Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Рівне 2024

УДК (51:373.5.091.33(075.8)
Т 33

Теоретико-методичні основи навчання математики у закладах загальної середньої освіти. Курс лекцій. Навчально-методичний посібник. Рівне: РВВ РДГУ. 2024. 328 с.

Автори:
Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики з методикою викладання РДГУ.

Рецензенти:
Павелків О.М. – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики з методикою викладання РДГУ.
Антонюк М. С. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри цифрових технологій та методики навчання інформатики РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики з методикою викладання РДГУ (протокол № 10 від 19.10.2024 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету.
Протокол № 8 від «30» «жовтня» 2024 р

Курс лекцій з дисципліни «Теоретико-методичні основи навчання математики у закладах загальної середньої освіти» покликаний стати провідником майбутньому вчителю математики у світ професійної педагогіки та методики навчання. Його мета — трансформувати фундаментальні математичні знання у дієвий інструмент формування компетентної особистості учня. Ці лекції розраховані на студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика), викладачів та вчителів-практиків, які прагнуть систематизувати свої знання та оновити методичний арсенал.

ЗМІСТ

Вступ 5

МОДУЛЬ 1. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ПЕДАГОГІКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Лекція 1. Предмет методики викладання математики. Мета, принципи та методи навчання математики 6

Лекція 2. Компетентнісний підхід до вивчення математики 15

Лекція 3. Новітні підходи до організації навчання математики у старшій школі 28

Лекція 4. Основні напрямки здійснення диференціації навчання та їх реалізація 35

Лекція 5. Навчально-методичний комплекс навчальної дисципліни (НМК НД) 41

Лекція 6. Урок, його види та структура. Вимоги до сучасного уроку 50

Лекція 7. Діагностика результатів навчання. Оцінювання програмних результатів навчання з математики. Введення класного журнала 65

Лекція 8. Методика навчання обдарованих учнів. Науково-дослідницька робота учнів старшої школи 85

Лекція 9. Математичні поняття, математичні твердження, теореми 101

Лекція 10. Задачі в навчанні математики та методика їх розв’язування (доведення) 114

Лекція 11. Державна підсумкова атестація здобувачів загальної середньої освіти з математики. Сертифікація вчителів математики 127

МОДУЛЬ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ АЛГЕБРИ У ЗЗСО

Лекція 12. Логічна будова курсу алгебри в закладах загальної середньої освіти (5-11 класи) 138

Лекція 13. Вивчення функцій в курсі алгебри і початках аналізу 147

Лекція 14. Рівняння в курсі алгебри старшої школи 157

Лекція 15. Теоретико-методичний аналіз розв’язування нерівностей у старшій школі 190
Лекція 16. Методика вивчення похідної у закладах загальної середньої освіти 211
Лекція 17. Методика вивчення первісної та інтеграла в закладах загальної середньої освіти 237
Лекція 18. Методика вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики у старшій школі 251
МОДУЛЬ 3. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ ГЕОМЕТРІЇ У ЗЗСО
Лекція 19. Логічна будова курсу геометрії у закладах загальної середньої освіти 265
Лекція 20. Методика вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі 272
Лекція 21. Методичні особливості зображення фігур у просторі 284
Лекція 22. Методи геометричних побудов у просторі та їх застосування 293
Лекція 23. Методика вивчення координат та векторів у просторі 301
Лекція 24. Методика вивчення многогранників у старшій школі 311
Лекція 25. Методика вивчення тіл обертання 317
Список використаної літератури 325

Вступ

Навчально-методичний посібник спрямований на реалізацію мети і завдань курсу дисципліни «Теоретико-методичні основи навчання математики у закладах загальної середньої освіти» задля підготовки висококваліфікованих, професійно компетентних фахівців, спроможних працювати в закладах загальної середньої освіти, фахової передвищої та професійної освіти, здатних організовувати процес навчання математики відповідно до вимог ринку праці.

У посібнику дібрані та систематизовані матеріали з педагогіки та методики навчання математики.

Лекційний матеріал представлений у вигляді таблиць, рисунків, формул та в текстовій формі.

Матеріали лекцій можуть бути використанні студентами спеціальності 014 Середня освіта (Математика).

Лекція 1. Предмет методики викладання математики. Мета, принципи та методи навчання математики

План

1. *Предмет методики викладання математики*
2. *Мета навчання математики.*
3. *Принципи навчання математики.*
4. *Методи навчання математики.*

1. Предмет методики викладання математики.

Методика математики - педагогічна наука, яка досліджує закономірності, шляхи та засоби навчання, виховання та розвитку учнів в процесі вивчення математики, розглядаючи процес навчання як цілісну динамічну соціально-педагогічну систему.

Предметом дослідження методики математики є теорія і практика навчання основам математики - науки, теорії і практики виховання та розвитку учнів в процесі навчання основам математики.

В методиці математики "основними відношеннями", які характеризують навчання є - викладання - зміст навчання - учіння, а одиницею процесу навчання є дидактичний прийом учителя, пізнавальна задача і пізнавальна дія учня.

Методика математики як педагогічна наука вирішує наступні ***задачі:*** обґрунтування цілей вивчення математики в школах України; розробка концепції математичної освіти в країні; визначення та систематичне удосконалення змісту та структури шкільного курсу математики; розробка, експериментальна перевірка та впровадження в практику викладання найбільш ефективних форм і методів навчання, а також засобів навчальної діяльності - навчального обладнання.

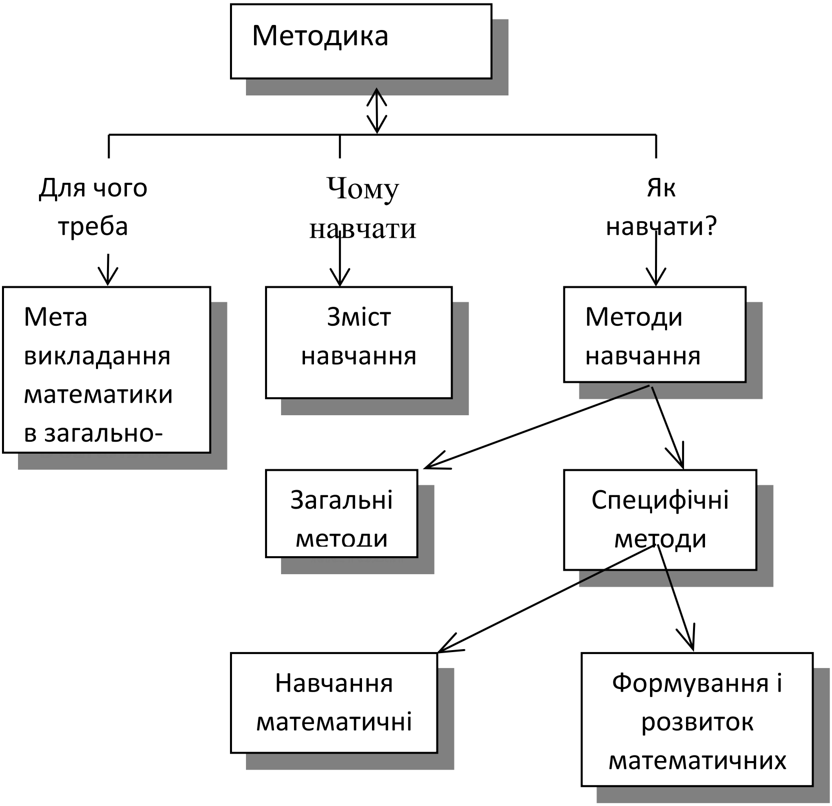


Схема 1. Означення методики математики

Навчання учнів математиці це навчання їх математичній діяльності Математична діяльність - формування та розвиток розумової діяльності визначеної структури.

Ми будемо виходити із схеми математичної діяльності, запропонованої А.А.Столяром:

1) накопичення фактів за допомогою спостереження, досліду, індукції, аналогій, узагальнення;

2) виділення із накопиченого матеріалу початкових (первісних) понять, системи аксіом та дедуктивна побудова теорії на основі цих понять і аксіом;

3) застосування теорії.

Першу стадію навчальної діяльності називають математичною організацією (математичним описом) емпіричного матеріалу (математизація конкретних ситуацій); другу - логічною організацією математичного матеріалу, а третю - застосування математичної теорії.

Таким чином, математичну діяльність можна показати як розумову діяльність, яка проходить за схемою:

1) математична організація емпіричного матеріалу;

2) логічна організація математичного матеріалу (накопиченого внаслідок першої стадії діяльності);

3) застосування математичної теорії (побудованої внаслідок другої стадії діяльності).

Навчальний курс методики викладання математики складається з двох розділів: загальна методика (конкретизація дидактики з урахуванням математики; вироблення на психолого-дидактичній основі загальних методичних ідей, положень) і окремі методики (застосування загальної методики до вивчення конкретних тем шкільного курсу математики; методики вивчення окремих математичних предметів).

2. Мета (цілі) навчання математики.

Навчальні цілі - ідеальне уявлення результату, який має бути досягнутий у ході вивчення тієї чи іншої навчальної теми. Навчальна мета як ідеальний результат майбутньої діяльності проектується при вивченні математики такими напрямками:

а) формування світогляду і особистості учня;

б) формування мислення і мовної культури учня;

в) розвиток прикладних і політехнічних умінь;

г) вимоги до математичної підготовки учнів.

В меті навчання математики можна виділити такі цілі : загальноосвітні (в тому числі практичні), виховні і розвиваючі.

Основним документом, в якому визначаються цілі навчання математики є *програма з математики*.

Розрізняють два види пояснення мети навчання: загальна характеристика мети навчання (подається в пояснювальній записці до програми з математики) і конкретне її втілення (формулюється у вигляді вимог до рівня математичної підготовки учнів). Конкретизацією загальноосвітньої мети є підручник, екзаменаційні білети для учнів, контрольні роботи, які пропонуються Міністерством Освіти України; в методичних посібниках формулюється мета вивчення окремих тем, уроків.

Виділяють три рівня формування мети навчання. *На першому* із них формуються загальноосвітні задачі кожного математичного курсу за ступенями навчання. Вони визначають основну спрямованість курсу і досить концентровано відображають його зміст. *На другому рівні* загальні задачі навчають конкретизуються в вимогах до математичної підготовки учнів. Ці вимоги описуються в термінах умінь, якими повинні оволодіти учні внаслідок вивчення кожного курсу з кожної змістовної лінії програми. *На третьому рівні* кожне із виділених умінь конкретизується списком завдань, які характеризують рівень оволодіння цими уміннями.

Визначення планових результатів навчання у вигляді списку задач відображає навчальну діяльність по засвоєнню знань і способів контролю за рівнем досягнення цих результатів. Плановані результати навчання описують підсумковий результат за ступенями навчання, причому, в першу чергу виділяється мінімальний рівень, досягнення якого обов'язкове для кожного учня і забезпечує йому позитивну оцінку.

Загальноосвітня мета викладання математики вимагає від учителя: передати учням певну систему математичних знань, навичок; навчити усній і письмовій математичній мові; допомогти учням досягти обов’язкових результатів навчання, навчити застосовувати набуті знання для розв’язання найпростіших завдань життєвої практики та вивчення інших навчальних предметів; ознайомити з шляхами пізнання реальної дійсності, математичними методами; навчити користуватися математичними інструментами та приладами, а також умінню самостійно здобувати знання (робота з підручником, науково-популярною літературою). Загальноосвітня мета також покликана допомогти учителю раціонально розподілити час, розмежовуючи основний і другорядний матеріал.

Виховні цілі - виховання стійкого інтересу до вивчення математики, Її ролі в практичній діяльності та повсякденному житті, моральне та естетичне виховання.

Розвиваючі цілі- виховання математичної і графічної культури; розвиток математичного мислення, навичок застосування аналізу, синтезу порівняння, аналогії, індукції, дедукції, узагальнення і конкретизації, моделювання, класифікації, геометричної, алгебраїчної та числової інтуїції; просторового уявлення, кмітливості, спостережливості, пам'яті тощо.

Вибір конкретних методичних рішень повинен визначатися і обмежуватися можливістю одержання кінцевого результату навчання, виведеного із аналізу мети.

Основним критерієм ефективності методичної системи навчання є співвідношення мети навчання з досягнутими результатами.

Розглянемо мету, представлену в програмі з математики для 10-11 класів профільного рівня:

“Навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою”.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких ***завдань:***

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід’ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої позитивної мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики, системою

математичних знань, навичками та уміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння знаннями інших освітніх галузей і забезпечення мотивації потреби неперервності навчатися впродовж життя.

- інтелектуальний розвиток особистості – розвиток логічного мислення та інтуїції учнів, просторової уяви, пам'яті, уваги, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури;
- громадянське виховання та формування позитивних рис особистості –ініціативності та творчості, пізнавальної самостійності та інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються;
- формування життєвих компетентностей учня – позитивних рис характеру (наполегливості, волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо);
- формування загальнолюдських духовних цінностей особистості; виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України.

Методика викладання математики в своїх дослідженнях і висновках спирається на філософію, педагогіку, психологію, математику та узагальнений практичний досвід роботи учителів математики.

Методику навчання математики в наш час розробляють, виходячи із головної мети школи – виховання особистості учнів, формування їх як освічених, культурних, моральних і творчо активних людей. Навчання математиці перестає бути самоціллю, а стає основним засобом формування особистості. Математика постає перед учнями у вигляді розгортання системи історичних та практичних проблем, необхідність розв'язання яких є стимулом для поглибленого засвоєння потрібних учню знань і дій.

Учитель в цьому випадку виступає як організатор і керівник навчальною діяльністю учнів.

3. Принципи навчання математики.

Виділяється ***вісім дидактичних принципів***: науковості; проблемності; наочності; активності й свідомості; доступності; систематичності й послідовності; міцності; єдності освіти, розвитку і виховання.

Дидактичні принципи розвивального навчання:

Провідна роль теоретичних знань. У процесі навчання математики це означає, що не можна починати формувати уміння і навички застосування математичних знань доти, поки учні не засвоїли основні поняття, твердження, правила, закони, методи.

Навчання швидкими темпами. Реалізація цього принципу зводиться до вивчення основного теоретичного матеріалу швидкими темпами на початку ознайомлення з темою, здійснення дійового контролю його засвоєння і звільнення цим самим часу для розв'язування задач. У процесі розв'язування задач теоретичний матеріал повторюється, поглиблюється, закріплюється.

Навчання на високому, але доступному рівні складності. Так само, як спортсмени розвивають свої фізичні можливості на вправах високої складності, учні повинні розвивати мислення, інтелект на навчальних задачах високого рівня складності. Цього принципу стосуються введені ще в 30-х рр. XX ст. психологом Л.С.Виготським поняття зони актуального і зони найближчого розвитку учнів. Учень працює в зоні актуального розвитку тоді, коли розв'язує навчальні задачі в межах засвоєного ним навчального матеріалу. Проте, як зазначав Л.С.Виготський, треба працювати на завтрашній день учня, тобто працювати в зоні його найближчого розвитку. Це означає, що учень має працювати над навчальними задачами, які він ще не спроможний розв'язати самостійно, але за незначної допомоги вчителя або своїх товаришів він таким задачам дає раду.

Разом з тим об'єктивним фактом є те, що різні учні мають різні зони актуального і найближчого розвитку. Саме тому в умовах класно-урочної системи треба здійснювати рівневу диференціацію, використовувати групові й індивідуальні форми роботи, виділяючи типологічні групи учнів, які мають приблизно однаковий рівень загального розвитку, навченості, темпу просування у навчанні, цікавості до математики.

Усвідомлення всіма учнями процесу навчання. Забезпечення цього принципу вимагає від учителя копіткої роботи з тими, хто не встигає, з'ясування причин цього та організації своєчасної педагогічної підтримки таких учнів.

Систематична робота вчителя над загальним розвитком усіх учнів, у тому числі й найслабкіших. У процесі навчання математики передусім передбачається розвиток мислення, оволодіння учнями загальними розумовими діями і прийомами розумової діяльності. Практика і дослідження психологів свідчать про те, що основною причиною того, що учні не встигають з математики, є насамперед несформованість дій аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення.

4. Методи навчання математики.

Пояснювально- ілюстративний метод

Цим методом послуговуються, вводячи математичні поняття, вивчаючи аксіоми, теореми і способи розв'язування різних класів задач.

Репродуктивний метод

Використовується для закріплення на уроці нового матеріалу, перевірки домашнього завдання (учні відтворюють розв'язання задач, формулювання і доведення теорем, означення математичних понять, правила тощо).

Проблемний виклад

Проблемний виклад як метод навчання математики полягає в тому, що, пояснюючи навчальний матеріал, учитель сам висуває проблеми і, звичайно, як правило, сам їх розв'язує. Однак постановка проблем посилює увагу учнів, активізує процес сприймання і усвідомлення того, що пояснює вчитель.

Частково-пошуковий метод, або евристична бесіда

Частково-пошуковий метод (його інколи називають евристичною бесідою) полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які учні самостійно формулюють означення поняття, «відкривають» доведення теореми, знаходять спосіб розв'язування задачі.

Дослідницький метод

Дослідницький метод передбачає самостійний пошук розв'язання пізнавальної задачі. Причому може виявитись потреба, щоб проблему сформулював сам учень або її формулює вчитель, але розв'язують учні самостійно.

Метод доцільних задач

Належить він фактично до методів проблемного навчання. Навчання математики згідно з цим методом здійснюється за допомогою задач. Із задач починається вивчення будь-якої теми, що, природно, забезпечує мотивацію вивчення теоретичного матеріалу. Вивчаючи теоретичний матеріал теми, учні переважно розв'язують задачі. Теореми в геометрії доводять лише ті, які для учнів не є очевидними, але і не потребують надто тонких міркувань.

Абстрактно-дедуктивний і конкретно-індуктивний методи навчання

Суть абстрактно-дедуктивного методу навчання полягає в тому, що під час вивчення нового матеріалу вчитель відразу сан повідомляє означення понять, що вводяться, а потім наводить конкретні приклади об'єктів, що належать до понять. Формулюється й доводиться теорема, і лише після цього розглядаються конкретні приклади застосування нового теоретичного матеріалу.

Конкретно-індуктивний метод навчання протилежний абстрактно-дедуктивному методу. Під час навчання цим методом пояснення нового матеріалу починається з розгляду прикладів. Використовуючи приклади, учні мають можливість виділити суттєві ознаки поняття, що вводиться. Це допомагає самостійно чи з допомогою вчителя сформулювати означення поняття. Рисунок до теореми дасть змогу учням виявити властивості зображеної фігури і самостійно чи з допомогою вчителя сформулювати теорему.

Лекція 2. Компетентнісний підхід до вивчення математики

План

1. Від знаннєво орієнтованої освітньої парадигми до компетентнісної
2. Математична і ключові компетентності
3. Загальні вимоги до формування компетентностей.

1. Від знаннєво орієнтованої освітньої парадигми до компетентнісної

Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого й міцного оволодіння математичною і ключовими компетентностями, які потрібні у повсякденному житті і майбутній професійній діяльності, достатніми для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою. Відповідно до мети навчання, компетентнісний підхід виступає орієнтиром шкільної математичної освіти. Його реалізація передбачає формування в учнів компетентностей (математичної і ключових) як інтегрованого результату навчання, який включає знання, уміння, досвід, цінності і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці. Тому для реалізації компетентнісного підходу принциповою є ідея про нерозривну єдність, цілісність знань, умінь і особистісних якостей людини. У зазначеному контексті навчання математики має включати такі компоненти: аксіологічний, мотиваційний, когнітивний, інформаційний, інтелектуальний, загальнокультурний, комунікативний, світоглядний. Ці компоненти входять до складу математичної та ключових компетентностей, які безпосередньо чи опосередковано формуються під час вивчення математики в старшій школи.

Математична компетентність розглядається як особистісна здатність, що інтегрує змістовно-інтелектуальну (знає і розуміє), рефлексивно-діяльнісну (уміє і застосовує) та мотиваційно-ціннісну (виявляє ставлення й оцінює) складові. Відповідні знання, уміння, досвід, ставлення формуються і розвиваються в учнів протягом усього періоду навчання математики у старшій школі. Компетентісного змісту навчальна діяльність школярів набуває під час самостійного перенесення учнями засвоєних математичних знань, умінь і способів діяльності в область їх практичних застосувань, міжпредметних зв'язків, міжособистісних стосунків тощо. Запровадження компетентнісного підходу у навчанні математики вимагає відходу від традиційної інформаційно-накопичувальної спрямованості процесу навчання і приділенню більшої уваги формуванню і розвитку у школярів здатності самостійно практично діяти, застосовувати індивідуальний позитивний досвід та досягати успіху у нестандартних, творчих, життєвих ситуаціях, тобто формуванню ключових компетентностей, необхідних для життя в сучасному суспільстві. Тому актуальним є впровадження методик і технологій навчання, які сприятимуть формуванню особистості учня, його світогляду, ціннісних орієнтацій, умінь самостійно вчитися, критично мислити, розвитку здатності до самопізнання, до самореалізації у різних видах діяльності.

Реалізація компетентнісного підходу у навчанні математики визначається переходом від знаннєво орієнтованої освітньої парадигми до компетентнісної. Відмінності методичної системи компетентнісного навчання зумовлені зміною освітніх парадигм (див. таблицю).

Таблиця

Компонент методичної системи	Знаннєва парадигма	Компетентнісна парадигма
Цінності	• освіта для суспільного виробництва	• освіта для самореалізації людини в житті, для особистої кар'єри;

		• освіта в інтересах суспільства; • освіта для виробництва
Мотиви	• навчання учнів як обов'язок; • діяльність вчителя як виконання професійного обов'язку	• зацікавленість учнів у навчанні, особисте задоволення від досягнення результатів; • зацікавленість вчителя в розвитку учнів, задоволення від спілкування з ними
Цілі навчання	• спрямованість навчання на отримання наукових знань; • результати навчання в молодості як «запас знань на все життя»	• спрямованість навчання на оволодіння основами людської культури; • отримання досвіду застосування знань у практичній діяльності; • навчання протягом усього життя
Форми та методи навчання	• стала структура навчальних предметів; • сталі, нормативно визначені форми організації навчального процесу;	• динамічна структура навчальних предметів; • динамічні форми організації навчального процесу;

	• пріоритет колективних форм організації занять під керівництвом учителя; • авторитарні методи навчання	• пріоритет самостійної роботи учнів з допомогою, в разі необхідності, вчителя; • демократичні, побудовані на засадах взаємоповаги, методи навчання
Засоби навчання	• основним засобом навчання є навчальна книга	• навчальна книга доповнюється комп'ютерними засобами, ресурсами інформаційно-комунікаційних систем
Процес навчання	• передача знань, умінь, навичок; • навчання носить переважно репродуктивний характер; • знання й способи діяльності передаються учням у готовому вигляді	• оволодіння учнями компетенціями; • урок – одна з можливих форм навчання, розширення позаурочних форм роботи – самостійна робота в бібліотеці, комп'ютерному класі, проектній групі тощо

2. Математична і ключові компетентності

Математична та ключові компетентності. Навчання математики на профільному рівні має забезпечувати математичну освіту – достатню для успішного вивчення інших, в першу чергу природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів. Тому зміст навчання має реалізувати основні функції математичної освіти: власне математичну освіту, освіту за допомогою математики та спеціалізуючу як елемент професійної підготовки. Досягнення цих функцій передбачає, що під час навчання на профільному рівні забезпечується формування компетентностей учнів – математичних, надпредметних математичних (міжпредметних і спеціалізуючих як елемент професійної підготовки) та ключових. До математичних компетентностей віднесемо:

1) змістові (має уявлення про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності; володіє формально-логічними (означення, властивості, ознаки математичних об'єктів) і оперативними (методи, прийоми, способи діяльності) знаннями і відповідними якостями мислення; розуміє математичні формули і моделі як такі, що дають змогу описувати властивості об'єктів, процесів та явищ);
2) процесуально-операційні (зображує математичні об'єкти, встановлює і обґрунтовує їхні властивості; класифікує їх за ознаками; обґрунтовує математичні твердження; застосовує означення, властивості і ознаки математичних об'єктів до розв'язування задач; вимірює й обчислює геометричні величини; застосовує математичні методи, прийоми і способи діяльності у процесі розв'язування суто математичних і практичних задач);
3) дослідницькі (висуває та перевіряє гіпотези; складає програми діяльності, передбачає її результати; приймає рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та

ймовірнісної інформації; оцінює правильність і раціональність розв'язаних задач, інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей дослідження);

4) інформаційно-технологічні (використовує інформаційно-комунікаційні технології у навчальній діяльності; відшукує і опрацьовує математичну інформацію (підручники, довідники, Інтернет ресурси); оцінює здобуту інформацію, систематизує й узагальнює її, робить правильні висновки).

Враховуючи мету навчання математики на профільному рівні, її роль у вивченні інших предметів, важливим завданням є вироблення надпредметних математичних компетентностей – міжпредметних (геометрія і алгебра та початки аналізу, математика та інші предмети) та спеціалізуючих (як елемент професійної підготовки). Ці компетентності передбачають, що учень:

- розуміє значення математики для успішного вивчення інших дисциплін, повноцінної діяльності в різних сферах суспільного життя, зокрема у майбутній професійній діяльності;
- розпізнає і формулює проблеми, що виникають у змісті інших предметів або у сфері майбутньої професійної діяльності, і які можна розв'язати математичними методами;
- застосовує математичні моделі до вивчення інших навчальних предметів (фізики, інформатики, астрономії, хімії, біології та ін.) та до ситуацій, пов'язаних із майбутньою професійною діяльністю.

Крім того, зміст навчання має сприяти формуванню ключових компетентностей. У Концепції «Нова українська школа» виділено 10 ключових компетентностей (спілкування державною (і рідною — у разі відмінності) мовами; спілкування іноземними мовами; математична компетентність; основні компетентності у природничих науках і технологіях; інформаційно-цифрова компетентність;

уміння вчитися впродовж життя; ініціативність і підприємливість; соціальна та громадянська компетентності; обізнаність та самовираження у сфері культури; екологічна грамотність і здорове життя). У навчальних програмах для 10 – 11 класів (2017 р.) такі ключові компетентності як підприємливість, екологічна грамотність і здоровий спосіб життя, соціальна та громадянська компетентності виокремлено у чотири наскрізні лінії («Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність»). Ці компетентності спрямовані на посилення мотивації, інтересу до навчання, на вироблення в учнів здатності застосовувати знання й уміння у різних сферах діяльності, реальних практичних ситуаціях. Їх набувають під час розв'язування задач практичного змісту.

3. Загальні вимоги до формування компетентностей.

Математична і ключові компетентності взаємозв'язані. Їх формування передбачає дотримання певних дидактичних і методичних вимог до процесу навчання. Насамперед, це посилення прикладної спрямованості змісту навчання математики, яка забезпечує цілісну соціально ефективну математичну підготовку учнів – успішне використання знань, умінь і навичок як при вивченні теоретичного матеріалу, розв'язанні суто математичних задач та задач практичного змісту, так і при вивченні інших предметів. Йдеться про перенесення акцентів із збільшення обсягу інформації, призначеної для засвоєння учнями, на вироблення вмінь її використовувати для досягнення певних цілей. Знати математику – це вміти її застосовувати.

Однією з найважливіших вимог *є вироблення стійкої мотивації, інтересу до набуття компетентностей.* Це розуміння значення математичної освіти для життєдіяльності особистості в сучасному суспільстві, для освоєння і впровадження нових технологій, розуміння принципів будови і правильного використання сучасної техніки, інформаційних технологій, сприймання наукових і технічних ідей. Учні мають також розуміти, що математика забезпечує успішне вивчення інших дисциплін, передусім предметів природничого циклу, оскільки виступає не лише як галузь знань, а й як потужний метод наукового пізнання в інших науках.

Вибір фізико-математичного, математичного профілю навчання передбачає наявність в учня усвідомленого інтересу, мотивів до навчання математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов'язаної з нею. Одним із способів мотивації є створення проблемних ситуацій, розв'язання яких вимагає ґрунтовних математичних знань та значних зусиль. Відшукуючи способи розв'язання проблем, учні стикаються з недостатністю наявних у них математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією. Розвитку пізнавальних математичних інтересів сприяють також дібрані різноманітні задачі підвищеної складності з достатнім логічним навантаженням. Доцільно також ознайомлювати учнів із значенням математики в діяльності людини сьогодні і, особливо, в історичному контексті (на її основі започатковувалися і розвивалися інші науки), якомога ширше використовувати образно-чуттєвий, естетичний, художньо-графічний, емоційно-ціннісний потенціал математики. Важливу роль у навчанні відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує мотивацію, інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. На доступних прикладах бажано показувати учням, як розвивалися математичні поняття, теорії та методи. Ознайомлення з іменами та біографіями видатних учених, зокрема українських математиків, сприятиме національному і патріотичному вихованню школярів.

Зміст навчального матеріалу має відповідати етапам пізнання: перший – від одиничного через особливе до загального і другий – від загального, через логічне обґрунтування до практики. Тобто доцільно, де це можливо, показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації та (після його обґрунтування) ілюструвати застосування на практиці, в майбутній професійній діяльності, при вивчення інших дисциплін. Ці етапи мають бути притаманними навчальній діяльності, оскільки впливають на розвиток творчості учня, його активність, ініціативу, привчають проводити невеликі дослідження, самостійно відкривати нові математичні факти. У зв'язку з цим вивчення математичних фактів, як правило, має спиратися на емпіричний досвід учня (відповідні приклади з реальної дійсності, зі сфери майбутньої професійної діяльності, факти з інших навчальних предметів, моделі чи малюнки, які мають виконувати не лише ілюстративну, а й евристичну роль), що робитиме їх доступними. Це дає змогу з'ясувати суттєві ознаки понять, властивості математичних об'єктів і, на основі цього, самостійно формулювати відповідні твердження.

Необхідною умовою успішного набуття компетентностей *є діяльнісна спрямованість навчання*, що передбачає: постійне залучення учнів до різних видів навчально-пізнавальної діяльності; оволодіння не лише готовими знаннями, а й способами їх засвоєння, способами міркувань, що застосовуються у математиці; створення методичних ситуацій, які стимулюють самостійні відкриття учнями математичних фактів. Важливо, щоб у процесі навчання учень засвоював як формально-логічні, так і оперативні знання (як треба діяти в конкретних ситуаціях, щоб досягти поставленої мети). Останні сприяють виробленню умінь застосовувати математичні методи, прийоми і способи діяльності у процесі розв'язування суто математичних і практичних задач, доводити твердження, використовувати знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів. Доцільно надавати учням поради у вигляді правил або вказівок щодо того, як діяти у певній навчальній ситуації. Такі поради спрямовані на розпізнавання математичних залежностей, використання понять, теорем або способів розв'язування задач і сприяють ефективному формуванню як окремих, так і узагальнених умінь. Наприклад.

1. Якщо потрібно встановити паралельність двох прямих у просторі, то перевірте:

1) чи знайдеться пряма, паралельна кожній із даних прямих;

2) чи будуть дані прямі лініями перетину двох паралельних площин третьою площиною;

3) чи знайдеться площина, перпендикулярна до кожної з даних прямих.

2. Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими:

1) проведіть через одну з цих прямих площину, паралельну другій прямій;

2) знайдіть відстань від будь-якої точки прямої до паралельної площини.

3. Щоб вписати піраміду в кулю:

1) побудуйте переріз кулі, паралельний її великому кругу;

2) впишіть у коло перерізу многокутник – основу піраміди;

3) розмістіть у полюсі кулі вершину піраміди і проведіть її бічні ребра.

Навчання на профільному рівні передбачає також самостійне складання учнями алгоритмічних приписів чи евристик, що включає такі етапи:

1) виділення групи задач, встановлення оператора задач і тих знань, на базі яких їх можна розв'язати;

2) осмислення способу розв'язання групи задач на двох-трьох задачах-моделях (задачі, розв'язання яких включає всі операції, притаманні даному способу діяльності), виділення потрібних операцій та роздільне їх закріплення й узагальнення;

3) визначення раціональної послідовності виконання операцій та складання на її основі моделі способу діяльності – евристичної схеми;

4) встановлення повноти і меж застосування способу діяльності, його відповідності програмним вимогам.

Тобто, знання учня, що вивчає профільний курс математики, обов’язково мають включати діяльнісний компонент – де і як їх застосовувати.

Практико-орієнтована спрямованість змісту навчання математики полягає в його орієнтації на формування в учнів умінь застосовувати математичний апарат до розв’язування проблем, що виникають у техніці, технологіях, суміжних науках, професійній діяльності та побуті. Відбувається таке формування в процесі розв’язування прикладних задач, а також формулювання математичних задач за вербальним описом типових практичних ситуацій. Інший аспект практичної орієнтації навчання математики полягає в посиленні внутрішньо предметних і міжпредметних зв’язків.

Дієвим засобом посилення прикладної спрямованості навчання є *застосування методу математичного моделювання*. Він дає змогу розширити межі застосування математичних методів, зокрема у природничих, гуманітарних і соціальних дисциплінах. Один із шляхів – подальше ознайомлення учнів як з поняттям математичної моделі, так із методом математичного моделювання, вироблення уявлень про роль цього методу в науковому пізнанні та практиці, формування вмінь будувати і досліджувати математичні моделі. Ці завдання найбільш повно реалізуються під час розв’язування задач на оптимізацію, де потрібно знайти найбільше та найменше значення функцій, що залежать від довільного числа змінних величин. Питання прийняття оптимальних рішень людині доводиться розглядати на різних рівнях – від побутового до проблем управління, транспорту, ефективного використання природних багатств. Тому навчальний матеріал повинен містити оптимізаційні задачі різних рівнів складності та основні способи їх розв’язання.

Формування компетентностей передбачає *забезпечення диференційованого навчання математики* – навчання учнів з різними навчальними досягненнями. Відповідність змісту навчання віковим і пізнавальним особливостям учнів, перспективам їхнього розвитку здебільшого досягається шляхом варіювання обсягу математичної інформації і гнучкості у визначенні вимог до засвоєння її учнями.

Навчання математики на профільному рівні передбачає суттєве *збільшення частки самостійної діяльності учнів*. При цьому основна функція вчителя полягає у педагогічному супроводі кожного учня в його пізнавальній діяльності, корекції його навчальних досягнень, допомозі в актуалізації необхідних знань. Іншими словами, вчитель покликаний не лише вчити школярів математики, а й створювати такі навчальні ситуації, в яких учні самостійно чи у співробітництві один з одним (або з учителем) опановують математичні знання, уміння та навички. Організації самостійної роботи учнів сприятимуть, крім вказівок і порад, контрольні запитання, запитання узагальнюючого характеру та тестові завдання різного рівня складності. Особливість їх полягає в тому, що на кожне запитання у відповідному параграфі є точна відповідь, а всі запитання охоплюють весь основний зміст підручника. Даючи відповідь на запитання і виконуючи тести, учень переосмислює, узагальнює і систематизує вивчені відомості, приводить у систему отримані уміння й навички, привчається самостійно працювати з підручником. Нагальною вимогою до навчання є *систематизація навчального матеріалу* (таблиці, схеми, задачі за даними таблиць, класифікації), що покращує застосування його до розв’язування задач, полегшує зорове сприймання тексту.

Важливо забезпечити інтенсивне навчання, що передбачає систематичне *використання програмно-педагогічних засобів*.

Вони дають змогу активізувати навчально-пізнавальну, дослідницьку діяльність учнів, посилити самостійність в опануванні компетенціями, викликати інтерес до навчання математики. У процесі використання цих засобів враховують такі їх можливості:

1) інтегрованість (застосування однієї й тієї самої наочності з різним цільовим призначенням; поєднання наочно-образної інформації зі знаково-символьною, спільний аналіз яких сприяє виробленню евристичних, дослідницьких умінь; підкріплення графічних образів понять, властивостей геометричних фігур їх числовими характеристиками, що дає змогу проводити дослідження);

2) конструктивність (перенесення комп'ютерних зображень реальних предметів та їх властивостей на відповідні моделі, де увага приділяється поелементному їх створенню, внаслідок чого учень самостійно формулює означення нових понять, властивості математичних об'єктів чи способи діяльності);

3) інтерактивність (використання ППЗ у різних методичних технологіях; підтримка активних методів навчання; моделювання і конструювання математичних об'єктів; логічна організація фрагментів навчального матеріалу);

4) візуалізація (унаочнення абстрактних понять, різних граничних переходів шляхом використання відповідних динамічних моделей; різне їх перетворення (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині) сприяє розвитку образного мислення, його творчих та евристичних складових).

Лекція 3. Новітні підходи до організації навчання математики у старшій школі

План

1. *Вступ*
2. *Організація дослідної діяльності учнів.*
3. *Способи візуалізації навчального матеріалу.*
4. *Сучасні технології навчання.*
5. *Сервіси, що допомагають організувати дистанційне навчання.*

1. Вступ.

Методика, технології і методи компетентнісно орієнтованого навчання математики мають відповідати таким основним умовам:

– опора на суб'єктивний досвід учнів під час відбору навчальних завдань, перевага самостійної пізнавальної діяльності учнів;

– мотивація дослідницької діяльності, розвиток творчості учнів, урізноманітнення видів діяльності (практичні, пошукові, проектні, лабораторні, творчі роботи);

– використання індивідуальної, парної, групової та колективної пізнавальної діяльності в різних поєднаннях;

– застосування інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики, сучасного програмного забезпечення до розв'язування математичних завдань;

– використання практико-орієнтованих навчальних ситуацій як для постановки проблеми (введення в завдання), так і для її безпосереднього вирішення та використання завдань з надлишковою (недостатньою) інформацією;

– сприяння створенню учнями власного індивідуального освітнього продукту (свій спосіб розв'язання задачі, бачення власного підходу до вирішення проблеми тощо). Розв'язування задач не обов'язково мають бути оптимальними. Учень має право на помилку;

– цілеспрямований розвиток в учнів пізнавальної (як я працював, які методи використовував, які з них привели до результату, які були помилковими і чому, як би я тепер вирішував проблему та інше), соціальної (як ми працювали в групі, як були розподілені обов'язки, як ми з ними впоралися, яких ми припустилися помилок в організації роботи та інше), психологічної (як я себе почував, сподобалося мені робота (в групі, із завданням) чи ні, чому, як (з ким) би я хотів працювати і чому та інше) рефлексії.

2. Організація дослідної діяльності учнів.

З кожним навчальним роком має відбуватися нарощення такої діяльності учнів. Для частини учнів варто пропонувати самостійно вивчити деякі теми або окремі їх частини. Наприклад, перед вивченням тригонометричних функцій доцільно пропонувати учням самостійно дослідити, що таке періодичні процеси і як вони функціонують у життєдіяльності людини, науках, природі, техніці, мистецтві, будівництві тощо. Вони працюють самостійно і лише радяться з учителем. Учні впродовж дослідної діяльності набувають досвіду порівнювати та узагальнювати, ознайомлюються із методами наукового пізнання та етапами дослідної діяльності, що сприяє формуванню вміння виділяти проблеми, висловлювати припущення, планувати експериментальну діяльність, робити висновки.

Навчання математики з використанням ІКТ сприяє ефективній активізації навчально-пізнавальної та дослідної діяльності учнів на кожному етапі уроку, актуалізації опорних знань учнів та підвищення мотивації вивчення нової теми, урізноманітненню форм і методів подання нового матеріалу, здійсненню контролю, самоконтролю та корекції набутих учнями знань і вмінь, формуванню стійкого інтересу до навчання математики. ІКТ може бути засобом: підготовки до уроку; демонстраційного супроводу уроку; організації самостійної роботи учнів у позаурочний час тощо.

Старшокласників, що вивчають математику на профільному рівні, доцільно ознайомити з програмним забезпеченням (наприклад, Excel, Advanced Grapher, GRAN, GeoGebra), використання якого зменшує витрати часу на виконання тих чи інших математичних завдань. Учитель задає домашнє завдання, яке зручно і швидко розв'язати за допомогою певного програмного забезпечення. Це стимулює учнів до використання ІКТ вдома для розв'язування тих чи інших завдань.

При вивчені математики на профільному рівні можна застосовувати як педагогічні програмні засоби (GRAN1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, DIANA, FANCY, LIMES, GeoGebra, AdGrapher), так і інструментальні засоби наукового та інженерного призначення (EUREKA, DERIVE, MAPLE, MathCad, Matlab, MATHEMATICA, MuPad) та бібліотек електронних наочностей.

Математичний пакет MathCad орієнтований, насамперед, на здійснення числових розрахунків. Пакети MATLAB, Scilab, Octave і FreeMat створені, у першу чергу, для роботи з числовими матрицями і векторами. Математичні пакети Maple, Mathematica, Maxima і MuPAD розраховані на здійснення аналітичних обчислень.

Підвищенню ефективності уроків математики сприяє використання програмних засобів навчального призначення. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв'язування рівнянь, систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо.

Оскільки функції є математичними моделями багатьох процесів, що вивчають у фізиці, хімії, біології, економіці та інших науках, то доцільно спрямувати навчально-пізнавальну діяльність старшокласників на відшукання та опис властивостей функцій та побудову їх графіків. Багато функцій, що описують реальні процеси, мають складні формули, тому їх графіки важко побудувати. Це спонукає учнів використовувати ІКТ.

3. Способи візуалізації навчального матеріалу.

Візуалізація – це унаочнення, створення умов для безпосереднього спостереження, одержання видимого зображення яких-небудь предметів, явищ чи процесів у зручній для зорового сприйняття формі.

Щоб візуалізувати навчальний матеріал, варто його ретельно відібрати, структурувати і оформити в наочний образ так, щоб складне зробити зрозумілим, громіздке – компактним, довготривале – лаконічним тощо. Різні способи подання інформації та встановлення зав'язків між ними сприяють активізації мислення учнів, розвитку в них таких розумових операцій як аналіз, синтез, порівняння, аналогія, класифікація, узагальнення, абстрагування тощо.

Спектр форм візуалізації навчального матеріалу достатньо широкий. Наприклад, комп'ютерні презентації, флеш-анімації, відео/аудіо матеріали, зображення, діаграми, схеми, графіки, інтелект-карти тощо. Розглянемо деякі з них.

Презентації – послідовність слайдів, тобто електронних сторінок. Створені презентації легко продемонструвати учням у класі, роздрукувати всю або окрему її частину, вислати на електронну пошту учню, який був відсутній у класі, або ж завантажити на блог вчителя (забезпечуючи можливість ознайомлення з нею учнів, вчителів та батьків). Презентації можна використовувати для будь-якого типу уроку (звісно не на всьому уроці, а на лише деяких його етапах).

Розглянемо програмне забезпечення за допомогою якого можна створювати різного роду презентації.

У Power Point передбачено можливість використання гіперпосилань, що дає змогу розробити розгалужену презентацію, яка «реагує» на втручання користувача (наприклад, надання правильної або неправильної відповіді на те чи інше запитання).

Для вчителів, які працюють у класах, що оснащені доступом до Інтернет, актуальним будуть наступні програмні засоби.

