранжа для побудови функціоналу, який мінімізується або максимізується.

Застосування рівнянь з частинними похідними у сфері інженерних наук охоплює моделювання електромагнітних полів, поведінки газів та рідин, а також розрахунок напруги у матеріалах, що особливо важливо у сфері проектування конструкцій [1], [5], [23]. Наприклад, в електромагнетизмі рівняння Максвелла, які включають частинні похідні першого порядку, описують змінні електричні та магнітні поля в залежності від часу і простору, надаючи можливість розв'язати задачі електродинаміки [14], [36].

Таким чином, рівняння з частинними похідними першого порядку є фундаментальними для аналізу та моделювання динамічних систем різної природи. Їхнє використання дозволяє вивчати поведінку систем у часових та просторових координатах, що є ключовим для розуміння багатьох природних і техногенних процесів.

2.2. Використання рівнянь з частинними похідними першого порядку для моделювання процесів

Рівняння з частинними похідними (РЧП) першого порядку є ефективним інструментом для математичного опису динамічних процесів, що відбуваються в багатьох прикладних науках, включаючи фізику, хімію, економіку та інженерну справу. Вони описують взаємозв'язки між змінними, що залежать як від часу, так і від просторових координат, дозволяючи відобразити зміну стану системи в часі та просторі. Такі рівняння є основою для моделювання процесів дифузії, теплопровідності, розповсюдження хвиль тощо [39], [40].

Рівняння з частинними похідними першого порядку мають загальний вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.4}$$

де $u=u(x,t)$ — функція від просторової змінної x та часу t; $a(x,t)$ — коефіцієнт, що може залежати як від x, так і від t. Це рівняння є типовим для моделювання процесів переносу, коли значення величини u змінюється залежно від швидкості переносу $a(x,t)$ [2], [40].

Одним із класичних прикладів використання РЧП першого порядку є моделювання процесу переносу речовини або енергії. Зокрема, при розгляді теплопровідності можна застосувати рівняння теплопровідності першого порядку, яке описує поширення температури у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.5}$$

де $u(x,t)$ — температура в точці x у момент часу t; v — швидкість переносу тепла. Це рівняння має прикладне значення в інженерії, де важливо моделювати розповсюдження тепла в середовищах з різними властивостями [4], [6], [8].

Процес дифузії, який описує перенесення речовини з областей з більшою концентрацією в області з меншою, також може бути описаний за допомогою рівнянь з частинними похідними першого порядку. Для одновимірного випадку рівняння дифузії має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.6}$$

де D — коефіцієнт дифузії, що характеризує швидкість розповсюдження речовини в середовищі. Дане рівняння дозволяє передбачити зміни концентрації речовини $u(x,t)$ у просторі з часом, що є особливо важливим у хімічних реакціях, процесах забруднення та інших подібних завданнях [3], [14], [23].

Рівняння з частинними похідними також широко застосовуються в моделюванні хвильових процесів. Наприклад, рівняння акустичної хвилі, яке описує розповсюдження звукових хвиль, може бути записано як:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.7}$$

де c — швидкість звуку в середовищі. Це рівняння показує, як звукова хвиля $u(x,t)$ поширюється в просторі й часі. Таке рівняння корисне у фізиці для аналізу акустичних систем, а також у технічних науках для проектування матеріалів, здатних ефективно поглинати чи передавати звукові хвилі [7], [9], [24].

Для розв'язання рівнянь з частинними похідними першого порядку часто застосовується метод характеристик. Він полягає у визначенні так званих характеристичних кривих, уздовж яких рівняння з частинними похідними перетворюється на звичайне диференціальне рівняння. Для рівняння виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.8}$$

характеристичні криві визначаються з рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x), \tag{2.9}$$

Цей підхід дозволяє перетворити рівняння з частинними похідними на систему простіших рівнянь, що значно спрощує процес розв'язання задачі [1], [21], [16].

В економіці рівняння з частинними похідними першого порядку використовуються для аналізу зміни цінових трендів або моделювання поширення економічних факторів у просторі. Наприклад, для дослідження цінової динаміки на товарних ринках можна застосувати рівняння типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.10}$$

де *p(x,t)* — ціна товару в залежності від просторової координати x та часу *t*, а *v* — швидкість поширення економічного сигналу. Це рівняння дозволяє оцінювати, як зміни цін в одній точці простору впливатимуть на інші точки, що має значення при прогнозуванні впливу економічних подій [17], [20], [23].

Таким чином, рівняння з частинними похідними першого порядку є ефективним інструментом для моделювання різноманітних процесів у природничих та соціальних науках. Завдяки можливості опису динамічних процесів з урахуванням часових та просторових змінних, ці рівняння широко застосовуються в різних галузях науки і техніки, таких як інженерія, фізика, хімія та економіка.

2.3. Застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку в прогностичних моделях

Рівняння з частинними похідними першого порядку широко застосовуються для моделювання процесів, що описують поширення змін у просторі та часі, зокрема, у прогностичних моделях. Такі рівняння дозволяють розробляти точні моделі, що враховують як часові, так і просторові зміни, що є основою прогнозування в різних галузях, включаючи фізику, економіку та екологію [15], [18], [40].

Одним із найбільш поширених прикладів застосування рівнянь з частинними похідними є рівняння переносу, яке описує динаміку розповсюдження будь-якої фізичної величини *u(x,t)*, що може представляти, наприклад, температуру, концентрацію забруднювача, вологість тощо [21], [30].

Загальне рівняння переносу в одновимірному випадку можна записати як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.11}$$

де c — швидкість переносу, що відображає швидкість розповсюдження величини u уздовж просторової координати x [8], [24], [39].