Sway – програма, за допомогою якої легко створювати онлайн презентації та ділитися ними (надсилаючи посилання). Не потрібно висилати кожному учню презентацію, виконану в Power Point, а досить надати учням посилання, що веде до вашої презентації створеної у Sway.

Створити анімовану презентацію можна за допомого сервісу PowToon. У цьому онлайн-сервісі можна створити відео на основі шаблону або з «чистого аркуша». Готові роботи можна безпосередньо завантажувати на YouTube. Презентації може створювати вчитель, наприклад, для уроків пояснення нового матеріалу, або ж для уроків узагальнення і систематизації; учень для презентації своєї пошукової і проектної роботи, або ж учитель і учень разом. В YouTube міститься досить велика кількість готових україномовних роликів, що створено для різних уроків.

Завдяки Google-презентаціям можна створювати презентації декількома людьми. Наприклад, учителі різних предметів можуть готувати презентацію для інтегрованого уроку або ж декілька учнів можуть одночасно, де б вони не перебували, працювати над презентацією своєї групової проектної роботи. Також за допомогою Google-презентацій учитель може створювати електронні підручники чи задачники.

Відео.

Для дистанційного навчання часто використовують відеозапис. Сучасні пристрої дають можливість легко записати відео, де вчитель пояснює учням матеріал. Актуальним також є відеозапис самої презентації, що підготував учитель з аудіо коментарями для неї. Щоб записати відео презентації, необхідно оволодіти програмою для запису з екрану монітору. Зручним інструментом є, наприклад, програма Camtasia Studio.

Схеми, діаграми.

Сучасні учні набагато легше сприймають інформацію в компактному вигляді, бажано у вигляді малюнків. Тож на допомогу вчителю може прийти інфографіка і сервіс для її створення Piktochart. Учитель може створювати сучасні плакати або слайди для презентацій. Також можна залучати учнів до опрацювання інформації (наприклад, параграфа підручника) і наступного створення інфографіки за нею.

Інтелектуальні карти.

Mindmeister – дає можливість створювати різні схеми. Матеріал з пройденої теми можна представити схематично, доповнивши його малюнками, звуками та відео з Інтернету. Цей сервіс корисний для уроків узагальнення та систематизації знань. Зображення. Аудіо і відео. Учні можуть створювати стіннівки не лише в класі після уроків, а й дистанційно, працюючи паралельно над однією стіннівкою кожен у себе дома. Таку можливість дає віртуальна стіна Padlet. Сервіс дає можливість працювати дистанційно як учням між собою, так і вчителю з учнями (переглянути результат їх роботи і внести правки до моменту презентації стіннівки у класі), так і вчителів між собою (при підготовці спільних уроків). Сервіс дає допомагає впроваджувати елементи дистанційного та «перевернутого навчання».

4. Сучасні технології навчання.

На допомогу вчителю можуть прийти сучасні технології навчання, наприклад, так зване «Перевернуте навчання» – форма активного навчання, в якій типова подача нового матеріалу і організація домашніх завдань міняються місцями. Учні вдома аналізують короткі відеолекції, а в класі вивільнений час відводиться на виконання вправ, обговорення шляхів вирішення проблем, співпрацю учнів один з одним, застосування знань в новій ситуації, на створення учнями нового навчального продукту. За таких умов під час засвоєння нових знань учні не залежать від темпу викладу матеріалу вчителем, а на уроці у вчителя є більше часу для взаємодії і індивідуальної роботи з учнями.

Технологія «Веб-квест» включає такі елементи: вступ, де вказується термін проведення самостійної роботи і задаються вихідні умови; завдання різної складності для самостійного виконання; посилання на ресурси пошукової мережі Інтернет, які надають можливість знайти і «завантажити» необхідний матеріал; поетапний опис процесу виконання певного завдання з поясненням принципів переробки інформації, допоміжними питаннями, причинно-наслідковими таблицями, схемами, діаграмами; висновки, які містять орієнтовні результати виконання завдання, шляхи подальшої самостійної роботи над зазначеною темою.

5. Сервіси, що допомагають організувати дистанційне навчання.

Під час дистанційного навчання важливим є спілкування учителів з учнями через мережу Інтернет: учні можуть одержувати завдання через розсилку чи на сторінках сайту школи; вчителі можуть проводити консультації (по Skype), записувати для учнів відео-уроки та завантажувати їх в YouTube, обмінюватися ідеями щодо підготовки проектів та їх виконання тощо. Використання інтернет-ресурсів дає можливість організовувати спільну діяльність з документами (наприклад, спільне створення презентацій), проводити опитування та тестування, організовувати документообіг.

Сервіси, які дають можливість комунікувати вчителю і учню в зручній для кожного формі.

Активно в педагогічній практиці використовуються сервіси Google. Крім пошукової системи в Google представлено мережеві сервіси для спільної творчої діяльності: пошук даних, класифікація, спільне редагування, мультимедійна творчість тощо. Це електронна пошта Gmail, пошук книг Google BookSearch, науковий пошук Google Scholar, пошук за зображеннями Google Images, онлайн-сховище Google Drive з документами Google, калькулятор Google, чат Google Hangouts – обмін миттєвими повідомленнями, відеозв'язок і голосовий зв'язок (аналог Skype), перекладач Google Translate, календар Google, записник Google Keep, блог Google Blogger, Google Документ, Google Презентація, Google Таблиця, Google Рисунок, Google Форма тощо. Для того, щоб активно користуватися сервісами Google, варто створити свій профіль на сайті https://www.google.com.ua/. Цікавою і зручною для організації процесу навчання є робота в сервісі Google Classroom Manager, який дає учням можливість самостійно чи у групах виконувати завдання й передавати їх учителю через мережу, а програма самостійно опрацьовує і презентує результати, типізуючи помилки.

Організація контролю навчальних досягнень учнів та забезпечення зворотного зв'язку.

У вільному доступі існує багато сервісів, за допомогою яких можна здійснювати: перевірку розуміння учнями навчального матеріалу; отримання (чи надання) зворотного зв'язку протягом усього навчального процесу; корекцію знань і планування навчальної роботи на підставі отриманих результатів; проведення дискусії. Якщо в учнів класу є планшети або смартфони, то можна проводити тестування або конкурси чи вікторини за допомогою сервісів Kahoot, Quizizz, Quizalize, Triventy, Formative тощо. Додаток Plickers дає змогу (за допомогою смартфона чи планшета) сканувати підняті дітьми картки з QR-кодами їх відповідей і дуже швидко оцінити відповіді всього класу і здійснити збір статистики. Для цього 31 потрібно зареєструватися на даному сервісі, створити класи та питання з вибором правильної відповіді з чотирьох чи типу так/ні (правильно/неправильно), а також роздрукувати картки. Для проведення тестування номер картки має відповідати номеру учня в списку класу. За допомогою електронного навчального середовища Learning Apps зручно створювати електронні інтерактивні блоки (так звані програми або вправи). Learning Apps – це розробка загальнодоступної бібліотеки дидактичних доповнень до уроків, конструктор для розробки інтерактивних завдань для застосування на уроках і в позакласній роботі.

Лекція 4. Основні напрямки здійснення диференціації навчання та їх реалізація

План

1. Загальне уявлення про диференціацію.
2. Зовнішня, профільна диференціація. Класи з поглибленим вивченням предметів і профільні класи.
3. Внутрішня, рівнева диференціація.
4. Основні напрямки здійснення диференціації навчання.
5. Основні методичні підходи до здійснення диференціації навчання.

6. Функції системи диференціальних навчальних завдань.

1. Загальне уявлення про диференціацію.

Диференційоване навчання — це така організація навчального процесу, при якій створюються умови, які дають змогу кожному учневі розкрити всі свої потенціальні навчальні можливості. Навчання, у ході якого усім дітям ставляться однакові вимоги, нехтує індивідуальними особливостями дітей. У школах колишнього Союзу співвідношення єдиності і диференціації варіювало в межах 90 на 10 на користь єдиності.

Нині розрізняють зовнішню, профільну і внутрішню, рівневу диференціацію. Зовнішня диференціація проявляється в існуванні різних типів шкіл, які дають принципово відмінну освіту: елітну і масову. Внутрішня диференціація — це дидактична диференціація.

2. Зовнішня, профільна диференціація.

Зовнішня диференціація — це така організація навчально-виховного процесу, при якій врахування індивідуальних особливостей учнів здійснюється у спеціально організованих класах, групах, школах. Тобто комплектування цих шкіл, класів, груп учнями здійснюється на основі певних критеріїв. Такими критеріями є задатки, нахили, здібності, майбутній професійний інтерес. Нині зовнішня диференціація проявляється у широкій мережі гімназій, ліцеїв, спеціалізованих шкіл, класів з поглибленим вивченням предметів, профільних класів, класів з випереджальним розвитком, класів вирівнювання, класів за рівнем знань, факультативів, курсів за вибором. Це без сумніву, — позитивні моменти в житті сучасної школи.

Загальна схема здійснення диференціації, як свідчить світова практика, така: у перші 3-4 роки після закінчення початкової школи навчання відбувається за загальною програмою із загальноосвітніх предметів і разом з тим цілеспрямовано виявляються здібності кожного учня. На цій основі визначаються напрями освіти, що відповідають об'єктивним даним про учня, його бажанням і бажанням його батьків, а також виявленому професійному інтересу. У наступні 3-4 роки учні вибирають профільні навчальні предмети, навчальні курси, які вони вивчають поглиблено. Тобто зовнішня диференціація — це поділ учнів за різними типами шкіл, усередині шкіл - за потоками чи класами, всередині класу - за групами, а далі - індивідуальна робота з кожним конкретним учнем.

Класи з поглибленим вивченням предметів і профільні класи.

Якщо у школі є 3-4 паралельні класи, то з них можна визначити певну кількість учнів із нахилами і здібностями до вивчення якого-небудь конкретного предмета, скажімо, математики, чи фізики, біології, літератури, і укомплектувати принаймні один клас з поглибленим вивченням предмету, чи профільний клас. Проте у шкільній практиці часто використовуються вольові рішення при наборі учнів у класи з поглибленим вивченням предметів: у такий клас потрапляє 5 — 7 учнів, які справді можуть освоїти предмет на високому науковому рівні, а 15 — 20 учнів — з посередніми здібностями, які не завжди бажають вивчати цей предмет. Чому ж тоді школи йдуть на такий крок? Тому, що поглиблене вивчення предмета навчальним планом передбачено з 8-го класу, і за чотири роки здібні учні можуть глибоко вивчити цей предмет і серйозно підготувати себе до подальшого оволодіння відповідною професією. На наш погляд, основним класом у старшій школі має бути профільний. Відповідно до навчального плану, профільність вводиться з 10-го класу, хоча, на наше переконання, профільність треба вводити відразу після досягнення віку 14 років, з 8- або 9-го класу.

Набір у профільний клас довільний. У ньому мають навчатися учні різного рівня знань, різних здібностей, різної успішності, але з однаковими професійними намірами. Для учнів профільного класу потрібно пропонувати дисципліни за вибором, факультативні заняття.

3. Внутрішня, рівнева диференціація.

Внутрішня диференціація — врахування індивідуальних відмінностей учнів (особливостей пам'яті, мислення, уяви, нахилів, здібностей, інтересів тощо) в умовах звичайного класу, групи. Практика нагромадила значний арсенал засобів здійснення внутрішньої (рівневої) диференціації.

4. Основні напрямки здійснення диференціації навчання:

1. Створення на уроках динамічних груп учнів з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей і здібностей до навчання (добір спеціальних вправ, зорієнтованих на можливості окремих учнів з різними здібностями; характер педагогічної допомоги залежно від підготовленості учнів; оптимальне поєднання колективної, групової та індивідуальної роботи учнів; індивідуалізація домашніх завдань тощо). При цьому необхідно забезпечити кожному учневі повноцінну загальноосвітню підготовку. Учні, які виявляють особливий інтерес до того чи іншого предмета і мають відповідні нахили і здібності, повинні мати можливість більш глибоко опанувати його (достатній і високий рівні).

2. Запровадження профільного навчання у старших класах (у межах передбачених навчальними планами годин). Воно має на меті забезпечити допрофесійну підготовку старшокласників з тієї галузі знань, з якої у них проявились стійкі інтереси і здібності. Можливі різні профілі: загальний, гуманітарний, фізико-математичний, хіміко-біологічний., технічний, сільськогосподарчий, економічний, художньо-естетичний, екологічний, педагогічний та ін.

3. Розвиток мережі шкіл і класів з поглибленим вивченням окремих предметів або їх циклів.

4. Запровадження факультативів з метою задоволення різнобічних навчальних інтересів школярів.

5. Курси за вибором учнів покликані розширити сферу загально - освітніх шкільних предметів, стимулювати пошук нових галузей діяльності в період інтенсивного самовизначення особистості підлітка.

6. Різноманітна система позакласних занять за інтересами учнів (розвиток наукових товариств, творчих студій, гуртків, олімпіад, заочних шкіл при провідних вузах, конкурсів тощо).

5. ***Основні методичні підходи до здійснення диференціації навчання:***

- поєднання індивідуальних та колективних методів навчальної роботи;
- відкритість, зрозумілість рівня обов'язкової підготовки (обов'язкових результатів) з кожного предмета;
- недопустимість ототожнювання рівня викладання і рівня вимог до результатів навчання;
- дидактичне діагностування.

Формування навчальної діяльності означає "управління дорослим (вчителем, психологом, експериментатором, батьками) процесом становлення навчальної діяльності школяра" .

Щоб визначити, на яких заняттях та яка форма групової діяльності буде використана і передбачити все це планом, педагогу варто провести таку підготовчу роботу:

- проаналізувати зміст навчального матеріалу з конкретної теми і скласти до неї перелік базових знань і вмінь;
- визначитись з вибором видів навчальних занять (лекції, семінарів, практичних занять, заліків, комбінованих уроків тощо) та з їх кількістю при вивченні конкретної теми;
- підготувати завдання для групової роботи учнів та індивідуальної перевірки знань учнів.

Впровадження у навчальний процес групової роботи учнів потребує від учителя:

- знання внутрішньої структури класу і психолого-педагогічних характеристик кожного учня;
- бездоганного володіння предметом і методикою його викладання;
- усвідомлення мети і завдань групової діяльності;
- вміння забезпечувати повноцінне функціонування групового навчання.

Предметом вивчення є індивідуальні особливості й інтереси учнів, їх успішність, здатність до навчання, темп роботи й працездатності. Детальному з'ясуванню підлягають характер стосунків між учнями, виявлення формальних і неформальних лідерів. Результатом такого вивчення буде умовний поділ учнів класу на три типологічних групи з високим, середнім та низьким рівнем навчальних можливостей, а також виявлення претендентів на роль лідера малої навчальної групи.

Наступним кроком в організації групової навчальної діяльності є створення дидактичною метою малих (первинних) груп учнів. Необхідна умова формування групової навчальної діяльності - умовний поділ учнів класу на типологічні групи з високим, середнім та низьким рівнем навчальної діяльності.

З включенням у навчальний процес групової діяльності школярів у вчителя "з'являється ще одна функція - налагоджувати і підтримувати функціонування як окремих груп, так і всього класу. Вся групова навчальна діяльність школярів прогнозується і здійснюється під керівництвом вчителя і за його активною участю. План проведення заняття, об'єкт групової діяльності, підбір літератури, консультування в підготовчий період, загальний контроль за навчанням у малих групах - все це перебуває в компетенції вчителя. Виконання завдань семінару відбувається в позаурочний час, а безпосередньо на заняття учні лише звітують про хід і результати групової роботи.

Одна із проблем, яку вирішує вчитель при формуванні групової навчальної діяльності школярів, стосується забезпечення високого ступеня активності виконання групових завдань. Отже потрібно вказати вимоги до конструювання завдань для групової роботи учнів, а саме:

- обсяг завдань має бути таким, що дозволяє здійснити закріплення й перевірку необхідного мінімуму знань;
- рівень складності завдань повинен відповідати можливостям учнів на конкретному етапі засвоєння навчального матеріалу;

складання завдань має бути диференційованим; потрібно враховувати складність матеріалу, характер навчальної діяльності, міру допомоги учням у вирішенні навчальних задач.

6. Функції системи диференціальних навчальних завдань:

- забезпечити різний темп просування в засвоєнні математичних знань, умінь і навичок різними за рівнями розумового розвитку на даному етапі навчання учнями, забезпечувати при цьому засвоєння, застосування, а також необхідне закріплення вивчених понять і способів математичних дій;

- будується за принципом поступового зростання складності, забезпечувати спочатку рівень обов’язкової математичної підготовки, як основу диференціації навчання;
- сприяти загальному розвитку учнів;
- відповідати конкретним дидактичним цілям уроку, етапу навчання і узгоджуватися з формами навчальної діяльності;
- будуватися на базі діючих підручників з притягненням додаткових збірників задач і дидактичних матеріалів;
- мати задачі трьох рівнів, які відповідали б розробленим в психології та методиці навчання математиці рекомендаціям відповідно складності, трудності і ступеня проблемності, а також відомим в дидактиці рівням засвоєння знань і способів дій.

Лекція 5. Навчально-методичний комплекс навчальної дисципліни (НМК НД)

План

1. Загальні положення
2. Структура НМК НД
3. Зміст складових НМК НД
4. Порядок розробки НМК НД
5. Доступність НМК НД

1. Загальні положення

1.1. Структура навчально-методичного комплексу навчальної дисципліни розроблена з метою оптимізації й уніфікації формування кафедрами (окремим викладачем) методичних матеріалів із певної навчальної дисципліни і містить мінімальні вимоги до змісту й оформлення навчально-методичних комплексів навчальних дисциплін (далі – НМК НД), передбачених навчальними планами освітньо-професійних програм за окремими спеціальностями, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти в університеті.

1.2. Нормативними (обов’язковими) документами у структурі навчально-методичного комплексу навчальних дисциплін згідно з рекомендаціями Національного агентства забезпечення якості вищої освіти є програма, робоча програма і силлабус.

2. Структура НМК НД

2.1. Навчально-методичний комплекс навчальної дисципліни – система дидактичних матеріалів й освітнього контенту з конкретної навчальної дисципліни, метою якої є виконання освітніх і соціальних завдань, сформульованих програмою навчальною дисципліни, і забезпечення оволодіння компетентностями й досягнення результатів навчання здобувачами вищої освіти.

Традиційний НМК (модель його представлено на рис.1) складається з двох частин: 1) матеріали щодо планування вивчення дисципліни; 2) матеріали методичного забезпечення вивчення навчальної дисципліни.

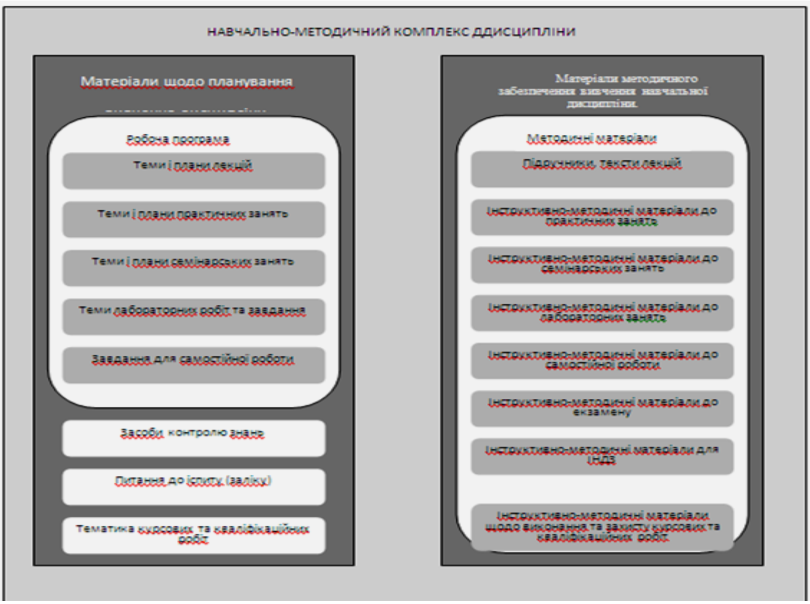


Рис.1. Модель традиційного навчально-методичного комплексу дисципліни

2.2. Навчально-методичний комплекс навчальної дисципліни містить:

- програму навчальної дисципліни;
- робочу програму навчальної дисципліни;
- силлабус навчальної дисципліни;
- підручник;
- навчально-методичні посібники;
- конспект лекцій;
- плани практичних (семінарських, лабораторних) занять;
- методичні рекомендації щодо організації самостійної роботи студентів для вивчення навчальної дисципліни;
- тематику курсових робіт;
- питання (завдання) до поточного контролю з навчальної дисципліни для іспитів, заліків, диференційованих заліків;
- тестові завдання;
- матеріали до підсумкового контролю;
- критерії оцінювання навчальних досягнень студентів тощо.

Інший освітній контент НМК НД визначається кафедрами університету індивідуально (банки тестів, система програмного забезпечення навчальної дисципліни, електронний web-ресурс (офіційний сайт кафедри, викладача тощо), мультимедіа й інтерактивні матеріали, матеріали нормативного або довідкового характеру, список рекомендованої навчальної, наукової, фахової і періодичної літератури тощо).

3. Зміст складових НМК НД

3.1. *Програма навчальної дисципліни* – складова освітньо-професійної програми стандарту вищої освіти, нормативний документ, який визначає, розкриває і характеризує роль, місце і значення навчальної дисципліни в системі підготовки фахівців, мету й головні завдання її вивчення, вимоги до знань і вмінь, інформаційний обсяг і загальний зміст навчальної дисципліни у стислому вигляді, перелік (список) рекомендованого інформаційного й навчально-методичного забезпечення навчальної дисципліни. Розробляється для кожної навчальної дисципліни відповідно до навчального плану освітньо-професійної програми, за якою здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, затверджується на засіданні кафедри, узгоджується з керівником (гарантом) проєктної групи освітньо-професійної програми, після цього затверджується вченою радою університету.

3.2. *Робоча програма навчальної дисципліни* – нормативний документ, що розробляється для кожної навчальної дисципліни відповідно до навчального плану освітньо-професійної програми, програми навчальної дисципліни, за якою здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, затверджується на засіданні кафедри й узгоджується з керівником (гарантом) проєктної групи освітньопрофесійної програми.

Структура робочої програми навчальної дисципліни

1. У структурі робочої програми навчальної дисципліни рекомендується передбачати наявність таких складників:

— загальна інформація: назва навчальної дисципліни, заклад вищої освіти, інститут (факультет), кафедра чи інший структурний підрозділ, який відповідає за дисципліну, освітня програма (для обов'язкових дисциплін) інформація про погодження та затвердження, мова навчання.

— розробник(и) - викладач чи викладачі, які розробили робочу програму;

— мета вивчення дисципліни; — обсяг дисципліни в кредитах ЄКТС та його розподіл у годинах за формами організації освітнього процесу та видами навчальних занять (відповідно до ст. 50 Закону України «Про вищу освіту»);

— статус дисципліни: обов'язкова чи вибіркова. Статус обов'язкових мають дисципліни, що є обов'язковими хоча б для однієї освітньої програми;

— передумови для вивчення дисципліни (наприклад, перелік дисциплін, які мають бути вивчені раніше);

— очікувані результати навчання з дисципліни;

— критерії оцінювання результатів навчання;

— засоби діагностики результатів навчання, зокрема, методи їх демонстрування;

— програма навчальної дисципліни: основні теми дисципліни, у тому числі (за наявності) теми практичних, семінарських та лабораторних занять, орієнтовна тематика індивідуальних та/або групових завдань;

— форми поточного та підсумкового контролю;

— інструменти, обладнання та програмне забезпечення, використання яких передбачає навчальна дисципліна (за потребою);

— рекомендовані джерела інформації.

2. Передумови для вивчення дисципліни

Раніше цей розділ називався «Міждисциплінарні зв'язки»

3. Мета навчальної дисципліни

Для обов'язкових дисциплін у цьому пункті варто стисло зазначити місце навчальної дисципліни в освітній програмі. Зокрема, тут можуть бути наведені визначені освітньою програмою компетентності та програмні результати навчання, для формування яких використовується ця навчальна дисципліна. Для вибіркових дисциплін може бути наведено коротке пояснення можливостей та переваг, які надає вивчення дисципліни.

4. Результати навчання

Формулювання результатів навчання для обов'язкових дисциплін має базуватися на результатах навчання, визначених відповідною освітньою програмою (програмних результатах навчання) та деталізувати їх. Формулювання результатів навчання мають зазначати рівень їх сформованості, наприклад, через його достатність для вирішення певного класу завдань професійної діяльності та/або подальшого навчання за освітньою програмою.

Програмні результати вивчення дисципліни мають бути представлені таким чином:

— Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні: вміти: знати:

— Компетентності, якими повинен оволодіти здобувач в результаті вивчення дисципліни. Тут повинні бути названі компетентності, які мають бути сформовані у студента в результаті вивчення цієї конкретної дисципліни чи цілого блоку дисциплін. Щоб визначити ці компетентності, необхідно уважно ознайомитися з відповідною освітньо-професійною програмою, в якій обов’язково наводиться перелік загальних та спеціальних (фахових) компетентностей. Згідно з вимогами Міністерства освіти і науки України всі освітньопрофесійні програми, за якими у ВНТУ відбувається підготовка бакалаврів та магістрів, розміщено на сайті університету в рубриці «Довідка абітурієнта». Компетентності, які визначені в конкретній освітньо-професійній програмі, можуть бути соціальноособистісні, загальнонаукові, інструментальні, професійні (загальнопрофесійні та спеціалізованопрофесійні). В деяких освітньопрофесійних програмах наведено таблицю, що наочно показує, формуванню яких саме компетентностей має сприяти вивчення тієї чи іншої обов’язкової (нормативної) дисципліни. Але в переважній більшості програм наведено тільки загальний перелік, і викладач має вибрати із загального переліку компетентностей саме ті, формування яких забезпечує вивчення даної конкретної дисципліни.

5. Програма навчальної дисципліни

В цьому розділі подається перелік тем, стисло розкривається зміст кожної з них.

6. Таблиця «Структура навчальної дисципліни»

При заповненні цієї таблиці необхідно звернути увагу на колонку «Індивідуальні завдання». Якщо навчальним планом передбачена курсова робота (курсовий проект),

7. Критерії оцінювання

Критерієм успішного проходження здобувачем освіти підсумкового оцінювання може бути досягнення ним мінімальних порогових рівнів оцінок за кожним запланованим результатом навчання навчальної дисципліни.

8. Засоби оцінювання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання можуть бути:

— екзамени;
— комплексні іспити;
— стандартизовані тести;
— наскрізні проекти;
— командні проекти;
— аналітичні звіти, реферати, есе;
— розрахункові та розрахунково-графічні роботи;
— презентації результатів виконаних завдань та досліджень;
— студентські презентації та виступи на наукових заходах;
— розрахункові роботи;
— завдання на лабораторному обладнанні, тренажерах, реальних об'єктах тощо
— інші види індивідуальних та групових завдань.

9. Рекомендована література

Список рекомендованої літератури складається з переліку базової та допоміжної літератури Список має регулярно оновлюватися шляхом включення до його складу назв новітньої літератури, виданої за останні 5 років.

3.3. *Силлабус* навчальної дисципліни – нормативний документ, що розробляється для кожної навчальної дисципліни відповідно до навчального плану освітньо-професійної програми, програми навчальної дисципліни, за якою здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, включає в себе опис навчальної дисципліни, мету й завдання, змістові модулі (ЗМ), перелік/назви тем, затверджується на засіданні кафедри й узгоджується з керівником (гарантом) проєктної групи освітньо-професійної програми,.

3.4. *Підручник* – видання, в якому системно викладені як загальновизнані, так і новітні точки зору на основні положення, що розкривають суть предмета певної навчальної дисципліни згідно з її програмою і завданнями навчання, а також яке відповідає вимогам дидактики, методичним рекомендаціям щодо структури, змісту й обсягів підручників і навчальних посібників.

3.5. *Навчально-методичний посібник* – навчальне видання з методики викладання навчальної дисципліни, яке, крім викладу навчального матеріалу, містить методичні вказівки і рекомендації щодо викладання дисципліни або організації самостійної роботи студентів, розвитку і виховання особистості.

3.6. *Конспект лекцій* – навчально-методична розробка, яка містить стислий виклад лекційного матеріалу відповідно до затвердженої робочої навчальної програми навчальної дисципліни.

3.6. *Плани практичних (семінарських, лабораторних) занять* – видання, яке містить перелік/назви тем навчальних занять відповідно до робочої навчальної програми, обсяг аудиторних годин за кожною темою і перелік питань, які підлягають розгляду, тощо.

3.7. *Методичні рекомендації щодо організації самостійної роботи студентів* для вивчення навчальної дисципліни – комплекс рекомендацій і роз’яснень, як надаються здобувачам вищої освіти з окремої теми чи дисципліни в цілому і сприяють досягненню результатів навчання.

3.8. *Тематика курсових робіт* – перелік тем курсових робіт, із зазначенням плану, основної й додаткової літератури для самостійного вивчення здобувачем вищої освіти задля написання й успішного її захисту в подальшому.

3.9. *Питання (завдання) до поточного контролю* з навчальної дисципліни для іспитів, заліків, диференційованих заліків – перелік контрольних питань (завдань) за кожною темою навчальної дисципліни відповідно до робочої програми навчальної дисципліни.

3.10. *Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів* – 100-бальна шкала ECTS (A, B, C, D, E, FX) і 4-бальна національна шкала («відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно»); для недиференційованих заліків за вербальною шкалою («зараховано», «не зараховано») відповідно до основних критеріїв і показників рівня знань, виявлених студентами.

4. Порядок розробки НМК НД

4.1. НМК НД розробляє викладач (колектив викладачів) групи забезпечення освітньо-професійної програми відповідно до навчального плану підготовки студентів певного освітнього рівня за окремими освітньопрофесійними програмами.

4.2. НМК НД має відповідати сучасному рівню розвитку науки, техніки й технологій, містити логічно послідовний виклад змісту навчального контенту з орієнтацією на сучасні методи й технології навчального процесу, що дозволяють здобувачам вищої освіти засвоїти навчальний матеріал, оволодіти базовими знаннями, вміннями, навичками та іншими компетентностями, досягти програмних результатів навчання за певною освітньо-професійною програмою.

4.3. Апробація матеріалів НМК НД проводиться під час викладання навчальної дисципліни. Основна мета апробації – оцінка структури, змісту елементів НМК НД, думок стейкхолдерів і студентів.

4.4. Завідувач кафедри, за якою закріплена навчальна дисципліна: - проводить моніторинг підготовки НМК НД та його якості; - оцінює якість викладання дисципліни й підготовки НМК НД.

4.5. Директор інституту/декан факультету, його заступники: - забезпечують контроль за організацією кафедрами освітнього процесу і наявністю НМК НД.

4.6. Керівник (гарант) проєктної групи ОПП: - здійснює моніторинг підготовки НМК НД та його якості; - погоджує НМК НД.

4.6. Здобувачі вищої освіти: - оцінюють якість викладання і наповнення НМК НД (контент), що відбувається під час опитування.

4.7. Навчально-методичний відділ: - здійснює зовнішній контроль за наявністю, змістом і якістю НМК НД.

4.8. Науково-методична рада університету: - аналізує результати перевірки якості розробки навчально-методичних комплексів інститутами/факультетами й кафедрами; - затверджує методичні рекомендації з удосконалення навчального процесу, впровадження нових освітніх технологій і методів навчання, методичного забезпечення, інформатизації навчального процесу і доступу до навчальної інформації.

5. Доступність НМК НД

5.1. НМК НД створюється в друкованій формі та/або як електронний освітній ресурс і зберігається на кафедрі.

5.2. НМК НД, що зберігаються й використовуються як електронний освітній ресурс, розміщуються на сайті університету у вкладці «Освітні програми» у форматі pdf та на порталі АСУ в розділі «Навчально-методичні матеріали».

5.3. Здобувачам вищої освіти забезпечується постійний і вільний доступ до порталу АСУ через авторизацію на ньому.

5.4. Архівація нормативних документів НМК НД («Програма навчальної дисципліни», «Робоча навчальна програм», «Силлабус навчальної дисципліни») здійснюється керівником (гарантом) проєктної групи ОПП згідно з Інструкцією з діловодства університету.

Лекція 6. Урок, його види та структура. Вимоги до сучасного уроку.

План

1. Урок. Основні вимоги до уроку.
2. Вимоги до сучасного уроку.
3. Види уроків та їх структура.

1. Урок. Основні вимоги до уроку.

Урок - це логічно закінчений, цілісний, обмежений визначеними тимчасовими рамками етап навчально-виховного або, як зараз кажуть, педагогічного процесу. У ньому представлені всі основні елементи навчально-виховного процесу: цілі та задачі, зміст, форми, технологія, методи, засоби, контроль та оцінювання, тобто вся організаційна структура. Якість уроку залежить від правильного визначення кожного з цих компонентів та їх раціонального поєднання.

Вибудовуючи урок, необхідно визначити не тільки те, яка навчальна інформація чи способи дії повинні бути засвоєні, а й на якому рівні вони мають бути засвоєні на конкретному уроці. Але оскільки урок - це ланка цілісного навчального, розвивального та виховного процесу, відтак, не на кожному уроці основний його зміст може бути засвоєний на всіх трьох рівнях: сприйняття, осмислення й запам'ятовування; застосування знань і навичок за зразком;
застосування знань і навичок у новій ситуації.

Сучасний зміст освіти та закономірності процесу навчання в цілому та засвоєння, зокрема, визначають ряд неодмінних вимог до уроку, які необхідно враховувати.

1. Урок повинен передбачати не тільки виклад матеріалу, змісту, а й завдання, що припускають застосування засвоєння навчальної інформації на практиці.
2. Частина цих знань повинна бути отримана учнями у процесі самостійного пошуку шляхом рішення пошукових задач наскільки пошук таких знань доступний для учнів відповідного віку, настільки важливі способи діяльності, які учень опановує у процесі пошуку.
3. Виклад навчального матеріалу на уроці може і повинен бути варіативним за своєю структурою. В одних випадках викладається готова інформація у формі пояснення та за допомогою ілюстрацій. В інших випадках матеріал вивчається шляхом постановки вчителем проблеми та розкриття шляхів її доказового рішення.

Виклад навчальної інформації можливий у формі розповіді, лекцій, читання підручника, перегляду діафільмів тощо. Характер викладу визначається внутрішньою структурою, способом побудови цілісного уроку - від пояснювально-ілюстративного до проблемного.

Одна з основних вимог до уроку передбачає його науковість, неодмінною умовою науковості змісту уроку є ознайомлення учнів із доступними для них методами науки.

Істотною стороною уроку є індивідуалізація навчання. Сполучення індивідуалізації навчання із класно-урочною формою колективної роботи - досить нелегка задача. Це, по-перше, використання навчального матеріалу різного ступеня складності, що враховує інтереси та можливості різних категорій учнів, оскільки складний матеріал може виявитись не під силу деяким учням для активного засвоєння, але повинен бути зрозумілий усім. Це, по-друге, доручення учням завдань для самостійної роботи різного ступеня складності, але в такій системі, щоби слабкі та середні учні могли поступово переходити від менш важких завдань до більш складних. Це, по-третє, повернення учнів зі слабкою навченістю до більш складних завдань попередніх тем після вивчення наступних, коли завдання можуть бути вирішені на новому рівні підготовки.

4. Жоден урок не може вирішувати всіх задач навчання, розвитку та виховання учнів. Він є частиною теми, курсу, навчального предмета та взагалі процесу навчання, освіти. Важливо завжди усвідомлювати, яке місце він займає в системі навчального предмета, які його дидактичні, виховні та розвивальні цілі. Урок повинен бути логічною одиницею теми, розділу, курсу. Урок - це педагогічний здобуток, і тому він повинен відрізнятися цілісністю, внутрішнім взаємозв'язком частин, єдиною логікою розгортання діяльності вчителя й учнів.

Дотримуючись основних вимог до уроку, учитель вносить як у здійснення цих вимог, так і у сполучення компонентів уроку своє педагогічне мистецтво, свій методичний почерк, що залежить як від характеру класу, так і від власних індивідуальних рис.

Структура кожного уроку відповідно до його логіки повинна бути чіткою, із суворим переходом від однієї частини уроку до іншої відповідно до спектра цілей і задач уроку та закономірностей процесу навчання. Але цими частинами є не традиційне опитування, вивчення нового матеріалу, закріплення засвоєного і т. д., а кроки, що обумовлюють рух до мети уроку, тобто засвоєння його змісту.

5. На уроці повинен здійснюватись розвиток навчальних компетентностей учнів за допомогою відтворення академічних знань учнями, вправ у вміннях і навичках, шляхом виконання завдань на застосування академічних компетентностей у нестандартній ситуації.
6. Навчальний процес тупиковий без кількоразового повторення змісту академічних знань і навчальних умінь. Форма повторення може бути різною, у залежності від цілей уроку та його змісту.
7. На уроках повинно проводиться систематичне та планомірне оцінювання рівня навчальних досягнень учнів. Головний критерій якості уроку - не застосування тих чи інших видів роботи учнів чи використаних учителем методик, а навченість учнів, досягнення цілей уроку.

Культура вчителя, його інтелектуальний і моральний рівень є однією з головних умов ефективності уроку.

2. Сучасні вимоги до уроку. Вимоги до побудови уроку

1. Відповідність уроку програмі за місцем і часом.
2. Структура уроку та доцільність етапів, їх співвідношення за часом.
3. Ідейність і науковість.
4. Естетичне виховання, емоційні сторони уроку.
5. Подача нового матеріалу.
6. Дотримання принципів розвивального навчання.
7. Зв'язок із життям.
8. Наочність навчання, використання ТСО.
9. Робота з книгою.
10. Зародження нових понять, радість пізнання.
11. Організація тренувальних вправ.
12. Самостійність у роботі учнів.
13. Активність та ініціатива учнів.
14. Охоплення учнів різноманітними формами роботи.
15. Охоплення усною та мовною практикою.
16. Індивідуальний підхід (увага до здібних, робота з відстаючими).
17. Організація перевірки знань учнів.

18. Глибина та міцність знань учнів.
19. Відповідність оцінок та анотації до них.
20. Організація домашнього завдання.
21. Темпи проведення уроку.
22. Педагогічний такт учителя.
23. Мова вчителя, його суб'єктивні достоїнства.
24. Робота над вимовою.
25. Словниково-фразеологічна та стилістична робота.
26. Розвиток зв'язного мовлення, практична спрямованість.
27. Вивчення граматики, лексики.
28. Техніка читання.
29. Культура мови та письма.
30. Вивчення літературних творів.
31. Система письмових робіт.

Програма спостережень на уроці

1. Як вирішуються на уроці основні освітні задачі, включаючи формування загальних і спеціальних умінь і навичок навчальної праці.
2. Як вирішуються на уроці задачі формування світогляду, морального, трудового, фізичного та естетичного виховання.
3. Як вирішуються на уроці задачі розвитку інтересу до навчання, мислення, свободи, емоційної сфери діяльності.
4. Як ураховуються особливості класу при плануванні та вирішенні задач уроку.
5. Оптимальність обраної структури уроку й темпу його проведення.
6. Оптимальність змісту уроку (обсяг, складність, доступність, науковість, міжпредметні зв'язки тощо).
7. Оптимальність обраних методів навчання (мета уроку, специфіка класу, тема): словесні наочні та практичні, індуктивні та дедуктивні, репродуктивні та пошукові методи самостійної роботи, методичне стимулювання методів контролю, ефективності контролю.

8. Оптимальність сполучення форм навчання на уроці (загальнокласних, групових, індивідуальних). Диференційований підхід до слабовстигаючих і найбільш підготовлених учнів.
9. Оптимальність застосування різноманітних засобів на уроці.
10. Морально-психологічна та емоційна атмосфера на уроці. Особистісний вплив учителя.
11. Оптимальність обсягу складності домашнього завдання та способів інструктування з його виконання.
12. Результативність уроку:
а) ступінь засвоєння учнями основних понять, фактів, спеціальних умінь і навичок;
б) оцінка очікуваних змін у розвитку інтересу до навчання, свободи, емоційності, загальнонавчальних умінь і навичок, уміння виділяти головне, планувати відповідь, працювати з книгою, картою, здійснювати самоконтроль, у належному темпі читати та писати;
в) оцінка очікуваних змін у рівні вихованості школярів.

Схема аналізу процесу формування загальнонавчальних умінь і навичок

1. Навчально-організаційні

Учитель на уроці:

- оголошує мету уроку;
- визначає задачу конкретного етапу уроку;
- учить планувати виконання завдання;
- учить знаходити найбільш раціональні способи виконання;учить самооцінці виконуваної роботи.

Учень на уроці:

- виконує відповідну роботу, наслідуючи вчителя;
- вносить свої елементи;
- використовує знання про спосіб творчої діяльності;
- опановує відповідні вміння.

2. Навчально-інтелектуальні

Учитель на уроці:

- продумано працює над інтелектуальними вміннями та навичками;

- реалізує міжпредметну методику їхнього формування;
- погоджує свої дії з іншими викладачами;
- спирається на вже відоме учням;
- уводить уміння практично;
- уводить уміння з поясненням їхньої теоретичної основи;
- розвиває вміння далі.

Учень на уроці:

- використовує вміння правильно, упевнено;
- допускає помилки, використовує операції не цілком;
- не володіє сформованим інтелектуальним умінням.

3. Навчально-інформаційні

Учитель на уроці:

- приділяє увагу процесу читання;
- методично підготовлює введення в урок активного читання;
- здійснює диференційований підхід у формуванні навичок читання.

Учень на уроці:

- читає в нормі, вище норми, нижче норми (основні недоліки).

Учитель:

навчає продуктивним методам роботи з підручником;

визначає характер пізнавальної діяльності при роботі з підручником (відтворення, творче осмислення, застосування);

учить працювати з планом, тезами, конспектом, схемами, таблицями, діаграмами.

Учень:

працює з підручником недостатньо самостійно й упевнено;

утруднюється в роботі з планом, тезами тощо;

володіє прийомами роботи з підручником.

Учитель:

залучає додаткову літературу під час пояснення нового матеріалу;

учить працювати з додатковою літературою з предмета;

включає елементи бібліографічної грамотності в заняття з учнями.

Учень:
уміє працювати з додатковою літературою;
володіє бібліографічною грамотністю;
не звертається до додаткової літератури.

4. Навчально-комунікативні

Учитель на уроці:

- розвиває увагу учнів;
- навчає слухати та записувати пояснення вчителя, іноді відповідь учня;
- розвиває монологічну мову;
- розвиває діалогову мову, уміння ставити запитання.

Учень:

- управляє власною увагою;
- слабко управляє власною увагою;
- уміє ставити запитання, включатись у діалог;
- формує основні типи монологічної мови.

3. За основною дидактичною метою уроки поділяються на шість основних типів уроків:

1. Уроки засвоєння нових знань;
2. Формування навичок і вмінь;
3. Узагальнення і систематизація знань і вмінь;
4. Контролю і корекції знань і вмінь;
5. Практичного застосування знань, навичок і умінь;
6. Комбіновані.

1. Урок засвоєння нових знань

Основна дидактична мета: ознайомлення з новими фактами, поняттями, законами, теоріями, твердженнями, з'ясування їх суті. Основні структурні компоненти, що характеризують даний тип уроку:
а) ознайомлення із змістом нового матеріалу;
б) встановлення деяких залежностей і зв'язків між елементами нових знань.

Структура уроку:

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація і корекція опорних знань, навичок і вмінь; повідомлення теми, цілей і завдань уроку; актуалізація мотивації учіння учнів.
3. Вивчення нового матеріалу (вступні, мотиваційні та пізнавальні вправи).
а) Первинне застосування нових знань (пробні вправи);
б) Самостійне застосування учнями знань у стандартних ситуаціях (тренувальні вправи за зразком, інструкцією, завданням);
в) Творче перенесення знань і навичок у нові ситуації (творчі вправи).
4. Підсумки уроку.
5. Повідомлення домашнього завдання.

2. Урок формування навичок і вмінь

Структура уроку:
1. Перевірка домашнього завдання.
2. Актуалізація і корекція опорних знань, навичок і вмінь; повідомлення теми, цілей і завдань уроку; актуалізація мотивації учіння учнів.
3. Вивчення нового матеріалу (вступні, мотиваційні та пізнавальні вправи); первинне застосування нових знань (пробні вправи);
а) Самостійне застосування учнями знань у стандартних ситуаціях (тренувальні вправи за зразком, інструкцією, завданням); творче перенесення знань і навичок у нові ситуації (творчі вправи).
4. Підсумки уроку.
5. Повідомлення домашнього завдання.

Основна дидактична мета: з'ясування можливостей застосування знань у навчальному пізнанні і практичних ситуаціях, формування досвіду такого застосування, предметних і загальних навчальних вмінь.

Різновиди даного типу:

2.1. <u>Урок первинного формування вмінь.</u>

Основна дидактична мета: з'ясування сутності і структури вміння, формування алгоритму його реалізації.

Основні структурні компоненти:

а) актуалізація знань, які лежать в основі уміння;

б) ознайомлення із сутністю уміння, складом і послідовністю виконання дій;

в) первинне застосування одержаних знань про способи дій на основі виконання пробних вправ;

г) виконання зазначених дій у стандартних умовах (вправи за зразком, аналогією, інструкцією).

2.2. Урок творчого застосування знань і вдосконалення вмінь.

Основна дидактична мета: забезпечення переносу знань і способів дій в нові умови.

Основні структурні компоненти: а) перевірка стану засвоєння знань і сформованості уміння на рівні застосування їх у стандартних ситуаціях;

б) перенесення знань і засвоєння способів дій у частково змінені або нові ситуації (творчі вправи).

3. Урок узагальнення та систематизації знань і вмінь.

Головна дидактична мета: узагальнення та систематизація вивченого матеріалу, визначення в ньому основних понять, закономірностей, сфер застосування етапів процесу пізнання. Урок може складатися з трьох частин:

1) фронтальне повторення пройденого матеріалу за питаннями;
2) визначення та вирішення проблеми;
3) експериментальна робота.

Основна риса узагальнюючих уроків – набуття школярами нових знань на базі систематизації та узагальнення, переосмислення накопичених знань. Такий урок може бути побудовано на самостійній роботі учнів з індивідуальними дидактичними картками і таблицями, підручником чи додатковою літературою. Узагальнення і систематизація знань не тільки спонукає до кращого запам’ятовування та застосування знань, але й підвищує їх рівень, допомагає засвоїти фундаментальні знання. На таких уроках використовується багато засобів навчання: карти, схеми, таблиці, навчальні картини, екранні засоби, плакати, статистичний матеріал. Сьогодні такі уроки передбачені програмою як тематичні.

Основна дидактична мета: виявлення істотних зв'язків між елементами знань, їх групування і класифікація, введення вивченого в систему раніше засвоєного.

Основні структурні компоненти:

а) повторення основних фактів, понять, правил, законів;

б) узагальнення знань;

в) узагальнення умінь.

4. Урок контролю і корекції знань і вмінь.

Структура уроку:

1.Повідомлення теми, цілей та завдань уроку.

2. Актуалізація мотивації учіння учнів.

3. Перевірка знання учнями фактичного матеріалу й основних понять; перевірка глибини осмислення учнями знань і ступеня їх узагальнення.

4. Застосування учнями знань у стандартних і змінних умовах.

5. Перевірка, аналіз і оцінка виконаних під час уроку робіт.

6. Підсумки уроку.

7. Повідомлення домашнього завдання.

Основна дидактична мета: виявлення якостей знань і вмінь, що характеризують стан засвоєння учнями логічно завершеного блоку навчального матеріалу.

Різновиди даного типу:

4.1. <u>Урок контролю знань і вмінь.</u>

Основна дидактична мета: виявлення рівня засвоєння навчального матеріалу, в тому числі досягнення передбачених програмою обов'язкових результатів навчання.

Основні структурні компоненти:

а) перевірка знань фактичного матеріалу на рівні репродукції;

б) перевірка осмислення знань (розуміння сутності понять, тверджень, ілюстрування прикладами, встановлення взаємозв'язків у вивченому тощо);

в) перевірка умінь застосувати вивчене у знайомих і змінених (нових) ситуаціях.

4.2. Урок аналізу письмових робіт.

Основна дидактична мета: корекція знань і вмінь на основі аналізу допущених помилок.

Основні структурні компоненти:

а) узагальнена характеристика якості виконання робіт;
б) аналіз допущених помилок;
в) робота над усуненням виявлених прогалин у знаннях і уміннях.

5. Комбінований урок.

Комбінований урок поєднує дві або більше дидактичні мети уроків попередніх типів.

Структура комбінованого уроку:

1. Перевірка виконання учнями домашнього завдання практичного характеру; перевірка, оцінка і корекція раніше засвоєних знань, навичок і вмінь; відтворення і корекція опорних знань учнів.
2. Повідомлення теми, мети і завдань уроку та формування мотивації учіння.
3. Сприймання й усвідомлення учнями нового матеріалу.
4. Осмислення, узагальнення і систематизація нових знань.
5. Підсумки уроку.
6. Повідомлення домашнього завдання.

З усіх зазначених типів комбінований урок найпоширеніший у сучасній загальноосвітній школі. Йому належить 75-80 відсотків загальної кількості уроків, що проводяться. Цей тип уроку здебільшого використовується в початкових і середніх класах.

6. Уроки практичного застосування знань, навичок і умінь

Структура уроку:

1. Перевірка домашнього завдання.
2. Актуалізація і корекція опорних знань, навичок і вмінь; повідомлення теми, цілей і завдань уроку; актуалізація мотивації учіння учнів; осмислення змісту й послідовності застосування способів виконання дій.

3. Самостійне виконання учнями завдань під контролем і за допомогою вчителя.
4. Звіт учнів про роботу і теоретичне обгрунтування отриманих результатів.
5. Підсумки уроку.
6. Повідомлення домашнього завдання.

Практична робота.

Мета такого уроку – обробка та закріплення теоретичних умінь та навичок на практиці. На цих уроках проводяться великі за обсягом і складні за змістом роботи. Уроки практичних робіт містять такі структурні елементи:

· Постановка навчально-виховних завдань;
· Ознайомлення учнів з навчальними засобами, необхідними для виконання практичної роботи; інструкціями щодо оволодіння прийомами навчальної діяльності і оформлення отриманих результатів.
· Власне проведення роботи;
· Підведення підсумків і домашнє завдання.

Результат цього типу уроків залежить від ступеня оволодіння учнями прийомами навчальної роботи: порівнювати, зіставляти, робити висновки, розраховувати, аналізувати, встановлювати залежність.

Контрольна робота.

Контрольна робота – поточна, періодична, підсумкова, забезпечує зворотний зв'язок, що дозволяє коригувати діяльність учителя та учнів, її результативність, виявляти резерви подальшого вдосконалення навчання.

Поточні контрольні роботи.

Проводяться в ході навчального процесу для отримання оперативної інформації про рівень засвоєння теоретичних знань та практичних навичок учнів. Вони проводяться в основному за змістом логічно завершеної дидактичної теми (чи кількох уроків з теми) програмового матеріалу з метою своєчасної корекції навчально-виховного процесу та забезпечення успішного

просування учнів до засвоєння наступних розділів чи тем навчального курсу. При цьому слід дотримуватись таких вимог:
- чітке визначення змісту контрольної роботи відповідно до вивченого матеріалу;
- виділення в ньому головного, істотного;
- вибір раціональних форм проведення контрольної роботи (фронтальна, групова, індивідуальна);
- своєчасна корекція знань, умінь і навичок учнів;
- психологічний настрій та формування в учнів позитивної установки на проведення контрольної роботи.;
- оптимальність навчально-методичного забезпечення проведення контрольної роботи.

Періодичні контрольні роботи

Проводяться після вивчення логічно завершеного розділу навчальної програми (у кінці четверті, семестру чи навчального року).

Основні вимоги до періодичних контрольних робіт такі:
– визначення вузлових тем у вивченому розділі програмного матеріалу та виділення в них основних питань, правил, алгоритмів, принципів, закономірностей, законів тощо, які є обов'язковими для засвоєння учнями;
– оптимальність змісту та обсягу контрольної роботи;
– складність та посильність завдань, диференційованість завдань з урахуванням індивідуальних особливостей учнів та рівнів їх навчальної підготовленості;
– врахування при розробці змісту контрольних завдань прогалин у засвоєнні програмового матеріалу.

Підсумкові контрольні роботи.

Проводяться в кінці четверті та навчального року. Основні вимоги до такого типу контрольних робіт:
– зміст перевірочних питань, завдань повинен носити узагальнюючий, синтезований характер, охоплювати вузлові, центральні, провідні ідеї, аспекти, закони, закономірності, які є фундаментом даного навчального предмета чи окремого його курсу, розділу;

– мають бути розраховані переважно на реконструктивний та творчий рівень знань учнів;
– диференційовані (у кількох варіантах, тестах, картках тощо);
– передбачають виконання учнями контрольних завдань за допомогою задіяння широкого комплексу способів, методів, засобів;
– мають бути посильними за обсягом, узгодженими за кількістю годин, відведених на її виконання.

Розв’язування задач.

Такі уроки мають багато функцій:
- пізнання і засвоєння понять, які вивчаються, явищ і закономірностей;
- обробка знань та формування умінь, застосування їх на практиці;
- повторення пройденого, сприяння встановленню зв’язку вивченого з життям і виробництвом в усіх його різновидах;
- створення проблемних ситуацій.

Такі уроки вчать працювати, бути цілеспрямованими і самостійними, творчо активними. Важливе значення має формування в учнів узагальнюючих умінь, вироблення загальних підходів. Використовуються індивідуальні та групові форми роботи.

Рейтингово-вибірковий диктант.

Такий вид навчальної діяльності пропонується учням для оцінки достовірності 10 – 12 суджень, які зачитує учитель. Відповідь позначається значком + (так), якщо судження правильне, а якщо помилкове – значком «–« (ні). Відповіді на запитання записуються в один ряд і нумеруються.

Консультація.

Урок-консультація – це специфічна форма організації навчально-виховного процесу, яка проводиться перед контрольно-заліковими уроками. Його мета – усунути прогалини в знаннях, уміннях та навичках учнів, попередити можливі помилки на контрольно-залікових уроках, виділити головне, істотне у змісті матеріалу, що вивчався раніше, та акцентувати на нього увагу учнів. Такі уроки надають навчальну допомогу учням і забезпечують інтереси всіх груп учнів:

– які недостатньо засвоїли теоретичний матеріал;
– які не засвоїли прийоми роботи з обладнанням, картами, схемами;
– які не навчилися вирішувати типові задачі;
– які потребують порад щодо написання рефератів, доповідей.

Консультації навчальні.

Допомагають у наданні допомоги учням щодо засвоєння окремих тем або розділів навчального курсу, а також поглибленого вивчення предмета.
Під час проведення консультацій учні мають можливість поставити питання, намагаються дати відповіді на них, слухають пояснення вчителя-предметника або запрошених спеціалістів.

Розрізняють консультації:

1) загальнокласні;
2) групові;
3) індивідуальні.

Правильно організована консультація:

– допомагає подолати прогалини в знаннях;
– виховує в учнів самоконтроль, критичне ставлення до своїх знань;
– допомагає правильно встановити рівень власної навченості.

Консультативне спілкування вчить школярів точності формулювання проблем та питань, що виникають.

Лекція 7. Діагностика результатів навчання. Оцінювання програмних результатів навчання з математики. Введення класного журнала.

План

1. Діагностика результатів навчання школярів і студентів. Видидіагностики та контролю
2. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з математики

3. Вимоги щодо ведення сторінок класного журналу з математики

1. Діагностика результатів навчання школярів і студентів. Види діагностики та контролю

Постійна діагностика успішності, оцінка роботи учнів є запорукою сталого прогресу в навчанні.

Поняття і функції діагностики навчання

Давайте подивимося, що являє собою діагностика. І почнемо ми з визначення.

Діагностика навчання – це процес оцінки, який проводиться на кожному з етапів навчання для визначення ефективності навчального процесу, зіставлення досягнутих результатів з встановленими вимогами.

Для того, щоб оцінювати рівень навчання і кваліфікації випускників незалежно від форми отримання освіти, були розроблені і впроваджені державні освітні стандарти. На законодавчому рівні це закріплено в законі України «Про освіту».

Діагностика умінь і навичок учнів є невід'ємною частиною навчального процесу. Вона має ряд актуальних функцій, до числа основних з яких можна віднести:

- контролююча, яка передбачає виявлення досягнутого рівня знань, умінь і навичок учнів з метою визначення їх готовності до подальшого навчання або ж до початку професійної діяльності;
- навчальна, яка дозволяє учневі не тільки виконувати завдання і давати відповіді на питання, але також осмислювати відповіді інших учнів і вносити в них власні корективи;
- виховує, яка має на увазі проведення регулярного контролю за роботою дитини, покликаного підвищити особисту відповідальність учня, привчити його самостійно вирішувати поставлені завдання, адекватно оцінювати свої можливості і результати роботи;

- спонукає, яка покликана стимулювати навчально-пізнавальну діяльність учнів з метою отримання більш високих оцінок.

Принципи діагностики

Реалізувати всі перераховані вище принципи на практиці можна лише в тому випадку, якщо враховувати значущі принципи процесу:

- об’єктивність: зміст навчального процесу має бути науково обґрунтоване, педагог повинен ставитися однаково до всіх учнів, оцінка знань повинна бути об’єктивною і чесною;
- систематичність: діагностика повинна проводитися на всіх етапах навчального процесу, починаючи від початкового сприйняття матеріалу до його практичного застосування;
- гласність: діагностика всіх учнів проводиться відкрито і за однаковими критеріями.

Види діагностики та контролю

На вид проведеної діагностики впливають відразу кілька значущих чинників:

- місцево оцінки знань і навичок в навчальному процесі;
- розмір завдань;
- кількість часу, який відводиться на діагностику;
- кількість учнів.

Залежно від перерахованих вище факторів виділяють наступні види діагностики:

- поточний контроль, який здійснюється вчителем в процесі щоденної навчальної роботи, як правило, під час занять;
- періодичний контроль, який проводиться після вивчення теми або розділу;
- підсумковий контроль, який поводиться в кінці чверті або навчального року;
- атестаційний контроль, який проводиться на завершальному етапі навчання.

Форми діагностики розрізняються залежно від обсягу навчального матеріалу і характеру питань, які можуть бути задані учням. На основі цих критеріїв виділяють:

- усне опитування, в основі якого оцінка відповідей дітей на поставлені запитання;
- самостійні роботи та контрольна робота: виконання учнями письмового, практичного або графічного завдання;
- колоквіум – заняття, яке передбачає збільшення рівня знань по окремих розділах і темах з виставленням відповідних оцінок;
- залік – персональне або групове співбесіду або виконання практичної роботи з метою оцінки рівня знань учнів;
- іспит – форма діагностики, яка передбачає проведення усної співбесіди, виконання письмової або практичної роботи з метою діагностика знань і вмінь учнів з усієї навчальної дисципліни або ж по її конкретного розділу;
- курсова – самостійна навчальна науково-методична робота, яка виконується під керівництвом педагога по загальнонаукових і спеціальних предметів;
- дипломна робота – самостійне дослідження матеріалу на актуальну тему зі сфери обраної студентом спеціальності, яка служить для оцінки рівня спеціалізованих теоретичних знань, здібностей до аналізу, узагальнення та систематизації.

У середньоспеціальних і вищих навчальних закладах заліки проводяться після закінчення семінарських і практичних занять по розділах навчального курсу, або ж після закінчення виробничої практики, серії лабораторних і розрахунково-графічних робіт. Іспити можуть проводитися в кінці семестру або навчального року. Вони можуть бути вступними, поточними або випускними.

Курсова робота передбачає крім оцінки знань формування і розвиток умінь і навичок самостійної творчої навчальної діяльності, поглиблене вивчення теми. Захист дипломної роботи проводиться на засіданні екзаменаційної комісії середніх і вищих закладів освіти.

Форми діагностики навчання відкривають тільки організаційну сторону діагностики. Реалізація діагностики в конкретних умовах визначається видом і рівнем навчального закладу та іншими значущими факторами.

Так, наприклад, в умовах школи найбільш вживаними способами діагностики є усна перевірка, контрольні та самостійні роботи. Зараз все частіше проводиться машинна перевірка, при якій учням пропонують виконати тести на комп'ютері.

Діагностика навчання передбачає оцінювання знань і навичок учнів як процес і як результат навчання.

Таблиця з поясненнями на тему "Діагностика результатів навчання і її види"

Вид діагностики	Опис	Приклади	Важливість
Формативна діагностика	Відбувається протягом навчального процесу для виявлення прогресу та недоліків у знаннях.	Тести на уроках, самостійні роботи, портфоліо.	Допомагає вчителям та учням визначити, що вже вивчено успішно та на що звернути додаткову увагу.
Сумативна діагностика	Проводиться в кінці навчального періоду для оцінки	Іспити, курсові роботи, атестації.	Дає загальне уявлення про рівень засвоєння

Вид діагностики	Опис	Приклади	Важливість
	загальних результатів.		програми та готовність учнів до наступного етапу навчання.
Діагностична оцінка	Використовується для виявлення поточного рівня знань та розуміння учнів з конкретної теми.	Вступні тести, опитування, анкетування.	Допомагає виявити відставання або пробіли в знаннях для подальшої корекції навчального процесу.
Критеріальна оцінка	Оцінювання знань на основі заздалегідь визначених критеріїв.	Рубрики оцінювання, контрольні списки, стандартизовані тести.	Забезпечує об'єктивність та узгодженість у оцінюванні результатів навчання.

2. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з математики

До навчальних досягнень учнів з математики, які безпосередньо підлягають оцінюванню, належать:

- теоретичні знання, що стосуються математичних понять, тверджень, теорем, властивостей, ознак, методів та ідей математики;
- знання, що стосується способів діяльності, які можна подати у вигляді системи дій (правила, алгоритми);
- здатність безпосередньо здійснювати уже відомі способи діяльності відповідно до засвоєних правил, алгоритмів (наприклад, виконувати певне тотожне перетворення виразу, розв’язувати рівняння певного виду, виконувати геометричні побудови, досліджувати функцію на монотонність, розв’язувати текстові задачі розглянутих типів тощо);
- здатність застосовувати набуті знання і вміння для розв’язування навчальних і практичних задач, коли шлях, спосіб такого розв’язання потрібно попередньо визначити (знайти) самому.

Відповідно до ступеня оволодіння зазначеними знаннями і способами діяльності виокремлюються такі рівні навчальних досягнень школярів з математики:

I – початковий рівень, коли у результаті вивчення навчальних навчального матеріалу учень: називає математичний об’єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об’єкт (його зображення, опис, характеристика) запропонована йому безпосередньо; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання.

II – середній рівень, коли учень повторює інформацію, операції, дії, засвоєні ним у процесі навчання, здатний розв’язувати завдання за зразком.

III – достатній рівень, коли учень самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, уміє виконувати математичні операції, загальна методика і послідовність (алгоритм) який йому знайомі, але зміст та умови виконання змінені.

IV – високий рівень, коли учень здатний самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, складати план дій і виконувати його, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв'язання, тобто його діяльність має дослідницький характер.

Оцінювання якості математичної підготовки учнів з математики здійснюється в двох аспектах: рівень володіння теоретичними знаннями, який можна виявити в процесі усного опитування, та якість практичних умінь і навичок, тобто здатність до застосування вивченого матеріалу під час розв'язування задач і вправ.

Перевірка навчальних досягнень учнів в усній формі

Критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів в усній формі є: якість знань та умінь – правильність, повнота, глибина, дієвість, гнучкість, конкретність і узагальненість, системність, усвідомленість, міцність; культура математичного мовлення – послідовність викладу матеріалу, правильне вживання термінів, повнота у формулюванні висновків, стислість і розгорненість.

Усні відповіді учнів оцінюються за такими показниками:

	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів
Початковий	1	Учень: розпізнає один із кількох запропонованих математичних об'єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), вмилившши його серед інших; читає і записує числа, переписує даний математичний вираз, формулу; зображає найпростіші геометричні фігури (малює ескіз).
	2	Учень: виконує однокрокові дії з числами, найпростішими виразами; впізнає окремі математичні об'єкти і пояснює свій вибір.
	3	Учень: співставляє дані або словесно описані математичні об'єкти за їх

		суттєвими властивостями; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання.
Середній	4	Учень: відтворює означення математичних понять і Формулювання тверджень; формулює деякі властивості математичних об'єктів; виконує за зразком завдання обов'язкового рівня
	5	Учень: ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій прикладами із пояснень вчителя або підручника; розв'язує завдання обов'язкового рівня за відомими алгоритмами з частковим поясненням.
	6	Учень: ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами; самостійно розв'язує завдання обов'язкового рівня з достатнім поясненням; записує математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки.
Достатній	7	Учень: застосовує означення математичних понять та їх властивостей для розв'язування завдань у знайомих ситуаціях; знає залежності між елементами математичних об'єктів; самостійно виправляє вказані йому помилки; розв'язує завдання, передбачені програмою, без достатніх пояснень.
	8	Учень: володіє визначеним прогримаю навчальним матеріалом; розв'язує завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; частково

		аргументує математичні міркування й розв'язування завдань.
	9	Учень: вільно володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; самостійно виконує завдання в знайомих ситуаціях із достатнім поясненням; виправляє допущені помилки; повністю аргументує обґрунтування математичних тверджень; розв'язує завдання з достатнім поясненням.
Високий	10	Знання, вміння й навички учня повністю відповідають вимогам програми, зокрема, учень: усвідомлює нові для нього математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням; під керівництвом учителя знаходить джерела інформації та самостійно використовує їх; розв'язує завдання з повним поясненням і обґрунтуванням.
	11	Учень: вільно і правильно висловлює відповідні математичні міркування, переконливо аргументує їх; самостійно знаходить джерела інформації та працює з ними; використовує набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях; знає передбачені програмою основні методи розв'язування завдання і вміє їх застосовувати з необхідним обґрунтуванням.
	12	Учень: виявляє варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв'язування математичної проблеми; вміє узагальнювати й систематизувати

		набуті знання; здатний до розв'язування нестандартних задач і вправ.

Критерії оцінювання письмових робіт з математики в 5-11 класах

Що виконав учень	Відповідна кількість балів за завдання		
	Максимальний бал - 3	Максимальний бал - 2	Максимальний бал - 1
Отримав правильну відповідь і навів повне її обґрунтування	3	2	1
Отримав правильну відповідь, але вона недостатньо обґрунтована або розв'язання містить незначні недоліки	2,5	1,5	0,5
Отримав відповідь, записав правильний хід розв'язування завдання, але в процесі розв'язування допустив помилку обчислювального або логічного (при	2	1,5	0,5

обґрунтуванні) характеру			
Суттєво наблизився до правильного кінцевого результату або в результаті знайшов лише частину правильної відповіді	1,5	1	0,5
Розпочав розв’язувати завдання правильно, але в процесі розв’язування припустився помилки у застосовуванні необхідного твердження чи формули	1	0,5	0,5
Лише розпочав правильно розв’язувати завдання або розпочав хибним шляхом, але в подальшому окремі етапи розв’язування	0,5	0,5	0

виконав правильно			
Розв'язання не відповідає жодному з наведених вище критеріїв	0	0	0

Для зручності можна на першому етапі оцінювати кожне завдання у звичній термінології «плюс - мінус»:

Що виконав учень	
Отримав правильну відповідь і навів повне її обґрунтування	+
Отримав правильну відповідь, але вона недостатньо обґрунтована або розв'язання містить незначні недоліки	±
Отримав відповідь, записав правильний хід розв'язування завдання, але в процесі розв'язування допустив помилку обчислювального або логічного (при обґрунтуванні) характеру	±
Суттєво наблизився до правильного кінцевого результату або в результаті знайшов лише частину правильної відповіді	∓
Розпочав розв'язувати завдання правильно, але в процесі розв'язування припустився помилки у застосовуванні необхідного твердження чи формули	∓
Лише розпочав правильно розв'язувати завдання або розпочав хибним шляхом, але в подальшому окремі етапи розв'язування виконав правильно	-
Розв'язання не відповідає жодному з наведених вище критеріїв	-

На другому етапі вчитель переводить оцінку з системи «плюс - мінус» у бали за наступною шкалою.

Максимальний бал за завдання	Оцінка в системі «плюс - мінус». Переведення в бали			
	+	±	∓	-

1	1	0,5	0,5	0
2	2	1,5	1	0,5
3	3	2-2,5	1-1,5	0,5

Оцінкою роботи є сума балів, отримана учнем за виконання кожного завдання окремо. Якщо сумою є неціле число балів, то користуємося правилом округлення. Виправлення і закреслення в оформленні розв’язання завдань, якщо вони зроблені акуратно не є підставою для зниження оцінки.

Критеріїї оцінювання під час дистанційного навчання

Основною метою оцінювання учнів в умовах дистанційного навчання є не перевірка і контроль, а забезпечення зворотного зв’язку вчителя з учнями. Тому в організації щоденного освітнього процесу варто надавати пріоритет не поточному, а формувальному оцінюванню, яке передбачає надання учням підтримки, коригування засобів та методів навчання у випадку виявлення їх неефективності. Результати виконаних учнями самостійних робіт мають використовуватися для відзначення їх успіхів, аналізу помилок, планування подальшої роботи з опанування навчального матеріалу в умовах дистанційного навчання.

Поточне оцінювання вчителі можуть здійснювати в усній і письмовій формах, застосовуючи такі його види: тестування, практичні, контрольні, діагностичні роботи, дослідницькі та творчі проекти, усні співбесіди та опитування тощо.

Якщо вчитель застосовує одну з платформ для дистанційного навчання (Google Клас, Naurok , Moodle тощо), то МОН рекомендує налаштувати опцію проходження тесту один раз та обмежити час на виконання завдання, встановити термін для здачі тесту (контрольної, практичної або самостійної роботи тощо), повідомляти результати індивідуально після здачі робіт всіма учнями. Більш традиційний підхід передбачає передачу виконаних письмових робіт (зроблених на комп’ютері або сфотографованих) через електронну пошту або платформу Google Клас, moodle та інші, один із месенжерів (Viber, Facebook, WhatsApp тощо). Усні завдання можуть бути оцінені учителем безпосередньо через Skype, Zoom або будь-який месенджер, що забезпечує відеозв’язок у синхронному режимі або перевірені опосередкованим способом через відео або аудіо файли, надіслані учнями на пошту вчителя.

За відсутності засобів Інтернет-зв’язку, зворотній зв’язок з учнями вчитель може підтримувати в телефонному режимі, а виконані завдання отримувати поштою. Учитель може організувати самооцінювання учнями успішності своєї роботи, надіславши їм ключі для самоперевірки (після виконання роботи), критерії оцінювання та самооцінювання творчих робіт тощо. Якщо потрібно, вчитель може провести додаткове усне опитування учнів телефоном або через відеозв’язок.

Критерії оцінювання тесту

Оцінка	Відсоток
1-3	Виконано 30 % тесту
4	Виконано 31-44%
5	Виконано 45-54%
6	Виконано 55-64%
7	Виконано 65-74%
8	Виконано 75-84%
9	Виконано 85-94%
10	Виконано 95-100%
11-12	Якщо учень навів розгорнутий запис розв'язування завдання з обґрунтуванням кожного етапу та дав правильну відповідь.

3. Вимоги щодо ведення сторінок класного журналу з математики:

Запис тем, змісту уроку, завдання додому ведеться державною мовою. Записи проводяться чорнилами (пастою) одного (чорного або синього) кольору, чітко й охайно. У разі помилкового або неправильного запису поряд робиться правильний, який засвідчується підписом керівника навчального закладу та скріплюється печаткою.

Вимоги щодо ведення «лівої» сторінки журналу

№ з/п	Місяць і число / П.І. учня	Тема												
				II семестр	Скоригована	Річна	ДПА	Апеляцій-на'						
1	Антонов Антон													
2	Петрова Ірина													

Для класів, у яких проводиться державна підсумкова атестація. Відсутність учня (учениці) на уроці позначається літерою «н». Дата проведення занять записується дробом, чисельник якого є датою, а знаменник - місяцем поточного року. Наприклад, 31/01 означає, що заняття проведено тридцять першого січня. У разі проведення здвоєних уроків (у тому числі практичних, семінарських занять) дата кожного уроку (практичного заняття, семінару) записується окремо. Усі записи щодо оцінювання різних видів діяльності та контролю роблять у формі називного відмінка: «зошит», а не «за зошит», «І семестр», а не «за І семестр», «практична робота», а не «за практичну роботу» тощо. Оцінювання навчальних досягнень учнів здійснюються за 12-бальною системою (шкалою) і його результати позначаються цифрами від 1 до 12. У разі неатестації учня робиться відповідний запис: н/а (неатестований(а)).

Вимоги щодо ведення «правої» сторінки журналу

№ з/п	**Дата**	**Тема уроку**	**Завдання додому**
65	14/11	Додатні й від'ємні числа. Число «0».	Опрацювати §25, №854, 855, 862 Заміна Іванова Г.І. (Підпис).
66	16/11	Розв'язування вправ.	Повторити §25, №861, 867.

Положення про вимоги щодо ведення та перевірки зошитів з математики в загальноосвітніх навчальних закладах

I. Загальні положення

1.1. Дане Положення розроблено на підставі листа МОН України №1/9-529 від 27.12.2000р «Орієнтовні вимоги до виконання письмових робіт і перевірки зошитів з природничо-математичних дисциплін у 5-11 класах», наказу МОН України №371 від 05.05.2008р. «Про затвердження критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти».

1.2. Положення визначає основні організаційні засади, порядок ведення та перевірки зошитів з математики.

1.3. Ведення зошитів з математики учнями навчальних закладів з 5-го по 11-й клас є обов'язковим.

1.4. У зошитах виконуються письмові класні, домашні та контрольні роботи .

II. Види письмових робіт учнів

2.1. Основними видами класних і домашніх письмових робіт учнів є :

- вправи та задачі з математики;
- складання аналітичних та узагальнюючих таблиць, схем;
- самостійні та контрольні роботи.

2.2. Форми поточних та підсумкових письмових робіт:

- контрольні роботи з різнорівневими завданнями;
- контрольні роботи в тестовій формі;
- комбіновані контрольні роботи;
- самостійні роботи.

Поточні контрольні роботи мають на меті перевірку засвоєння вивченого програмового матеріалу. Зміст та кількість робіт визначається вчителем з урахуванням складності матеріалу, кількості годин на його вивчення, а також здібностей учнів класу. Для проведення поточних контрольних робіт учитель може використовувати цілий урок або його частину.

Підсумкові контрольні роботи проводяться після вивчення найбільш значущих тем у відповідності до календарно-тематичного планування вчителя та згідно з Програмою.

Підсумкові контрольні роботи проводяться в кінці семестру, року.

Кількість, характер самостійних робіт та час, відведений на їх проведення, визначається вчителем.

III. Кількість і призначення учнівських зошитів

3.1. Для виконання класних і домашніх робіт учні повинні мати таку кількість зошитів:

- з математики 5 — 6 класи - два зошити;
- з алгебри 7-9 класи - два зошити;
- з алгебри та початків аналізу 10-11 класи - один зошит;
- з геометрії 7-11 класи - один зошит.

3.2. Для контрольних робіт з математики передбачаються окремі зошити, які зберігаються в навчальному закладі протягом навчального року. В них виконуються контрольні та корекційні роботи:

в 5-6 класах - 1 зошит для контрольных робіт з математики;

в 7-11 класах - 2 зошити, з них один для контрольних робіт з алгебри (алгебри та початків аналізу) і один для контрольних робіт з геометрії.

3.3. В разі використання зошитів з друкованою основою для перевірки навчальних досягнень учнів, вчитель повинен зберігати використані варіанти протягом навчального року.

3.4. Самостійні роботи з математики учні можуть виконувати в робочих зошитах, в зошитах з друкованою основою, або на окремих аркушах.

IV. Порядок ведення зошитів з математики

Усі записи в зошитах учні виконують з дотриманням таких вимог:

4.1. Писати охайно, розбірливим почерком, синім чорнилом.

4.2. Оформлення титульної сторінки зошита :

Зошит

для робіт з математики(алгебри, алгебри та початків аналізу, геометрії)
учня(учениці)_______ А класу
спеціалізованої школи №23
Прізвище та ім'я (в родовому відмінку)

4.3. Зберігати поля з зовнішньої сторони.

4.4. Вказувати дату виконання роботи : число цифрами, а місяць прописом.

4.5. Вказувати, де виконується робота (класна чи домашня). Позначати номер вправи, задачі.

4.6. Між останнім рядком даної письмової роботи та наступною роботою пропускати 4 клітини .

4.7. Креслення виконуються олівцем (у випадку необхідності - із застосуванням лінійки та циркуля), а умовні позначення до них підписуються ручкою.

4.8. Невірні написи: літера, число чи знак закреслювати похилою лінією, частину слова, слово, вираз - тонкою горизонтальною лінією; угорі над виправленням надписується необхідна літера, слово, вираз; не виділяти невірні записи дужками. При виправленні не використовувати коректор.

V. Порядок перевірки письмових робіт учителями

5.1. Зошити учнів, в яких виконуються класні та домашні роботи,
перевіряються:

- з математики в 5 та 6 класах - один раз на тиждень у кожного учня (кількість перевірених робіт - не менше однієї на вибір вчителя);
- в 7-
9 класах - один раз на два тижні у кожного учня (кількість перевірених робіт - не менше двох на вибір вчителя);
- в 10-
11 класах - один раз на місяць у кожного учня (кількість перевірених робіт - не менше двох на вибір вчителя).

Вчителі не повинні обмежуватись лише власною перевіркою виконання учнівських робіт, а мають практикувати самоперевірку, взаємоперевірку, формуючи тим самим в учнів потребу здійснювати самоконтроль.

Вчитель також може перевіряти і оцінювати частину письмової роботи (задачу, вправу, побудову графіка тощо).

Оцінка за ведення зошитів з математики виставляється до класного журналу наприкінці вивчення кожної теми, але не менше, ніж один раз на місяць. До уваги береться наявність і правильність виконання класних і домашніх робіт, оцінки за поточну перевірку зошитів, охайність ведення зошитів.

5.2. Всі види контрольних робіт з математики перевіряються у всіх учнів.

5.3. Перевірка контрольних робіт учителем здійснюється в термін до наступного уроку.

5.4. У роботах, що перевіряються, вчитель позначає і виправляє допущені помилки, керуючись наступним:

- при перевірці зошитів і контрольних робіт з математики тільки підкреслює і виправляє допущену помилку.
- підкреслення і виправлення помилок здійснюється вчителем лише червоними чорнилами;
- при виставленні балу за роботу вчитель керується критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів відповідно до наказу МОН України №371 від 05.05.2008р. «Про затвердження критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти».

5.5. Результати контрольних, самостійних робіт обов'язково заносяться до класного журналу.

За класні і домашні письмові роботи в журнал виставляються бали на вибір учителя.

5.6. Після перевірки письмових робіт (контрольних робіт з різнорівневими завданнями, контрольних робіт у тестовій формі, комбінованих контрольних робіт) в контрольних зошитах проводиться корекційна робота.

Лекція 8. Методика навчання обдарованих учнів. Науково-дослідницька робота учнів старшої школи

План

1. Форми організації роботи з обдарованими дітьми.
2. Виявлення обдарованості учня
3. Науково-дослідна робота учнів та основні завдання
4. Види творчих дослідницьких робіт
5. Етапи виконання науково-дослідної роботи

1. Форми організації роботи з обдарованими дітьми

Більшість дослідників відзначають необхідність перебудови діяльності школи з урахуванням освітніх потреб обдарованого учня, що знаходить своє відображення, перш за все, у навчальних планах, програмах, формах та методах роботи, мета яких – створити простір для самореалізації, задоволення потреб у нових знаннях, спілкуванні, самовираженні, вихованні взаємовідносин.

Одним із напрямів відповідної діяльності у школах є створення профільних класів для поглибленого вивчення окремих предметів, які формуються за бажанням учнів та їх батьків на основі тестування з профілюючих предметів: мовно-літературні, фізико-математичні, суспільноправові, хіміко-біологічні. У кожному з них для поглибленого вивчення профільного предмета передбачається більша кількість годин, ніж у звичайних, а також вводяться додаткові курси. Як правило, учні профільних класів продовжують після школи навчання у вузах України за профілем.

З метою покращення роботи з обдарованими дітьми, переведення цієї роботи на якісно новий рівень створюються *внутрішкільні міжкласні факультативи* на підставі заяв батьків, бажання учнів, а також аналізу підсумків шкільних, міських та обласних предметних олімпіад. Згідно з бажаннями учнів та їхніх батьків для занять з обдарованими дітьми виділяється до 100 годин, що дає змогу створити факультативи з усіх базових і спеціальних дисциплін, а також факультативи з основ комп'ютерної грамотності, спортивно-оздоровчого напрямку, з прикладного мистецтва та народознавства. За кожною паралеллю класів закріплюються найбільш досвідчені учителі, основна мета роботи яких – утвердження дитини як вищої цінності і мети освітнього процесу. Розробляючи програми факультативних занять, учителі працюють над створенням умов для реалізації кожним школярем своїх можливостей, інтересів і здібностей. Більшість учителів, керівників факультативів, створюють авторські програми, які сприяють розвитку мислення учнів, формують навички самоконтролю, здатність нестандартно мислити і діяти. Такий підхід до організації факультативних занять дозволяє залучити до роботи з різних дисциплін значну кількість учнів 5-11 класів. До переваг внутрішкільних міжкласних факультативів можна віднести можливості виділення більшої кількості годин для факультативних занять, призначення керівником факультативу спеціаліста високого класу. Майже всі вчителі правильно розуміють цю ідею і скоординовують свою роботу так, що обдаровані учні опинилися у центрі уваги одразу двох учителів: учителя, який працює з ними на уроках, та вчителя, який додатково за індивідуальним планом працює з учнями на факультативних заняттях.

Велика увага приділяється організації та проведенню *предметних олімпіад*. Для організації та якісного проведення предметних олімпіад у школах створюються оргкомітети, які складаються з керівників методичних об'єднань, досвідчених учителів. Визначаються терміни проведення олімпіад з кожного предмета, створюються умови для підвищення їх якісного рівня. Перед олімпіадою проводяться консультації, після її закінчення, якщо є потреба, розглядаються апеляції. Після I туру олімпіади проводиться детальний аналіз результатів на засіданнях методичних об'єднань учителів. З числа переможців шкільних олімпіад складаються команди для участі у II турі всеукраїнських олімпіад з базових дисциплін.

Однією з форм організації роботи з обдарованими дітьми також є різноманітні заходи (відкриті класні години, свята, вечори, розважальні програми), де розкриваються нові грані юних обдарувань. Основними формами виховної роботи в школах є інформаційномасові (дискусії, диспути, "філософський стіл", інтелектуальні брейн-ринги); діяльнісно-практичні групові (огляди-конкурси, вечори акторської майстерності, виставки власних робіт); інтегровані (шкільні клуби, КВК, фестивалі, гуртки). Такі форми сприяють розвитку особистості, створюють умови для розкриття талантів та самореалізації.

У школах працюють *гуртки* для розвитку здібностей талановитих дітей. Класні керівники, вчителі-предметники залучають учнів до роботи в різноманітних науково-технічних товариствах, клубах, студіях, об'єднаннях, відповідно до їхніх інтересів, нахилів і можливостей. Усе це допомагає дитині реалізувати себе, стимулює самовиховання та саморозвиток.

У роботі з обдарованими дітьми є важливим та необхідним такий компонент системи, як *аналіз та корекція навчальної діяльності*. Він дозволяє проаналізувати хід і результати роботи з обдарованими дітьми, зрозуміти причини відхилення, визначити, де, як і чому допущені помилки. Для здійснення цього етапу використовуються зрізи знань з предметів, тести тощо.

Суттєвим етапом роботи з обдарованою дитиною є *спонукальномотиваційна діяльність* учителя, яка стимулює учня до самореалізації.

Основними формами залучення учнів до пошукової та *науководослідницької діяльності* є:

- *участь в роботі МАН України*, наукових гуртках, товариствах, секціях, клубах, школах юних дослідників, творчих лабораторіях;
- індивідуальна та групова робота над пошуковими та науководослідницькими проектами;
- науково-практичні конференції, семінари, колоквіуми, зльоти, наукові читання, конкурси-виставки пошукових та дослідницьких робіт, арістотелівські та сократівські бесіди;
- навчальні екскурсії, експедиції, дослідницькі маршрути;
- розроблення мультимедійних проектів, участь в Інтернет-олімпіадах, віртуальних дослідницьких змаганнях та конкурсах;

- робота сезонних наукових шкіл, оздоровчих одно- і багатопрофільних науково-практичних таборів в канікулярний час;

- самоосвітня діяльність.

Вчителі використовують різні форми роботи з обдарованими дітьми, але переконані, що домінувати мають самостійна робота, пошуковий та дослідницький підходи до засвоєння знань, умінь і навичок. Саме тому педагогічні колективи велику увагу приділяють участі учнів в науководослідницькій роботі *Малої академії наук України*, яка посідає чільне місце серед ефективних форм науково-дослідної діяльності, що сприяють розвитку творчого потенціалу учнів, спрямовує зусилля на розвиток дослідницьких здібностей школярів, залучає їх до активної дослідницької роботи. Саме тут старшокласники проходять першу школу становлення як майбутніх науковців, дослідників. У МАН учні ознайомлюються з досягненнями науки і техніки, розвивають творчу думку, реалізують прагнення до наукового пошуку, набувають дослідницьких умінь.