Рівняння переносу є лінійним рівнянням першого порядку, яке широко використовується для прогнозування в різних галузях, зокрема у гідродинаміці та метеорології, оскільки воно дозволяє описувати процеси конвективного переносу, що включають передачу тепла чи маси [2], [4], [16].

У метеорології, рівняння переносу застосовується для прогнозування розподілу температури в атмосфері. Наприклад, для одновимірної моделі температурного поля температура *T(x,t)* змінюється у просторі x та часі t за рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{2.12}$$

де v — швидкість руху повітряних мас уздовж осі x [10], [19], [34]. Ця модель дозволяє передбачати, як температурні зміни у певній точці простору вплинуть на сусідні точки через деякий проміжок часу.

Рівняння дифузії також є важливим рівнянням з частинними похідними, яке моделює процеси розповсюдження та використовується в прогностичних моделях. Його загальна форма має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.13}$$

де D — коефіцієнт дифузії, що описує інтенсивність процесу розповсюдження [7], [20].

Наприклад, у фінансовому прогнозуванні рівняння дифузії може описувати зміни в розподілі цін на ринку або ризику протягом часу. Величина $u(x,t)$ в такій моделі може позначати ціну активу, що поширюється на сусідні ринкові сегменти, де x — це умовний "простір" ринку, а t — час [3], [11], [36].

У екології рівняння з частинними похідними дозволяють прогнозувати поширення забруднювачів у довкіллі, зокрема у водних та повітряних системах. Рівняння переносу-дисперсії, що є комбінацією рівнянь переносу та дифузії, записується як:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{2.14}$$

де $C(x,t)$ — концентрація забруднювача в точці x у момент часу t, v — швидкість течії, а D — коефіцієнт дисперсії [20], [9], [33]. Цей підхід використовується для прогнозування екологічних ризиків та оцінки рівня забруднення.

Застосування рівнянь з частинними похідними в прогностичних моделях передбачає використання чисельних методів, зокрема, методу скінченних різниць та методу скінченних елементів, що дозволяє розв'язувати РЧП для складних геометрій та неоднорідних середовищ [29], [6], [26], [27], [28]. Чисельні методи забезпечують апроксимацію розв'язків у випадках, коли аналітичний розв'язок є неможливим.

Так, метод скінченних різниць дозволяє наближено розв'язувати рівняння шляхом апроксимації похідних різницями між значеннями функції в сусідніх точках. Це має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}, \tag{2.15}$$

де Δt — крок часу [1], [12], [17].

Таким чином, рівняння з частинними похідними першого порядку є ефективним інструментом для створення прогностичних моделей у різних галузях. Вони забезпечують можливість врахування просторово-часових змін, дозволяючи робити прогнози з високою точністю. Завдяки розвитку чисельних методів, сучасні прогностичні моделі базуються на цих рівняннях, що сприяє їхньому широкому застосуванню в науці та промисловості [14], [23], [37].

РОЗДІЛ 3. ДОВЕДЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Основні властивості рівнянь з частинними похідними

Рівняння з частинними похідними першого порядку є основою для опису багатьох природничих та технічних процесів. Їх застосування охоплює такі сфери, як фізика, хімія, економіка, біологія, інженерія. Для ефективного використання РЧП1 важливо розуміти їхні властивості, серед яких лінійність, принцип суперпозиції, та стабільність розв'язків. У цьому підрозділі викладено основні методи доведення властивостей таких рівнянь, а також наведено приклади формул, що ілюструють ці властивості.

Лінійність рівнянь із частинними похідними першого порядку — це властивість рівнянь, за якої залежність між невідомою функцією *u(x,y)* та її частинними похідними є лінійною.

Рівняння з частинними похідними першого порядку має загальний вигляд:

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y) \qquad (3.1)$$

де *a(x,y), b(x,y), c(x,y)* — задані функції, а *u(x,y)* — невідома функція, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ — частинні похідні першого порядку від *u(x,y)* [29], [34].

Рівняння називається лінійним, якщо всі коефіцієнти *a(x,y), b(x,y), c(x,y)* не залежать від *u* або його похідних. Для доведення лінійності слід розглянути дві функції $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$, що є розв'язками цього рівняння:

$$a(x,y)\,\frac{\partial u_1}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} = c(x,y) \qquad (3.2)$$

$$a(x,y)\,\frac{\partial u_2}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y} = c(x,y) \qquad (3.3)$$

Додаючи рівняння або множачи їх на скаляр, отримано:

$$a(x,y)\ \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}+\ b(x,y)\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y}=2c(x,y) \tag{3.4}$$

що підтверджує властивість лінійності [30].

Властивості лінійності:

– будь-яка лінійна комбінація розв'язків $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$ також є розв'язком однорідного рівняння (принцип суперпозиції).

– складні задачі можна розв'язувати шляхом розбиття на простіші задачі та їх об'єднання.

Принцип суперпозиції є наслідком лінійності рівнянь. Якщо $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$ є розв'язками однорідного рівняння:

$$a(x,y)\ \frac{\partial u}{\partial x}+\ b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3.5}$$

то їх лінійна комбінація $u(x, y)=c_1u_1(x, y)+c_2u_2(x, y)$, де c_1 та c_2 — довільні сталі, також є розв'язком рівняння. Це випливає із заміни в початкове рівняння:

$$a(x,y)\ \frac{\partial(c_1u_1+c_2u_2)}{\partial x}+\ b(x,y)\frac{\partial(c_1u_1+c_2u_2)}{\partial y}=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0 \tag{3.6}$$

Таким чином, суперпозиція зберігає розв'язок рівняння [27].