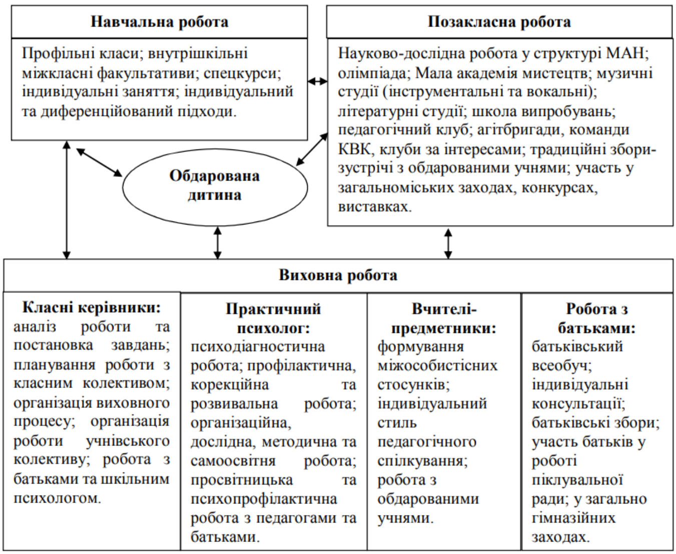


Рис. 1. Форми та методи роботи з обдарованими учнями

МАН України є творчим об'єднанням учнівської молоді, яка забезпечує її інтелектуальний і духовний розвиток, підготовку до активної діяльності в галузі науки та сприяє самовизначенню в майбутній професії. Мала академія залучає учнівську молодь до систематичної науково-дослідницької, експериментальної, конструкторської і винахідницької діяльності в галузі історії та літературознавства, математики й екології, фізики та біології, хімії та економіки, технічної творчості та геології, педагогіки та географії, сільського господарства й археології тощо. Малі академії та наукові товариства учнів створюються на базі обласних, районних, позашкільних навчально-виховних та інших закладів освіти, як їх структурні підрозділи або як секції, гуртки, клуби науково-дослідницького напряму діяльності. Метою роботи кожного регіонального відділення є пошук, відбір і навчання здібної учнівської молоді. Кращі вчителі працюють над тим, щоб залучити учнівську молодь до систематичної науково-дослідницької, експериментальної, винахідницької діяльності у різних галузях знань. Для виявлення дітей, схильних до наукової роботи, вчителі використовують різноманітні тести, конкурси наукових робіт, семінари, де діти і виявляють свою зацікавленість будь-якою науковою проблемою.

2. Виявлення обдарованості учня

З урахуванням світового досвіду стосовно виявлення обдарованих дітей, шкільними практичними психологами розробляються дієві системи тестування учнів. Виявлення дітей з відповідними здібностями є складною й багатоаспектною проблемою, для вирішення якої комплексно використовуються методики дослідження творчих здібностей. За їх допомогою оцінюється критичність, гнучкість, конструктивність мислення, образна оригінальність як компонент творчої особистості, визначається рівень уяви, її гнучкість, рівень сформованості загальних творчих здібностей, вплив установки на оригінальність розумової діяльності. Результати виконання завдань обробляються за кожною методикою окремо та заносяться до зведеної таблиці, яка дає об'єктивну картину щодо процесів мислення кожної дитини, її схильностей та здібностей. Один із варіантів діагностики здібностей – застосування теорії домінуючих здібностей або теорії множинного інтелекту американського психолога, професора Гарвардського університету Говарда Гарднера. Ця теорія присвячена дослідженню множинних здібностей людини, їх ідентифікації та урахуванню у навчальному процесі. Основні положення: людина має не єдиний, так званий "загальний інтелект", а низку інтелектуальних здібностей:

•вербально-лінгвістичні (добре розвинуті вербальні вміння і чуттєвість до звуків, значень і ритміки слів);

•математично-логічні (здатність мислити концептуально і абстрактно, розрізняти логічні або числові зразки);

•музикальні (здатність розрізняти, продукувати і цінувати ритм, тембр і висоту звуків); •візуальні (здатність мислити образно, візуалізувати точно і абстрактно);

•кінестетичні (здатність контролювати рухи свого тіла і майстерно вправлятися з предметами);

•міжособистісні (здатність розпізнавати і реагувати відповідним чином на настрій, мотивацію і бажання інших);

•внутрішньо-особистісні (здатність усвідомлювати свою особистість, бути у гармонії з внутрішніми відчуттями, цінностями, поглядами і процесами мислення);

•натуралістичні (здатність розпізнавати і класифікувати рослини, тварини та інші об'єкти природи);

•екзистенціальні (чуттєвість, здатність розглядати глибоко питання про існування людини, такі, як сенс життя, чому ми приходимо у цей світ, чому помираємо тощо).

Кожний із цих типів інтелекту має свою структуру, функції, мову і тому є особливим потенціалом для розвитку.

Множинні здібності взаємодіють між собою з утворенням різних когнітивних (пізнавальних) стилів, а саме: *аналітичного; інтерактивного; інтроспективного*.

Аналітичний когнітивний стиль ґрунтується на логічних, музичних, натуралістичних здібностях, які за своєю природою є евристичними процесами і найбільш фундаментально забезпечують процес аналізу та інтеграції даних в існуючі схеми.

Інтерактивний когнітивний стиль складається з вербальних, міжособистісних та кінестетичних здібностей, оскільки саме вони стимулюють до певної діяльності; за своєю природою є соціальним процесом.

Інтроспективний когнітивний стиль охоплює екзістенційні, інтраособистісні та візуальні здібності, які мають чітко виражений афективний компонент і передбачають самоаналіз, емотивний зв'язок з власним досвідом і уявленнями з метою усвідомлення нових знань. За своєю природою він є афективним процесом.

Ідентифікація виду здібностей учня, визначення рівня розвитку їх складових, дозволяє залучити старшокласників до наукової діяльності, передбачивши напрямок, в якому б вони найповніше реалізували свій потенціал.

Зважаючи на те, що діяльність Малої академії наук України відбувається за предметними секціями, саме тип здібностей вказує на напрямок дослідницької діяльності. Враховуючи отримані результати тестування, вчителі-предметники залучають учнів до науково-дослідницької роботи у різних секціях МАН. У свій час філософ-просвітитель Софокл говорив: "Великі справи не робляться зненацька". Щоб досягти високих результатів, навчити дитину основам пізнання світу потрібна довга копітка спільна робота вчителя, учня і батьків.

3. Науково-дослідна робота учнів та основні завдання

Головне завдання вчителя – не просто передати знання учневі, а навчити його вчитися. І цьому багато в чому учить організація науково-дослідної діяльності школярів.

В умовах сучасного ринку праці зростає значущість знання і тому в школі виникає необхідність пошуку нових методів навчання і виховання, спрямованих на пропаганду інтелектуальних цінностей і авторитет знань, навичок наукової роботи і передпрофесійної наукової діяльності. Найбільш придатною для вирішення питань мотивації школярів до навчання на уроках і в позаурочний час виступає науково-дослідна діяльність школярів, основною функцією якої є стимулювання учнів до пізнання світу, себе і себе в цьому світі.

Під *дослідницькою діяльністю* розуміється творчий процес спільної діяльності двох суб'єктів (вчителя і учня), пов'язана з вирішенням творчих дослідницьких завдань із заздалегідь невідомим рішенням, результатом якої є формування дослідницького стилю мислення і світогляду в цілому, і яка передбачає наявність основних етапів, характерних для дослідження у науковій сфері. Важливо розуміти, що науково-дослідна діяльність учнів це процес спільної роботи учня і педагога. Тому при написанні робіт учитель повинен розуміти головну мету і основні завдання роботи.

Організація науково-дослідної діяльності школярів дозволяє розвивати в учнів пізнавальні інтереси, самостійність, культуру навчальної праці, дозволяє систематизувати, узагальнювати, поглиблювати знання з певної галузі навчального предмету і вчить їх застосовувати на практиці. Самим сензитивным періодом для формування основ дослідницької діяльності є підлітковий період.

Основними завданнями науково-дослідної роботи є:

- формування у школяра інтересу до наукової творчості, навчання методиці і способам самостійного вирішення науково-дослідних завдань;
- розвиток творчого мислення і самостійності, поглиблення і закріплення отриманих при навчанні теоретичних і практичних знань;
- виявлення найбільш обдарованих і талановитих школярів, використання їх творчого і інтелектуального потенціалу для вирішення актуальних завдань. Головне завдання – забезпечення учня необхідними знаннями і уміннями, на основі яких формуються наукове мислення і дослідницька культура.

Знання учнів знаходяться в прямій залежності від обсягу і систематичності їх самостійної пізнавальної діяльності.

Для того, щоб знання були результатом їх власних пошуків, вчителеві необхідно організувати ці пошуки, управляти ними. Все це можна здійснити через організацію науководослідної діяльності учнів. Існує кілька рівнів проходження учнів через дослідницьку діяльність:

1 рівень – репродуктивний, включає елемент входження в пошукову, науково-дослідну діяльність через систему олімпіад, конкурсів, оглядів.

2 рівень – емпірико-практичний, що передбачає ускладнений елемент проходження учнів через систему екскурсій, колекціонування тощо.

3 рівень – дослідницький, експериментальний, що включає ускладнений елемент проходження учня через систему спецкурсів.

4 рівень – творчий, продуктивно - діяльнісний, що включає власне дослідницьку і експериментальну роботу, пов'язану з конструюванням, моделюванням і захистом своїх проектів.

4. Види творчих дослідницьких робіт

Продуктом науково-дослідної діяльності школярів є творча науководослідна робота. Виділяють п'ять видів творчих дослідницьких робіт:

Реферативні – роботи, в основу яких входять збір і представлення інформації з обраної теми. Суть реферативної роботи – вибір матеріалу з першоджерел, що якнайповніше висвітлюють проблему. Специфіка реферату полягає в тому, що в ньому немає розгорнутих доказів, порівнянь, міркувань. Реферат відповідає на питання про те, що нового міститься в тексті.

Описові - творчі роботи, спрямовані на спостереження і якісний опис явища. Ці роботи можуть мати елемент наукової новизни. Особливістю є відсутність кількісної методики дослідження.

Проектні – творчі роботи, в основу яких покладено опис заздалегідь спланованого результату з вирішення якої-небудь проблеми, значимої для учасників проекту.

Експериментальні – творчі роботи, написані на основі виконання експерименту, який описаний в науці і має відомий результат. Дані роботи носять швидше ілюстративний характер, передбачають самостійне трактування особливостей результату залежно від зміни вихідних умов.

Дослідницькі – творчі роботи, виконані за допомогою коректної з наукової точки зору методики, мають отриманий за допомогою цієї методики власний експериментальний матеріал, на підставі якого зроблено аналіз і висновки про характер досліджуваного явища. Особливістю таких робіт є непередбачуваність результату, який можуть дати дослідження.

Всі *творчі роботи* мають загальні елементи:

1. Всі роботи розпочинаються з опрацювання літературних джерел, але при виконанні реферативних робіт аналіз літератури є основним вмістом роботи, а при виконанні проектних, експериментальних, описових, дослідницьких робіт аналіз літературних джерел виступає як літературний огляд даних про досліджуване явище.

2. У методичному плані всі види робіт структуровані на постановку проблеми, власне матеріал і висновки.

Відмінністю *дослідницьких робіт* від інших видів творчих робіт є:

1.Практична методика дослідження обраного явища.

2.Власний експериментальний матеріал.

3.Аналіз отриманих даних і зроблені на його основі висновки.

Труднощі, з якими стикаються учні при організації науково-дослідної діяльності:

• слабке володіння методологією наукового дослідження, дефіцит методичної, наукової, психолого-педагогічної, спеціальної літератури;

• велика завантаженість учнів, відсутність часу;

• побоювання вчителів залучати дітей до «невластивої для них наукової діяльності»;

• наукообразність в освітньому процесі, тобто відірване від життя знання.

5. Етапи виконання науково-дослідної роботи

Існує певний алгоритм виконання науково-дослідної роботи – технологічний ланцюжок, який включає чотири етапи.

1. Діагностичний етап. Метою діагностичного етапу технологічного ланцюжка з виконання науково-дослідної роботи є "знайти" учня, в якого було б бажання, інтерес, здібності до виконання дослідницької роботи.

Методи пошуку – спостереження, діагностика на уроках, позакласних заходах, співбесіди, психолого-педагогічна діагностика (методика Ґ. Ґарднера). На діагностичному етапі доцільно провести дослідження релевантних умов освітнього середовища дитини ("релевантность" - доцільність). Релевантні умови – це умови, які створюються в тому освітньому середовищі, де ви працюєте і інтенсивно використовуються вчителем для організації дослідницької діяльності учня. Перш ніж приступити до виконання творчої роботи потрібно вивчити рівень соматичного, психологічного і соціального здоров'я школяра, аби дослідницька діяльність не нашкодила здоров'ю учня. Вивчення релевантних умов можна провести через медичну діагностику (виявити рівень фізичного здоров'я, наявність хронічних захворювань тощо), психологічну діагностику (тип темпераменту, вивчення рівня тривожності, вивчення особливостей адаптації до нових умов тощо), педагогічну діагностику (рівень інтелектуального розвитку, розвиток знань, умінь, навичок). Запис в наукове товариство здійснюється на підставі бажання учнів брати участь у науково-дослідній роботі та результатів діагностичних досліджень. Провідна роль тут належить вчителеві-предметнику. В процесі індивідуальної роботи з учнями вони мають розгледіти "іскру" дослідницького таланту, допомогти у виборі теми дослідження, визначити коло проблем, що потребують рішення, підібрати необхідну літературу. В зв'язку з цим важливо, щоб учень вже з перших кроків розумів конкретну значущість свого дослідження, можливість його використання в практичному плані (виступи на уроках і в позаурочних заходах, участь в наукових конференціях різного рівня).

2. Теоретичний етап (етап планування). Відбувається затвердження *тематики досліджень*. Ця процедура здійснюється у межах роботи кафедри і на настановній конференції наукового учнівського товариства.

Ця процедура вважається значимою, оскільки дозволяє:

- усвідомити учнями значущість своєї роботи;
- створити атмосферу співпраці між учнями і вчителем;
- стимулює розвиток їх науково-дослідної діяльності.

Часто виникає ситуація, коли тема проекту знаходиться на стику декількох дисциплін, вимагає консультаційної допомоги фахівців. У цьому випадку до співпраці притягуються інші вчителі-предметники.

Найважливішими завданнями даного етапу є *аналіз проблеми, визначення джерел інформації, постановка завдань, складання плану роботи з теми дослідження.*

Теоретичний етап включає такі напрями діяльності:

Визначення галузі дослідження – потрібно чітко визначити межі предметної сфери, в рамках якої виконується науково-дослідна робота. Галузь дослідження – це сфера науки і практики, в якій знаходиться об'єкт дослідження.

Проблема – завдання, перешкода, трудність. *Проблема дослідження* – це суперечлива ситуація, що вимагає свого вирішення. Вирішення цього протиріччя безпосередньо пов'язане з практичною необхідністю. Правильна постановка і ясне формулювання проблеми дослідження дуже важливе. Вона визначає стратегію дослідження, напрям наукового пошуку.

Тема дослідження – вужча сфера дослідження в межах предмету. Тема – це ракурс, в якому розглядається проблема дослідження. Тема має бути ємкою, короткою і конкретною. Об'єкт дослідження – це процес або явище, що породжує проблемну ситуацію. Наприклад: лісовий біогеоценоз в районі дослідження.

Предмет дослідження – це частина об'єкту, яку можна перетворити, аби об'єкт змінився. Наприклад: екологічний стан лісового біогеоценозу, викликаний негативним антропогенним навантаженням.

Гіпотеза дослідження. Гіпотеза (підстава, припущення) – науково обґрунтоване припущення про безпосередньо спостережуване явище. Гіпотеза має бути сформульована таким чином, щоб її можна було перевірити, тобто, вона має містити припущення.

Формулювання мети і завдань дослідження. Мета дослідження – це кінцевий результат, якого б хотів досягти дослідник по завершенні своєї роботи. Зазвичай *мету* формулюють із слів: довести, обґрунтувати, розробити, пояснити, визначити, встановити. З поставленої мети витікають завдання дослідження. Завдання дослідження – вибір шляхів і засобів досягнення мети. *Завдання* формулюють за допомогою слів: проаналізувати, виявити, визначити, встановити, вивчити.

Відбір методів дослідження. Метод дослідження – це спосіб досягнення мети дослідження. Методи дослідження поділяються на теоретичні (вивчення і аналіз літератури, порівняння, моделювання, класифікація, систематизація) і емпіричні (спостереження, соціологічне опитування, тестування, моніторинг, анкетування, інтерв'ю).

3. Практичний етап (етап виконання) На даному етапі учні виконують згідно плану дослідження (обробляють інформацію, виконують експеримент) і оформляють науково-дослідну роботу.

Вчитель на даному етапі виступає в ролі консультанта і помічника. Безпосередня робота над проектом. Під керівництвом учителів учні обирають тему майбутнього дослідження, складають план роботи, який включає роботу в наукових бібліотеках, архівах, зустрічі з науковим керівником, написання роботи та як кінцевий результат – участь у конкурсі-захисті учнівських науково-дослідницьких робіт. Учителі разом з учнями працюють в архівах, проводять дослідження. Праця вчителя з учнями над науковими роботами сприяє формуванню в учнів навичок дослідницької роботи, справжніх творчих особистостей з власною думкою та позицією, яку вони можуть відстоювати і аргументувати.

Робота щодо участі учнів у МАН постійно вдосконалюється. Учні залучаються до роботи наукових конференцій, семінарів, де вони виступають з результатами власних досліджень, захищають самостійно підготовлені реферати тощо. 1 раз на тиждень проходять засідання кафедри, де учні представляють виконану роботу. Це дозволяє здійснювати контроль над процесом роботи, оперативно вирішувати виникаючі проблеми, підтримувати інтерес і рівень інформованості про дослідження, що проводяться, серед учнів і вчителів.

4. Етап рефлексії (етап оцінки результатів і захисту дослідницьких робіт). На даному етапі відбувається експертиза творчих проектів, що проводиться експертними групами, створеними на основі методичних об'єднань вчителів школи.

Рецензенти і опоненти з числа вчителів дають попередню оцінку виконаній роботі, виявляють слабкі сторони дослідження, надають допомогу в вирішенні виниклих питань. Учні під керівництвом педагогів готують доповіді з теми дослідження, презентації для захисту науково-дослідної роботи. Презентації можна зробити на паперових носіях у вигляді діаграми, схеми, таблиці, фотографії і на електронних носіях у формі комп'ютерної презентації. При захисті робіт на науково-дослідних конференціях, як правило, використовуються можливості процесора презентацій Power Point. Для створення високопрофесійних відеоматеріалів за допомогою Power Point не обов'язково бути художником.

Шаблони дизайну, що поставляються в комплекті з програмою, забезпечують високу якість результату, а використання всіх можливостей Power Point дозволяє створювати ефектні проекти. Перед вивченням програми Power Point учні можуть створити індивідуальний проект з вибраної ними теми. Таким чином, учням із самого початку стає ясною мета вивчення програми, вони підходять до вивчення її усвідомлено, у них формується сильна мотивація.

На думку вчителів, які постійно працюють із старшокласниками, талановиті, здібні діти повинні весь час перебувати в особливому творчому середовищі наукового пошуку, розвивати уміння полемізувати, обстоюючи власну думку і формуючи власні наукові погляди на світ. Одним із головних завдань школи керівники науково-дослідної роботи учнів вбачають розвиток інтелектуального потенціалу підростаючого покоління, творчо обдарованої молоді, її залучення до наукової діяльності, орієнтованої на вирішення нагальних проблем суспільства, реалізацію національних інтересів країни, формування нових громадян України, основними рисами яких є компетентність, діловитість, прагнення до безперервної самоосвіти та самовдосконалення, різнобічність інтересів і захоплень. Серед учнів – учасників МАН було проведено опитування з метою виявлення мотивів науково-дослідницької діяльності учнів. Основне питання – "Що спонукає учнів займатися науково-дослідницькою роботою?" Аналіз результатів дозволив відслідкувати дві групи мотивів: широкі соціальні мотиви (відповідальність, самовизначення та самовдосконалення, благополуччя, престижу, уникнення неприємності); суто навчальнопізнавальні мотиви (цікавить сам зміст і процес навчально-дослідницької діяльності). Вчителі переконані, що участь школярів у відділеннях і секціях МАН успішно вирішує проблеми індивідуалізації та диференціації навчання, формування навичок самоаналізу і творчості, мотивів досягнення мети, потреби в самореалізації, вчить робити власні винаходи, відкривати нові факти в науці. Напрацьований вчителями досвід роботи з обдарованими та схильними до науково-дослідницької діяльності дітьми дозволяє: відслідковувати та коригувати зростання питомої ваги учнів, учасників конкурсів-захистів наукових робіт різних рівнів, дійсних членів МАН; спостерігати за зміною особистісних освітніх та виховних орієнтирів учасників МАН, зростанням їх інтелектуального потенціалу; виявляти домінуючі чинники та напрямки науково-дослідницької діяльності на конкретні проміжки часу, розробляти технології їх впровадження в навчальний процес та самоосвітню діяльність. Значна роль у роботі з обдарованими учнями належить учителям організаторам науково-дослідницької діяльності школярів. Підготувати вихованця до ведення наукового дослідження спроможний лише підготовлений належним чином педагог, який не тільки володіє сукупністю знань, добре орієнтується в сучасних методиках, а передусім є вправним психологом, що вміло вибудовує свої відносини із школярами. Взаєморозуміння, прагнення допомогти один одному, спільними зусиллями виробити шлях вирішення проблеми, знаходити істинний та відкидати хибний напрямки дослідження, уміння розділити як успіх, так і невдачу – ось ті риси, які характерні для більшості вчителів-консультантів та їх підопічних. Зрозуміло, що пробудити в дитині інтерес, спонукати її до відкриттів, пошуків, знахідок, роздумів може лише активний, зацікавлений учитель. Нажаль не всі вчителі мають бажання керувати роботою учнів в МАН, посилаючись на відсутність вільного часу, досвіду, бажання, матеріального заохочення.

Лекція 9. Математичні поняття, математичні твердження, теореми

План

1. Означення математичних об’єктів і види означень
2. Основна методична задача при навчанні означень математичних об’єктів.
3. Аксіоми і теореми. Види теорем.
4. Методи доведення теорем.
5. Методика навчання учнів доведень теорем.

1. Означення математичних об’єктів і види означень

Питання про поняття, об’єкти та їхні означення дуже складне за змістом і може розглядатися з різних точок зору: логічної, змістовної (наочної) або пізнавальної (гносеологічної) і через це навіть в різних методичних рекомендаціях даються різні його аспекти. За основу необхідно вибрати логічну структуру об’єктів з урахуванням математичних трактувань.

Враховуючи, що навчання можливе тільки в діяльності, необхідно розглядати дії, адекватні видам означень понять і об’єктів. Тому в зміст лекції входитиме актуалізація і систематизація знань змісту операції «означення понять», структури означень та їхніх видів.

Поняття — це форма мислення про цілісну сукупність істотних і неістотних властивостей об’єктів реального світу, зокрема і математичних об’єктів. Для формування математичних понять необхідне розуміння математичного об’єкта, який в понятті характеризується завдяки застосуванню певних розумових дій. Коли йде мова про математичний об’єкт, наприклад, про прямокутник або квадратне рівняння, то мається на увазі конкретний емпіричний (реальний) об’єкт, представлений у вигляді рисунка, моделі або аналітичного запису, і одночасно теоретичний (ідеальний) об’єкт, що володіє всіма істотними властивостями. У прикладі з прямокутником це не тільки нарисований прямокутник, але й усі об’єкти, які є суть геометричні фігури з чотирма сторонами, протилежні з яких паралельні та рівні, всі кути прямі, діагоналі рівні.

Сформувати поняття про об'єкт — це означає розкрити всі істотні властивості об'єкта в їх цілісній сукупності. Діяльність учня (суб'єкта) при цьому направлена на вивчення математичного об'єкта, а продуктом цієї діяльності буде правильне поняття. Однією з дій вивчення математичного об'єкта для отримання поняття про нього є дія означення.

Означити об'єкт — це означає вибрати з його істотних властивостей такі і стільки, щоб кожна з них була необхідна, а всі разом достатні для відмінності об'єкта, що вивчається, від інших.

Означення (дефініція) — це речення, в якому з допомогою вже відомих понять і їхніх властивостей розкривається зміст означуваного поняття. Виконується дія означення різними шляхами (з допомогою різних розумових і наочних операцій), і результат її виконання фіксується в різного вигляду означеннях.

Логічна структура дії означення математичних об'єктів, взагалі кажучи, єдина. Розрізняють *зміст та обсяг поняття*. Як уже зазначалося зміст поняття — це сукупність усіх властивостей поняття, які розкриваються через означення поняття. ***Обсяг поняття*** — це множина усіх об'єктів, які позначаються даним поняттям. Обсяг поняття розкривається через його ***класифікацію*** (наприклад: множина дійсних чисел складається з множини раціональних чисел та множини ірраціональних чисел) або ***через перелік усіх об'єктів***, що позначаються поняттям (наприклад, обсяг поняття «одноцифрові числа» — це числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Суть дії означення математичних об'єктів.

Для розуміння суті дії означення математичних об'єктів необхідне розуміння структури аксіоматично побудованої теорії. Якщо навчальний предмет будується аксіоматично (або близько до аксіоматичного методу), то вибираються основні об'єкти (фігури) та їхні істотні властивості або зв'язки між ними розкриваються в системі аксіом. Так, в сучасних підручниках основні фігури в планіметрії «точка» і «пряма» та відношення між ними «належати» і «лежати між» розкриваються з допомогою чотирьох аксіом. Потім на основі непрямих охарактеризованих властивостей основних об'єктів (фігур) предмета і відносин означаються подальші об'єкти (фігури) предмета. Наприклад, промінь уже можна означити через уведення фігур «пряма», «точка» і відношення «лежати по різні сторони» як еквівалентне відношення «лежати між» та загальні гносеологічні поняття «частини» і «множина». Для конструювання означення поняття «відрізок» на прямій вибирається її частина. Частина ця складається з таких точок, які лежать між заданими фіксованими точками на прямій, які називають кінцями відрізка. Оскільки відрізок — *частина прямої*, то ширшим поняттям для нього буде пряма; отже, пряма — ***родове поняття***, причому найближче. ***Видові відмінності***: частина прямої; точки, що обмежують цю частину з різних боків.

Розглянемо ще приклад. Трикутник — це фігура, яка складається з трьох різних точок та трьох відрізків, які їх послідовно сполучають. Родовим найближчим об'єктом буде фігура; видові відмінності: три різні точки та три відрізки, які послідовно задані точки сполучають.

Операції, що розкривають дію означення об'єктів, будуть наступні: *вибирається найближчий родовий об'єкт (фігура), потім на цей об'єкт накладаються певні обмеження — видові характеристики (відмінності). На основі видових характеристик (відмінностей) уводиться новий об'єкт, але з меншим обсягом, ніж родовий, оскільки у нього більше властивостей. Цьому об'єкта з великим числом властивостей і меншим обсягом привласнюється нова назва (термін).*

Так, з усіх рівностей рівнянням назвемо тільки таку рівність, в записі яких є змінні (букви). З усіх рівнянь квадратними назвемо такі, які мають вигляд $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$. З усіх прямокутників квадратами назвемо такі прямокутники, в яких суміжні сторони рівні, і т. ін.

Структура цієї дії може бути символічно виражена таким чином:

$$\begin{array}{ccc} \forall x \in M & A(x) & B(x) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{рід} & \text{термін} & \text{видові відмінності} \end{array}$$

При виділенні видів означень математичних об'єктів часто загальну дію — означення об'єктів — називають конкретним видом «означення через найближчий рід і видові відмінності». Вважаємо правомірним вести мову про специфіку дій з виділення видових відмінностей і залежно від цього розрізняти означення і називати їх означеннями об'єктів конкретного вигляду. Відповідно до цього можна назвати такі види означень математичних об'єктів залежно від специфіки дій, з допомогою яких виділяють родові об'єкти і видові відмінності. Тобто, ***означення через найближчий рід і видові відмінності мають таку конкретизацію*:**

1) означення об'єктів шляхом зазначення їхньої характеристичної властивості;

2) генетичні, конструктивні і рекурсивні означення.

Означення математичних об'єктів шляхом опису характеристичної властивості. Цей вид означень побудований на логічних діях і операціях установлення найближчого роду, видових відмінностей і логічної природи зв'язку між родом і видовими відмінностями. Залежно від логічної природи зв'язку властивостей у шкільному курсі математики розрізняють *кон'юнктивні, диз'юнктивні та імплікативні означення*.

Розглянемо, наприклад, означення паралелограма. Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні. *Виконаємо* ***логічний аналіз*** *цього означення — визначимо* ***термін, рід, видові відмінності та тип означення***. *Термін* — паралелограм. *Рід* — чотирикутник. *Видові відмінності*: 1) одна пара протилежних сторін паралельна; 2) інша пара протилежних сторін паралельна. Усі властивості в означенні з’єднані *сполучником «і»;* отже, маємо ***кон’юнктивне означення***.

Інший приклад — означення неправильного дробу. Дріб, в якому чисельник більший, ніж знаменник, або рівний йому, називається неправильним дробом. *Термін* — неправильний дріб. *Рід* — дріб. *Видові відмінності*: 1) чисельник більший від знаменника; 2) чисельник рівний знаменнику. Видові відмінності з’єднані *сполучником «або»*. ***Означення диз’юнктивне***.

Третій приклад — означення зростаючої функції. Функція називається зростаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції. *Рід* — функція. *Термін* — зростаюча функція на проміжку $[a;b]$. *Видові відмінності*: якщо $x_2 > x_1$, $x_1 \epsilon [a;b]$, $x_2 \epsilon [a;b]$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Означення за формою записане у ***вигляді імплікації***.

Означення такого вигляду або такі, що приводяться до них, складають переважну більшість шкільного курсу математики.

Генетичні, конструктивні та рекурсивні означення.

Властивості об’єкта в такому означенні розкриваються *шляхом опису процесу його виникнення, побудови або утворення, тобто його видові відмінності задані у вигляді дій.* Інколи такий вид означень ***називають конструктивними означеннями***.

Розглянемо приклад — означення перетворення повороту. Поворотом навколо даної точки називається такий рух, при якому кожен промінь, який виходить з цієї точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямку. *Термін* — поворот. *Рід* — рух. *Видові відмінності:* 1) кожен промінь, який виходить з точки, повернутий в одному і тому ж напрямку; 2) кожен промінь повернутий на один і той же кут.

Ще приклад — квадратична функція. Квадратичною функцією називається функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$. *Термін* — квадратична функція. *Рід* – функція. *Видові відмінності*: x — незалежна змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$ і $y = ax^2 + bx + c$, тобто якщо ці дії між числами і змінною задані, то маємо квадратичну функцію. Якщо дії інші, то це не квадратична функція.

Конструктивні дії можуть задаватися по-різному. Так, в ***рекурсивних означеннях*** указуються окремі базисні об'єкти деякого класу і правило (чи правила), що дозволяють отримати нові об'єкти цього ж класу. Інколи такі означення ***називають індуктивними***.

Наприклад, означення арифметичної прогресії. Арифметичною прогресією називається послідовність, в якій кожен член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додають одне й те саме число. *Рід* — послідовність, *термін* — арифметична прогресія, *видові відмінності*: a_1 — дане; $a_{n+1} = a_n + d$, де $n \in N$.

Розрізняють також ***означення через перелік***, що даються, як правило, при узагальненні понять (раціональні та ірраціональні числа називаються дійсними числами), та ***означення у вигляді формул*** (щоб показати, що знак рівності вживається для означення (дефініції), його супроводжують буквами *df*):

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right)^{df} = (\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 \ |x_0 - a| < \varepsilon).$$

Виділяють ще окремо так звані ***заперечні означення***, які не задають властивості об'єкта, а виконують (умовно) класифікаційну функцію. Якщо клас об'єктів розбитий на групи (множини) і об'єктам однієї групи, що володіють певними властивостями, привласнений термін і є об'єкти, які належать цьому класу, але відміченими властивостями (всіма або частиною) не володіють, то таким об'єктам дається заперечне означення.

Розглянемо приклад такого означення — означення мимобіжних прямих. Мимобіжні прямі — це такі прямі, які не належать одній площині і не перетинаються. *Рід* — прямі, *термін* — мимобіжні прямі, видові відмінності: 1) не належать одній площині; 2) не перетинаються.

Таким чином, *логічна дія* — означення об'єкта — всюди однакова, але *змістовні (математичні*) дії в кожному з відмічених видів означень різні. В одних видові відмінності перераховуються як описові характеристики (бути паралельними, бути більше і т. ін.); в інших указуються дії, які треба провести, щоб отримати (сконструювати) об'єкт; у третіх перераховуються властивості, які заперечуються.

Таким чином, головне в типології шкільних означень за видами — це розуміння специфіки дій, що розкривають (характеризують) видові відмінності.

2. Основна методична задача при навчанні означень математичних об'єктів.

Основною методичною задачею при навчанні означень математичних об'єктів є формування логічної дії з розкриття структури означення математичних об'єктів і дій, адекватних конкретному виду означень.

Дії, з допомогою яких розв'язуватиметься ця основна методична задача, наступні:

• логічний аналіз структури означень різного вигляду (виділення логічної і змістовної функцій кожного слова в означенні об'єкта, відшукання зайвих слів у означеннях та ін.);

• підведення конкретного математичного об'єкта під означення;

• наведення конкретного прикладу, об'єкта, що ілюструє належність його даному означенню; • заміна означення об'єкта еквівалентним означенням цього об'єкта — цю дію іноді називають переформулюванням означення; порівняння різних означень одного і того ж об'єкта;

• отримання наслідків із факту, що об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням;

• знаходження логічних і змістовних помилок у наведених означеннях.

Про означення немає смислу говорити — істинне воно чи хибне. Означення може бути правильним (коректним) або неправильним (некоректним) в залежності від того, чи задовольняє воно такі вимоги до означень:

1. Означення не повинне містити ще не означених понять

(якщо вони не є первинними). Порушення цього правила часто набирає форми зачарованого кола, коли одне поняття означають через інше, яке, у свою чергу, означається через перше поняття.

2. Означення повинне бути відповідним означуваному поняттю, тобто, обсяг поняття, розкритого цим означенням, повинен збігатися з обсягом означуваного поняття.

3. Різні означення не повинні суперечити одне одному.

4. Означення не повинне містити зайвої інформації.

Дія підведення об'єкта під означення складається з наступних операцій:

1) вичленення всіх властивостей, зафіксованих в означенні;

2) встановлення логічного зв'язку між родом і видовими відмінностями;

3) перевірка наявності в об'єкта, що підводиться під означення, відмічених властивостей і їхніх зв'язків;

4) отримання висновку — об'єкт належить до класу об'єктів, зафіксованих в означенні, чи ні.

3. Аксіоми і теореми. Види теорем.

Вивчення теорем та їх доведень у систематичних курсах геометрії й алгебри починається з 7 класу. Теореми та доведення їх розвивають логіку мислення учнів, просторові уявлення та уяву, навчають методам доведення, сприяють усвідомленню ідеї аксіоматичної побудови математики. Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема обґрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки.

Математика має справу з висловленнями (або твердженнями), які доводяться (теореми, задачі на доведення), і такими, що їх домовляються приймати без доведення (аксіоми).

Залежно від логічної структури теореми, як і будь-якого висловлення, розрізняють чотири їх види: прямі, обернені, протилежні, контрапозитивні (інакше кажучи, протилежні оберненим, або обернені протилежним щодо прямої теореми).

Запишемо *пряму теорему* у вигляді умовного висловлення: «Якщо *P,* то *Q*», (1), де *P* — умова теореми, *Q* — її висновок.

Помінявши в теоремі (1) місцями умову і висновок, дістанемо *обернену* щодо (1) *теорему:* «Якщо *Q*, то *P*», (2).

Замінивши в теоремі (1) *P* і *Q* їхніми запереченнями *«P»* і «*Q*», дістанемо *протилежну* щодо (1) *теорему:* «Якщо $\overline{P}$, то $\overline{Q}$», (3).

Одночасно помінявши місцями в теоремі (1) умову і висновок *P* і *Q* і замінивши їх запереченнями «*P*» і «Q», дістанемо *контрапозитивну* (протилежно обернену або обернену протилежній) *теорему* щодо (1): «Якщо $\overline{Q}$, то $\overline{P}$», (4).

4. Методи доведення теорем.

Розглянемо основні методи доведень.

Аналітичний метод. Математика і методики її навчання містять два види аналітичних міркувань. Перший з них разом із синтетичним описав Евклід у своїх «Началах», хоча вони були відомі ще раніше Платону (428 — 348 до н. є.) й Арістотелю (384 — 322 до н. е.). Другий вид увів Паші (III ст.).

Суть аналізу Евкліда можна пояснити на прикладі доведення нерівності.

Приклад 1. Довести нерівність $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$. Міркуватимемо так.

1. Припустимо, що задана нерівність — правильна.
2. Виведемо з неї наслідки: помножимо обидві частини на $a^2 > 0$ ($a^2 \neq 0$ за умовою). Дістанемо $a^4+1\geq 2a^2$.
3. Перенесемо $2a^2$ в ліву частину останньої нерівності. Дістанемо:
4. $a^4 -2a^2 +1\geq 0$.
5. Запишемо ліву частину отриманої нерівності у вигляді квадрата двочлена: $(a^2-1)^2\geq o$.

Остання нерівність правильна за будь-якого *a*.

Отже, міркування виконувалися від того, що потрібно довести. При цьому з припущення правильності того, що слід довести (основа), виводились наслідки, які привели до очевидної правильної нерівності (наслідку).

Такі аналітичні міркування називають *аналізом Евкліда.* Проте цей аналіз не можна вважати доведенням, хоча ми й дістали очевидну правильну нерівність, оскільки правильність наслідку ще не гарантує правильності основи. Справді, з хибної основи правильними міркуваннями можна дійти правильного наслідку. Наприклад, $-a = a$, де $a \neq 0$ — хибне твердження. Якщо піднести обидві частини цієї неправильної рівності до квадрата, дістанемо правильну рівність $a^2 = a^2$. Перехід від істинності наслідку до істинності основи можливий тільки тоді, коли основа і наслідок — правильні взаємно обернені судження.

Саме з цієї причини аналіз Евкліда не можна вважати доведенням, і тому його називають інколи «недосконалим аналізом».

Синтетичний метод. Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У ньому міркування виконують від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. Якщо умову доводжуваного твердження (або відоме твердження) позначити літерою A, а висновок — B, то схема синтетичного методу матиме вигляд $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B$. Синтетичний метод разом з аналізом Евкліда особливо зручно використовувати для доведення нерівностей.

Аналітико-синтетичний метод. Цей метод полягає в тому, що пошук доведення починають аналітичним методом, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямі, тобто з розгортання умови. Отже, завершують доведення синтетичним методом.

Метод доведення від супротивного. Цей метод уводять уже в 7 класі на початку навчання курсу планіметрії. Його логічною основою є закон виключення третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге — неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження — неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження. При цьому стосовно супротивного твердження здійснюють аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки.

Метод математичної індукції. Логічною основою цього методу є принцип математичної індукції, взятий в шкільному курсі за аксіому: якщо твердження $A(n)$, яке залежить від натурального числа n, виконується для $n = 1$ або $n = n_0$ та із припущення, що воно виконується для натурального числа $n = k$, де $k > n_0$, випливає, що воно виконується і для $n = k + 1$, то це твердження виконується для будь-якого натурального числа $n (n \geq n_0)$.

Правило-орієнтир доведення методом математичної індукції містить три кроки.

1. Перевірити правильність твердження для $n = 1$ або $n = n_0$.

2. Припустити, що твердження правильне за $n = k$, де $k \geq n_0$, і довести, використовуючи це припущення, що твердження правильне за $n = k + 1$, тобто для наступного значення n.

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального n, де $n \geq n_0$.

Векторний та координатний методи. Векторний (координатний) метод доведення геометричних тверджень полягає в тому, що їхні умови і вимоги перекладають на мову векторів (координат). Отримані векторні (координатні) рівності приводять до потрібного вигляду на основі властивостей операцій над векторами (координатами), а потім результат перекладають у зворотному напрямі — на мову геометрії.

5. Методика навчання учнів доведень теорем.

Навчання готових доведень. Навчанням доведень називатимемо навчання готових доведень, пропонованих учителем або підручником, і навчання учнів самостійного пошуку доведень.

Проблему навчання доведень доцільно поділити на кілька навчальних завдань, які розв'язують послідовно: 1) вивчення готових доведень, вміння відтворювати їх; 2) самостійна побудова доведення за вивченим зразком; 3) пошук і виклад доведення за вказаним учителем методом (способом); 4) самостійний пошук і виклад доведення учнями.

Для успішного навчання доведень потрібно, щоб учні оволоділи досить повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови тощо). Підготовка до навчання учнів доведень здійснюється вже в 5 — 6 класах, де вони ознайомлюються з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів. Цілеспрямоване навчання доведень починається з перших уроків систематичного курсу планіметрії введенням понять «теорема», «доведення теореми». Учні мають вчитися виконувати аналіз формулювання теореми, тобто відокремлювати умову від висновку.

Уміння доводити математичні твердження має чотири основні складові: 1) дія підведення об'єкта до поняття; 2) володіння необхідними і достатніми ознаками понять, про які йдеться у висновку; 3) дія вибору ознак понять, які відповідають заданим умовам; 4) дія розгортання умов. З метою забезпечення свідомого засвоєння учнями готових доведень і навчання їх самостійно шукати доведення потрібно заздалегідь формувати ці складові.

Під час вивчення готових доведень теорем учні мають усвідомлювати істотні елементи доведення, відсторонюватися від неістотних (розміщення рисунка, позначення літерами) і помічати істотне спільне в доведеннях. Наприклад, істотним спільним у доведенні всіх трьох ознак подібності трикутників є те, що доведення кожної ознаки починається з виконання перетворення гомотетії одного з даних трикутників з коефіцієнтом, що дорівнює відношенню довжини сторони другого трикутника до довжини відповідної сторони першого. Доводиться, що отриманий при гомотетії допоміжний трикутник дорівнює першому, а отже, подібний другому з даних трикутників.

Перш ніж проводити докладне доведення, потрібно спочатку назвати основні етапи і твердження, на яких воно ґрунтуватиметься. Це дає можливість звернути увагу учнів на структуру доведення в цілому, виявити основну його ідею, назвати метод.

Психологи обґрунтовують це тим, що докладне, розгорнуте доведення забезпечує утворення зв'язків між окремими ланками, а коротка схема з указівкою на ідею і метод доведення забезпечує розуміння структури основних зв'язків в цілому, сприяє міцності засвоєння матеріалу.

Навчання учнів самостійного пошуку доведень. Навчання учнів уміння самостійно здійснювати пошук доведення значною мірою залежить від володіння основними складовими уміння доводити і методами доведень.

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять необхідні й достатні або достатні ознаки понять, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися розгортати умови, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

У процесі підготовки до пошуку складніших доведень можна скористатися правилами-орієнтирами, що вказують, як встановити найпоширеніші відношення між двома фігурами: рівність, подібність їх, паралельність прямих або відрізків. Наприклад, для доведення рівності відрізків або кутів досить: 1) довести рівність трикутників або інших фігур, елементами яких є зазначені у вимозі відрізки (кути), а потім зробити висновок про рівність відповідних відрізків (кутів); 2) довести, що один відрізок (кут) можна отримати з другого, виконавши деякий рух.

Володіння методами доведень і вміння вибрати потрібний метод — важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. В процесі навчання учнів самостійного пошуку доведень найважливішим є аналітичний метод.

Правило-орієнтир аналітичного методу доведення може бути таким.

1. Запитати: з якого раніше відомого твердження необхідно випливає висновок доводжуваного твердження? Інакше кажучи, знайти доведене раніше твердження (або аксіому), якого достатньо, щоб зробити висновок доводжуваного твердження.

2. Якщо такого раніше відомого твердження знайти не вдається, то потрібно шукати інше, поки ще не доведене твердження, з якого необхідно випливав би висновок доводжуваного.

3. Потім потрібно шукати наступне твердження, з якого необхідно випливало б попереднє, і так далі, доки не буде отримано твердження, яке безпосередньо випливає з умови теореми.

4. Зробити висновок, що дане твердження доведене, оскільки весь ланцюжок достатніх умов для виконання висновку задовольняється в силу умови доводжуваного твердження.

Лекція 10. Задачі в навчанні математики та методика їх розв'язування (доведення)

План

1. Роль математичних задач.
2. Функції задач.
3. Методи розв'язування математичної задачі.
4. Процес розв'язування задачі.
5. Організація навчання розв'язування задач.

1. Роль математичних задач.

Задача - поняття неозначуване і в самому широкому розумінні означає те, що вимагає виконання, розв'язування. Кожна задача задає сукупність даних - умова задачі і питання, що вказує на шукане – вимога задачі. Відповідно від вимоги задачі розпізнають чотири види задач: 1) на обчислення, 2) на побудову; 3) на доведення; 4) на дослідження.

В залежності від співвідношення між умовою задачі і її вимогою задачі можуть бути: означені (такі, що мають одне або декілька розв'язань), неозначені (такі, що мають нескінченну кількість розв'язань), переозначені (такі що не мають розв'язань).

Задачі підрозділяються на прості і складні. Якщо із задачі не можна виділити другу задачу, вона є простою, а якщо можна – складною.

Розрізняють стандартні і нестандартні задачі. До стандартних відносяться задачі, які мають певний алгоритм розв'язання. Задачі, що не мають загального алгоритму розв’язання, називаються нестандартними. Якщо учням відомий алгоритм розв’язання цієї задачі, то її можна вважати шаблонною. Якщо в момент розв'язання стандартної задачі загальний метод її розв'язання невідомий то задача є нешаблонною. Нестандартні і нешаблонні задачі можна об'єднати в одну групу - групу цих задач.

Задачі є і предметом і засобом навчання. Вони є основним засобом забезпечення зв'язку навчання із життям, політехнічного направлення навчанні, здійснення між предметних зв'язків всередині математики і останньої з іншими навчальними предметами.

2. Функції задач.

В навчанні математиці виділяють найбільш важливі функції задач: навчальні, виховні, розвиваючі, контролюючі.

Навчальні функції спрямовані на формування у школярів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання.

Виховні функції спрямовані на формування пізнавального и самостійності, навичок навчальної праці, культури математичної мови, графічної культури.

Розвиваючі функції спрямовані на розвиток мислення в учнів, проявлень, на оволодіння ними ефективними прийомами розумової діяльності.

Контролюючі функції спрямовані на встановлення рівня навчання, здібності до самостійного вивчення матеріалу, рівня математичного розвитку учнів і сформованості пізнавальних інтересів.

Види задач: практичні (реальні), математичні (за характером об'єктів); нестандартні (за відношенням до теорії); на розрахунки, побудова доведення, дослідження (за характером вимог).

Види задач за функціональним призначенням. Система задач.

За своїм функціональним призначенням у процесі навчання задачі як засіб навчання можуть бути безпосередньо направлені на формування знань, умінь і навичок учнів (***навчальні задачі***) або на здійснення контролю з боку вчителя рівня сформованості знань, умінь і навичок (***контролювальні задачі***).

Навчальні задачі перш за все пов’язані з формуванням елементів теоретичних знань і пов’язаних з ними умінь. До теоретичних знань, які формуються при вивченні математики, можна віднести поняття та їхні означення, теореми та їх доведення, правила (алгоритми). Потрібно відзначити, що велике навантаження у формуванні практичних математичних умінь і навичок несуть задачі, направлені на *формування правил (алгоритмів)*. У ході розв’язування таких задач формуються обчислювальні уміння і навички, навички тотожних перетворень алгебраїчних і трансцендентних виразів, уміння і навички розв’язування рівнянь і нерівностей певних типів та ін. Оскільки формування умінь і особливо навичок вимагає неодноразового повторення певної послідовності операцій (тобто вправ із виконання тієї або іншої дії), то задачі, пов’язані з формуванням умінь і навичок учнів, зазвичай називають вправами. Проте не тільки вправи направлені на формування умінь і навичок учнів. У ході розв’язування задач, направлених на засвоєння понять і теорем, формуються, наприклад, уміння виділяти істотні ознаки понять, аналізувати структуру означень і формулювань теорем, використовувати істотні ознаки і властивості понять, а також факти, отримані в ході доведення теорем у різних ситуаціях.

Для формування виділених елементів теоретичних знань і оволодіння відповідними їм видами діяльності учням недостатньо одних задач. Повинно йтися про систему завдань, що забезпечує засвоєння навчального матеріалу. Перерахуємо *загальні і специфічні* особливості систем навчальних завдань, направлених на формування елементів теоретичних знань.

Загальним для систем завдань, направлених на засвоєння учнями понять, теорем і правил, є наявність в них задач, що готують уведення відповідного елементу теоретичних знань, пов'язаних з його аналізом (побудовою) та його застосуванням. Серед підготовчих задач зазвичай виділяються задачі на мотивацію вивчення понять, теорем, правил і задачі на актуалізацію знань, умінь і навичок, необхідних при роботі з новим навчальним матеріалом.

Особливості системи завдань на засвоєння поняття і його означення:

1. Наявність завдань, пов'язаних з ілюстрацією практичної значущості нового поняття або з його значущістю для подальшого вивчення математики.

2. Наявність завдань на актуалізацію знань і умінь, необхідних при формуванні даного поняття. 3. Наявність завдань на виділення істотних ознак поняття.

4. Наявність завдань на розпізнавання поняття, що формується.

5. Наявність завдань на засвоєння тексту означення поняття.

6. Наявність завдань на використання символіки, пов'язаної з поняттям.

7. Наявність завдань на встановлення властивостей поняття.

8. Наявність завдань на застосування поняття.

Відомо, що не завжди робота з поняттям припускає формулювання його означення (особливо це стосується понять, що розглядаються в V–VI класах). У цьому випадку в системі завдань будуть відсутні задачі на засвоєння тексту означення.

Наведена система видів завдань забезпечує формування двох навчальних дій: *підведення об'єкта під поняття; виведення наслідків з факту належності об'єкта до даного поняття.*

Особливості системи завдань на засвоєння теореми і її доведення:

1. Наявність завдань на розкриття необхідності знання математичного факту, сформульованого в теоремі.

2. Наявність завдань на актуалізацію математичних фактів, що використовуються при доведенні даної теореми, або фактів, для яких дана теорема є узагальненням, а також на актуалізацію способів доведення, аналогічних тим, що використовуються в даній теоремі (наприклад, методу від супротивного).

3. Наявність завдань на обчислення і доведення або на побудову, які приводять учнів до усвідомлення факту, сформульованого в теоремі.

4. Наявність завдань на засвоєння формулювання теореми.

5. Наявність завдань на засвоєння окремих етапів доведення теореми.

6. Наявність завдань, в ході розв'язування яких повторюється хід доведення теореми (наприклад, при зміненому кресленні).

7. Наявність завдань на відшукання іншого способу доведення факту, сформульованого в теоремі.

8. Наявність завдань на застосування факту, сформульованого в теоремі, для отримання нових математичних фактів, установлення кількісних співвідношень між об'єктами або отримання способів побудови об'єктів.

3. Методи розв'язування математичної задачі.

Розв'язати математичну задачу - це значить знайти таку повність загальних положень математики, використовуючи які до умов задачі чи до їх наслідків, одержуємо те, що вимагається в задачі, - її відповідь.

Основними методами і способами доведення та розв'язання задач були: синтетичний; аналітичний; від супротивного; застосування рівнянь до розв'язування задач (метод рівнянь); графічний метод; математичної індукції, повної індукції; розв'язування рівнянь на основі залежностей між компонентами і результатами дій; геометричних перетворень, штучний методі, векторний та координатний, тощо

Розв'язування математичних задач різними методами

Аналітичний метод передбачає застосування тотожних перетворень і співвідношень, отриманих на підставі відомих геометричних фактів. Такі перетворення, формули часто застосовуються без урахування взаємного розміщення фігур і їхніх елементів. Розв'язати задачі, використовуючи аналітичний метод, досить часто можна без побудови рисунка.

Аналітичний – це метод міркувань від невідомих, шуканих до даних величин.

Приклад. Дві сторони трикутника відносяться як 3:5, а кут між ними дорівнює $120°$. Знайдіть всі сторони та площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 15 см.

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Позначимо за x коефіцієнт пропорційності.

Оскільки в трикутнику є пропорційні сторони, то можна першу сторону позначити $3x$, другу - $5x$.

2. Складемо рівняння або систему рівнянь з невідомим.

Оскільки периметр трикутника дорівнює 15 см, то третя сторона: $15 - 8x$. Для складання рівняння використаємо теорему косинусів. Отримаємо

$$(15 - 8x)^2 = 9x^2 + 25x^2 - 30x^2 \cdot \cos 120°$$

3. Розв'яжемо отримане рівняння.

Спростимо рівняння і отримаємо $x^2 - 16x + 15 = 0$. Знайдемо значення невідомого $x = 1$(корінь 15 відкидаємо як такий, що не задовольняє умову).

4. Користуючись знайденою величиною даємо відповідь на запитання задачі.

Сторона 1: $3x = 3$ см, сторона 2: $5x = 5$ см, сторона 3: $15 - 8x = 7$ см.

Синтетичний метод здебільшого використовується в початковій школі та в 5-6 класах основної школи у разі розв'язування найпростіших задач.

Розв'язуючи задачу синтетичним методом, міркують від умови до шуканого, тобто виводять наслідки з того, що дано.

Приклад. Відстань між містами A і B дорівнює 288 км. З міста A до міста B виїхав автомобіль зі швидкістю 72 км/год. Одночасно з автомобілем з міста B до міста A виїхав велосипедист, який зустрівся з автомобілем через 3 год після виїзду. За який час подолає відстань між містами автомобіль? За який - велосипедист?

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Визначаємо час руху автомобіля:

$288 \div 72 = 4$ (год).

2. Знаходимо шлях, який автомобіль проїхав до зустрічі:

$72 \cdot 3 = 216$ (км).

3. Обчислимо шлях, який подолав велосипедист до зустрічі:

$288 - 216 = 72$ (км).

4. Знаходимо швидкість велосипедиста, оскільки шлях завдовжки 72 км він проїхав за 3 год:

$72 \div 3 = 24$ (км/год).

5) Знайдемо час, за який проїхав усю відстань велосипедист:

$288 \div 24 = 12$ (год).

Метод моделювання. Моделювання використовується в основному при розв'язуванні неалгоритмічних задач для подолання труднощів, які виникають в ході розв'язування. Для подолання цих труднощів використовуються моделі у вигляді схем, креслень тощо, які називають допоміжними моделями задачі.

Приклад. Юнак пішов до залізничної станції, до якої було10.5 кілометрів. Через пів години слідом за ним вийшов його брат, який, ідучи зі швидкістю 4 кілометри за годину, наздогнав юнака і повернувся з попередньою швидкістю. З якою швидкістю йшов юнак, якщо відомо, що весь час він ішов рівномірно, а його брат повернувся додому в той момент, коли юнак підійшов до станції?

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Представимо модель задачі у вигляді таблиці

	Після зустрічі			Весь шлях		
	S, к.	V, км/год	t, год	S, км	V, км/год.	t, год
Юнак	$10{,}5 - x$	y	$\frac{10{,}5-x}{y}$	$10{,}5$	y	$\frac{10{,}5}{y}$
Брат	x	4	$\frac{x}{4}$	$2x$	4	$\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$
Рівняння	$\frac{10{,}5-x}{y}=\frac{x}{4}$			$\frac{10{,}5}{y}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ оскільки брат вийшов на 30 хв пізніше.		

2. Розв'яжемо задачу

Отже маємо систему

$$\begin{cases} 42-4x=xy \\ \dfrac{21}{y}=x+1 \end{cases}$$

$$x=\frac{21}{y}-1;$$

$$\left(\frac{21}{y}-1\right)(y+4)=42$$
;

$$y^2+25y-84=0$$

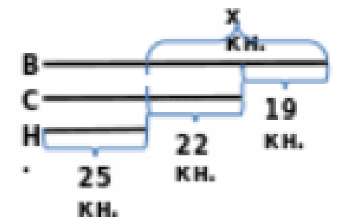
Враховуючи $y > 0$, дістанемо $y = 3$.

Графічний метод передбачає використання графіків (графічних схем) для опису й пояснення різних процесів та закономірностей. Використання графіків сприяє наочному та більш глибокому розумінню процесу, дає можливість уявити поставлену задачу, а також її розв'язок.

Алгоритм методу розв'язування задачі

Приклад. На нижній полиці 25 книг, на середній на 22 книги більше, ніж на нижній, а на верхній на 19 книг більше, ніж на середній. На скільки більше книг на верхній полиці, ніж на нижній?

1. Представимо графічно умову задачі.



2. Знайдемо кількість книг на середній полиці.

$25 + 22 = 47$ (кн.)

3. Знайдемо кількість книг на верхній полиці.

$47 + 19 = 66$ (кн.)

4. Знайдемо, на скільки більше книг на верхній полиці, ніж на нижній.

$66 - 25 = 41$ (кн.)

Або ж розв'язати задачу виразом:

$(25 + 22) + 19 - 25 = 41$ (кн.)

Векторний метод розв'язування задач. Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше - у вигляді векторної рівності.

Приклад. Довести що середня лінія трикутника паралельна третій стороні й дорівнює її половині.

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Сформулюємо вимогу задачі на мові векторів. Позначимо на малюнку вектори AB, BF, BC, AC і EF. Тоді тоді вимогу задачі запишемо так:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2. За правилом трикутника $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$. Перетворимо цю векторну рівність, враховуючи, що $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Дістанемо : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. З останньої векторної рівності $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ випливає: 1) вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні і, отже, відрізки EF і AC паралельні; 2) $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, або $EF = \frac{1}{2}AC$.

Координатний метод. Розв'язуючи задачу координатним методом, так само як і векторним, виконуємо три кроки:

1) записуємо геометричну задачу мовою координат;

2) перетворюємо алгебраїчний вираз;

3) переводимо знайдений результат на мову геометрії.

Методом координат розв'язуємо задачі на відшукання геометричних місць точок і на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.

Розв'язуючи задачу методом координат, потрібно раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розміщати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу.

Приклад. Довести, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він – прямокутник .

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Розмістимо паралелограм у системі координат так, щоб його вершини мали координати: $A(0;0), B(b;c), C(a+b;c), D(a;0)$.

2. За умовою $AC = BD$. Подамо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2} = \sqrt{(a+b)^2+(0-c)^2},$$
$$(a+b)^2+c^2 = (a-b)^2+c^2,$$

або

$$a^2+2ab+b^2+c^2 = a^2-2ab+b^2+c^2,$$

Звідси $4ab = 0$.

3. Оскільки $a > 0$, то $b = 0$, а це означає, що точка $B(b;c)$ лежить на осі Oy. Тому кут ABD прямий, а звідси паралелограм $ABCD$ –прямокутник.

Метод математичної індукції

У загальному вигляді його можна описати так: Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n. Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин(теорем):

1) Доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$(або для деякої більшої кількості значень n, якщо це важливо). (База індукції)

2) Роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$.

3) На підставі попереднього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$. (Перехід індукції)

4) Робимо висновок.

Приклад. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Очевидно сума $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ ділиться на 9. Тобто, твердження справедливе, коли перший доданок 1.

2. Припустимо, що твердження справедливе, коли перший доданок $k \in N$. Тобто, $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ ділиться на 9 без остачі.

3. Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \\
&= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27^k + 27 \\
&= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)
\end{aligned}
$$

4. Отже, перший доданок ділиться на 9 за припущенням, в той час другий доданок ділиться на 9 бо є добутком дев'ятки на деяке натуральне число $(k^2 + 3k + 3)$.

Метод від супротивного полягає в тому, що, маючи твердження, будуємо нове, заперечивши висновок попереднього. Утворюється протилежне твердження. Виходячи з висновку протилежного твердження, будуємо «ланцюг» істинних тверджень, поки не отримаємо твердження, яке суперечить або умові, або відомій аксіомі чи теоремі, або припущенню. Отже, отримуємо висновок, що протилежне твердження хибне, а тому початкове – істинне (тут діє логічний закон: з двох протилежних тверджень одне істинне, друге хибне, третього не дано).

Приклад. Доведіть твердження: якщо дві паралельні прямі паралельні третій паралельні між собою

Алгоритм методу розв'язування задачі

1. Будуємо протилежне твердження: існують дві прямі паралельні третій непаралельні між собою.
2. Будуємо «ланцюг» істинних тверджень, поки не отримаємо твердження, яке суперечить або умові, або відомій аксіомі чи теоремі, або припущенню.

Виходимо з висновку нового твердження: нехай прямі a і b, які паралельні третій прямій c, не паралельні між собою. Тоді вони перетинаються в деякій точці А. Отримали, що через точку проходять дві різні прямі, паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Прийшли до протиріччя.

3. Останнє твердження – хибне. Отже, початкове – істинне.

4. Процес розв'язування задачі.

Процес розв'язування будь-якої задачі розгортається за етапами:

1) вивчення змісту (тексту) задачі, під час якого здійснюються: перше (попереднє) читання тексту задачі для загального ознайомлення з нею; поглиблене читання; скорочений (схематичний, графічний) запис змісту задачі та аналітико-синтетичне вивчення його; зв'язане повторення за скороченим записом;

2) здійснення вищих форм аналізу і синтезу (логічного, причинно-наслідкового) та інших розумових операцій для встановлення зв'язків цієї задачі з відомими задачами і теоремами, для розкриття залежностей між даними і шуканими елементами задачі і головне - для складання плану її розв’язання;

3) розв'язання задачі з відповідними поясненнями;

4) перевірка правильності розв'язку і в разі потреби – дослідження його;

5) після розв'язання деяких задач зробити повторний огляд їх з метою виявлення кращого способу розв'язання, здобуття повчальних узагальнень, висновків і досвіду.

Письмове пояснення ходу розв'язання задачі є одним із засобів навчання і контролю; воно вимагає більшої мобілізації знань і зусиль. Головними вимогами до нього є: правильність розкриття математичних і логічних зв'язків і залежностей в задачі; послідовність викладу думок; чіткість, лаконічність, граматична і стилістична правильність запитальних і стверджувальних речень.

Виняткової уваги набуває методична робота учителя над допущеними помилками при розв'язанні задачі. Обдумування запитань типу: «Де саме допущена помилка?", "Чи правильний самий перший крок розв’язання? Другий?", "Чи не допущено помилку в записі умови задачі?", "В чому полягає ця помилка?" і т.д., ретельна перевірка кожного кроку розв’язання - такий напрям цієї роботи.

5. Організація навчання розв'язування задач.

Є такі організації навчання розв'язування задач:

- фронтальне розв'язання задач: усне, письмове із записом на дошці, письмове самостійне, коментоване розв'язання задач;

- індивідуальне розв'язання задач - індивідуалізація самостійних робіт із розв'язання задач, із ліквідації прогалин в знаннях математики, домашнє розв’язування задач. Кожна складна задача зводиться у процесі розв'язування до простих задач.

Процеси аналізу і синтезу спрямовані на пошуки напрямку розв’язання, на розкриття всієї сукупності зв'язків і залежностей у задачі, які дають змогу впевнено намітити план розв'язання, встановити характер і послідовність простих задач, які ведуть від даних умов до шуканого розв'язку.

Розв'язок задачі буває - правильним і неправильним, точним і наближеним, загальним і частковим. Розв'язання кожної задачі повинно бути: 1) безпомилковим; 2) обґрунтованим; 3) повним; 4) раціональним.

Лекція 11. Державна підсумкова атестація здобувачів загальної середньої освіти з математики. Сертифікація вчителів математики.

План

1. Державна підсумкова атестація (ДПА), зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО), національний мультипредметний тест (НМТ).
2. Сертифікація вчителів математики.

1. Державна підсумкова атестація (ДПА), зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО), національний мультипредметний тест (НМТ).

Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) та державна підсумкова атестація (ДПА) створені з метою контролю якості та ефективності засвоєння учнями знань і вмінь. Розберемо в чому різниця між зовнішнім незалежним оцінюванням і державною підсумковою атестацією.

ЗНО – це всеукраїнський вступний іспит, за результатами якого абітурієнт може бути зарахований до ЗВО, своєрідний квиток для вступу. Тож, якщо ви плануєте вступати до вишу, маєте складати ЗНО.

ДПА – це вихідний квиток із школи, підсумок здобутих знань на момент завершення повної загальної середньої освіти і проводяться у 4-му, 9-му і 11-му класах. Результати ДПА у 9-му і 11 -му класах зазначаються у додатку до свідоцтва про здобуття повної загальної середньої освіти, значить, ДПА впливає на середній бал атестата, який, у свою чергу, враховується для розрахунку конкурсного бала при вступі.

З 2019 року по сьогодні ДПА відмінили у зв'язку з карантином і повномасштабним вторгненням росії в Україну, а завдання ЗНО з 2022 року з усіх предметів об'єднали в комплексний тест, який має назву національний мультипредметний тест (НМТ).

Розглянемо блок мультипредметного тесту з математики і його особливості у 2024 році.

Яким буде зміст завдань блоку НМТ з математики?

Зміст завдань блоку НМТ з математики буде відповідати чинній програмі ЗНО з математики (https://testportal.gov.ua/progmath/). Ця програма охоплює всі теми з алгебри й геометрії, які вивчалися у шкільному курсі, а саме:

- «Числа і вирази»;
- «Рівняння, нерівності і їх системи»;
- «Функції»;
- «Ймовірність випадкової події, вибіркові характеристики (середнє значення), аналіз діаграм та графіків»;
- «Планіметрія»;
- «Стереометрія».

Яка структура блоку НМТ з математики?

Усього в блоці НМТ з математики буде **20 завдань**, з-поміж яких:

- 14 завдань з вибором однієї правильної відповіді з п'яти запропонованих варіантів;

- 4 завдання на встановлення відповідності (потрібно встановити по 3 «логічні пари»);
- 2 завдання відкритої форми з короткою відповіддю (неструктуровані завдання).

Зверніть увагу, що в блоці НМТ з математики **не буде завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю.**

Як будуть оцінювати завдання блоку НМТ з математики?

Завдання з математики буде оцінено відповідно до схеми нарахування балів, застосовуваної в ЗНО. Тобто по 1 тестовому балу буде нараховано за кожну правильну відповідь на завдання з вибором однієї правильної відповіді, по 1 тестовому балу за кожну правильно визначену логічну пару в завданнях на встановлення відповідності та по 2 бали за кожну правильну коротку відповідь. Отже, за виконання завдань блоку НМТ з математики можна отримати від 0 до 30 балів.

Свій результат (тобто кількість набраних балів за правильно виконані завдання) учасник знатиме після виконання блоків НМТ. Пізніше результат кожного блоку буде також переведено в шкалу 100–200 балів. Для отримання результату за шкалою 100–200 достатньо буде набрати хоча б один тестовий бал.

Із завданнями ЗНО і НМТ за минулі роки можна ознайомитись за посиланням: https://zno.osvita.ua/mathematics/

2. Сертифікація вчителів математики.

Сертифікація педагогічних працівників — зовнішнє оцінювання професійних компетентностей педагогічного працівника (у тому числі з педагогіки та психології, практичних вмінь застосування сучасних методів і технологій навчання), що здійснюється шляхом незалежного тестування, самооцінювання та вивчення практичного досвіду.

Як відбуватиметься сертифікація вчителів

У 2024 році порядок сертифікації визначено «Положенням про сертифікацію педагогічних працівників».

Участь у сертифікації зможуть взяти 4 тисячі педагогів: 1500 учителів початкових класів, по 1000 вчителів математики й української мови та літератури, які викладають у 5-6 класах, і 500 викладачів історії.

Реєстрація для проходження сертифікації триватиме з 15 до 30 січня 2024 року і проходитиме у два етапи.

Основний етап триватиме з 15 до 25 січня, у цей час вчителі зможуть зареєструватись у межах граничної кількості для кожного регіону, визначеної МОН.

Під час додаткового етапу, що триватиме з 26 до 30 січня, учителі, які виявлять бажання пройти сертифікацію, зможуть зареєструватись у межах граничної кількості педагогів, якщо якісь регіони не вичерпають свій ліміт.

У випадку, якщо кількість заяв сягне граничної кількості раніше визначених термінів, реєстрація буде припинена достроково.

Етапи сертифікації педагогічних працівників

Сертифікація складається з трьох етапів, що відбуваються послідовно один за одним:

1. Незалежне тестування учасників сертифікації;
2. Самооцінювання учасниками сертифікації власної педагогічної майстерності;
3. Вивчення практичного досвіду роботи учасників сертифікації.

Оскільки сертифікація добровільна, педагогічний працівник може відмовитися від участі в ній на будь-якому етапі.

Незалежне тестування учасників сертифікації

Незалежне тестування учасників сертифікації організовує Український центр оцінювання якості освіти. Для успішного проходження незалежного тестування та, відповідно, допуску до участі в наступному етапі сертифікації необхідно набрати не менше 60% максимальної кількості тестових балів.

Результати незалежного тестування та інформація про допущення / недопущення учасників сертифікації до участі в наступному етапі сертифікації розміщують у кабінетах учасників сертифікації не пізніше ніж через 18 календарних днів після його проведення.

Самооцінювання

Учасники сертифікації, які за результатами незалежного тестування допущені до подальшої участі у сертифікації, мають здійснити самооцінювання власної педагогічної майстерності з формування в учнів ключових компетентностей і вмінь, визначених у частині першій статті 12 Закону України «Про освіту».

Для цього педагогічний працівник **заповнює анкету самооцінювання** за формою, затвердженою Державною службою якості освіти, та надсилає на адресу, визначену Службою.

Державна служба якості освіти:

- організовує вивчення результатів самооцінювання педагогічної майстерності учасників сертифікації;
- приймає рішення щодо допущення/недопущення до наступного етапу.

Рішення про допущення/недопущення Державна служба якості освіти:

- приймає не пізніше 10 робочих днів з дня завершення строку подання результатів самооцінювання;
- надсилає протягом 3 робочих днів з моменту прийняття рішення учаснику сертифікації на адресу електронної пошти, зазначену ним під час реєстрації.

Учасник сертифікації не допускається до наступного етапу, якщо:

- не подав результати самооцінювання;
- не дотримав строки чи форму подання результатів самооцінювання;
- відмовився від подальшої участі у сертифікації.

Вивчення практичного досвіду роботи учасників сертифікації

Вивчення практичного досвіду роботи учасників сертифікації організовує Державна служба якості освіти. Для цього ДСЯО:

- здійснює організаційне забезпечення вивчення практичного досвіду учасників сертифікації;
- взаємодіє із закладами освіти, установами, організаціями, органами виконавчої влади та органами місцевого самоврядування з питань підготовки експертів та їх залучення до вивчення практичного досвіду роботи учасників сертифікації;
- організовує добір і підготовку експертів, забезпечує їх інформаційними та методичними матеріалами;
- формує експертні групи та закріплює їх за учасниками сертифікації.

Освітні експерти

До початку вивчення практичного досвіду роботи учасників сертифікації Державна служба якості освіти затверджує та оприлюднює на своєму офіційному вебсайті:

- загальний список експертів, які можуть залучатися до проведення сертифікації;
- методику експертного оцінювання професійних компетентностей учасників сертифікації;
- форму експертного висновку та методичні рекомендації експертам щодо її заповнення.

Наказ Державної служби якості освіти про затвердження загального списку експертів є обов’язковою умовою для:

- відрядження експерта в установленому порядку для роботи у складі експертної групи;
- допуску експерта до вивчення практичного досвіду роботи учасника сертифікації в закладі освіти.

До складу експертної групи, яка вивчає практичний досвід роботи учасника сертифікації безпосередньо в закладі освіти, входять не менше двох осіб.

До відповідної експертної групи не можуть входити експерти, які:

- проживають в одному з учасником сертифікації населеному пункті (селі, селищі, місті);
- працюють з учасником сертифікації в одному закладі освіти чи є співавторами наукової роботи.

Строк вивчення практичного досвіду учасника сертифікації визначає експертна група.

Учасник сертифікації

Учасник сертифікації за три-п’ять робочих днів отримує на адресу електронної пошти, яку зазначив у реєстраційній картці-заяві, повідомлення про строк вивчення практичного досвіду роботи.

Учасники сертифікації повинні проводити навчальні заняття згідно з календарним планом своєї роботи та відповідним навчальним планом.

Учасникам сертифікації заборонено проводити репетиції навчальних занять, інакше результати оцінювання можуть бути анульовані.

Експертний висновок

За результатами вивчення практичного досвіду роботи учасника сертифікації експертна група заповнює форму експертного висновку, що:

- підписана всіма експертами;
- містить кількість набраних учасником сертифікації балів за кожним із критеріїв оцінювання та їх загальну суму.

Експертний висновок може містити відмітку про наявність інформації щодо проведення учасником сертифікації репетиції (репетицій) навчального заняття (навчальних занять) та обґрунтування надання такого висновку.

Учасник сертифікації отримує копію експертного висновку відразу після його підписання експертами експертної групи.

Результати сертифікації педагогічних працівників

Державна служба якості освіти передає експертні висновки всіх учасників сертифікації до Українського центру оцінювання якості освіти. Потім УЦОЯО забезпечує розміщення інформації в кабінетах учасників сертифікації.

Результати сертифікації визначаються на підставі кількості балів, набраної учасником сертифікації за результатами вивчення його практичного досвіду роботи.

Сертифікат видається учасникам сертифікації, які набрали кількість балів, що дорівнює або перевищує кількість балів, мінімально достатню для видачі сертифіката, — ***пороговий бал***.

Пороговий бал щороку визначає комісія, утворена Державною службою якості освіти.

Протягом 3 календарних днів з дня проведення засідання комісії його результати надходять до УЦОЯО для відображення результатів у кабінетах учасників сертифікації.

Інформація про успішне проходження сертифікації у вигляді графічного зображення сертифіката розміщується в кабінетах учасників сертифікації не пізніше ніж через 10 робочих днів з моменту встановлення комісією граничної кількості балів.

Графічне зображення сертифіката містить:

- інформацію про номер сертифіката;
- прізвище, ім’я та по батькові педагогічного працівника, його посаду;
- номер протоколу засідання комісії;
- дату видачі та кінцевий строк дії сертифіката.

Підтвердженням видачі сертифіката педагогічному працівникові є наявність відповідної інформації в Єдиній державній електронній базі з питань освіти. Інформацію про видані сертифікати до ЄДЕБО передає УЦОЯО.

Успішне проходження сертифікації зараховується як проходження чергової (позачергової) атестації педагогічним працівником з присвоєнням йому наступної категорії педагогічного працівника або підтвердженням наявної вищої категорії.

Неуспішне проходження педагогічним працівником сертифікації не впливає на результати його чергової (позачергової) атестації, підтвердження наявної чи присвоєння наступної педагогічної категорії, продовження його роботи на відповідній посаді чи застосування до нього будь-яких заходів адміністративного впливу.

Учасник сертифікації — педагогічний працівник, який на момент його реєстрації для участі у сертифікації:

- працює на відповідній посаді за основним місцем роботи;
- має стаж педагогічної роботи не менше двох років;
- зареєстрований для проходження сертифікації у встановленому порядку.

Характеристики сертифікаційних тестів учителів

Загальна характеристика тестів незалежного тестування фахових знань та умінь учителів початкових класів, учителів української мови та літератури та вчителів математики, які виявили бажання взяти участь у сертифікації педагогічних працівників у 2024 році, затверджена наказом Українського центру оцінювання якості освіти №148 від 11 грудня 2023 року.

Характеристика сертифікаційного тесту для вчителів математики

Відповідно до характеристики, загальна кількість завдань тесту становить 75. На їх виконання учасникам тестування буде відведено 180 хвилин.

Максимальна кількість балів, яку можна набрати, правильно виконавши всі завдання тесту незалежного тестування, – 91.

Зміст тесту визначено Програмою незалежного тестування фахових знань та вмінь учителів математики, затвердженою наказом Міністерства освіти і науки України від 27 лютого 2023 року.

Форма завдань

Тест незалежного оцінювання фахових знань та умінь учителів математики складається із завдань трьох форм.

1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1–62).

Завдання має основу та чотири або п'ять варіантів відповідей, з яких лише один правильний. Завдання вважають виконаним, якщо учасник незалежного тестування вибрав і позначив відповідь у бланку відповідей *А*.

2. Завдання на встановлення відповідності («логічні пари») (63–65).

Завдання має основу та два стовпчики інформації, позначених цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконання завдання передбачає встановлення відповідності (утворення «логічних пар») між інформацією, позначеного цифрами та буквами. Завдання вважають виконаним, якщо учасник незалежного тестування зробив позначки на перетинах рядків (цифри від 1 до 3) колонок (букви від А до Д) у таблиці бланка відповідей *А*.

3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю (66–75):

- *структуроване завдання* (66–69) має основу та дві частини й передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник незалежного тестування, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, відповіді до кожної з частин завдання в бланку відповідей *А*;
- *неструктуроване завдання* (70–75) має основу та передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник незалежного тестування, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, кінцеву відповідь у бланку відповідей *А*.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді оцінюють у 0 або 1 бал: 1 бал, якщо вказано правильну відповідь; 0 балів, якщо вказано неправильну відповідь, або вказано більше однієї відповіді, або відповіді на завдання не надано.

Завдання на встановлення відповідності («логічні пари») оцінюють у 0, 1, 2 або 3 бали: 1 бал – за кожну правильно встановлену відповідність («логічну пару»); 0 балів – за будь-яку «логічну пару», якщо зроблено більше однієї позначки в рядку та/або колонці; 0 балів – за завдання, якщо не вказано жодної правильної відповідності («логічної пари») або відповіді на завдання не надано.

Структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю оцінюють у 0, 1 або 2 бали: 1 бал - за кожну правильно вказану відповідь; 0 балів, якщо вказано обидві неправильні відповіді або відповіді на завдання не надано.

Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю оцінюють у 0 або 2 бали: 2 бали, якщо вказано правильну відповідь; 0 балів, якщо вказано неправильну відповідь або відповіді на завдання не надано.

Розподіл завдань відповідно до програми

Орієнтовний розподіл завдань відповідно до розділів/підрозділів Програми незалежного тестування.

Розділ / підрозділ програми	**Частка від загальної кількості завдань**
Управління освітнім процесом	**12 %**
Партнерська взаємодія з учасниками освітнього процесу	**5 %**
Організація освітнього середовища	**13 %**
Навчання учнів предметів (інтегрованих курсів), *у т. ч.:*	**70 %**
• комунікація державною мовою з дотриманням норм української літературної мови	11 %

• створення й підтримка цифрового середовища для ефективного навчання предметів та інтегрованих курсів математичної освітньої галузі	7 %
• методики й технології навчання предметів та інтегрованих курсів математичної освітньої галузі	19 %
• система теоретичних знань з предметів та інтегрованих курсів математичної освітньої галузі, необхідна для реалізації вимог державних стандартів середньої освіти	33 %

Із завданнями сертифікаційного тесту з математики за останні роки можна ознайомитись за посиланням: https://zno.osvita.ua/for_teachers/565/

Лекція 12. Логічна будова курсу алгебри в закладах загальної середньої освіти (5-11 класи)

План

1. Характеристика навчального матеріалу алгебри 5-9 класи
2. Характеристика навчального матеріалу алгебри 10-11 класи

1. Характеристика навчального матеріалу алгебри 5-9 класи

Зміст математичної освіти в основній школі структурується за такими змістовими лініями: *числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики; геометричні фігури; геометричні величини.* Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на цьому ступені шкільної освіти, в якому виокремлюються два основні етапи: 5 — 6 класи і 7 — 9 класи. Освітні завдання на першому етапі реалізуються у процесі вивчення єдиного курсу математики, на другому — двох курсів: алгебри і геометрії.

Курс математики 5 — 6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про числа і дії над ними, числові й буквені вирази, величини та їх вимірювання, рівняння, числові нерівності, а також уявлень про окремі геометричні фігури на площині і в просторі. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому ступені вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання.

Основу курсу становить розвиток поняття числа та формування міцних обчислювальних і графічних навичок. У 5 — 6 класах відбувається поступове розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел шляхом послідовного введення дробів (звичайних і десяткових), а також від'ємних чисел разом із формуванням культури усних, письмових, інструментальних обчислень.

Навчальний матеріал, що стосується виразів, величин, рівнянь і нерівностей, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсі алгебри. Зокрема, учні мають дістати уявлення про використання букв для запису законів арифметичних дій, формул, навчитись обчислювати значення простих буквених виразів, складати за умовою задачі й розв'язувати нескладні рівняння першого степеня спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом із використанням основних властивостей рівнянь. Важливе значення для підготовки учнів до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які дістають учні 5 — 6 класів:

зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов, побудова і аналіз окремих графіків залежностей між величинами.

Істотне місце у вивченні курсу займають текстові задачі, основними функціями яких є розвиток логічного мислення учнів та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Під час розв'язування текстових задач учні також вчаться використовувати математичні моделі. Розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою.

У навчання математики в 5 — 6 класах вводяться елементи комбінаторики й теорії ймовірностей. В учнів формуються початкові відомості про множину, її елементи. Учні набувають умінь розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі шляхом розгляду можливих варіантів. На прикладах пояснюються поняття випадкової події та ймовірності появи випадкової події.

Важливим є формування в учнів умінь подавати дані у вигляді таблиць, графіків і діаграм різних типів та на основі їхнього аналізу робити відповідні висновки.

Вивчення математики у 5 — 6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

У 7 — 9 класах вивчаються два математичних курси: алгебра і геометрія.

Основними завданнями курсу алгебри є формування умінь виконання тотожних перетворень цілих і дробових виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань математичного знання. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних та інших задач. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різноманітних алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів.

На цьому етапі шкільної математичної освіти учні починають ознайомлюватися з дійсними числами. Так, до відомих учням числових множин долучається множина ірраціональних чисел.

Основу курсу становлять перетворення раціональних та ірраціональних виразів. Важливо забезпечити формування умінь школярів вільно виконувати основні види перетворень таких виразів, що є передумовою подальшого успішного засвоєння курсу та використання математичного апарату під час вивчення інших шкільних предметів. Розглядається поняття степеня з цілим показником та його властивості.

Істотного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей. Відомості про рівняння доповнюються поняттям рівносильних рівнянь. Процес розв’язування рівняння трактується як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки, вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. Курс передбачає вивчення лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних. Розглядаються системи лінійних рівнянь та рівнянь другого степеня з двома змінними. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння — другого степеня, а друге — першого степеня. Передбачається розгляд лише найпростіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня.

Значне місце відводиться застосуванню рівнянь до розв’язування різноманітних задач. Ця робота має пронизувати всі теми курсу. Важливе значення надається формуванню умінь застосовувати алгоритм розв’язування задачі за допомогою рівняння.

Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, розгляду лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей та їх розв'язування. Розглядається розв'язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною.

У 7 класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять — поняття функції. У цьому ж класі розглядається лінійна функція та її графік. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема у 8 класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ та їх властивостями. У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується, зокрема, з розв'язуванням квадратних нерівностей.

Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається в тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу.

Прикладна спрямованість вивчення функцій, рівнянь, нерівностей доповнюється ознайомленням з елементами комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики.

Так як курс математики 5-6 класи носить пропедевтичний характер, тобто підготовчий, розглянемо розподіл основних змістових ліній алгебри саме у 7-9 класах.

Розподіл основних змістових ліній алгебри у 7-9 класах

	7 клас	8 клас	9 клас
Функції	Лінійна: $y = kx$, $y = kx + b$	Обернена пропорційність: $y = \frac{k}{x}$ Квадратична функція виду: $y = x^2$ Функція виду: $y = \sqrt{x}$	$y = ax^2 + bx + c$
Рівняння	Лінійні рівняння	Квадратні рівняння	Дробово-раціональні рівняння
Нерівності			Лінійні нерівності, квадратні нерівності
Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики			Основні правила комбінаторики. Частота та ймовірність випадкової події Початкові відомості про статистику. Способи

			подання даних та їх обробки
Числові послідовності			Арифметична і геометрична прогресії

2. Характеристика навчального матеріалу алгебри 10-11 класи

Однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. Тому доцільно розпочинати вивчення курсу з теми «Функції, їхні властивості та графіки» — його фундаменту. У цій темі здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема, за рахунок степеневих функцій. Головною метою опрацювання цієї теми є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних), а також мотивація необхідності розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної. Лейтмотивом теми має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності людини, то до головних завдань вивчення теми слід віднести розвиток графічної культури учнів. Ідеться передусім про «читання» графіків, тобто про встановлення властивостей функції за її графіком.

У наступних темах розширюються класи функцій, які вивчалися в основній школі. У темах «Тригонометричні функції» і «Показникова та логарифмічна функції» вміння досліджувати функції, які сформовані в першій темі, закріплюються і застосовуються до моделювання закономірностей коливального руху, процесів зростання та спадання. В уявленні учнів характер фізичного процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями.

Важливим завершенням функціональної лінії курсу «Математика» є розгляд понять похідної та інтеграла, які є необхідним інструментом дослідження руху. Основні ідеї математичного аналізу виглядають досить простими і наочними, якщо викладати їх на тому інтуїтивному рівні, на якому вони виникли історично і який цілком задовольняє потреби загальноосвітньої підготовки учнів. Не варто захоплюватися формально - логічною строгістю доведень та відводити багато часу суто технічним питанням і конструкціям. Більше уваги слід приділити змісту ідей і понять, їх геометричному і фізичному тлумаченню. Вивчення інтегрального числення зазвичай починається з розгляду сукупності первісних даної функції, яку доцільно розуміти як сукупність функцій, які задовольняють умову $y' = f(x)$.

У курсі математики старшої школи набувають розвитку й інші змістові лінії: обчислення, вирази і перетворення, рівняння та нерівності.

Розглядаються обчислення, оцінювання та порівняння значень тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних виразів.