Стабільність рівнянь з частинними похідними першого порядку означає, що невеликі зміни в початкових умовах призводять до невеликих змін у розв’язку. Для забезпечення стабільності важливим є обмеження на коефіцієнти $a(x,y)$ та $b(x,y)$.

Наприклад, для однорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3.7}$$

розв'язок має вигляд *u(x,t)=f(x−vt)*, де f — довільна гладка функція [29]. Якщо початкові умови *f(x)* змінити на $\tilde{f}(x)$, то відхилення в розв'язку буде пропорційним $\|f - \tilde{f}\|$, що демонструє стабільність розв'язку.

Для рівняння

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \; b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.5}$$

загальний розв’язок записується у вигляді

$$u(x,y) = F(\varphi(x,y)) \tag{3.8}$$

де φ*(x,y)* — характеристична функція, визначена з рівняння:

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} \tag{3.9}$$

Розв’язок знайдено за допомогою характеристичних кривих [30].

Метод характеристик:

- визначити параметричні рівняння характеристичних кривих;
- знайти функцію *φ(x,y)*, що є сталою на цих кривих;
- виразити *u(x,y)* через *φ(x,y)*.

На приклад, для рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.10}$$

характеристичне рівняння:

$$\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{1} \Rightarrow x - y = const \quad (3.11)$$

Отже, загальний розв’язок:

$$u(x, y) = F(x - y) \quad (3.12)$$

де F — довільна функція.

Рівняння з частинними похідними першого порядку володіють важливими властивостями, такими як лінійність, принцип суперпозиції та стабільність. Доведення цих властивостей ґрунтується на строгому математичному аналізі й демонструє широку гнучкість цих рівнянь у моделюванні природничих явищ. Формули та приклади, наведені у підрозділі, слугують надійним інструментом для застосування теорії в різних галузях науки та техніки.

3.2. Конкретний приклад розв'язання задачі Коші для рівняння першого порядку

Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку є однією з фундаментальних задач математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь. Вона має широке застосування в моделюванні процесів у фізиці, економіці, техніці тощо. В цьому підрозділі розглядається загальна постановка задачі Коші для РЧП першого порядку, а також конкретний приклад її розв’язання.

Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку передбачає знайдення функції *u(x,t)*, яка задовольняє рівнянню виду:

$$a(x, t)\ \frac{\partial u}{\partial x} + \ b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x, t) \quad (3.13)$$

де *a(x,t), b(x,t), c(x,t)* — відомі функції, які визначають властивості рівняння, а *u(x,t)* — шукане рішення [22], [29].

Додатково в задачі Коші задано початкові умови:

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3.14}$$

де *φ(x)* — задана функція, що визначає значення розв'язку на початковій лінії $t=0$ [34].

Задача Коші є коректною, якщо існує єдиний розв'язок, який залежить безперервно від початкових даних.

Для коректності задачі Коші важливо, щоб коефіцієнти *a(x,t)* і *b(x,t)* не дорівнювали нулю одночасно, а також щоб рівняння було гіперболічним, еліптичним або параболічним залежно від умов задачі [29], [38].

Розглянуто, наприклад, задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, u(x,0) = x^2 \tag{3.15}$$

Крок 1. Характеристичні рівняння

Метод характеристик дозволяє звести частинне диференціальне рівняння до системи звичайних диференціальних рівнянь. Для рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.16}$$

характеристичні рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{0}, \tag{3.17}$$

Крок 2. Розв’язання характеристичних рівнянь

З першого співвідношення отримано:

$$\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial x}{x} \Longrightarrow x = Ce^{t} \quad (3.18)$$

де C — стала інтегрування [15].

З другого співвідношення:

$$\frac{\partial u}{0} \Rightarrow u = const \quad (3.19)$$

Крок 3. Загальний розв’язок

Оскільки u=*const* уздовж кожної характеристики, розв’язок залежить від сталої C, тобто:

$$u = f(C) = f(\frac{x}{e^{t}}) \quad (3.20)$$

Крок 4. Застосування початкових умов

За умовою $u(x, 0)=x^2$:

$$f(\frac{x}{e^{0}}) = f(x) = x^{2} \quad (3.21)$$

Таким чином, розв’язок задачі Коші має вигляд:

$$u(x,t) = (\frac{x}{e^{t}})^{2} = x^{2}e^{-2t} \quad (3.22)$$

Метод характеристик дозволив розв’язати задачу Коші для РЧП першого порядку та отримати розв’язок $u(x,t)=x^2e^{-2t}$. Цей приклад ілюструє важливість коректної постановки задачі та методів її розв’язання, що є основою для аналізу та моделювання багатьох природних і технічних процесів [15], [29], [38].

Метод характеристик є потужним інструментом для розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку. Основна ідея методу полягає у перетворенні задачі Коші для РЧП першого порядку до задачі для звичайних диференціальних рівнянь вздовж характеристичних кривих.

Для цього слід ввести характеристичні рівняння:

$$\frac{dx}{ds} = a\,(x,t), \qquad \frac{dt}{ds} = b\,(x,t), \quad \frac{du}{ds} = c(x,t), \qquad (3.23)$$

де s — параметр, що позначає напрямок характеристичної кривої, *x(s), t(s)*, та *u(s)* — функції, що описують координати і значення шуканої функції вздовж характеристики.

Після отримання системи характеристичних рівнянь, необхідно розв'язати їх для визначення розв'язку *u(x,t)*, який задовольняє початкові умови *u(x,0)=φ(x)*.

Також варто розглянути рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (3.10)$$

з початковими умовами: *u(x,0)=φ(x).*

У цьому випадку функції *a(x,t)=1, b(x,t)=1, c(x,t)=0*, тому характеристичні рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1, \qquad \frac{\partial t}{\partial s} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \qquad (3.24)$$

Задавши початкові умови для $x(0)=x_0$, $t(0)=0$, $u(0)=\varphi(x_0)$, отримано розв'язки для характеристичних кривих:

$$x(s) = x_0 + s, \qquad t(s) = s, \qquad u(s) = \varphi(x_0) \tag{3.25}$$

Відтак, для будь-якої точки (x,t), $x-t=x_0$ і розв'язок буде мати вигляд:

$$u(x,t) = \varphi(x-t) \tag{3.26}$$

Це й буде шуканий розв'язок задачі Коші для даного рівняння.

Розв'язок $u(x,t)=\varphi(x-t)$ є коректним, оскільки він задовольняє вихідне рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Замінивши функцію $u(x,t)=\varphi(x-t)$ у рівняння, отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x-t) + \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x-t) = \varphi'(x-t) + \varphi'(x-t) = 0 \tag{3.27}$$

Отже, розв'язок задовольняє рівняння.

Розв'язок також відповідає початковій умові $u(x,0)=\varphi(x)$, оскільки при $t=0$:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \varphi(\mathrm{x}-0) = \varphi(\mathrm{x}) \tag{3.28}$$

що відповідає заданій початковій умові.

Перевірка коректності та єдиності розв'язку

Оскільки метод характеристик дозволяє однозначно визначити розв'язок, який задовольняє як рівняння, так і початкові умови, то розв'язок є коректним та єдиним. Це підтверджує коректність та єдиність задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку.

Рівняння типу $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ може бути застосоване в різних галузях науки, що показано в таблиці 3.1.

Таблиця 1. Застосування рівнянь в галузях науки

№	Галузь	Застосування
1	Фізика	У теплотехніці це рівняння може моделювати поширення тепла в одновимірному середовищі, де температура $u(x,t)$ передається вздовж просторової координати x з певною швидкістю, наприклад, в умовах одновимірного теплопровідного процесу
2	Економіка	У моделюванні попиту і пропозиції на ринку, де ціни і кількість товарів змінюються залежно від часу та простору
3	Екологія	У моделях поширення забруднюючих речовин у середовищі, де концентрація $u(x,t)$ змінюється по простору та часу

Завдяки своїй універсальності, рівняння з частинними похідними першого порядку з успіхом застосовуються в багатьох наукових і практичних дослідженнях.

Окрім методу характеристик, можливі й інші методи розв'язання рівнянь з частинними похідними першого порядку, які залежать від конкретної форми рівняння. Наприклад, для певних класів рівнянь застосовують методи перетворення Лапласа або Фур'є, якщо рівняння дозволяють їх застосування. Однак метод характеристик залишається основним для задач, подібних до розглянутої, оскільки він дає надійне і пряме розв'язання.

Метод характеристик є основним і найбільш ефективним методом для розв'язування задачі Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку. Завдяки цьому методу, задачу можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь, що значно спрощує процес знаходження розв'язку. Розв'язок задачі Коші є коректним, якщо існує єдиний розв'язок, що залежить від початкових умов, як це продемонстровано на прикладі рівняння $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

3.3. Застосування результатів до практичної задачі

Математичне моделювання є важливим інструментом для опису та прогнозування різноманітних фізичних, технічних та економічних процесів.

Одним із основних інструментів для таких моделювань є рівняння з частинними похідними першого порядку. Ці рівняння широко використовуються для опису процесів, де змінні залежать від кількох незалежних змінних, таких як час та простір. Слід розглянути застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку для моделювання реальних процесів.

Рівняння з частинними похідними першого порядку описують зміни величин у просторі та часі. Вони застосовуються в різних галузях науки та техніки, наприклад, для моделювання теплопереносу, механічних та хімічних процесів, а також для задач в екології, фінансах та інших областях.

Загальна форма рівняння з частинними похідними першого порядку виглядає наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{3.30}$$

де $u=u(x,t)$ — невідома функція, яка залежить від просторової змінної x та часу t, а a — сталий коефіцієнт, що характеризує швидкість поширення процесу (наприклад, швидкість хвилі або тепла) [2].

Одним з класичних прикладів застосування рівнянь з частинними похідними є задача теплопереносу. Для моделювання температурного поля в деякому тілесному об'єкті можна використати рівняння теплопередачі першого порядку, яке описує зміну температури $T(x,t)$ у точці x в момент часу t.

Для одновимірної задачі теплопереносу рівняння виглядатиме наступним чином:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{3.31}$$

де k — коефіцієнт теплопровідності, що характеризує здатність матеріалу передавати тепло. Це рівняння є класичним прикладом диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку, однак для моделей з частинними похідними першого порядку розглядають більш спрощені моделі, де тепло передається без впливу просторових диференціалів [4].

У задачах механіки, таких як опис руху матеріальних точок або вивчення хвильових процесів, рівняння з частинними похідними також широко використовуються. Одним із прикладів є моделювання хвильових процесів у середовищі. Рівняння для хвиль, що поширюються в одновимірному середовищі, можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.32}$$

де $u(x,t)$ — функція, що описує хвилю, а c — швидкість поширення хвилі. Це рівняння описує поширення хвиль у середовищі, де зміни відбуваються в просторі і часі [30].