Певне місце в курсі займають тотожні перетворення тригонометричних, степеневих та логарифмічних виразів. Тригонометричні функції пов’язані між собою багатьма співвідношеннями. Їх умовно можна поділити на три групи. Перша група формул встановлює зв’язок між координатами точки кола — це так звані основні співвідношення. Друга група формул має своїм джерелом симетрію і періодичність руху точки по колу. Вона складається із формул зведення. Третю групу тотожностей породжують повороти точки навколо центра кола. Формули додавання пов’язують координати точок P_α, P_β, $P_{\alpha+\beta}$.

Не слід приділяти занадто багато уваги громіздким перетворенням тригонометричних, степеневих і логарифмічних виразів і спеціальним методам розв’язування тригонометричних, показникових і логарифмічних рівнянь. Вони, як правило, не знаходять практичних застосувань.

У старшій школі розширюються класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи розв’язування, сфери застосування. Вивчення цього матеріалу пов’язується з властивостями відповідних функцій.

Розподіл основних змістових ліній алгебри 10-11 класах

	10 клас	11 клас
Функції	Всі види степеневих функцій: з натуральним, цілим і дробовим показником. Тригонометричні функції.	Показникові та логарифмічні функції
Рівняння	Рівняння вищих степенів, ірраціональні рівняння, тригонометричні рівняння	Показникові та логарифмічні рівняння
Нерівності	Нерівності вищих степенів, дробово-раціональні нерівномті, ірраціональні нерівності.	Показникові та логарифмічні нерівності
Елементи математичного аналізу	Похідна. Дослідження функцій за допомогою похідної	Первісна. Інтеграл та його застосування
Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики		Елементи комбінаторики. Класичне визначення ймовірності випадкової події. Вибіркові характеристики

Лекція 13. Вивчення функцій в курсі алгебри і початках аналізу

План

1. Означення поняття “функція”
2. Введення поняття тригонометричних функцій числового аргументу.
3. Вивчення показникової функції.
4. Вивчення логарифмічної функції.
5. Вивчення степеневої функції.

1. Означення поняття “функція”

Розглянемо два підходи до означення функції: класичні і сучасні.

КЛАСИЧНІ

Функція –

змінна величина, числове значення якої змінюється в залежності від числового значення іншої

закон (правило)за яким значення залежної змінної величини змінюються від значень розглянутої незалежної змінної

СУЧАСНІ

Нехай X та Y – дві довільні множини. Кажуть, що на одні з них (X) задана функція, яка приймає значення із Y, якщо елементу x з множини X можна поставити у відповідність один і тільки один елемент з множини Y

Функцію розглядають, як закон за яким елементу x з множини X ставиться у відповідність один і тільки один елемент з множини Y

Відношення xFy, де $x \in X$, а $y \in Y$, називається функціональним, якщо утворена ним множина пар є однозначна, тобто вона не містить інших пар з однаковими першими елементами

Функцію розглядають, як відповідність, за якою елементу x з множини X ставиться у відповідність один і тільки один елемент з множини Y

Шкільний курс вивчення функції будується за аналогією з розвитком в історії поняття функції.

До 7 класу йде нагромадження знань, необхідних для введення поняття функції. Розглядаються залежності площ фігур від довжини їхніх сторін, радіусів; розв’язують завдання, у яких одна величина залежить від інший і т.д. Цей курс можна назвати пропедевтичним.

В 7 класі вперше дається визначення функції на основі залежності й відповідності однієї величини від іншої. Після введення означення можна розповісти про те, де люди зустрічалися з функціональними залежностями, хто вперше ввів цей термін і що означає саме слово "функція". Також у цьому класі вивчаються різні способи завдання функції. Можна більш докладно розповісти про табличний спосіб завдання функції як про найбільш старий: привести приклади з історії математики, розповісти про значення й роль математичних таблиць для математиків давніх часів. Прикладами можуть служити таблиці квадратів, кубів чисел, арифметичних і квадратних коренів, які учні можуть побачити на форзацах своїх підручників, якими вони будуть користуватися пізніше.

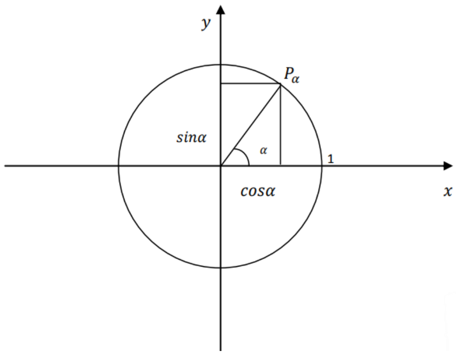
В 9 класі ще раз дається визначення функції на основі ідеї залежності однієї змінної від іншої: "Функцією називають таку залежність змінної у від змінної х, при якій кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y". Можна дати учнем завдання простежити в історії математики, на якому етапі розвитку поняття функції з'являється таке визначення й хто його вводить. Крім того, у цьому класі вводиться символічне позначення функції. Учнем необхідно розповісти, хто ввів цей запис.

В 10-11 класах уводиться сучасне поняття функції як відповідність між двома множинами: "числовою функцією з областю визначення D називається відповідність, при якому кожному числу x з множини D ставиться у відповідність за деяким правилом число y, що залежить від D ". Знову потрібно простежити, коли з'являється вперше таке визначення, у чому його відмінність від раніше існуючих.

2. Введення поняття тригонометричних функцій числового аргументу.

Введення поняття тригонометричних функцій числового аргументу.

Насамперед треба згадати означення тригонометричних функцій кута і поширити їх на будь-яку градусну міру, ввести кут повороту.



Крім того, слід переконати учнів у тому, що існує відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок одиничного кола

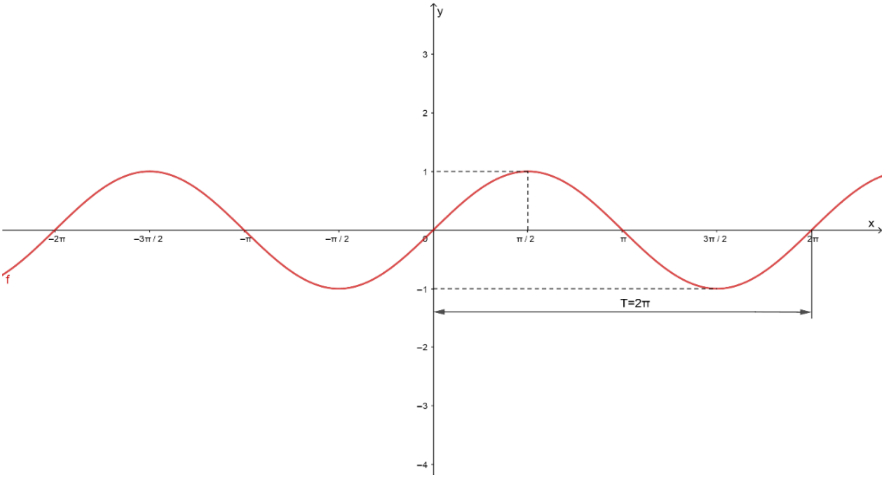
Означення I. Синусом числа а називається ордината точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 $(1;\ 0)$ при повороті навколо центра кола на кут а радіанів, і позначається $\sin\alpha$.

Означення 2. Косинусом числа а називається абсциса точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 $(1;\ 0)$ при повороті навколо центра кола на кут а радіанів, і позначається $\cos\alpha$.

Означення 3. Тангенсом числа а називається відношення $\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$, а котангенсом числа α - відношення $\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$ і позначаються відповідно $tg\alpha$, $ctg\alpha$.

Оскільки кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність дійсні числа $sin\,x$ і $cos\,x$, то вважатимемо, що на множині R задано функції $y = sin\,x$, $y = cos\,x$. Враховуючи, що $y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ визначений для всіх x, крім тих, за яких $cos\,x = 0$, і кожному дійсному числу, крім $\frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in Z$, відповідає єдине число $tg\ x$, вважатимемо, що $y = tg\ x$ – функція, областю визначення якої є всі дійсні числа, крім $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in Z$.

Доцільно виділити сім **властивостей тригонометричних функцій** і систематизувати їх так, як буде показано для функції $y = sin\ x$.



1. Оскільки синус існує для будь-якого дійсного числа і як ордината точки одиничного кола змінюється на відрізку від -1 до 1, то областю визначення функції $y = sin\ x$ є множина R всіх дійсних чисел, а областю значень - відрізок $[-1;\ 1]$.

2. Графік функції симетричний відносно початку координат, тобто функція $y = \sin(x)$ непарна. Доведемо це, користуючись одиничним колом.

Область визначення цієї функції - множина, симетрична щодо початку координат. Залишається довести, що $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$. Позначимо на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$, що належать множині R. Оскільки прямокутні трикутники $P_\alpha OA$ і $P_{-\alpha}OA$ рівні, то $P_\alpha A = P_{-\alpha}A$ (OA -

спільний катет). Отже, абсциси точок P_α і $P_{-\alpha}$, рівні, а ординати - протилежні числа. Тому $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

3. Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π.

4. Функція набуває значення, що дорівнює 0 (нулі функції) при
$\pi n, n \in Z$, оскільки ординати точок одиничного кола перетворюються на нуль на відрізку $[0; 2\pi]$ у двох точках $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, а функція періодична.

5. Проміжки зростання функції - відрізки $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $n \in Z$.

6. Проміжками, де синус додатний, є $(2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює найменшому додатному, періоду 2π, функція додатна на проміжку $(0; 2\pi)$. Синус від'ємний на проміжках $(2\pi n + \pi, 2\pi n), n \in Z$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ він від'ємний на проміжку $(\pi; 2\pi)$.

7. Синус досягає максимуму, що дорівнює 1 в точках $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in Z$, а мінімуму, що дорівнює -1, у точках $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in Z$.

3. Вивчення показникової функції

Введення поняття показникової функції доцільно здійснювати за тією самою методичною схемою, за якою вивчалися всі попередні функції .

На етапі мотивації доцільно навести приклади залежностей, які виражаються через показникову функцію.

Приклад. Кількість мешканців міста з мільйонним населенням через x років обчислюється за умови, що кожного року спостерігається приріст населення на 2 % за формулою $y = 1\,000\,000 \cdot 0{,}02^x$.

Означення. Показниковою функцією називається функції $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, y і x – змінні.

Властивості функції учні спочатку «читають» за графіком, а відтак учитель доводить їх аналітично. Попередньо треба повторити властивості степенів.

Властивість 1. Областю визначення функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел, оскільки вираз a^x визначений для будь-якого x, при $a > 0$ і $a \neq 1$.

Властивість 2. Показникова функція набуває лише додатних значень.

Властивість 3. *Якщо* $a > 1$,то при $x > 0$ $a^x > 1$, при $x < 0$ $0 < a^x < 1$. Якщо $a < 1$, то, навпаки, при $x > 0$ $0 < a^x < 1$, а при $x < 0$ $a^x > 1$.

Властивість 4. Якщо $x = 0$ то при будь-якому $a > 0$ $y = a^x = 1$, що випливає з означення степеня з нульовим показником.

Властивість 5. Показникова функція при $a > 0$ зростаюча, а при $0 < a < 1$ - спадна.

Властивість 6. Якщо $a > 1$, то за $x \to +\infty$ значення $y \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатним. Враховуючи монотонність функції, можна стверджувати, що в цьому випадку функція монотонне зростає від 0 до $+\infty$.

Якщо $0 < a < 1$, то при $x \to +\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатними, а при $x \to -\infty$ значення $y \to +\infty$. Враховуючи монотонність, можна стверджувати, що в цьому випадку $y = a^x$ монотонно спадає від $-\infty\,\infty$ до 0.

Властивість *7*. Областю значень функції є множина всіх додатних чисел.

4. Вивчення логарифмічної функції

Перш ніж вводити логарифмічну функцію як функцію, обернену до показникової, доцільно ввести означення логарифма числа b за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) як показника степеня, до якого треба піднести число a, щоб дістати число a, і запровадити символ $\log_a b$. Треба звернути увагу учнів на те, що логарифмічна рівність $\log_a b = x$ і показникова $a^x = b$ виражають те саме співвідношення між числами a, b і x. За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, яке до них входить.

Можна запропонувати учням самостійно знайти функцію, обернену до показникової функції $y = a^x$, скориставшись відомим їм алгоритмом відшукання формули функції, оберненої до даної, з яким вони могли ознайомитися раніше під час вивчення обернених тригонометричних функцій. Учні самі доводять означення логарифмічної функції як оберненої до показникової, виконуючи три кроки.

1. Функція $y = a^x$ зростаюча за $a > 1$, спадна – за $0 < a < 1$, тому вона є оборотною на всій області визначення. Враховуємо, що $x \in R$, $y \in (0; +\infty)$.

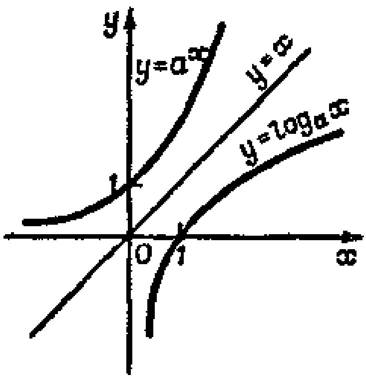
2. Розв'яжемо рівняння з двома невідомими $y = a^x$стосовно невідомої x. Оскільки x - показник степеня, то, за означенням логарифма, $x = \log_a y = x(y)$.

3. Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо

$y = \log_a x$, де $x \in (0; +\infty)$, $y \in R$.

Означення. Функція, обернена до показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$ і $a \neq 1$), називається логарифмічною і позначається $y = \log_a x$.

Побудувавши графік логарифмічної функції як кривої, симетричної графіку функції $y = a^x$ відносно прямої $y = x$, учні «прочитають» спочатку властивості цієї функції за графіком, а потім доведуть їх аналітично, послуговуючись теоремою про властивості взаємно обернених функцій.



5. Вивчення степеневої функції

З окремими випадками степеневої функції учні ознайомлювалися в 7 і 8 класах ($y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}$). Однак на тому етапі навчання термін «степенева функція» і відповідне означення ще не вводились, оскільки ще не відбулось розширення поняття степеня до степеня з дійсним показником.

Ввівши степінь з дійсним показником x^p, бачимо, що при заданому дійсному значенні p кожному додатному x можна поставити у відповідність числове значення степеня x^p. Отже, при сталому дійсному показнику p *і* змінному додатному x маємо функцію $y = x^p$, яку називають степеневою.

Властивості степеневої функції залежать від заданого значення p.

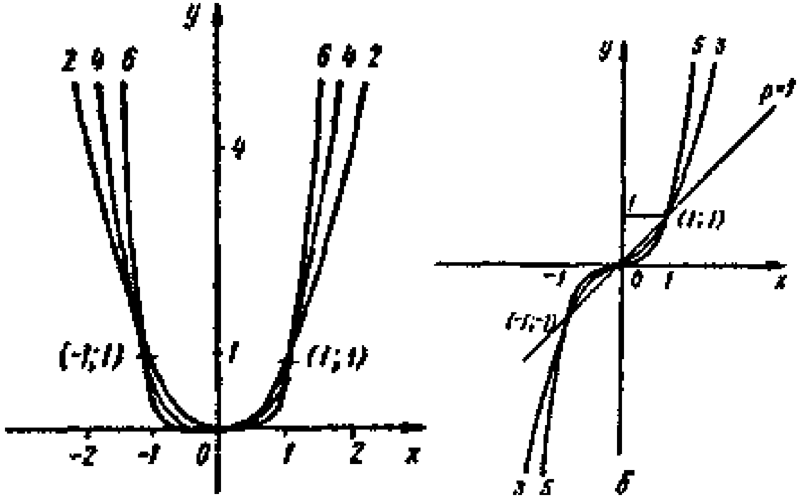
Доцільно розглянути різні можливі множини значень.

I. Нехай p — *натуральне число*.

Назвімо властивості функції.

1. Область визначення функції - множина всіх дійсних чисел. Область значень залежить від парності чи непарності p.

Якщо p — парне, то область значень $y = x^p$ *є* множиною невід'ємних чисел, а якщо непарне, то – множиною R всіх дійсних чисел.



6. Функція парна при парному p і непарна – при непарному p.

3. При $x = 0$ і $y = 0$, при $x = 1$ і $y = 1$, тобто всі графіки степеневих функцій проходять через початок координат і точку $(1;\ 1)$.

4. При парному p функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

При непарному p функція зростає на всій області визначення.

1. При парному p графіки степеневих функцій схожі з графіком функції $y = x^2$, а при непарному – з графіком функції $y = x^3$.

II. Нехай p - *ціле від'ємне число*.

У цьому випадку функція $y = x^p$ визначена на множині всіх дійсних чисел, крім $x = 0$. Коли p - парне від'ємне число, множиною значень функції є множина всіх додатних чисел. Функція парна на області визначення і графік, складається з двох віток, симетричний осі y; $y = x^p$ зростає за $x \in (-\infty; 0)$ і спадає за $x \in (0; +\infty)$. Коли p - непарне від'ємне число, множиною значень функції є об'єднання двох числових проміжків $(-\infty; 0)$ і

$(0; +\infty)$. Функція непарна, спадна на всій області визначення, графік її симетричний відносно початку координат.

III. Нехай p - *дробове додатне число*, тобто $p = \frac{m}{n}$, де m і n- натуральні числа.

З урахуванням означення степеня з дробовим показником степенева функція матиме вигляд $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ З окремим випадком такої функції ($y = \sqrt{x}$) учні ознайомились в курсі алгебри 8 класу.

При $p = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{4}$ степенева функція має вигляд $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ відповідно. Графіки двох останніх функцій схожі за формою з графіком функції $y = \sqrt{x}$. Неважко довести, що всі функції зростаючі, їхня область визначення залежить від показника кореня. Для парних n функція визначена лише для невід'ємних значень *x*, для непарних – за будь-якого дійсного *x*. У загальному випадку функція $y = \sqrt[n]{x^m}$ розглядається лише при $x \geq 0$.

Варто звернути увагу учнів на те, що функції $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$, $y = x^3$ і $y = \sqrt[3]{x}$ при $x \in R$ - взаємно обернені.

Лекція 14. Рівняння в курсі алгебри старшої школи

План.

1. Ірраціональні рівняння
2. Показникові рівняння
3. Логарифмічні рівняння
4. Тригонометричні рівняння

У лекції ми розглянемо рівняння, їх види і методи розв’язування не тільки для класів з вивченням математики на рівні стандарту, але і поглибленого вивчення.

1. Ірраціональні рівняння

Ірраціональні рівняння вивчаються у курсі алгебри 10 класу. Їх вивчення слідує за вивченням степеневих функцій з раціональним показником.

Ірраціональними наз. рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком кореня або під знаком дії піднесення до дробового показника степеня.

Основним методом розв'язування ірраціональних рівнянь є перетворення їх на раціональні. Ці перетворення виконуються за допомогою:

1) піднесення обох частин рівняння до одного степеня;
2) введення нових невідомих;
3) штучні методи.

Важливим при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, що містять корінь парного степеня є знаходження області допустимих значень (ОДЗ), аде якщо знаходження ОДЗ є громіздким, то слід обмежитись перевіркою коренів рівняння. При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть виникнути сторонні корені. Тому необхідною складовою розв'язання ірр. рівняння є перевірка знайдених коренів.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь використовуються теореми:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$, якщо $a > 0$; $x \in \emptyset$, якщо $a < 0$.

2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Примітка. З двох систем вибирається та, яка простіше розв'язується.

3. Теорема про корінь парного степеня ($n \in N$):

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

4. Теорема про корінь непарного степеня ($n \in N$):

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^{2n+1}.$$

5. Теорема про добуток $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x), n \in N$:

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(g). \end{cases} \end{array}\right.$$

6. Теорема про частку $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)}, n \in N$: $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

7. Теорема про частку $\frac{g(x)}{\sqrt[2n]{f(x)}}, n \in N$: $\frac{g(x)}{\sqrt[2n]{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$

Розглянемо методи розв'язування ірраціональних рівнянь

1. *Метод піднесення обох частин рівняння до одного степеня*

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата.

$$2x + 5 + 2\sqrt{(2x+5)(x-1)} + x - 1 = 64.$$

$$2\sqrt{(2x+5)(x-1)} = 60 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60 - 3x \geq 0, \\ 4(2x+5)(x-1) = (60-3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 20, \\ x^2 - 372x + 3620 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 20, \\ \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 362 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = 10.$$

Відповідь. 10

2. *Метод введення нових змінних (Метод заміни)*

Одним з методів спрощення ірраціональних рівнянь, особливо тих, які містять корені вищих степенів, є метод заміни.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $3 \cdot \sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4$.

Розв'язання. $\sqrt[10]{x^2-3}=t,\ t>0,$ тоді $\sqrt[5]{x^2-3}=t^2$. Тоді $3t+t^2=4\ \Rightarrow t^2+3t-4=0, t_1=-4, t_2=1$. Врахувавши, що $t>0$ маємо $\sqrt[10]{x^2-3}=1\Rightarrow x^2-3=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$.

Відповідь. ± 2

3. *Рівняння виду* $ax^2+bx\pm\sqrt{kax^2+kbx+d}=c$ $\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}+\sqrt[n]{\frac{g(x)}{f(x)}}=m$

Рівняння виду $ax^2+bx\pm\sqrt{kax^2+kbx+d}=$ с розвязується методом заміни. Для цього потрібно помножити обидві частини рівняння на k: $kax^2+kbx\pm k\sqrt{kax^2+kbx+d}=k$с. Введемо заміну $\sqrt{kax^2+kbx+d}=y\geq 0.$ Тоді $kax^2+kbx=y^2-\ d$.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4)$.

Розв'язання. Помножимо дане рівняння на 2, отримаємо:

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12,$$
$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0.$$

Нехай $\sqrt{2x^2-3x+2}=t\geq 0$, тоді рівняння набуде вигляду: $t^2-2t-8=0$. Розв'язавши рівняння і підставивши в заміну, отримаємо $x_1=-2, x_2=\frac{7}{2}$.

Відповідь. -2; $\frac{7}{2}$.

2. Показникові рівняння

Показникові рівняння відносяться до трансцендентних рівнянь і вивчаються у 11 класі. Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме входить тільки до показників степенів при сталих основах.

Перерахуємо *основні види рівнянь*, які прийнято називати позакниковими. Для будь-яких $a>0, b>0, a\neq 1$:

1. $a^{f(x)}=1\ \Leftrightarrow f(x)=0$.
2. $a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
3. $a^{f(x)}=b(x)\Leftrightarrow f(x)=log_a b(x)$.
4. $f(a^x)=0\ \Leftrightarrow f(t)=0$, якщо $a^x=t, t>0$.

5. $g\left(a^{f(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow g(y) = 0,$ якщо $a^{f(x)} = y, y > 0.$

6. Показниково – степеневі рівняння $[u(x)]^{f(x)} = [u(x)]^{g(x)}$.

До *методів* розв'язування показникових рівнянь належать:

1. Розв'язування показникових рівнянь на основні властивостей степенів.
2. Метод заміни змінних.
3. Метод розкладання рівняння на множники.
4. Штучні методи.

Розглянемо кожний метод окремо.

1. *Розв'язування показникових рівнянь на основні властивостей степенів:* два степеня з однією і тією ж додатною і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх показники.

Теорема: Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Доведення: Доведемо, що якщо $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$. Дійсно, так як показникова функція строго монотонна, то з рівності її значень $a^c = a^d$, слідує рівність показників $c = d$. Навпаки: якщо $f(x) = g(x)$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Використовуючи властивості степеня, рівняння

$a^x = b$, де $a > 0, a \neq 0, b > 0,$

(1)

потрібно розв'язувати так: $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція $f(x)$, тобто рівняння має вигляд

$$a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0,$$

(2)

то за допомогою логарифмування обох частин цього рівняння (це можливо, коли обидві частини рівняння додатні), приходимо до еквівалентного рівняння

$f(x) = \log_a b.$

Деякі показникові рівняння зводяться до виду (1) або (2) за допомогою рівностей:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$
$$(a^x)^y = a^{xy},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

<u>*Приклад*.</u> Розв'язати рівняння $4^x = 8^{2x-3}$.

Розв'язання: Оскільки

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $8^{2x-3} = (2^3)^{2x-3} = 2^{6x-9}$, то

$2^{2x} = 2^{6x-9} \Leftrightarrow 2x = 6x - 9 \Leftrightarrow x = 9/4$.

Рівняння виду $a^{f(x)} = 1, a > 0, \ a \neq 1$, рівносильно рівнянню $f(x) = 0$.

<u>*Приклад*.</u> Розв'язати рівняння $10^{x^2+x-2} = 1$.

Розв'язання: Данне рівняння рівносильне рівнянню $x^2 + x - 2 = 0$. З цього данне рівняння має два корня: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

<u>*Приклад*.</u> Розв'язати рівняння $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язання: Перепишемо данне рівняння у вигляді

$3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Використовуючи властивості членів пропорції, маємо

$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}},$$

після спрощення $3^{4-x} = 2^{4-x}$. Перетворивши данне рівняння до виду $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} = 1$, отримуємо 4-*x*=0, звідки слідує, що *x*=4.

2. *Розв'язування показникових рівняннь, які зводяться заміною змінних до алгебраїчного рівняння .*

Якщо показникове рівняння має вигляд

$$g\left(a^{f(x)}\right) = 0, \tag{3}$$

то заміною $a^{f(x)} = $ у рівняння зводиться до виду $a^{f(x)} = y_i$, де y_i- корені рівняння $g(y) = 0$. Так, наприклад, рівняння $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$, де A, B, C - деякі числа, $a > 0$, $a \neq 1$, зводиться до розв'язування рівносильної йому сукупності рівняннь $\left[\begin{array}{l} a^x = y_1 \\ a^x = y_2 \end{array}\right.$, де y_1, y_2- корені рівняння $Ay^2 + By + C = 0$.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Розв'язання: Позначимо $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = y$ і роблячи заміну змінних, отримуємо квадратне рівняння

$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0$, корнями якого будуть $y_1 = 4, y_2 = -\frac{3}{2}$. Таким чином розв'язання данного рівняння звелося до розв'язування рівнянь

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4, \quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -\frac{3}{2}$$

Друге рівняння розв'язків не має, тому що $2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$при всіх допустимих значеннях x. З першого рівняння отримаємо $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$.

$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$, підносимо обидві частини рівняння до квадрата, маємо $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$. Зведемо подібні доданки, отримаємо єдиний корінь $x = \frac{3}{2}$. Перевіркою переконуємося, що цей корінь задовольняє початкове рівняння.

Показникові рівняння, основи степенів яких є послідовними членами геометричної прогресії, а показники степеня однакові, зводяться до рівнянь виду (3) діленням на будь-який з крайніх членів.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

Розв'язання: Розділимо обидві частини рівняння на 9^x. Маємо

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0.$$

Позначаючи $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ і виконуючи заміну змінних, отримуємо рівняння $6y^2 - 13y + 6 = 0$, коренями якого будуть $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{2}{3}$. Таким чином розв'язок рівняння зводиться до розв'язування двох простіших показникових рівнянь

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

3. *Рівняння виду* $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$, де α, β - дійсні числа, а основи a та b є взаємооберненими додатніми числами (ab=1), можна розв'язувати наступним чином. Ввести змінну $t = a^{f(x)}$ та, використовуючи рівність (ab=1), перейти від рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ до рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$

Тоді рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ буде рівносильне сукупності двох показникових рівнянь: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = t_1 \\ a^{f(x)} = t_2 \end{array}\right.$, де t_1, t_2- корені рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$, якщо це рівняння немає розв'язків, то і рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ також не має розв'язків.

4. *Рівняння виду* $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$, де $f(x), \varphi(x), p(x)$ −функції невідомого *x,* називаються степенево-показниковими рівняннями. Еквівалентні цьому рівнянню $f(x)$=1 та системі $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) = p(x). \end{cases}$ Тобто розв'язуються наступним чином:

1. Перевіряємо, чи не будуть для $f(x)$>0 корені рівняння $f(x)$=1 коренями рівняння $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$;

2. Перевіряємо, якщо при $f(x) = -1$, функції $\varphi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корені рівняння $f(x) = -1$, будуть і коренями рівняння $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$.

3. Тоді для $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$ рівняння $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$ еквівалентно рівнянню $\varphi(x) = p(x)$.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння

$$(1 + x^2)^{1+\sqrt{x}} = (1 + x^2)^{2+\sqrt{x}}.$$

Розв'язання: $D(f){:}\, x \geq 0$.

1) Знаходимо корені початкового рівняння серед розв'язків рівняння

$$(1 + x^2 = 1) \Leftrightarrow (x^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$$

Перевіркою переконаємось, що x=0 належить області допустимих значень та зодовольняє початкове рівняння, тобто є коренем рівняння.

2) Для $\begin{cases} 1 + x^2 > 0, \\ 1 + x^2 \neq 1 \end{cases}$ данне рівняння еквівалентне рівнянню

$$\left(1 + \sqrt{x} = 2 + \sqrt{x}\right) \Leftrightarrow (1 = 2)$$

Отримуємо неправильну числову рівність. Це говорить про те, що у данному випадку рівняння не має розв'язків.

Відповідь: *x*=0.

<u>*Приклад*</u>: Розв'язати рівняння $(x - 2)^{x^2+2x} = (x - 2)^{11x-20}$.

Розв'язання: $D(f){:}\, (x > 2)$

1) *x*-2=1 $\Leftrightarrow x_1 = 3$. Бачимо, що $x_1 \in D(f)$ задовільнює дане рівняння, тобто є його коренем.

2) $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Перевіряємо значення $\phi(x), p(x)$ при $x_2 = 1$, $\phi(x) = x^2 + 2x$, $\phi(1) = 1 + 2 = 3$; $p(x) = 11x - 20$, $p(1) = 11 - 20 = -9$. Отримали, що функції набувають одночасно непарні значення. Тобто $x_2 = 1$ є коренем рівняння.

3) для $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1 \end{cases}$ початкове рівняння еквівалентне рівнянню

$$(x^2 + 2x = 11x - 20) \Leftrightarrow (x^2 - 9x + 20 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 4, \\ x_4 = 5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1,3,4,5\}$

Тобто коренями рівняння $\left(f(x)\right)^{\phi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$, вважаються тільки розв'язки змішаної системи $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \phi(x) = p(x) \end{cases}$ і ті значення x, для яких $f(x)$=1, якщо при цих значеннях визначені ϕ(x) та $p(x)$. Також додатково перевіряють: якщо при $f(x) = -1$, функції $\phi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корені рівняння $f(x) = -1$, будуть і коренями рівняння $\left(f(x)\right)^{\phi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$.

Функція виду $\left(f(x)\right)^{\phi(x)}$визначена тільки при $f(x)$>0, тому те значення x, яке формально задовольняє рівність $\left(f(x)\right)^{\phi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$, але при яких $f(x) \leq 0$, не є коренем рівняння $\left(f(x)\right)^{\phi(x)} = \left(f(x)\right)^{p(x)}$.

5. *Штучні або спеціальні методи розв'язування показникових рівнянь*

Деякі рівняння зводяться до розглянутих вище, якщо перетворити окремі члени рівняння, використавши основну логарифмічну тотожність.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати рівняння $3^{log_3^2 x} + x^{log_3 x} = 162$.

Розв'язання: Перетворимо другий доданок у лівій частині рівняння:

$x^{log_3 x} = (3^{log_3 x})^{log_3 x} = 3^{log_3^2 x}$.

Підставляючи одержаний вираз в початкове рівняння, отримаємо

$$2 \cdot 3^{log_3^2 x} = 162.$$

Рівняння $2 \cdot 3^{log_3^2 x} = 162$. еквівалентне рівнянню $log_3^2 x = 4$, яке, в свою чергу, еквівалентне двом рівнянням

$$log_3 x = 2, \qquad log_3 x = -2.$$

Розв'язуючи останні рівняння, отримуємо $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}$.

Відповідь: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}$.

Деякі рівняння, які містять невідоме у показнику степеня, вдається розв'язати за допомогою дослідження функції, які входять до лівої та правої частини рівняння. Монотонність функції часто дозволяє визначити число коренів рівняння, а іноді і знайти значення.

Приклад. Розв'язати рівняння $7^{6-x} = x + 2$.

*Розв'яз*ання*:* Корінь *x*=5 може бути знайдений підбором. Інших розв'язків рівняння не має, так як функція $f(x) = 7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x) = x + 2$ монотонно зростає, тобто графіки цих функцій можуть перетинатися не більше ніж один раз.

Тобто графічним способом не важко знайти наближенні розв'язки рівннянь такого виду $a^{f(x)} = \phi(x)$. Знання графіків функції $y = a^{f(x)}$ та $y = \phi(x)$ не рідко дозволяє визначити число розв'язків рівняння та їх наближені, а іноді і точні значення.

3. Логарифмічні рівняння

Логарифмічними рівняннями називаються рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком логарифма.

Елементарними логарифмічними рівняннями, для яких $a > 0, a \neq 1$ є такі рівняння:

1. $\log_a f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

Примітка. Рівносильні перетворення в рівняннях 1 і 2 виконуються при $f(x) > 0$.

3. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0. \\ g(x) > 0 \end{cases}$

4. $f(\log_a x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, якщо $\log_a x = t$.

5. $f(\log_a g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$, якщо $\log_a g(x) = y$.

Використання теорем 1, 2, 3, називається потенціюванням рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\log_3(7 - 2x) = \log_3(x^2 - 3x - 5)$.

Розв'язання: $\log_3(7-2x) = \log_3(x^2-3x-5) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 7-2x = x^2-3x-5 \\ 7-2x > 0 \\ x^2-3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x < \frac{7}{2} \\ x \in (-\infty; 1{,}5-0{,}5\sqrt{29}] \cup (1{,}5+0{,}5\sqrt{29}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=4 \end{array}\right. \\ x \in (-\infty; 1{,}5-0{,}5\sqrt{29}] \end{cases} \Rightarrow x=-3.$$

Відповідь. -3

Розглянемо методи розв'язування логарифмічних рівнянь.

1. *Метод заміни*

Приклад. Розв'язати рівняння: $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 6 = 0.$

Розв'язання. Введемо заміну $\log_2 x = t$, тоді рівняння набуде вигляду

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.$. Повертаємось до заміни $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 8 \end{array}\right.$.

Відповідь. 4; 8.

Показникові рівняння, в яких показником степеня є логарифми, розв'язуються логарифмуванням, використанням основної логарифмічної тотожності та методом заміни. При цьому логарифмувати рівняння можна за будь-якою основою: $a > 0, a \neq 1$. Якщо в рівняння входять логарифми з різною основою, то потрібно звести їх до однієї основи.

Приклад. Розв'язати рівняння: $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x+1} = 1.$

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння за основою 15:

$$\log_{15}(\,15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x} \cdot x^1) = \log_{15} 1,$$

$$\log_{15} 15^{\log_5 3} + \log_{15} x^{\log_5 9x} + \log_{15} x = 0,$$

$$\log_5 3 + \log_5 9x \cdot \log_{15} x + \log_{15} x = 0,$$

$$\log_5 3 + (\log_5 9 + \log_5 x) \cdot \log_{15} x + \log_{15} x = 0,$$

подамо $\log_{15} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 15}$;

$$\log_5 3 + (2\log_5 3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 15} + \frac{\log_5 x}{\log_5 15} = 0,$$

$$\log_5 3 + (2\log_5 3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 3 + 1} + \frac{\log_5 x}{\log_5 3 + 1} = 0.$$

Введемо заміну: $\log_5 x = t, \log_5 3 = b$.

Змінну b можна було не вводити, це тільки для зручності.

Маємо: $b + \frac{(2b+t)t}{b+1} + \frac{t}{b+1} = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} b^2 + b + 2bt + t^2 + t = 0 \\ b \neq -1 \end{cases}$.

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно t.

$$D = (2t+1)^2 - 4(b^2 + b) = 4b^2 + 4b + 1 - 4b^2 - 4b = 1,$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= -b - 1, \\ t_2 &= -b. \end{aligned}\right.$$

Повертаємось до заміни: $\left[\begin{aligned} \log_5 x &= -\log_5 3 - 1 \\ \log_5 x &= -\log_5 3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$
$\left[\begin{aligned} \log_5 x &= \log_5 \frac{1}{15} \\ \log_5 x &= \log_5 \frac{1}{3} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{15} \\ x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right.$. Знайдені корені задовольняють ОДЗ рівняння.

Відповідь. $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{3}$

2. Рівняння, які містять невідому в основі логарифма

При розв'язуванні рівнянь, які містять невідому в основі логарифма (за умови, що основа логарифма однакова функція *a(x)*) використовується подана нижче теорема.

Теорема 6. Рівняння виду $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$.

Якщо основою логарифмів є різні вирази $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ відносно невідомої x, то потрібно подати логарифми за однією числовою основою.

Теорема 7. Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x)$

рівносильне рівнянню $\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} = \frac{\log_a g(x)}{\log_a \psi(x)}$

при $\begin{cases} \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1 \\ \psi(x) > 0, \psi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Розв'язання. $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо єдиний корінь x=2.

Відповідь. 2

3. *Рівняння, які містять невідому в основі степеня і в показнику степеня*

Це рівняння виду $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)^{\psi(x)}$. В цьому рівнянні $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ на ОДЗ рівняння. За цієї умови дане рівняння рівносильне

$$\varphi(x)\log_a f(x) = \psi(x)\log_a g(x),\ \ a > 0,\ \ a \neq 1.$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$.

Вказівка.

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)^{\frac{1}{2}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)} \\ 3x-5 > 0 \\ 3x-5 \neq 1 \\ 2+5x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

4. Тригонометричні рівняння

Тригонометричні рівняння вивчаються у 10 класі на всіх рівнях вивчення математики.

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції.

До найпростіших тригонометричних рівнянь відносять рівняння виду $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a,$ де x – невідома величина, a – довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. Зауважимо, що функцію $y = ctgx$ вивчають лише в профільних та і класах з поглибленим вивченням математики. Використовуючи різні прийоми та методи більшість тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Перед вивченням тригонометричних рівнянянь вивчаються обернені тригонометричні функції і їх властивості $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.$

1. Рівняння sinx $= a$ та $cosx = a$.

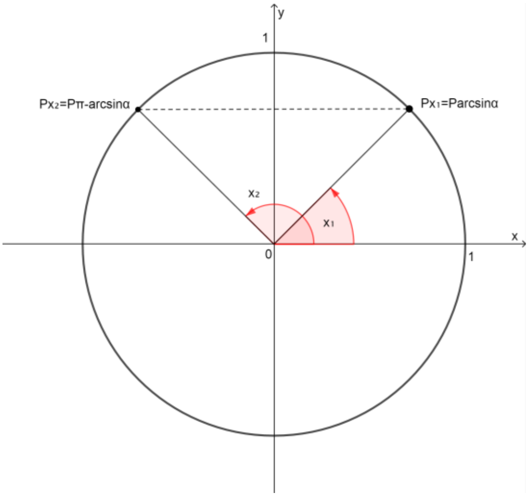


Рис. Рівняння $sinx = a$ на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \sin x = a \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z; \\ x_2 = \pi - arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z. \end{cases}$$

На практиці використовується формула, яка об'єднує дві попередніх і має вона такий вигляд: $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|sinx| \leq 1$.

Виділяють окремі випадки розв'язання рівняння $sinx = a$.

Якщо $a = -1$, $sinx = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $sinx = 0$, то $x = k\pi, \ \ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 1$, $sinx = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \ k\epsilon Z$.

Зауваження:

1) $\arcsin(-\alpha) = -arcsin\alpha$.

2) Якщо $0 < \alpha < 1$,то рівняння $sinx = -\alpha$ має таку множину розв'язків:

$x = (-1)^{k+1} arcsina + \pi k, k\epsilon Z$.

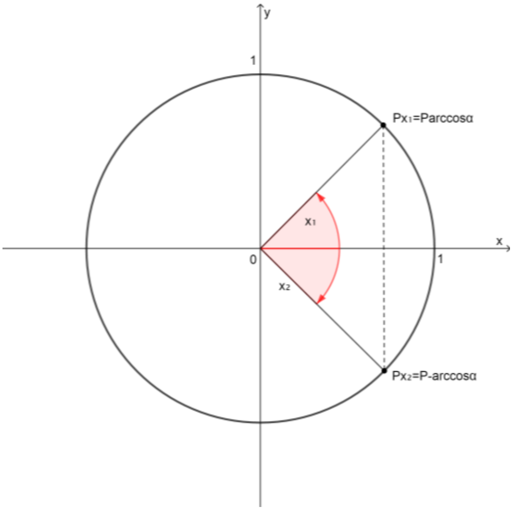


Рис. Рівняння $sinx = a$. на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \cos x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z; \\ x_2 = -arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z. \end{cases}$

Об'єднавши ці формули ми отримаємо одну загальну: $x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|cosx| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $cosx = -1$, то $x = \pi + 2k\pi, \ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $cosx = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 1$, $cosx = 1$, $x = 2k\pi, \ k\epsilon Z$.

Зауваження: $\arccos(-\alpha) = \pi - arccos\alpha$.

2. Рівняння $tgx = a$ і $ctgx = a$.

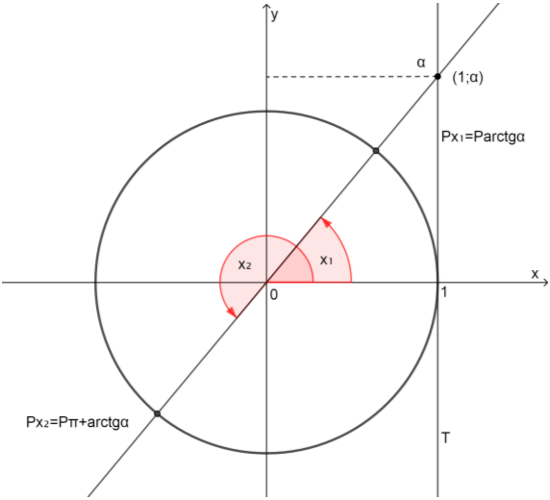


Рис. Рівняння $tgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут α такий, що $tg\,x = a$. Це кут $\alpha = arctga$. Враховуючи періодичність функції $y = tg\,x$, одержуємо формулу коренів рівняння $tg\,x = a$: $x = arctga + \pi k, k\epsilon Z$.

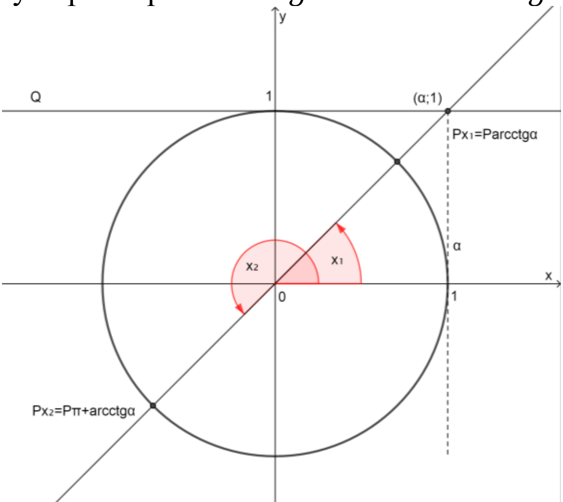


Рис. 1.22. Рівняння $ctgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(0;\pi)$ існує тільки один кут α такий, що $ctgx = a$. Це кут $\alpha = arcctga$. Враховуючи періодичність функції $y = ctgx$, одержуємо формулу коренів рівняння $ctg\,x = a$: $x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z$.