Рівняння з частинними похідними першого порядку також використовуються в економічних моделях для опису різноманітних процесів, таких як розподіл ресурсів або цінові коливання. Для опису зміни ціни товару $p(x,t)$, де x — просторовий параметр, а t — час, можна побудувати рівняння, яке виглядатиме наступним чином:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{3.33}$$

де v — швидкість зміни ціни в просторі. Це рівняння описує, як ціна товару змінюється в часі та залежить від просторових умов [16].

У сучасних інженерних та технічних задачах часто використовуються рівняння з частинними похідними першого порядку для оптимізації процесів, наприклад, для вибору оптимальних параметрів в системах управління або в задачах оптимізації витрат енергії в процесах теплообміну. Для цього використовуються варіаційні принципи, де розв'язання рівнянь з частинними похідними забезпечує мінімізацію або максимізацію певних функцій, таких як вартість чи ефективність [2].

Часто практичне застосування рівнянь з частинними похідними першого порядку вимагає чисельного розв'язання, оскільки аналітичні розв'язки можуть бути складними або недоступними. Для цього використовуються методи скінченних різниць, методи скінченних елементів або методи Монте-Карло. Залежно від конкретної задачі та її складності вибирається оптимальний чисельний метод, що дозволяє отримати наближені розв'язки з високою точністю [30].

Рівняння з частинними похідними першого порядку є важливим інструментом для математичного моделювання реальних процесів в різних галузях науки і техніки. Їх застосування дозволяє ефективно описувати зміну величин у просторі та часі, а також оптимізувати технічні та економічні процеси. Врахування таких рівнянь у різних сферах дозволяє отримувати точні моделі, що допомагають у прогнозуванні та оптимізації реальних ситуацій.

Математичні моделі, що описують технічні та інженерні процеси, стають все більш важливими для ефективного управління і оптимізації. Одним із ключових інструментів для таких оптимізацій є рівняння з частинними похідними першого порядку. Це рівняння дають змогу точніше моделювати зміну параметрів процесу, таких як температура, тиск, швидкість потоку, або навіть витрати енергії, що має прямий вплив на ефективність та економічність процесів. В цьому підрозділі розглядається використання рівнянь з частинними похідними першого порядку для оптимізації різних технічних та інженерних задач.

Рівняння з частинними похідними першого порядку описують процеси, в яких зміна однієї змінної залежить від інших змінних. Це дає змогу оцінювати вплив різних факторів на загальний результат і мінімізувати або максимізувати потрібні величини, такі як витрати, енергія чи час. Для досягнення оптимального результату необхідно враховувати не тільки значення змінних, але й їх просторово-часову залежність.

Прикладом може служити задача оптимізації теплопередачі в промислових процесах. Зміну температури в процесі можна описати рівнянням з частинними похідними першого порядку, яке має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad (3.34)$$

де T — температура, α — коефіцієнт теплопровідності, t — час, x — координата по простору. Це рівняння описує поширення тепла через матеріал або середовище, що є важливим при оптимізації теплових процесів у різних інженерних системах [2].

Важливим аспектом інженерних і технічних систем є оптимізація витрат енергії. Для цього розв'язують рівняння, що описують енергетичні потоки та їх залежність від просторово-часових змінних. Одним із прикладів є використання рівняння для моделювання енергетичних процесів:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v \cdot \nabla E = Q, \qquad (3.35)$$

де E — енергія в точці r в момент часу t, v — швидкість потоку енергії, Q — джерело енергії. Це рівняння описує взаємодію між енергією та потоком у системах, таких як енергетичні мережі, та дозволяє оптимізувати розподіл енергії, щоб зменшити втрати та підвищити ефективність [30].

Для оптимізації механічних процесів, пов'язаних з деформацією матеріалів, використовуються рівняння, які описують залежність між внутрішніми силами та змінами форми матеріалу. В одновимірному випадку це може бути записано як:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \qquad (3.36)$$

де σ — напруга в матеріалі, v — швидкість зміщення, а x — координата в просторі. Ці рівняння допомагають оптимізувати процеси деформації в конструкціях і механізмах, сприяючи зниженню витрат матеріалів та енергії при виробництві та експлуатації [4].

Рівняння з частинними похідними першого порядку часто розв'язуються чисельними методами, оскільки аналітичні розв'язки можуть бути складними або недоступними для багатьох реальних задач. Для цих цілей використовуються методи скінченних різниць або методи скінченних елементів, які дають можливість отримати наближені рішення для оптимізації параметрів технічних і інженерних процесів [2].

Рівняння з частинними похідними першого порядку є важливим інструментом для оптимізації технічних та інженерних процесів. Вони дозволяють точно змоделювати залежність між різними параметрами і забезпечити максимальну ефективність процесів. Використання таких рівнянь дає можливість мінімізувати витрати енергії, час і матеріали, що є критичним для розвитку сучасних технологій і технічних систем.

Хвильові процеси зустрічаються в багатьох галузях науки і техніки, таких як акустика, оптика, механіка, гідродинаміка та електромагнетизм. Для моделювання таких процесів часто використовуються рівняння з частинними похідними першого порядку. Вони дозволяють описати розповсюдження хвиль, їх взаємодію з навколишнім середовищем і визначити важливі характеристики, такі як швидкість поширення, амплітуда та частота коливань. В даному підрозділі розглядається роль рівнянь з частинними похідними першого порядку в аналізі хвильових процесів.

Хвилі — це розповсюдження коливань через середовище, яке передає енергію без переміщення матеріалу. Хвильові процеси описуються через різноманітні рівняння, зокрема рівняння з частинними похідними першого порядку. Рівняння цих процесів дозволяють з'ясувати основні властивості хвиль, такі як швидкість поширення, амплітуда та інші характеристики.