Окремі випадки

Якщо $tgx = 0$, то $x = \pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Зауваження:

1) $arctg(-\alpha) = -arctg\alpha$,

2) $arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha$.

Покажемо методику розв'язування найпростішого тригонометричного рівняння.

Приклад 1.1. $sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in Z$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Розглянемо методи розв'язування тригонометричних рівнянь.

I. Спосіб розкладання на множники

Розв'язуючи тригонометричні рівняння таким методом необхідно усі члени рівнянь перенести у ліву частину і подати утворений вираз як добуток, при цьому використовуючи всі відомі способи розкладання на множники, а саме: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення, штучні способи та використання тригонометричних формул. Далі потрібно використати необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток кількох співмножників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають силу.

Приклад. $sin2x - cosx = 0$.

Розв’язання.

$$sin2x - cosx = 0;$$
$$2sinx \cdot cosx - cosx = 0;$$
$$cosx(2sinx - 1) = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ sinx = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

II. Спосіб розв’язання однорідних рівнянь

Рівняння виду:

$a \cdot sinx + b \cdot cosx = 0;$

$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x = 0;$

$a \cdot sin^3x + b \cdot sin^2x \cdot cosx + c \cdot sinx \cdot cos^2x + d \cdot cos^3x = 0.$

також називають однорідними відносно $sinx$ і $cosx$. Сума показників степенів при $sinx$ і $cosx$ у всіх членів такого рівняння однакова. Ця сума називається степенем однорідності рівняння або показником однорідності [41].

Однорідне рівняння у загальному випадку можна записати так:

$$a_0 \cdot sin^n x + a_1 \cdot sin^{n-1}x \cdot cosx + a_2 \cdot sin^{n-2}x \cdot cos^2x + \cdots + a_n \cdot cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – дані числа, $a_0 \neq 0$, n – натуральне число.

Щоб розв'язати однорідне рівняння n-го степення потрібно обидві частини рівняння поділити $cos^n x \neq 0$ (або $sin^n x \neq 0$) і звести його до цілого алгебраїчного відносно функції tgx (або $ctgx$):
$a_0 \cdot tg^n x + a_1 \cdot tg^{n-1} x + a_2 \cdot tg^{n-2} x + \cdots + a_{n=}0$;
(або $a_n \cdot ctg^n x + a_{n-1} \cdot ctg^{n-1} x + a_{n-2} \cdot ctg^{n-2} x + \cdots + a_0 = 0$);

при цьому область визначення рівняння буде $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (або $x = \pi n$), де $n \in Z$.

Зауважимо, що попередньо перед діленням слід довести, що $cos^n x \neq 0$ (або $sin^n x \neq 0$).

Крім цього до вигляду однорідних можна звести деякі рівняння, що не є однорідними, якщо помножити дане рівняння на тригонометричну одиницю $(sin^2 x + cos^2 x)^k, k \in Z.$ Так, до вигляду однорідного можна звести рівняння виду $a_0 \cdot cos^{2n} x + a_1 \cdot cos^{zn-1} x \cdot sinx + a_2 \cdot cos^{2n-2} x \cdot sin^2 x + \cdots + a_n \cdot sin^{2n} x = b.$ Для цього необхідно помножити b на тригонометричну одиницю $b = b \cdot (sin^2 x + cos^2 x)^k$, підібравши показник k так, щоб рівняння стало однорідним.

Зауваження. Іноді, під час розв'язання неповних однорідних рівнянь, необхідно звертати увагу на яку з функцій $cos^n x$ або $sin^n x$ можна ділити. Так, наприклад, в рівнянні $cos^2 x + sinx \cdot cosx = 0$, не можна ділити на $cos^n x \neq 0$, бо можемо загубити множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ Це пов'язано з тим, що в цьому рівнянні $cosx$ може дорівнювати нулю. Отже, дане рівняння можна розв'язати, поділивши його обидві частини на $sin^n x \neq 0$ або способом розкладання на множники його лівої частини.

Приклад. $sinx - cosx = 0.$

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння І степеня відносно $sinx$ і $cosx.$

Доведемо, що $cosx \neq 0.$ Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx - 1 = 0;$$
$$tgx = 1;$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад. $3sin^2x + sinx \cdot cosx - 2cos^2x = 0$.

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Значення x, при яких $cosx = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $cosx = 0$, то мала б виконуватись рівність $3sin^2x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $cos^2x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$
$$D = 1 + 24 = 25; \sqrt{D} = 5;$$
$$a_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}; \ a_2 = \frac{-1 + 5}{6} = -1.$$

Повернемось до заміни:

1) $tgx = \frac{2}{3}$;

$$x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$$

2) $tgx = -1$;

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

III. Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

Це рівняння, до складу яких входять однакові або різні тригонометричні функції одного й того самого аргументу. Це, наприклад, рівняння виду:

$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx + c = 0$; $a \cdot cos^3x + b \cdot cosx + c = 0$;
$a \cdot tg^4 3x + b \cdot tg^2 3x + c = 0$; $a \cdot ctg^2 2x + b \cdot ctg2x + c = 0$;
$a \cdot sin^2x + b \cdot cosx + c = 0$; $a \cdot cos^2x + b \cdot sinx + c = 0$;
$a \cdot tgx + b \cdot ctgx = 0$.

Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції.

Приклад. $cos^2x - 5cosx = 6$.

Розв'язання.

$$cos^2x - 5cosx - 6 = 0.$$

Нехай $cosx = t$, де $|t| \leq 1$, тоді маємо:

$$t^2 - 5t - 6 = 0;$$
$$t_1 = -1, t_2 = 6.$$

Корінь $t_2 = 6$ не задовольняє умову $|t| \leq 1$.

Повернемося до заміни:

$$cosx = -1;$$
$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

IV. Перетворення рівняння за допомогою тригонометричних формул

1. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад. $\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1$.

Розв'язання.

$$\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1;$$
$$2sin\frac{15° + x + 45° - x}{2} \cdot cos\frac{15° + x - 45° + x}{2} = 1;$$
$$2sin30° \cdot \cos(x - 15°) = 1;$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15°) = 1;$$
$$\cos(x - 15°) = 1;$$
$$x - 15° = 360° \cdot n, n \in Z;$$
$$x = 15° + 360° \cdot n, n \in Z.$$

Відповідь. $15° + 360° \cdot n, n \in Z$.

2. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад. $cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$.

Розв'язання.

$$cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4};$$
$$\frac{1 + cos3x}{2} = \frac{1}{4};$$
$$1 + cos3x = \frac{1}{2};$$
$$cos3x = -\frac{1}{2};$$
$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$
$$3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$
$$x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

3. Рівняння, що розв'язуються за домомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Деякі тригонометричні рівняння під час перетворень можуть бути зведені до рівності тригонометричних функцій. Такі рівняння розв'язуються на основі рівності однойменних тригонометричних функцій.

1) Для того, щоб синуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$sinx = siny \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x - y = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

2) Для того, щоб косинуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$cosx = cosy \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 2\pi k, k \in Z, \\ x - y = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

3) Для того, щоб тангенси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо одночасне виконання двох умов:

$$tgx = tgy \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x - y = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Приклад. $sin4x = sin3x$.

Розв'язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} 4x + 3x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ 4x - 3x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 7x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z, \\ x=2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

4. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад. $sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0$.

Розв'язання.

$$sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0;$$
$$-(cos6x \cdot cosx - sin6x \cdot sinx) = 0;$$
$$-cos7x = 0;$$
$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$
$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z$.

5. Рівняння, що розв'язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад. $sin2x \cdot sin6x = sin3x \cdot sin5x$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(cos4x - cos8x) = \frac{1}{2}(cos2x - cos8x);$$
$$cos4x - cos8x = cos2x - cos8x;$$
$$cos4x - cos2x = 0;$$
$$-2 \cdot sin3xsinx \cdot= 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} sin3x = 0, \\ sinx = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3x = \pi n, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки множина розв'язків другого рівняння сукупності включається в множину розв'язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

V. *Введення допоміжного кута*

Для розв'язання рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ винесемо за дужки вираз $\sqrt{a^2 + b^2}$, отримаємо:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot cosx\right) = c.$$

Так як $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$ і $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$, то можна підібрати такий кут φ, щоб $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = cos\varphi, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = sin\varphi$. Тоді рівняння нобуде вигляду:

$\sqrt{a^2 + b^2}(cos\varphi \cdot sinx + sin\varphi \cdot cosx)$; $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi) = c$,

звідки $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Це рівняння має розв'язки, якщо $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$, тобто $a^2 + b^2 \geq c^2$, тоді

$$x + \varphi = (-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in Z;$$

Кут φ можна знайти з рівності $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{b}{a}$, звідки $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Якщо ж $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, тобто $a^2+b^2 < c^2$, тоді рівняння розвязків не має.

Відповідь. $(-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in Z.$

Приклад. $\sqrt{3}sinx - cosx = 1.$

Розв'язання.

$a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, a^2 + b^2 = 4, c^2 = 1, a^2 + b^2 > c^2.$

Отже, рівняння має розв'язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ за дужки і отримаємо:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx\right) = 1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx = \frac{1}{2}.$$

Використаємо заміну $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = sin\frac{\pi}{6}$.

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$sinx \cdot cos\frac{\pi}{6} - cosx \cdot sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

VI. Метод раціоналізації

Цей метод полягає у застосуванні універсальної підстановки, тобто формул, що виражають $sinx, cosx, tgx$ і $ctgx$ через $tg\frac{x}{2}$. Тому рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ завжди може бути зведене до раціонального алгебраїчного рівняння відносно $tg\frac{x}{2}$.

При такій заміні область визначення рівняння звужується на значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$. Тому під час розв'язування рівнянь цим способом слід перевірити додатково, чи не має серед значень $x = \pi(2n+1), n \in Z$ розв'язків даного рівняння.

Зауваження! Цей метод розв'язування рівнянь використовують у крайніх випадках, коли не можна знайти більш простіший спосіб розв'язування, тому що під час здійснення заміни можна отримати алгебраїчні рівняння високих степенів.

Приклад. $5sinx - cosx = 5$.

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях x. Здійснюючи заміну за допомогою формул, отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 5;$$

яке визначено при $x \neq \pi(2n+1), n \in Z$, тобто при переході від $sinx$ і $cosx$ до $tg\frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$.

Нехай $tg\frac{x}{2} = t$, тоді отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5;$$

$$10t - 1 + t^2 = 5 + 5t^2; 4t^2 - 10t + 6 = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0;\ t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = 1, \\ tg\frac{x}{2} = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{x}{2} = arctg\frac{3}{2} + \pi k; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$.

Так як 2π – період $sinx$ і $cosx$, то достатьо перевірити значення $x = \pi$:

$$5sin\pi - cos\pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n+1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

VII. Зведення до однорідного відносно $sinx$ та $cosx$.

Використовуючи формули подвійного аргументу, перепишемо рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ у вигляді:

$$a \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) + b \cdot co\,s\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = c \cdot 1;$$

$$2a \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + b \cdot \left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) = c \cdot \left(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}\right);$$

тобто отримаємо однорідне рівняння другого порядку відносно $sin\frac{x}{2}$ та $cos\frac{x}{2}$:

$$(c+b) \cdot sin^2\frac{x}{2} - 2a \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + (c-b) \cdot cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

розв'язання якого розглядалося у пункті II.

VIII. Піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Можна піднести обидві частини рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ до квадрату і звести його до однорідного:

$$(a \cdot sinx + b \cdot cosx)^2 = c^2;$$

$$a^2 \cdot sin^2x + 2 \cdot asinx \cdot bcosx + b^2 \cdot cos^2x = c^2 \cdot (sin^2x + cos^2x);$$

$$(a^2 - c^2) \cdot sin^2x + 2 \cdot asinx \cdot bcosx + (b^2 - c^2) \cdot cos^2x = 0.$$

Цей спосіб розв'язання неприйнятий, бо отримаємо сторонні корені.

IX. Метод заміни змінних

Під час розв'язування рівнянь виду $F(sinx \neq cosx\,, sinx \cdot cosx) = 0$ доцільно застосовувати підстановку

$sinx \pm cosx = t$, тоді після піднесення останньої рівності до квадрата отримаємо:

$$2sinx \cdot cosx = \pm(t^2 - 1),$$

а саме рівняння після підстановки змінних зведеться до алгебраїчного.

Приклад. $sinx - 2sinx \cdot cosx = 1 - cosx$ [53].

Розв'язання.

$$sinx + cosx - 2sinx \cdot cosx - 1 = 0.$$

Нехай $sinx + cosx = t$, де $|t| \leq \sqrt{2}$, тоді

$$2sinx \cdot cosx = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0;\ t^2 - t = 0;$$
$$t^2(t - 1) = 0;$$
$$t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 0, \\ sinx + cosx = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x + \frac{\pi}{4} = \pi n, nZ \in, \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;\ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

X. Методи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь

1. Дробово-раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад. $\frac{sin^4x - 1}{cos^4x} = 1.$

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $cosx \neq 0; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

$$sin^4x - 1 = cos^4x;$$
$$sin^4x - cos^4x = 1;$$
$$(sin^2x - cos^2x)(sin^2x + cos^2x) = 1;$$
$$-(cos^2x - sin^2x) = 1;$$
$$cos2x = -1;$$
$$2x = \pi + 2\pi k, k \in Z;$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Оскільки множина розв’язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв’язків не має.

Відповідь. Розв’язків немає.

2. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад. $4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0.$

Розв’язання.

$$4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0;$$
$$arctg(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$$x^2 - 3x - 3 = 1;$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$
$$x_1 = -1;\ x_2 = 4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

Приклад. $arcsin4x + \arcsin(1 - 4x) = \frac{\pi}{3}$ [53].

Розв’язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1 - 4x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - arcsin4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1 - 4x = sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos(arsin4x) - cdos\frac{\pi}{3} \cdot \sin(arcsin4x);$$
$$1 - 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - 16x^2} - \frac{1}{2} \cdot 4x;$$

$$2-4x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-16x^2};$$
$$4-16x+16x^2=3-48x^2;$$
$$64x^2-16x+1=0;\ (8x-1)^2=0; x=0{,}125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x = 0{,}125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. 0,125

3. Розв'язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад. $cos3x+cos\frac{5x}{2}=2.$

Розв'язання.

Оскільки $|cos3x|\le 1$ і $\left|cos\frac{5x}{2}\right|\le 1$, то
$$\left|cos3x+cos\frac{5x}{2}\right|\le 2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:
$$\begin{cases} cos3x=1, \\ cos\frac{5x}{2}=1; \end{cases} \begin{cases} 3x=2\pi n, \\ \frac{5x}{2}=2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x=\frac{2\pi n}{3}, n\in Z, \\ x=\frac{4\pi k}{5}, k\in Z. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3}=\frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3}=\frac{4\pi k}{5}$;
$$5\pi n=6\pi k; 5n=6k.$$

Маємо: $n=6m; k=5m, m\in Z.$

Отже, $x=4\pi m, m\in Z.$

Відповідь. $4\pi m, m\in Z.$

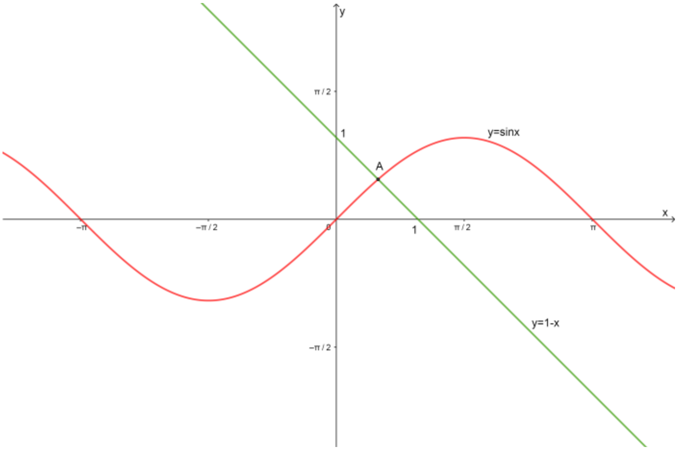
XI. Розв'язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Іноді під час розв'язування практичних задач, доводиться стикатися з такими рівняннями, для розв'язування яких іноді неможливо взагалі вказати способу, який би дозволив знайти корені абсолютно точно. В таких випадках обмежуються знаходженням лише наближених значень коренів. Одним з таких способів є – графічний.

Приклад 2.29. $sinx = 1 - x$.

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = sinx$ і $1 - x$.



Ці графіки перетинаються в одній точці A. Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0{,}5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0{,}5 \rightarrow sinx \approx 0{,}4794, 1 - 5 = 0{,}5$. Отже, $sinx < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $sinx = 1 - x$ буде більший ніж 0,5.

Перевіримо значення $x = 0{,}6$. Маємо: $sinx \approx 0{,}5446, 1 - x = 0{,}4$. Отже, $sinx > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь x_0 повинен бути менший, ніж 0,6.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0{,}5; 0{,}6]$. Тому з точністю до 0,1:

$x_0 \approx 0{,}5$ (з недостачею), $x_0 \approx 0{,}6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0{,}5$

XII. Зведення рівняння до рівносильної системи

Приклад 2.25. $\frac{2sin^2x+3sinx}{1-cosx} = 0.$

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2sin^2x + 3sinx = 0, \\ 1 - cosx \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2sinx(sinx + 1{,}5) = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = -1{,}5, \end{array}\right. \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} sinx = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками рівняння $sinx = 0$ системи. Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z.$

Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in Z.$

Лекція 15. Теоретико-методичний аналіз розв'язування нерівностей у старшій школі

План

1. Дробово-раціональні нерівності та нерівності вищих степенів
2. Ірраціональні нерівності
3. Показникові нерівності
4. Логарифмічні нерівності
5. Найпростіші тригонометричні нерівності

1. Дробово-раціональні нерівності та нерівності вищих степенів

Дробово-раціональною нерівністю називається нерівність виду

$\frac{P(x)}{Q(x)} >$ або < 0, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність можна звести до раціональної.

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0;$

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0;$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$.

Дробово-раціональні нерівності розв'язуються методом інтервалів так і методом систем. Розглянемо простіший метод, а саме метод інтервалів, суть якого полягає в насупному:

1. Знаходимо корені чисельника і знаменника лівої чатини $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Для цього прирівнюємо многочлени чисельника та знаменника до нуля: 1) $P(x) = 0$; 2) $Q(x) = 0$.

Всі знайдені корені чисельника та знаменника позначаємо на одній числовій осі. При цьому корені знаменника завжди позначаємо «виколотою» точкою.

Розв'язувати рівняння $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ потрібно з урахуванням **кратності коренів!**

Кратність коренів – це кількість однакових коренів рівняння.

Кратність коренів може виникнути при розв'язуванні рівнянь двох видів:

а) квадратного рівняння, дискримінант якого дорівнює 0, у цьому випадку рівняння має один корінь кратності 2;

б) рівняння виду $(ax + b)^n = 0$, це рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{a}$ кратності n.

2. Будуємо криву знаків для лівої частини нерівності $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Побудова кривої знаків (кажуть «пускаємо змійку) починається з крайнього інтервалу – правого. Для побудови кривої знаків потрібно визначити знак, якого набуває нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ на кожному з проміжків числової осі.

(Примітка, якщо кратність кореня парна, то при переході через цей корінь змійка знаку не змінює, якщо непарна, то при переході змійка змінює свій знак на протилежний)

3. На отриманому малюнку штрихами відмічаємо ті проміжки, що відповідають знаку нерівності, який має нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Якщо нерівність нестрога, то потрібно замалювати ті корені чисельника, яких немає в знаменнику.

4. З отриманого малюнка виписати відповідь у вигляді об'єднання заштрихованих інтервалів.

Нерівність виду $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) <> 0$ також розв'язуються методом інтервалів [10].

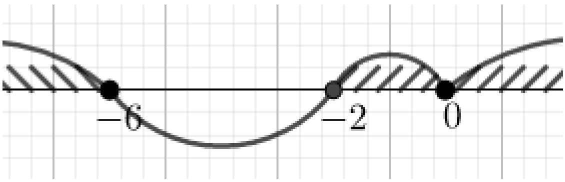
Приклад. Розв'язати нерівність $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Винесемо спільний множник x^2 за дужки: $x^2(x^2 + 8x + 12) \geq 0$, шляхом перетворення знайдемо корені лівої частини нерівності:

$$x^2(x^2 + 8x + 12) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2 = 0, \\ x^2 + 8x + 12 = 0 \end{array}\right.$$

$$\to \left[\begin{array}{c} x_{1,2} = 0, \\ x_3 = -6, x_4 = -2. \end{array}\right.$$

Запишемо дану нерівність у вигляді $x^2(x + 6)(x + 2) \geq 0$. Знайдені корені позначаємо на числовій осі і будуємо криву знаків, попередньо врахувавши, що корінь $x = 0$ має кратність кореня 2 (парну), тобто змійка при проходженні через цю точку свого знаку не змінить (з яким знаком прийшла, з таким знаком і піде):



Отже, $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

Таким чином, для розв'язання таких нерівностей використовують загальний метод інтервалів.

1. Привести раціональну нерівність до виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_m}$, $k_m \geq 1$, $k_m \in N$.

2. Розташувати нулі множників на осі x у відповідному порядку.

3. Над проміжком праворуч, починаючи від найбільшого нуля многочлена $P(x)$ поставити знак «+». Потім, рухаючись справа наліво, при переході через черговий нуль змінювати знак на протилежний, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у непарному степені, і зберігати знак, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у парному степені.

2. Ірраціональні нерівності

У програмі рівня стандарту ірраціональні нерівності не вивчаються.

Всі зазначені теореми, що стосуються розвязуванню ірраціонільних нерівностей і подані нижче, не доводяться, а лише вказується, що вони доводяться на основі теореми, про рівносильність рівнянь $f(x) = g(x)$ і $\left(f(x)\right)^{2n-1} = \left(g(x)\right)^{2n-1}$, $n \in N$, доведення якої подане у підручнику. На основі цієї теореми, розглядаючи завдання парного степеня, роблять висновок, що рівняння $\left(f(x)\right)^{2n} = \left(g(x)\right)^{2n}$, $n \in N$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Теореми, які використовуються при розвязуванні ірраціональних нерівностей

Теорема 1. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$.

Теорема 2. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$.

Теорема 3. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$.

Теорема 4. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$.

Теорема 5. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}.$

Теорема 6. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}.$

Теорема 7. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array} \right.$.

Теорема 8. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \end{array} \right.$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2 - 3x} < x + 7$.

Розв'язання: $\sqrt{-x^2 - 3x} < x + 7 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x + 7 > 0 \\ -x^2 - 3x \geq 0 \\ -x^2 - 3x < (x + 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 0].$

Відповідь. $x \in [-3; 0]$

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0$.

Розв'язання: $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 6x < 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{cases}.$ Розв'язавши кожну нерівність окремо і наклавши розв'язки, отримаємо $(-3; 0) \cup \{0{,}5; 2\}$.

Відповідь. $(-3; 0) \cup \{0{,}5; 2\}$

3. Показникові нерівності

Означення: Нерівності, де хоча б одна з функцій показникова, називаються показниковими нерівностями.

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей базується на використанні властивостей монотонності показникової функції.

При розв'язуванні показникових нерівностей виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$, $f(x), g(x)$- деякі функції відносно змінної x, використовуються дві теореми (без доведень):

Теорема 1. *Якщо* $a > 1$*, то нерівність виду* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$*, рівносильна нерівності* $f(x) > g(x)$.

Теорема 2. *Якщо* $0 < a < 1$*, то нерівність виду* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *рівносильна нерівності* $f(x) < g(x)$.

Використанням теорем називають логарифмуванням нерівності.

Приклад. Розв'язати нерівність $1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25$

Розв'язання. Оскільки $5^0 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 5^2$, то $0 < 1 - \frac{1}{2}x < 2$,

$-2 < \frac{1}{2}x - 1 < 0$, $-1 < \frac{1}{2}x < 1$, і, звідси $-2 < x < 2$

Відповідь: $-2 < x < 2$.

Приклад. Розв'язати нерівність $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \le (0{,}1)^{2x-3}$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності

$$4x^2 - 2x - 2 \ge 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \ge 0.$$

Таким чином, початковій нерівності задовольняють всі дійсні числа.

Відповідь. $x \in R$.

Розв'язування будь-якої нестрогої показникової нерівності відрізняється від розв'язування відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв'язків коренів відповідного рівняння.

Нерівність виду $a^{f(x)} \geq b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, може бути розв'язана за допомогою логарифмування обох частин (це можливо, тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \leq 0$ нерівність справедлива для будь-якого x з ОДЗ нерівності. А нерівність $a^{f(x)} \leq b$ при $b \leq 0, a > 0$, $a \neq 1$ розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати нерівність $3^{2x-1} < 11^{3-x}$.

Розв'язання: Обидві частини нерівності додатні при будь-якому значенні x. Прологарифмувавши обидві частини нерівності за основою 3, отримаємо нерівність $2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x)$ рівносильну початковій.

Таким чином $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Звідси з врахуванням того, що $2 + \log_3 11 > 0$, знаходимо всі розв'язки початкової нерівності - проміжок

Відповідь. $-\infty < x < \dfrac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}$.

Розглянемо деякі спеціальні методи розв'язування показникових нервностей.

Метод розкладання на множники та ділення нерівності на множник виду

$$a^{f(x)} > 0$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Розв'язання. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$, $(-20) \cdot 2^x > (-20) \cdot 5^x$, поділимо нерівність на (-20), при цьому не забуваємо знак нерівності поміняти на протилежний, отримаємо: $2^x < 5^x$.

Оскільки $2^x > 0$, $5^x > 0$, при будь-яких $x \epsilon R$, то поділимо ліку і праву частини нерівності на 2^x або 5^x.

$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1, \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x > 0.$

Відповідь. $(0;\ +\infty)$.

Метод заміни

При розв'язуванні показникових рівнянь методом заміни враховуємо область значень показникової функції.

Приклад. Розв'язати нерівність: $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \geq 0$.

Розв'язання. Введемо заміну $7^x = t > 0,$ отримаємо $t^2 - 8t + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-7) \geq 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Повертаємося до заміни, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} 7^x \leq 1 \\ 7^x \geq 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Відповідь. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Нерівності, основою степеня яких є функції змінної x

Нерівності такого виду і методи, запропоновані нижче, розглядаються лише в класах з поглибленим вивченням математики.

Нерівності виду $\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)}$ $(>, \geq, \leq)$, основою степеня яких є функції змінної х, розв'язуються за допомогою теорем 3 і 4.

Теорема 3. Якщо $\varphi(x) > 0,$ то $\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x < 1) \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Для нерівності $\varphi(x)^{f(x)} > \varphi(x)^{g(x)}$ другий рядок першої системи сукупності буде: $f(x) > g(x)$, другий рядок другої системи сукупності буде: $f(x) < g(x)$.

Теорема 4. Якщо $\varphi(x) > 0,$ то $\varphi(x)^{f(x)} \leq \varphi(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x < 1) \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$.

Розв'язання. $|x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-3| > 1 \\ 2x^2-7x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < |x-3| < 1 \\ 2x^2-7x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 4 \end{array}\right. \\ x(2x-7) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x \neq 3 \\ x(2x-7) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \\ x \in (2; 3) \cup (3; 3{,}5). \end{array}\right.$$

Відповідь. $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (4; +\infty)$.

Метод інтервалів для складної експоненти

Функція виду $y = g(x)^{f(x)}$ називається складною експонентою.

Теорема 5. Знак різниці $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ збігається зі знаком добутку

$(a-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ нерівності, тобто: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}$

1) Якщо $a > 1$, то $f(x) > g(x)$, тобто $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

2) Якщо $a < 1$, то $f(x) < g(x)$, тобто $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

Теорема 6.

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}$$

Теорема 6.

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати нерівність: $(x-2)^{x^2-6x+8} \geq 1$.

Розв'язання. $(x-2)^{x^2-6x+8} \geq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ (x-3)(x^2-6x+8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ (x-3)(x-2)(x-4)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3]\cup[4;+\infty).$$

Відповідь. $(2;3]\cup[4;+\infty)$.

4. Логарифмічні нерівності

Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей базується також на використанні властивостей монотонності логарифмічної функції. Не врахування монотонності функції, призводить до найпоширенішої помилки при розв'язуванні як логарифмічних так і показникових нерівностей. Крім того, ще однією з помилок є не врахування області визначення логарифмічної функції.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, де $a>0, a\neq 1$, користуємось теоремами (без доведень):

Теорема 1. Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a>0$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)>0. \end{cases}$

Теорема 2. Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $0<a<1$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0. \end{cases}$

Використання цих теорем називається потенціюванням нерівностей.

Примітка. Умови $f(x)>0$ для теореми 1 та $g(x)>0$ для теореми 2 непотрібно включати у відповідні системи.

Розв'язування нерівностей за теоремами 1 і 2

Приклад. Розв'язати нерівність: $\lg(2x^2+4x+10) > \lg(x^2-4x+3)$.

Вказівка. $\lg(2x^2+4x+10) > \lg(x^2-4x+3) \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ 2x^2+4x+10>x^2-4x+3 \end{cases}$$

Відповідь. $(-\infty;-7)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$

При розв'язуванні логарифмічних нерівносте використовуються всі властивості логарифмів. Використання властивостей логарифмів веде до зміни ОДЗ нерівності, тому ОДЗ потрібно визначати за початковою нерівністю.

Метод заміни

Приклад. Розв'язати нерівність:$\log_2^2(x-1)^2+5\log_{0,5}(x-1)>-1$.

Розв'язання. $\log_2(x-1)^2=2\log_2|x-1|=2\log_2(x-1)$, оскільки ОДЗ $x>1$; $\log_{0,5}(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 0,5}=-\log_2(x-1)$. Врахувавши заміну $\log_2(x-1)=t$, нерівність набуде вигляду $4t^2-5t+1>0, (t-1)(t-\frac{1}{4})>0$,

$t\in(-\infty;\frac{1}{4})\cup(1;+\infty)$. Повернемося до заміни $\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)<\frac{1}{4}\\ \log_2(x-1)>1\end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{c}\log_2(x-1)<\log_2\sqrt[4]{2}\\ \log_2(x-1)>\log_2 2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x\in(-\infty;1+\sqrt[4]{2})\\ x\in(3;+\infty)\\ x>1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x\in\left(1;1+\sqrt[4]{2}\right)\\ x\in(3;+\infty).\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(1;1+\sqrt[4]{2}\right)\cup(3;+\infty)$

Нерівності виду $\log_{\varphi(x)}f(x)>\log_{\varphi(x)}g(x)$

Такий вид нерівностей розглядаються лише в класах з поглибленим вивченням.

Теорема 3. Нерівність виду $\log_{\varphi(x)}f(x)>\log_{\varphi(x)}g(x)$ рівносильна сукупності двох систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x)>1\\ f(x)>g(x)\\ g(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(x)>0\\ \varphi(x)<1\\ f(x)<g(x)\\ f(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$.

Приклад. Розв'язати нерівність: $\log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2<0$.

Вказівка. $\log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2<0\Leftrightarrow\log_{x+\frac{5}{2}}(\frac{x-5}{2x-3})^2<\log_{x+\frac{5}{2}}1$.

Розглянути два випадки: $0<x+\frac{5}{2}<1$ та $x+\frac{5}{2}>1$.

Відповідь. $(-2;\ -1{,}5) \cup (\frac{8}{3}; 5) \cup (5; +\infty)$

5. Найпростіші тригонометричні нерівності

Тригонометричні нерівності у класах вивчення математики на рівні стандарту не розглядаються.

Розв'язувати тригонометричні нерівності можна двома способами: з використанням графіків функцій (у підручнику автора Мерзляка) і за допомогою одиничного кола (у підручника автора Істера). Покажемо методику розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного тригонометричного кола.

Нерівності, які містять зміну під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними.

Наприклад, $\cos x \leq \frac{1}{3}; 5sin^2x + 3\cos x > 6$ тощо.

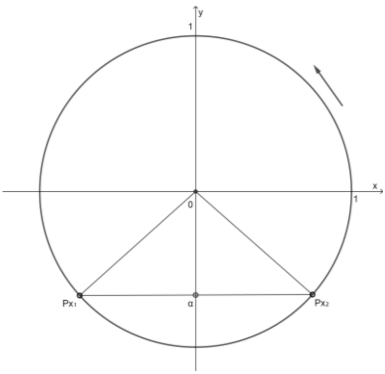
Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a, \cos x <> a, tg\ x <> a, ctg <> a$.

1. Нерівності $sinx > a; sinx < a$.

$sinx > a$



Нерівність $sinx > a$ на одиничному колі

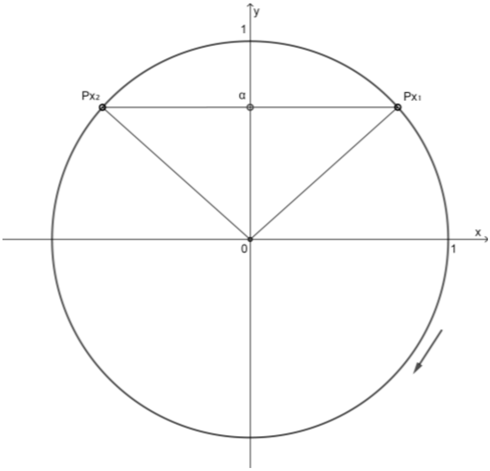
$x_1 = arcsina, x_2 = \pi - arcsina, x_1 < x_2$.

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

$$sinx < a$$



Нерівність $sinx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcsina, x_2 = -\pi - arcsina, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

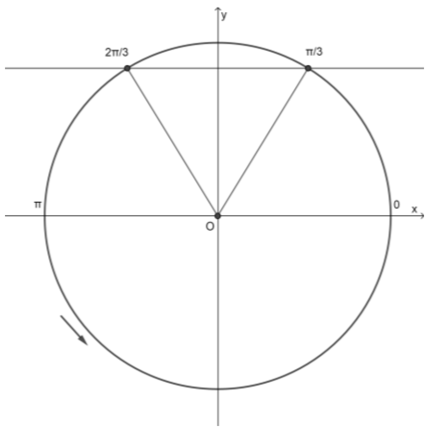
Якщо $a \geq 1$, то $x \in R$.

Приклад. $sinx < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \leq 1$, отже нерівність має розвязки.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\pi - arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають ординату, більшу за $\frac{\sqrt{3}}{2}$, другої дуги – меншу.



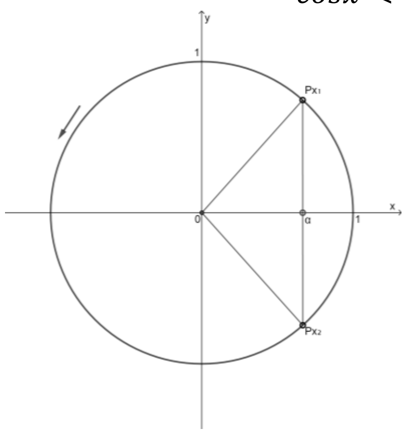
Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = sinx$, отримаємо відповідь:

$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$. Але дивлячись на цей проміжок можна помітити, що записаний він від більшого до меншого значення, тому точку $\frac{\pi}{3}$ слід записати як $\frac{7\pi}{3}$.

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$.

2. Нерівності $cosx < a; cosx > a$

$$cosx < a$$



Нерівність $cosx < a$ на одиничному колі

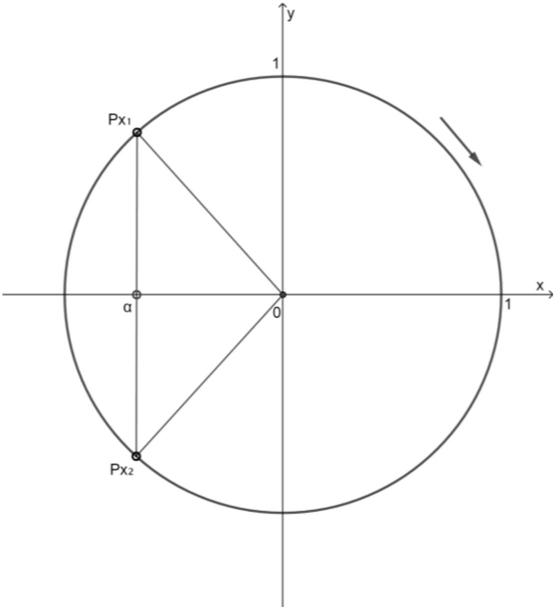
$$x_1 = arccosa, x_2 = 2\pi - arccosa, x_1 < x_2.$$

Якщо $a \leq -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то $arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a > 1$, то $x \in R.$

$$cosx > a$$



Нерівність $cosx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcscosa, x_2 = -arccosa, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in R.$

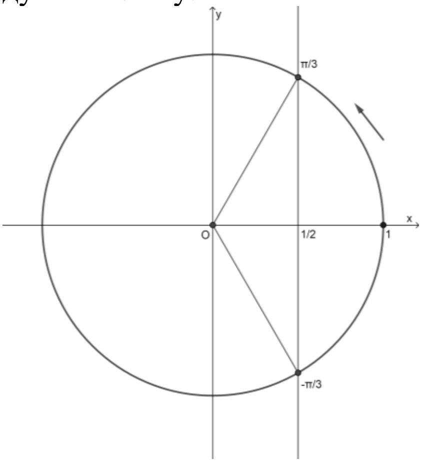
Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-arccosa + 2\pi n < x < arcscosa + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

Приклад. $cosx \geq \frac{1}{2}$

Розв'язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-arccos\frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу.



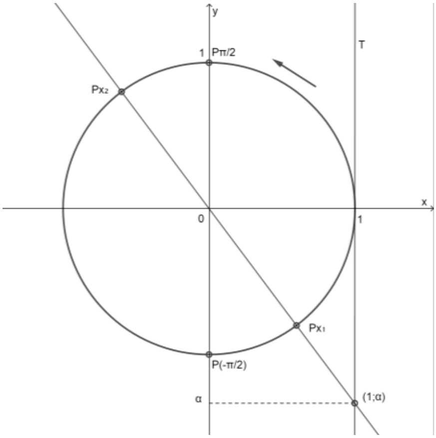
Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$

3. Нерівність $tgx > a; tgx < a$.

$$tgx > a$$

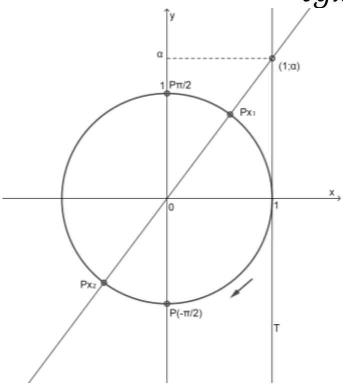


Нерівність $tgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Множина розв’язків: $arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

$$tgx < a$$



Нерівність $tgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв’язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in Z.$

Приклад. $tgx \geq 2$

Розв’язання.

Враховуючи, що функція $y = tgx$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z,$$

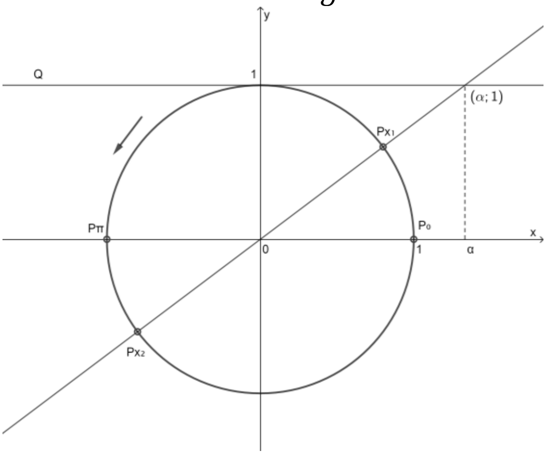
отримаємо:

$$arctg2+\pi n \le x < \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg2+\pi n \le x < \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$.

4. Нерівність $ctgx > a; ctgx < a$.

$$ctgx < a$$

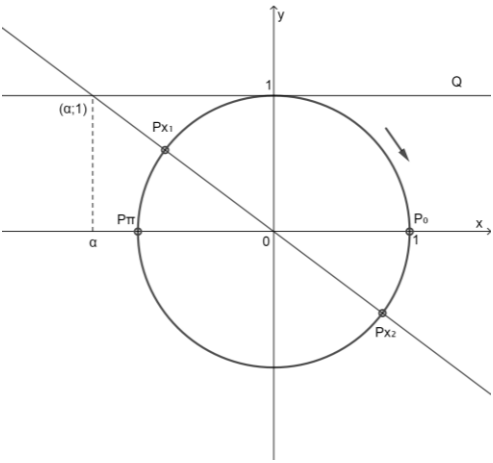


Нерівність $ctgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 < \pi.$$

Множина розв'язків: $arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$.

$$ctgx > a$$



Нерівність $ctgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 > 0.$$

Множина розв'язків: $\pi n < x < arcctga + \pi n, n \in Z.$

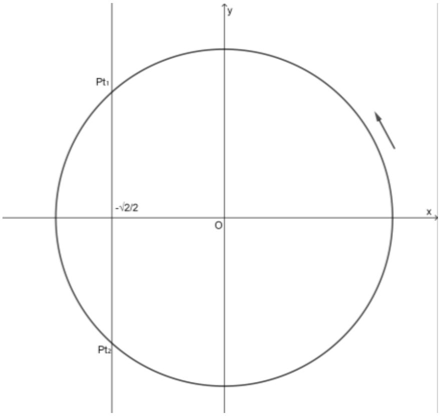
Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

I. Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Приклад. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

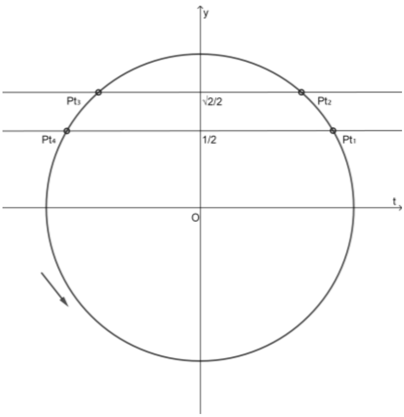
Запишемо умову, за якої точка t належить дузі P_1P_2: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le t \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z.$ Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 2x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z. -\frac{3\pi}{8} + \pi k \le x \le \frac{3\pi}{8} + \pi k, k\epsilon Z.$

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right], k\epsilon Z.$

II. Подвійні тригонометричні нерівності

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).