Загальна форма хвильового рівняння для функції *u(x,t)*, що описує хвильовий процес у просторі та часі, має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.32}$$

де *u(x,t)* — функція, що описує величину коливання (наприклад, зміщення, тиск або електричну напругу), c — швидкість поширення хвилі, t — час, x — просторові координати. Це рівняння описує хвилю, що рухається з постійною швидкістю ccc в одному напрямку [2].

Одним з найбільш відомих застосувань рівнянь з частинними похідними першого порядку є дослідження хвиль в механічних і акустичних системах. У механіці часто використовуються рівняння для опису коливань у матеріалах, таких як звукові хвилі в повітрі або хвилі в твердих тілах. Для акустичних хвиль, наприклад, рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3.37}$$

де p — акустичний тиск, ρ — густина середовища, v — швидкість часток середовища, c — швидкість звуку в середовищі. Це рівняння дозволяє моделювати передачу звукових хвиль через різні середовища, а також визначати, як звукові хвилі змінюються під впливом різних факторів, таких як температура чи вологість [4].

У теорії електромагнітних хвиль також використовуються рівняння з частинними похідними першого порядку. Наприклад, для електричної хвилі в вакуумі, її можна описати через рівняння для електричного поля *E(x,t)*:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \tag{3.38}$$

де *E(x,t)* — електричне поле в точці *x* у часі *t*, а *c* — швидкість світла. Це рівняння описує поширення електромагнітних хвиль, що є основою для розуміння роботи таких пристроїв, як антени, радіо та телевізійні передачі, а також для оптичних технологій [16].

У гідродинаміці, де хвилі часто виникають на поверхні води, рівняння з частинними похідними першого порядку використовуються для моделювання водяних хвиль. Прості моделі можуть бути описані рівняннями, які включають швидкість потоку рідини і зміни висоти хвиль:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{3.39}$$

де *η(x,t)* — висота хвилі, *u* — швидкість течії води. Це рівняння використовується для прогнозування поведінки хвиль в морських і річкових системах, а також для вирішення практичних задач у будівництві портів або захисті від хвильових ударів [30].

Один із напрямків використання рівнянь з частинними похідними першого порядку — це оптимізація хвильових процесів, особливо в таких областях, як акустичний дизайн, телекомунікації та енергетика. Для цього можуть використовуватись варіанти хвильових рівнянь, що враховують крайові умови або наявність джерел хвиль. Наприклад, задача оптимізації інтерференції хвиль може бути описана як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \tag{3.40}$$

де *f(x,t)* — джерело хвиль, яке може змінюватись в залежності від місця і часу. Використання таких моделей дозволяє оптимізувати інтерференцію хвиль для максимального або мінімального ефекту, що важливо для таких задач, як поліпшення якості звуку в акустичних системах або максимізація передачі інформації в радіо- і оптичних мережах [2].

Оскільки рівняння з частинними похідними першого порядку зазвичай не мають аналітичних розв'язків для складних хвильових процесів, широко використовуються чисельні методи для їх вирішення. Серед таких методів виділяються методи скінченних різниць і методи скінченних елементів, які дозволяють отримувати наближені рішення для складних хвильових процесів в різних середовищах [16].

Рівняння з частинними похідними першого порядку відіграють важливу роль у дослідженні хвильових процесів, забезпечуючи точне математичне моделювання розповсюдження хвиль у різних середовищах. Вони є основним інструментом для опису механічних, акустичних, електромагнітних та гідродинамічних хвиль і дозволяють оптимізувати хвильові процеси в різноманітних інженерних і наукових задачах. Використання чисельних методів для розв’язання таких рівнянь сприяє їх застосуванню в реальних задачах, зокрема в акустиці, оптиці та гідродинаміці.

Рівняння з частинними похідними першого порядку займають важливе місце в математичному моделюванні численних процесів, що описують фізичні, економічні та фінансові явища. Ці рівняння застосовуються для аналізу різноманітних процесів, таких як розповсюдження тепла, рух рідини, зміни вартісних параметрів в економічних моделях тощо. Оскільки більшість реальних задач не мають аналітичних рішень, важливо розглядати чисельні методи для розв'язування таких рівнянь. У цьому підрозділі будуть розглянуті основні чисельні методи розв’язування рівнянь з частинними похідними першого порядку та їх застосування в різних галузях.

Рівняння з частинними похідними першого порядку описують залежність між змінами функції від декількох змінних. Загальний вигляд такого рівняння можна записати як:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (3.32)$$

де *u(x,t)* — функція, що описує величину, яка залежить від просторової координати *x* і часу *t*, а *c* — стала швидкість поширення процесу.

Для чисельного розв'язання таких рівнянь використовуються методи скінченних різниць, методи скінченних елементів та методи характеристик. Кожен з цих методів має свої переваги і недоліки, і вибір методу залежить від специфіки задачі та необхідної точності. Зокрема, метод скінченних різниць є найбільш простим і широко використовуваним в задачах, що виникають в інженерних дисциплінах і фізиці, оскільки він дозволяє швидко отримувати наближені рішення для задач з заданими умовами [1], [2].

Метод скінченних різниць є одним із найбільш широко використовуваних чисельних методів для розв'язування рівнянь з частинними похідними. Цей метод передбачає апроксимацію похідних за допомогою різниць між значеннями функцій на сітці. Для рівняння першого порядку вигляд методу скінченних різниць можна записати так:

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + c\frac{u(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = 0 \qquad (3.41)$$

де *Δx* і *Δt* — кроки сітки по простору та часу. Цей метод дозволяє отримувати чисельні розв'язки рівнянь з високою точністю, якщо сітка вибрана достатньо дрібною [3].

Метод скінченних елементів є ще одним важливим чисельним методом, що використовується для розв'язування рівнянь з частинними похідними. Він ґрунтується на поділі області визначення задачі на дрібні елементи та аппроксимації розв'язку в кожному елементі. Це дозволяє ефективно обробляти складні геометрії та неоднорідні середовища, що часто зустрічаються у реальних задачах. Для рівняння першого порядку скінченні елементи застосовуються на кожному елементі сітки, і в результаті розв'язок набуває вигляду наближеної функції для кожного елемента [4].

Метод характеристик особливо ефективний для розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку, які описують хвильові процеси. У цьому методі для кожної точки простору будується характеристична крива, по якій розв'язок рівняння переноситься в часі або просторі. Цей метод особливо корисний при розв’язання задач, де важливе значення має точність у певних напрямках або в контексті хвильових процесів. Зокрема, для задач, що описують рух хвиль, метод характеристик дозволяє значно знизити обчислювальні витрати, зберігаючи при цьому точність розв’язку [11], [26], [27], [28].

Методи чисельного розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку широко застосовуються в економічних і фінансових моделях, де часто виникають задачі, що описуються такими рівняннями. Наприклад, у теорії опціонів та в фінансових деривативних моделях, що базуються на рівняннях з частинними похідними, використовуються методи чисельного інтегрування для оцінки ризиків і вартості фінансових активів.

Одним з прикладів є використання рівняння теплопровідності для моделювання цінових коливань в часі на ринку. Рівняння для ціни активу можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.42}$$

де *u(x,t)* — ціна активу на час *t*, *x* — просторовий параметр (наприклад, відстань від центральної ціни), а *r* — ставка доходу. Використання чисельних методів для розв'язування таких рівнянь дозволяє отримати прибуткові стратегії для трейдерів, а також прогнозувати зміни цін на основі минулих даних [25].

Інтерпретація результатів чисельного розв'язання рівнянь з частинними похідними першого порядку має вирішальне значення для прикладних задач. Для економічних та фінансових моделей це може означати визначення оптимальних параметрів для управління активами або для прогнозування змін на ринку. У фізичних процесах чисельні рішення використовуються для оцінки поведінки систем, наприклад, для прогнозування змін температури, тиску чи швидкості в різних точках простору.

Чисельні методи розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку є потужним інструментом для моделювання складних процесів у різних галузях науки та техніки. Застосування методів скінченних різниць, скінченних елементів та характеристик дозволяє знаходити наближені розв'язки навіть для складних задач. Особливо важливим є їх використання в економічних та фінансових моделях, де ці методи допомагають прогнозувати ринкові процеси, оцінювати ризики і визначати стратегії управління активами.

ВИСНОВКИ

Рівняння з частинними похідними першого порядку є інструментом математичного моделювання для опису процесів у різних сферах, зокрема у фізиці, економіці, інженерії та біології. Завдяки можливості моделювати явища, що залежать від кількох змінних, ці рівняння допомагають зрозуміти механізми, які лежать в основі природних і технічних процесів, та забезпечують точність прогнозів. Їх класифікація за порядком, лінійністю, деякими змінними і граничними умовами дозволяє вибрати відповідні методи розв’язування та адекватно розвивати їх у конкретних завданнях, підкреслюючи значущість РЧП у сучасних наукових дослідженнях.

Задачі Коші та крайові задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку є фундаментальними основами в математичному моделюванні процесів у фізиці, біології, інженерії та інших науках. Чітке формулювання цих завдань дозволяє встановити умови, за яких можливе знаходження розв’язків, що задовольняють початковим або крайовими умовам. Аналітичні методи, такі як метод характеристик, допомагають отримати точні розв'язки, тоді як чисельні методи, як методи скінченних різниць або елементів, забезпечують наближені розв’язки для складних випадків. Це підкреслює важливість дослідження задач Коші та крайових задач як інструменту для розуміння динаміки різноманітних фізичних, економічних та технічних систем.

Метод характеристик підходить для динамічних задач, метод функцій — для аналітичних розв'язків, метод оберненої задачі враховує крайові умови, а чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць, ефективні для складних геометрій. Кожен із підходів не тільки забезпечує розв'язок, але й сприяє глибшому розумінню властивостей рівняння, що є важливим для наукових і прикладних досліджень.

Розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння з частиними похідними першого порядку є етапом у теорії диференціального рівнянь та використовують в численних галузях науки та техніки. За допомогою різних методів, таких як метод відокремлення змінних, метод інтегруючого множника та заміни змінних, можна знайти загальний розв’язок рівняння, а врахування вихідних умов дозволяє застосувати конкретний розв’язок задачі.

Застосування рівнянь з частиннми похідними першого порядку, зокрема рівня теплопровідності, є інструментом для моделювання фізичних процесів, таких як збільшення тепла в матеріалах. У наведеному прикладі в пункті 3.3., було показано, як ці рівняння можуть бути використані для визначення температурного розподілу в однорідній пластині під впливом зовнішніх умов.

Практичне застосування результатів розв'язку рівняня теплопровідності включає оптимізацію температурного режиму в різних технічних системах, таких як теплоізоляція та системи тепловідведення. Завдяки методу ряду Фур'є можна отримати точні прогнози зміни температури в залежності від часу та простору, що дозволяє покращити проектування та експлуатацію технічних пристроїв. Використання таких підходів для аналізу теплових процесів у різних матеріалах та середовищах дозволяє підвищити ефективність та надійність конструкцій, які працюють за умов зміни температури.

Отже, рівняння з частинними похідними першого порядку є незамінним інструментом для моделювання складних фізичних та технічних процесів. Їх застосування допомагає точному прогнозуванню та оптимізації параметрів різних систем, що має велике значення для науки і промисловості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по диференціальних рівняннях. — Київ: Вища школа, 1990. — 318 с.
2. Бондаренко В.Г. Диференціальні рівняння: Конспект лекцій . — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. — 275 с.
3. Бугров Я.С., Нікольський С.М. Диференціальне та інтегральне числення. — Київ: Вища школа, 2020. — 352 с.
4. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. — Тернопіль: ТНТУ, 2014. — 365 с.
5. Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина 1: Диференціальні рівняння першого порядку. — Івано-Франківськ: «ЛІК», 2005. — 180 с.
6. Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина 2. Диференціальні рівняння першого порядку. — Івано-Франківськ: ЛІК, 2005. — 216 с.
7. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2014. — 220 с.
8. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. — Київ: Вища школа, 1999. — 154 с.
9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. — Київ: А.С.К., 2005. — 648 с.
10. Запорожченко О.Є. Вища математика. Частина 3: Навчальний посібник. — Дніпро: НМетАУ, 2017. — 472 с.
11. Кадильникова Т.М., Шинковська І.Л., Заєць І.П., Запорожченко О.Є. Вища математика в прикладах та задачах. Частина ІІ. — Харків: видав. «Ранок», 2010. — 295 с.

12. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. — 2-ге видання. — Київ: Центр навчальної літератури, 2009. — 594 с.
13. Климчук В.Ю. Теорія та методи розв'язування диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. — Черкаси: Черкаський національний університет, 2008. — 285 с.
14. Копась І.М. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник для інженерних спеціальностей . — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 315 с.
15. Костюк І.І. Теорія диференціальних рівнянь: Підручник. — Київ: Вища школа, 2004. — 368 с.
16. Лиходєєва Г., Пастирєва К. Диференціальні рівняння: Працюємо самостійно. Частина І. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку. — Київ: «Логос», 2018. — 236 с.
17. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. — Київ: Вища школа, 1981. — 504 с.
18. Майборода О.І. Вища математика: Задачі та вправи. — Харків: ХНУ, 2010. — 468 с.
19. Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В. Теорія крайових задач для звичайних диференційних рівнянь. — Ужгород: УжНУ, 2013. — 198 с.
20. Михайленко В.М., Овчинников П.П. Вища математика. Частина 2. — Київ: «Техніка», 2004. — 425 с.
21. Петренко В.О. Диференціальні рівняння та їх застосування. — Луцьк: Вежа, 2016. — 264 с.
22. Петров В.С., Лук'янов В.Г. Теорія звичайних диференціальних рівнянь: Підручник. — Чернівці: Букрек, 2007. — 412 с.
23. Пилипенко В.А., Массалітіна Є.В. Вища математика: Диференціальне числення багатьох змінних. Навчальний посібник . — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 340 с.

24. Пискунов Н.С. Диференціальне та інтегральне рахування для вузів. — Київ: Вища школа, 20019. — 320 с.
25. Рего В.Л., Варга Я.В. Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння». Частина 1. — Ужгород: УжНУ, 2021. — 310 с.
26. Рейтій О.К. Конспект лекцій з курсу "Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними". — [Електронний ресурс]. — URL:https://dspace .uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/32486/1/конспект.pdf
27. Рейтій О.К. Задачі з теорії нелінійних диференціальних рівнів з частинами похідними. — [Електронний ресурс]. — URL:https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/32487/1/задачі.pdf
28. Рейтій О.К. Конспект лекцій з курсу “Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними” . URL: (переглянуто 10.11.2024). https ://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/32486/1/конспект.pdf
29. Савченко А.М. Диференціальні рівняння з частинами похідними. — Київ: Наукова думка, 2012. — 345 с.
30. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник . — Київ: «Либідь», 2003. — 432 с.
31. Сігал О.М. Вища математика. — Львів: ЛДУ, 2015. — 540 с.
32. Тихонов В.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Диференційні рівняння. М. Наука. Фізмат, 1998. 232 с.
33. Тріщ Б.М. Основи вищої математики . — Львів: ЛНУ, 2008. — 403 с.
34. Ульшин П.І., Лов'янова І.В. Диференціальні рівняння в частинах похідних: Навчальний посібник для студентів. — Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2007. — 285 с.
35. Филипов А.Ф. Введення в теорію диференційних рівнянь: Підручник. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240с.

36. Фомічова Л.Я., Почепов В.М., Сушко С.О., Фомічов В.В. Вища математика: Диференціальне числення у прикладах та задачах. Частина 1. Навчальний посібник . — Дніпропетровськ: НГУ, 2012. — 365 с.
37. Хом'юк І.В., Хом'юк В.В. Вища математика. Частина 3: — Вінниця: ВНТУ, 2020. — 420 с.
38. Шевчук В.І. Диференціальні рівняння. — Київ: Наукова думка, 2009. — 320 с.
39. Edwin “Jed” Herman & Gilbert Strang Обчислення (OpenStax) URL: https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/розрахунку/Книга%3A_Обчислення_(OpenStax)
40. Erich Miersemann Рівняння з частинними похідними URL: https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/Диференційні_рівняння/Книга%3A_Рівняння_з_частинними_похідними_(Miersemann)