Знайдемо значення $t_1, t_2, t_3, t_4.$ здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$, $t_3 < t_4.$

$$t_1 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};\ t_3 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - arcsin\ \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

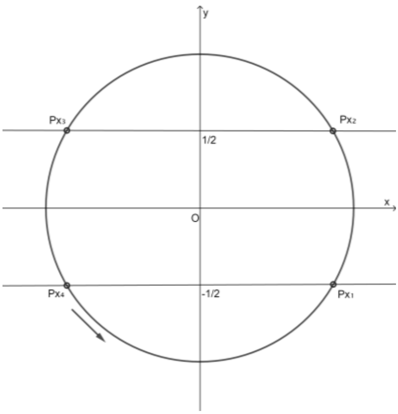
Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно X: $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k\epsilon Z$.

III. Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Приклад. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).



Знайдемо значення x_1, x_2, x_3, x_4, виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$, $x_1 = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \pi - arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$; $x_4 = \pi + arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k\epsilon Z$.

Слід відмітити, що розглядаються також тригонометричні нерівності, які розв'язуються методом заміни або ж перетворюються за допомогою основних тригонометричних тотожностей до найпростіших.

Лекція 16. Методика вивчення похідної у закладах загальної середньої освіти

План

1. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Похідна»).
2. Задачі, які приводять до поняття похідної у діючих підручниках

3. Дослідження методики введення поняття похідної у діючих підручниках

4. Методика дослідження функції за допомогою похідної

1. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Похідна»).

Вивчення «Похідна та її застосування» в 10 класі пропонується на двох трьох рівнях: стандарту, профільний та поглиблений. Перший пропонує 54 години на рік, 7 год резерву. За другим варіантом, 210 годин на рік, 24 год резерву. Що стосується навчального плану з математики поглибленого рівня, то на алгебру виділяється 210 годин на рік, 22 год. резерву.

Зазначимо, що більша кількість годин на профільному рівні обумовлена тим, що в тему «Похідна та її застосування» входить матеріал про границю та неперервність функції, а на поглибленому рівні на вивчення границі відводиться окрема тема обсягом в 18 годин.

Порівняння навчальної програми з теми «Похідна та її застосування» рівня стандарту, профільного та поглибленого рівнях

1. Рівень стандарту (14 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів рівня стандарту).

- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст.
- Правила диференціювання.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції.
- Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

2. Профільний рівень (54 години) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів профільного рівня).

- Границя функції в точці.
- Основні теореми про границі функції в точці.

- Неперервність функції в точці і на проміжку.
- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. Складена функція. Похідна складеної функції.
- Похідні степеневої та тригонометричних функцій.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.
- Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції.

3. Поглиблений рівень (50 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів поглибленого рівня).

- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції та оберненої функції.
- Похідна степеневої, тригонометричних та обернених тригонометричних функцій.
- Основні теореми диференціального числення.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для доведення тотожностей та нерівностей, а також для розв'язування рівнянь і нерівностей.

- Похідні вищих порядків. Поняття опуклості функції та точки перегину. Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків. [Нерівність Йєнсена та її застосування.]
- Застосування похідної до розв’язування задач, зокрема прикладного змісту.

Розглянемо підручники профільного та поглибленого рівнів.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. міститься тема «Похідна та її застосування». У цей параграф входять пункти: радіанна міра кута; означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці; задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції; поняття похідної; правила обчислення похідних; рівняння дотичної; ознаки зростання і спадання функції; точки екстремуму функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку; друга похідна, поняття опуклості функції; побудова графіків функції. Додатково подається матеріал про деякі властивості неперервних функцій (Мерзляк А. Г. проф. рівень, 2018).

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. для поглибленого вивчення математики містить тему «Похідна та її застосування». У зміст цієї теми входять такі підтеми: приріст функції, задачі, які приводять до поняття похідної; поняття похідної; правила обчислення похідних; рівняння дотичної; теореми Ферма, Ролля, Лагранжа; ознаки зростання і спадання функції; точки екстремуму функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку; друга похідна, поняття опуклої функції; побудова графіків функції. Додатково подається матеріал по доведенню теорем про похідні складеної та оберненої функцій; а також про нерівність Єнсена (Мерзляк А. Г. поглиб. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г. тема «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» в порівняні з попередніми підручниками складається з таких пунктів: границя і неперервність функції; асимптоти функції; дотична до графіка функції і похідна; техніка диференціювання; похідні тригонометричних функцій; похідна складеної функції; зростання і спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції; застосування другої похідної до дослідження функції та побудови їх графіків; похідна як швидкість (Бевз Г. П. проф. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», автора Нелін Є. П. до теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» до дається застосування похідної до розв'язування рівнянь та доведення нерівностей; застосування похідної до розв'язування завдань з параметрами. Відсутні такі пункти як: зростання і спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції; застосування другої похідної до дослідження функції та побудови їх графіків; похідна як швидкість (Нелін Є. П. проф. рівень, 2018).

Навчальний матеріал підручника «Алгебра і початки аналізу», авторів Істер О. С., Єргіна О. В. схожий з попередніми підручниками, і об'єднує у собі усі пункти з теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» зрозглянутих нами підручників (Істер О. С. проф. рівень, 2018).

2. Задачі, які приводять до поняття похідної у діючих підручниках

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 – фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x – довільна точка області визначення функції f і така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу функції f у точці x_0 і позначають Δx (Мерзляк, 2018).

Маємо: $\Delta x = x - x_0$.

Звідси $x = x_0 + \Delta x$.

Це означає, що аргумент отримав приріст Δx у точці x_0.

Зауважимо, що приріст аргументу може бути як додатним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$, і від'ємним: якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$ (Мерзляк, 2018).

Значення функції f зміниться на величину $f(x_0 + \Delta x)– f(x_0)$, якщо аргумент у точці x_0 отримає приріст Δx (Мерзляк, 2018).

Цю різницю називають приростом функції f у точці x_0 і позначають Δx.

Маємо: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x0)$ або $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Приріст функції $y = f(x)$ позначають також Δy, тобто $\Delta y = f(x)– f(x_0)$ або $\Delta y = f(x_0 + Dx)– f(x_0)$ (Мерзляк, 2018).

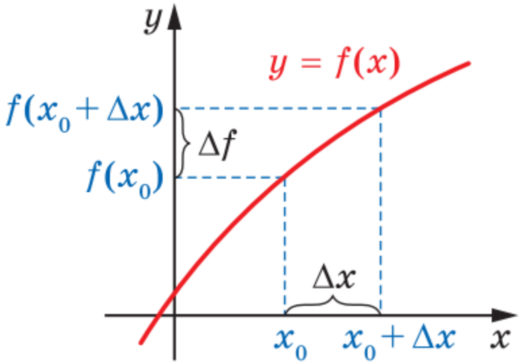


Рис. 1. Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції

Зазначимо, що приріст функції f у точці x_0 для фіксованої точки x_0 є функцією з аргументом Δx.

Задача про миттєву швидкість

Нехай через час t після початку руху по координатній прямій, матеріальна точка має координату $s(t)$. Отже, для того щоб визначити положення точки в будь-який момент часу, існує деяка функція $y = s(t)$, яку називають законом руху точки (Мерзляк, 2018).

Наприклад, закон рівноприскореного руху у курсі фізики задається формулою $s(t) = s_0 + v_o t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 – координата точки на початку руху (при

$t = 0$), v_o – початкова швидкість, α – прискорення (Мерзляк, 2018).

Нехай, $s_0 = 0$, $v_o = 1$ м/с, α = 2 м/с^2. Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, заздалегідь зафіксувавши деякий момент часу t_0 і надавши аргументу приріст Δt а точці t_0. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs (Мерзляк, 2018).

Маємо:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)} - \underbrace{({t_0}^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= {t_0}^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - {t_0}^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t,$$

отже $v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$.

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ означає, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt (Мерзляк, 2018).

При досить малих проміжках часу часу від від t_0 до $t_0 + \Delta t$, середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ будуть мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Значення середньої швидкості буде ближчим до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0, коли буде найменшим Δt. Тобто, якщо при $\Delta t \to 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають миттєвою швидкістю в момент часу t_0 (Мерзляк, 2018).

Якщо в наведеному прикладі $\Delta t \to 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}(\Delta t)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача про дотичну до графіка функції

Нехай M – деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис.2.).

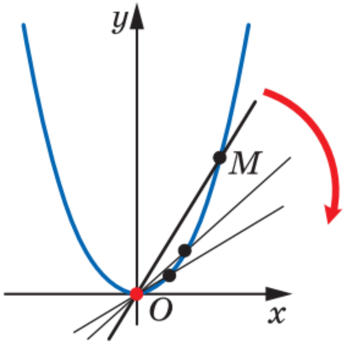


Рис. 2. Парабола $y = x^2$ і пряма OM

Нехай точка M, рухаючись по параболі, близька до точки O. При цьому січна OM буде обертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM і віссю абсцис стане меншим, а січна OM буде прагнути зайняти положення осі абсцис. Коли точка M наближається до точки O, пряма, положення якої прагне зайняти січною OM, називається дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O (Мерзляк, 2018).

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку $M_0(x_0; f(x_0))$.

У точці x_0 ми дамо аргументу приріст Δx і розглянемо точку $M(x; f(x))$ на графіку, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 3). Як видно з графіка, зі зменшенням Δx точка M, що рухається по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta t \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення прямої (на малюнку 1.3, пряма M_0T), то така лінія називається дотичною до графіка функції f у цій точці M_0 (Мерзляк, 2018).

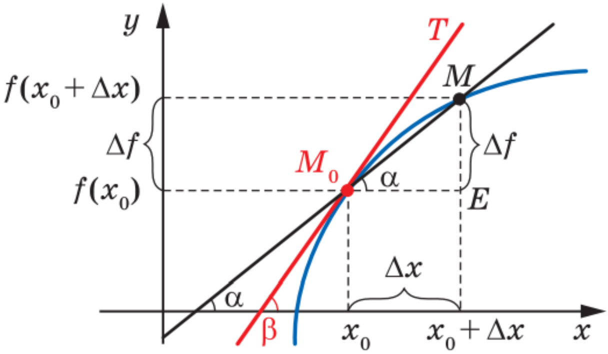


Рис. 3. Графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точка $M_0(x_0; f(x_0))$

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює кут α з додатним напрямком осі абсцис. Як ми всі знаємо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $tg\alpha$, тобто $k = tg\alpha$. Зрозуміло, що $\angle M_0ME = \alpha$ (рис. 3). Тоді з трикутника M_0ME отримуємо (Мерзляк, 2018):

$$tg\,\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введемо позначення $k_{\text{січ}}(\Delta x)$ ksich (Dx) для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим підкреслюючи аргумент, що для заданої функції f і фіксованої точки x0 кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить від на приріст Δx (Мерзляк, 2018).

Маємо: $k_{\text{січ}}(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Нехай дотична M_0T утворює кут β ($\beta \neq 90°$) з додатним напрямком осі абсцис. Тоді його кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дорівнює $tg\beta$. Природно припустити, що чим менше Δx, тим менше різниця між значенням кутового коефіцієнта січної і значенням кутового коефіцієнта тангенса. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січ}}(\Delta x) \to k(x_0)$ (Мерзляк, 2018).

У загальному випадку кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці абсцис x_0 визначається за формулою $k(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}}(\Delta x)$, тобто

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. Дослідження методики введення поняття похідної у діючих підручниках

Означення похідної

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називаєтся границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля (Нелін, 2018).

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$). Коротко, визначення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так (Нелін, 2018):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

З огляду на визначення приросту функції $y = f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, визначення похідної також можна записати так (Нелін, 2018):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функція $f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається диференційованою функцією в цій точці. Функція $f(x)$ називається диференційованою на інтервалі, якщо вона має похідну в кожній точці інтервалу. Операція знаходження похідної називається диференціюванням (Нелін, 2018).

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за визначенням можна використати таку схему (Нелін, 2018):

1. Знайти приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної.

2. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Дізнатися, до якої границі прямує відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Це буде похідна заданої функції.

Похідні деяких елементарних функцій

Покажемо, що запропонована схема використовується для знаходження похідних функції.

1. Обчислити похідну функції $y = c$ (тобто $f(x) = c$), де c є константою (Нелін, 2018).

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

2) Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

3) Так як співвідношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є постійним і дорівнює нулю, то границя цього співвідношення при $\Delta x \to 0$ також дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто $c' = 0$.

2. Обчислити похідну функції $y = x$ (тобто $f(x) = x$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x.$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є постійним і дорівнює 1, то границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ також дорівнює 1. Отже, $y' = 1$, тобто $x' = 1$.

3. Обчислимо похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 =$
$= {x_0}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x) = 2x$. Отже, $(x^2)' = 2x$.

4. Обчислимо похідну функції $y = \frac{1}{x}$ (тобто $f(x) = \frac{1}{x}$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0} = \frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді похідна функції $y = \frac{1}{x}$ у довільній точці x з її області визначення (при $x \neq 0$) $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Отже, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

5. Обчислимо похідну функції $y = \sqrt{x}$ (тобто $f(x) = \sqrt{x}$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

Помножимо і поділимо одержаний вираз на суму $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$ та запишемо так:

$$\Delta y = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Це означає, що $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (зазвичай, при $x_0 \neq 0$). Тоді похідна функції $y = \sqrt{x}$ у довільній точці x з її області визначення, крім $x = 0$ (тобто при $x > 0$) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Геометричний зміст похідної

Розглянувши означення похідної функції $y = f(x)$, запишемо результат, отриманий при розгляді дотичної до графіка функції (рис. 4).

Як було сказано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M відносно осі абсцис x_0 (рис.4) обчислюють за формулою $tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отже, $f'(x_0) = tg\varphi$ (Нелін, 2018).

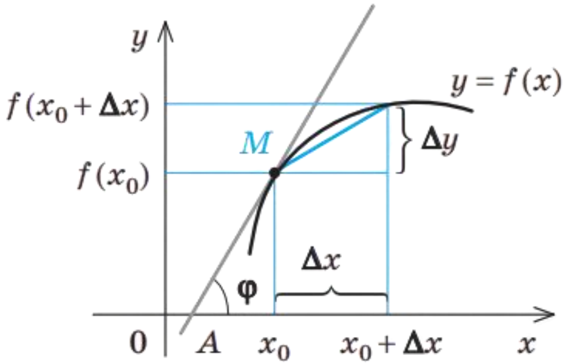


рис. 4. Дотична до графіка функції

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Якщо k – кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = tg\varphi = f'(x_0)$. Отже, значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу тангенса графіка функції до осі абсцис x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цього тангенса (кути відраховуються проти годинникової стрілки від додатного напрямку). осі Ox) (Нелін, 2018).

Фізичний зміст похідної

Записавши визначення похідної функції $x(t)$ у точці t_0: $x'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ і порівнявши отриманий результат із поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху: $v_{\text{меттєва}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, можна зробити висновок, що похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу (Нелін, 2018).

Зокрема, похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, яку можна застосувати до найрізноманітніших фізичних величин. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху виводиться з функції, що представляє залежність шляху s від часу t, а прискорення α є похідною функції, що представляє залежність швидкості v від часу t (Нелін, 2018).

Якщо $s = s(t)$ – це залежність від часу шляху шляху, то

$v = s'(t)$ – швидкість лінійного руху ($v = v(t)$),

$a = v'(t)$ – прискорення прямолінійного руху (Нелін, 2018).

Рівняння дотичної до графіка функції.

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді в точці абсцис x_0 можна провести невертикальну дотичну до графіка функції f (рис.5) (Мерзляк, 2018).

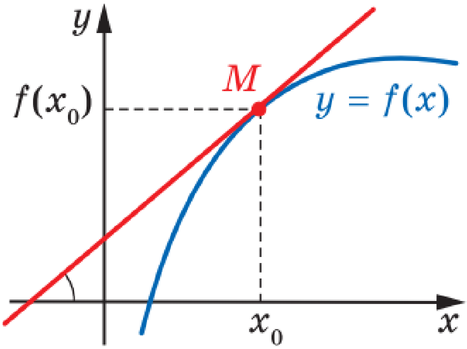


рис.5. Функція f і невертикальна дотична

Рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт цієї прямої (Мерзляк, 2018).

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо: $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так: $y = f'(x_0) \cdot x + b$ (1).

Пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1) (Мерзляк, 2018).

Ми маємо: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0) + b$.

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_0)$. Підставимо знайдене значення b у рівняння (1): $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_0)$ (Мерзляк, 2018).

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

4. Методика дослідження функції за допомогою похідної

Перша похідна. Монотонність функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції.

Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції.

Нехай $y = s(t)$ – закон руху частинки вздовж координатної прямої. Якщо рівняння $s'(t) = 0$. виконується в будь-який момент t від t_1 до t_2, то в розглянутому інтервалі часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координати не змінюються. Це означає, що функція $y = s(t)$ є сталою на розглянутому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Ці міркування показують, що наступна теорема справедлива.

Теорема (ознака сталості функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку (Мерзляк, 2018).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_1 < x_2$ (Мерзляк, 2018).

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I (Мерзляк, 2018).

На рисунку зображено функцію f на проміжку $[a; b]$. Графік цієї функції має властивість, що будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з позитивним напрямком осі абсцис (Мерзляк, 2018).

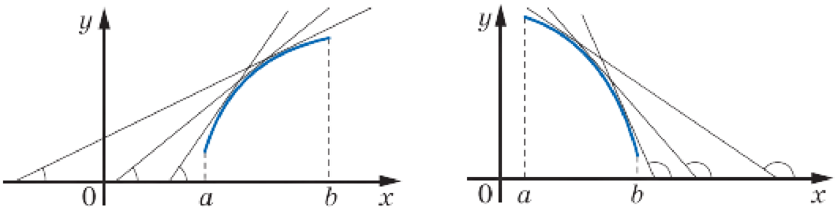


Рис. 6. Графік функції f і дотичні до нього

Оскільки тангенс гострого кута додатний, то кут нахилу будь-якої дотичної також додатний. Тоді з геометричного змісту похідної можна зробити висновок, що для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ (Мерзляк, 2018).

Як видно з рисунка , функція f зростає на розглянутому інтервалі.

На малюнку 1.6. зображено інтервал $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з позитивним напрямком осі абсцис (Мерзляк, 2018).

Оскільки тангенс тупого кута від’ємний, нахил будь-якої дотичної також від’ємний. то для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$ (Мерзляк, 2018).

На рисунку видно, що функція f спадає на розглянутому інтервалі.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому інтервалі I пов'язаний з тим, чи є функція зростаючою (спадною) на інтервалі I (Мерзляк, 2018).

Зв'язок між знаком похідної і зростанням (зменшенням) функції також можна виявити за допомогою механістичної інтерпретації. Якщо швидкість – похідна функції $y = s(t)$ – додатна, то точка на координатній прямій переміщується вправо (рис.). Це означає, що нерівність $t_1 < t_2$ означає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Так само, якщо швидкість від'ємна, точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною (Мерзляк, 2018).

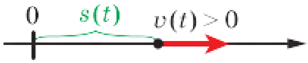


Рис.7. Рух точки вліво

Зв'язок між знаком похідної і зростанням (спаданням) функції встановлюють такі дві теореми.

Теорема 1 (*ознака зростання функції*). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку (Мерзляк, 2018).

Теорема 2 (*ознака спадання функції*). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Доведемо теорему 1 (теорему 2 можна довести аналогічно) (Мерзляк, 2018).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_2 > x_1$ (Мерзляк, 2018).

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на проміжку I (Мерзляк, 2018).

Якщо диференційована функція на інтервалі I є зростаючою (спадною), було б неправильно вважати, що вона повинна мати додатну (від'ємну) похідну на цьому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Теорема 3 (властивість зростаючої функції і спадної функції). Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) (Мерзляк, 2018).

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли функція f є зростаючою (для випадку, коли функція f є спадною, доведення аналогічне) (Мерзляк, 2018).

Нехай x_0 – довільна точка, яка належить проміжку I. Надамо аргументу функції f приріст $\Delta x = x - x_0$ у точці x_0. Ураховуючи зростання функції f, отримуємо:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Тому

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Екстремуми функції

Околом точки x_0 називається будь-який інтервал, внутрішні точки якого є x_0 (Бевз, 2018).

Точка x_0 називається точкою мінімуму (максимуму) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x $(x \neq x_0)$ в деякому околі точки x0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0)) > f(x))$ (Бевз, 2018).

Точки мінімуму і максимуму позначаються через x_{min} і x_{max} відповідно. Значення функції в точці мінімуму називається мінімальним значенням функції, а значення в точці максимуму – максимальним значенням функції. Їх позначають: y_{min} і y_{max} (Бевз, 2018).

Мінімальне і максимальне значення функції разом називаються точками екстремуму. Значення функції в її крайній точці є її екстримальним значенням, або екстремумом (Бевз, 2018).

Точка, в якій похідна функції додатна або від'ємна, не може бути її точкою екстремуму. Усі інші точки області визначення функції є її критичними точками. Отже, точка екстремум функції може бути лише її критичною точкою. Це необхідна умова існування екстремуму (Бевз, 2018).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $(a; b)$, диференційовна на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$, а x_0 – її критична точка. Тоді: точка x0 , при переході через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», є точкою максимуму, а точка, при переході через яку похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», – точкою мінімуму (Бевз, 2018).

Достатні умови існування екстремумів дозволяють виділити точки екстремуму з критичних точок функції (Бевз, 2018).

Справді, якщо похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a; x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0; b)$ – від'ємна, то при переході через точку x_0 зростання функції змінюється на спадання (рис.8.). У цьому випадку x_0 – точка максимуму. Якщо ж при переході через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 – точка мінімуму (рис.9) (Бевз, 2018).

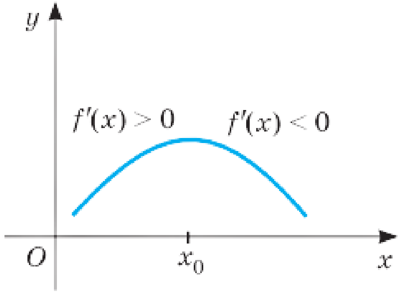


Рис. 8 Похідна функції $f(x)$

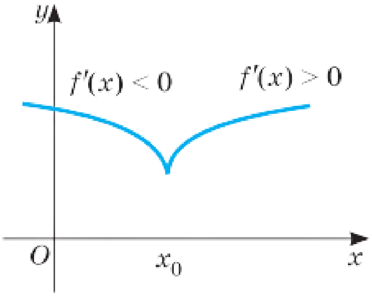


Рис. 9. Похідна функції $f(x)$

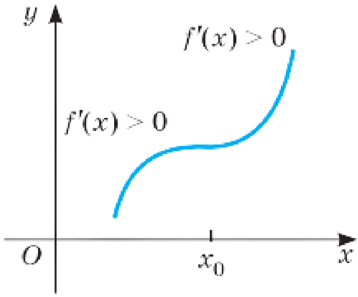


рис.10. Похідна функції $f(x)$

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (рис.10) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму (Бевз, 2018).

Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Властивість, що функція має точку екстремуму x_0, означає: функція отримує максимальне (мінімальне) значення в точці x_0 порівняно зі значенням усіх точок, де функція знаходиться поблизу деякої (можливо, дуже малої) точки x_0. Щоб підкреслити цей факт, точки екстремуму також називають локальними точками максимуму або локальними точками мінімуму.

Неперервна на відрізку $[a; b]$ Максимальне і мінімальне значення 1 функція приймає в кінцях або точках екстремум інтервалу.

Тоді для такої функції на сегменті $[a; b]$ можна використати таку схему.

1. Знайдіть критичну точку, де функція f належить відрізку $[a; b]$.

2. Обчислити знайдену критичну точку та значення функції в кінці розглянутого відрізка.

3. Виберіть максимальне і мінімальне з усіх знайдених значень.

Зрозуміло, що лише тоді, коли розглянута функція f знаходиться у фрагменті $[a; b]$.

Якщо ви визначите, які критичні точки є екстремумами, ви можете зменшити кількість точок, необхідних для пошуку значення функції. Однак пошук екстремальних точок зазвичай вимагає більшої технічної роботи, ніж обчислення значень функції в критичних точках.

Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.

Друга похідна

Нехай матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої за законом $y = s(t)$. Тоді миттєва швидкість $v(t)$ в момент часу t визначається за формулою $v(t) = s'(t)$ (Мерзляк, 2018).

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідна в момент часу t називається прискоренням руху і представлена $\alpha(t)$, тобто $\alpha(t) = v'(t)$ (Мерзляк, 2018).

Отже, функція прискорення руху є похідною функції швидкості руху, яка в свою чергу є похідною закону руху, а саме $\alpha(t) = v'(t) = \left(s'(t)\right)'$ (Мерзляк, 2018).

У цьому випадку функція прискорення y=a(t) називається другою похідною функції $y = s(t)$. запис: $\alpha(t) = s''(t)$ (Мерзляк, 2018).

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовану на деякій множині M. Тоді його похідна також є деякою функцією, визначеною на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \in M$, то похідна функції f' у точці x_0 називається другою похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається як

$f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Сама функція f називається двічі диференційовною в точці x_0 (Мерзляк, 2018).

Функція, яка ставить у відповідність числу x_0 число $f''(x_0)$, називається другою похідною функції $y = f(x)$ і позначається як f'' або y'' (Мерзляк, 2018).

Функція f називається двічі диференційовною на множині M, якщо вона двічі диференційовна в кожній точці множини M (Мерзляк, 2018).

Функція f називається двічі диференційовною, якщо вона двічі диференційовна над $D(f)$ (Мерзляк, 2018).

Поняття опуклості функції. Точки перегину

Важливою характеристикою функції є опуклість угору (опуклість униз).

Нехай функція f диференційовна на інтервалі I. Тоді в будь-якій точці графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести неперпендикулярну дотичну. Функція f називається опуклою на інтервалі I, якщо графік функції на інтервалі I не знаходиться над жодною з таких дотичних (рис. 11.), якщо графік на інтервалі I не знаходиться нижче кожної з таких дотичних (рис. 12.), то вона опукла униз на проміжку I (Мерзляк, 2018).

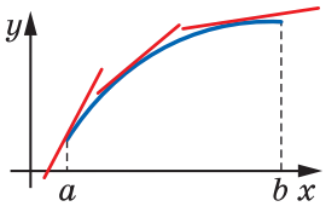


рис. 11. Функція f і дотичні

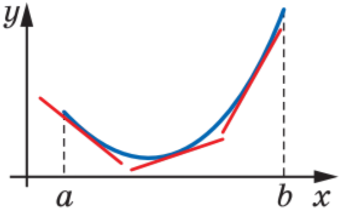
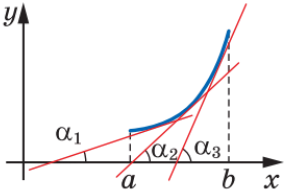


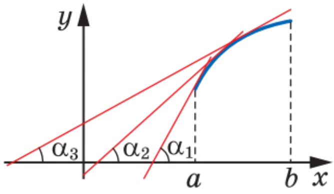
рис. 12. Функція f і дотичні

На рисунку зображено графік функції f, опуклої вниз на проміжку $[a; b]$. Як видно з рисунку, зі збільшенням незалежної змінної x нахил відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на інтервалі $[a; b]$ (Мерзляк, 2018).

Нехай функція f, яка є опуклою вгору, лежить на проміжку $[a; b]$ (рис.13). З малюнках видно, що зі збільшенням незалежної змінної x нахил відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' є спадною на інтервалі $[a; b]$ (Мерзляк, 2018).



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$

Рис. 13. Опукла функція f на проміжку $[a; b]$

Наведені приклади показують, що опуклість функції f на деякому інтервалі I пов'язана зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Для двічі диференційовної функції f на інтервалі I функція зростання (спадання) f' визначається знаком інтервалу I другої похідної. Отже, властивість опуклості двічі диференційованої функції пов'язана зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок встановлюється наступними двома теоремами (Мерзляк, 2018).

Теорема 1 (ознака опуклості функції вниз). Якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I (Мерзляк, 2018).

Теорема 2 (ознака опуклості функції вгору). Якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $f''(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I(Мерзляк, 2018).

Доведемо теорему 1 (теорему 2 можна довести аналогічно) (Мерзляк, 2018).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функцію f. Рівняння дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$.

Значення функції r показує, наскільки ордината точки графіка функції f відрізняється від ординати відповідної точки на проведеній дотичній (рис. 14).

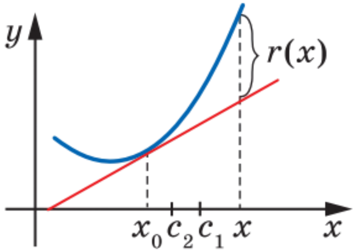


рис.14. Графік функції f

Якщо ми покажемо, що для всіх $x \in I, r(x) \geq 0$, то ми доведемо, що на інтервалі I графік функції f лежить не нижче дотичної, яка проведена до нього.

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок $x \leq x_0$ можна розглянути аналогічно).

Маємо: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;

$r(x) = \big(f'(c_1) - f'(x_0)\big)(x - x_0)$.

Так як функція $y = f'(x)$ є диференційованою на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа:

$f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, де $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку показано розміщення точок c_1 і c_2.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то враховуючи умови теореми отримаємо: $f''(c_2) \geq 0$. Звідки для всіх $x \in I$ виконується нерівність$r(x) \geq 0$, тому функція f є опуклою вниз на інтервалі I.

Тоді, алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість та точки перегину може мати такий вигляд (Істер, 2019):

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;

2) знайти другу похідну $f''(x)$;

3) знайти внутрішні точки область визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує;

4) позначити знайдені точки на області визначення функції $y = f(x)$ та з’ясувати знак другої похідної $f''(x)$ на кожному з отриманих проміжків;

5) за отриманими знаками дійти висновку, про опуклість функції та абсциси точок перегину і записати відповідь.

<u>Методика застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків.</u>

Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка (Нелін, 2018):

1. Знайти область визначення функції.

2. З’ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною).

3. Знайти точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).

4. Похідна і критичні точки функції.

5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення та знайти всі асимптоти графіка (якщо вони існують).

7. Дослідити функцію на опуклість та точки перегину.

8. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Приклад 1.2. Побудуйте графік функції $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ (Нелін, 2018).

Розв’язання

1. Область визначення: $x \neq 0$

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

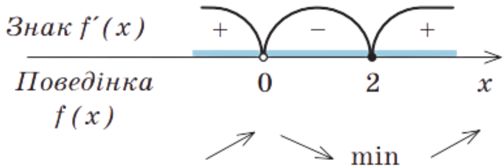
3. Графік не перетинає вісь Oy $(x \neq 0)$. На осі Ox $y = 0$: $x + \frac{4}{x^2} = 0$; $x^3 = -4, x = -\sqrt[3]{4}$ $(\approx 1{,}6)$ – абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.

4. $f'(x) = x' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - \frac{8}{x^3}$.

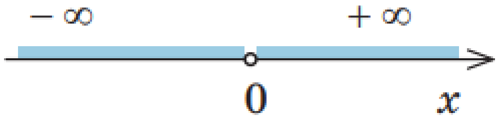
Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення).

$f'(x) = 0$; $1 - \frac{8}{x^3} = 0$. При $x \neq 0$ маємо: $x^3 = 8; x = 2$ – критична точка.

5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак «–» на «+», то $x = 2$ – точка мінімуму: $x_{min} = 2$. Тоді $y_{min} = f(2) = 3$.



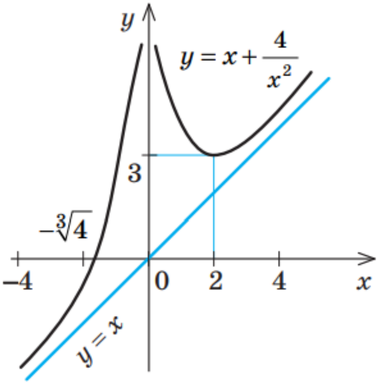
6.

При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва) $f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x$ (тобто при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).

7.

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4
y	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$

8. 

Лекція 17. Методика вивчення первісної та інтеграла в закладах загальної середньої освіти

План

1. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Інтеграл»).
2. Теоретико-методичне дослідження ’’Первісна та її властивості’’ у діючих підручниках.
3. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
4. Методика введення поняття визначеного інтеграла
5. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл.

1. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Первісна. Інтеграл»).

Вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в 11 класі пропонується на двох трьох рівнях: стандарту, профільний та поглиблений. Перший пропонує 54 години на рік, 18 год резерву. За другим варіантом, 210 годин на рік, 80 год резерву. Що стосується навчального плану з математики поглибленого рівня, то на алгебру виділяється 210 годин на рік, 74 год. резерву.

Порівняння навчальної програми з теми «Інтеграл та його застосування» рівня стандарту, профільного та поглибленого рівнях

1. Рівень стандарту (10 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів рівня стандарту).

- Первісна та її властивості.
- Визначений інтеграл, його геометричний зміст.
- Обчислення площ плоских фігур.

2. Профільний рівень (30 години) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів профільного рівня).

- Первісна та її властивості. Таблиця первісних.
- Невизначений інтеграл та його властивості.
- Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл обертання.

3. Поглиблений рівень (30 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів поглибленого рівня).

- Первісна та її властивості. Методи знаходження первісних.
- Невизначений інтеграл та його властивості.
- Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
- Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст.
- Обчислення визначеного інтеграла. О

- бчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл.
- Використання інтеграла для розв’язування прикладних задач.

Розглянемо підручники профільного та поглибленого рівнів.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. міститься тема «Інтеграл та його застосування». У цей параграф входять пункти: первісна; правила знаходження первісних; площа криволінійної трапеції, визначений інтеграл; обчислення об’ємів тіл. (Мерзляк А. Г. проф. рівень, 2019).

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. для поглибленого вивчення математики містить аналогічні підтеми, що і попередній підручник (Мерзляк А. Г. поглиб. рівень, 2019).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», автора Нелін Є. П. до теми «Інтеграл та його застосування» міститься тема «Інтеграл та його застосування». У цей параграф входять пункти: первісна та її властивості; визначений інтеграл та його застосування (Нелін Є. П. проф. рівень, 2019).

Навчальний матеріал підручника «Алгебра і початки аналізу», авторів Істер О. С., Єргіна О. В. схожий з попередніми підручниками, але додатково містить пункти: обчислення визначених інтегралів, основні властивості визначених інтегралів; обчислення площ плоских фігур та інші застосування інтеграла (Істер О. С. проф. рівень, 2019).

2. Теоретико-методичне дослідження ’’Первісна та її властивості’’ у діючих підручниках.

Означення. Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$F'(x) = f(x)$ (Мерзляк, 2019).

Наступна теорема показує, як усі первісні цієї функції пов’язані один з одним.

Теорема (основна властивість первісної). Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + \mathrm{C}$ також є первісною функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C – деяке число (Мерзляк, 2019).

Доведення. Оскільки функція F – первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Нехай C – довільне число. Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ (Мерзляк, 2019).

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Нехай функція G – одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ (Мерзляк, 2019).

Згідно з ознакою сталості функції отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C – деяке число (Мерзляк, 2019).

Звідси $G(x) = F(x) + C$.

З основної властивості первісної випливає що, паралельним перенесенням по осі ординат можна отримати графік будь-яких двох первісних цієї функції (Мерзляк, 2019).

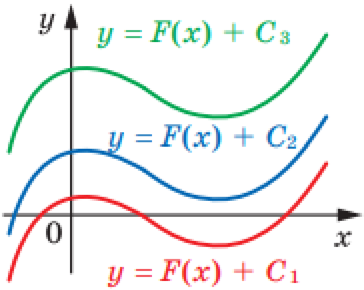


Рис.1. Графіки кількох первісних

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C – довільне число, називають загальним виглядом первісних функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Правило 1. Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$ (Мерзляк, 2019).

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо: $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ (Мерзляк, 2019).

Правило 2. Якщо F – первісна для f, c – стала, то cF – первісна для функції cf (Нелін, 2019).

Доведення. Справді, якщо F – первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)' = cF' = cf$, а це й означає, що cF – первісна для cf (Нелін, 2019).

Правило 3. Якщо F – первісна для f, а k і b – сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$ (Нелін, 2019).

Доведення. Справді, якщо F – первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$ (Нелін, 2019).

3. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

Задача 1 (про площу криволінійної трапеції)

Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка

набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень (Істер, 2019).

Означення. Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;\ b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називається криволінійною трапецією (Рис.2.) (Істер, 2019).

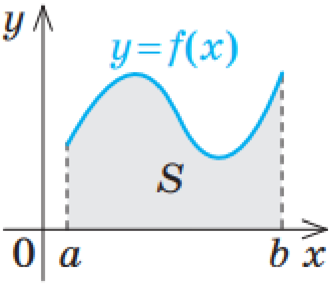


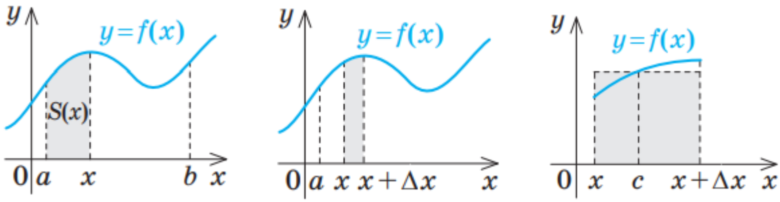
Рис.2. Криволінійна трапеція

Відрізок $[a; b]$ називають основою криволінійної трапеції.

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a;\ x]$; (Рис.3, а), де x – будь-яка точка відрізка $[a;\ b]$. При $x = a$ відрізок $[a;\ x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$; при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S – площа криволінійної трапеції з основою $[a;\ b]$ (Істер, 2019).

Покажемо, що функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$. Відповідно до означення похідної потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно) (Істер, 2019).

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то з точки зору геометрії ΔS – площа фігури, виокремленої на Рис.3, б (Істер, 2019).



а б в

Рис.3.Функція $f(x)$ і фігура

Розглянемо тепер прямокутник із такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$ (Рис.3., в). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x; x + \Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виокремлену на рис. , в, або міститься в ній, і, відповідно, його площа буде більшою або меншою від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f(c)$. За формулою площі прямокутника маємо: $\Delta S = f(c)\Delta x$. Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$.) (Істер, 2019).

Оскільки точка с лежить між точками x і $x + \Delta x$, то с прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо також, що $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$ (Істер, 2019).

Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Оскільки функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну C, тобто $F(x) = S(x) + C$. (1) (Істер, 2019).

Щоб знайти C, підставимо $x = a$. Одержуємо $F(a) = S(a) + C$. Оскільки $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ і рівність (1) можна записати так: $S(x) = F(x) - F(a)$. (2)

Ураховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо у формулу (2) $x = b$ і одержуємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Тобто площу криволінійної трапеції (рис.) можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, (3) де $F(x)$ – довільна первісна для функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Отже, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Задача 2 (про обчислення переміщення точки)

Нехай швидкість точки, що рухається прямолінійно, у кожний момент часу

$t \in [a;\ b]$ можна задати функцією $v = v(t)$. На прямій, уздовж якої рухається

точка, виберемо систему координат і позначимо через $s(t)$ координату точки в момент часу t. Тоді переміщення точки за проміжок часу [a; b] буде дорівнювати $s(b)$– s(a). Оскільки швидкість є похідною від координати, тобто $v(t) = s'(t)$, то $s(t)$ – первісна для функції $v(t)$ (Істер, 2019).

Отже, переміщення точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[a;\ b]$, дорівнює різниці $s(b)$– s(a), де $s(t)$ – первісна для $v(t)$, тобто дорівнює інтегралу $\int_a^b v(t)dt$ (Істер, 2019).

4. Методика введення поняття визначеного інтеграла

Нехай $F(x)$ – первісна для функції f(x) на проміжку $[a;\ b]$ (Істер, 2019).

Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Для обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна користуватися будь-якою з первісних функції $f(x)$, загальний вигляд яких $F(x) + \mathrm{C}$. Але $(F(b) + \mathrm{C})$– $(F(a) + \mathrm{C}) = F(b)$– $F(a)$. Тому прийнято використовувати ту первісну, у якій $\mathrm{C} = 0$ (Істер, 2019).

Геометричний зміст визначеного інтеграла такий: інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від функції $\mathrm{y} = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a;\ b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, і площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $\mathrm{y} = 0, \mathrm{x} = a$ і $\mathrm{x} = b$ (Істер, 2019).

Геометричний зміст інтеграла можна використати, коли вихідну функцію $y = f(x)$ отримати важко або неможливо, але легко отримати площу фігури відповідно до геометричних міркувань (Істер, 2019).

Фізичний зміст визначеного інтеграла такий: інтеграл $\int_a^b v(t)dt$ є переміщенням за проміжок часу $[a;\ b]$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (Істер, 2019).

Обчислення визначеного інтеграла.

Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ називають формулою Ньютона-Лейбніца (Мерзляк, 2019).

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона-Лейбніца потрібно (Мерзляк, 2019):

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a;\ b]$;

2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;

3) знайти різницю $F(b) - F(a)$. Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)|_a^b$ (Мерзляк, 2019).

Властивість 1. При перестановці меж інтегрування інтервал змінює знак (Істер, 2019):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доведення. Оскільки $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ і $-\int_b^a f(x)dx. = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a),$ то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 2. Для будь-якого a маємо (Істер, 2019):

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Доведення. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ (Істер, 2019).

Властивість 3. Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій, тобто (Істер, 2019),

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$. тоді $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$.

Маємо: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x))|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) = (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто (Істер, 2019),

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді функція $kF(x)$ буде первісною для $kf(x)$. Маємо $\int_a^b kf(x)dx = kF(x)|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b)-F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 5. Якщо с $\in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)|_a^c + kF(x)|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Деякі штучні методи можуть бути використані для знаходження певного інтеграла, що дозволить виразити інтегральну функцію у формі, зручній для інтегрування, наприклад у формі суми або різниці ніж функція, яка є простішою за умову, тобто має примітивні табличні функції (Істер, 2019).

5. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл.

Обчислення площ плоских фігур

Обчислимо площу фігури, зображеної на Рис.4.

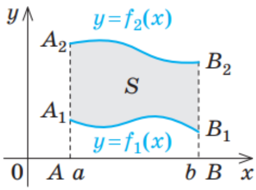


Рис.4.Фігура, обмежена лініями

Ця фігура обмежена зверху графіком функції $y = f_2(x)$, знизу – графіком функції $y = f_1(x)$, а також вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні та невід'ємні на відрізку $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$.

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 – площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 – площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). За геометричним змістом визначеного інтеграла

$$S_1 = \int_a^b f_1(x)dx\,, S_2 = \int_a^b f_2(x)dx.$$

Отже, $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx.$

Таким чином, площу заданої фігури можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx.$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку $[a;\ b]$ – достатньо виконання умов, що функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$ (Рис.5, а).

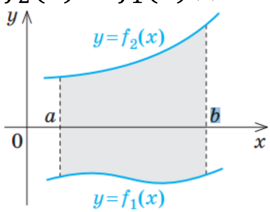


Рис.5. а. Фігура, обмежена лініями

Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (Рис.5, б).

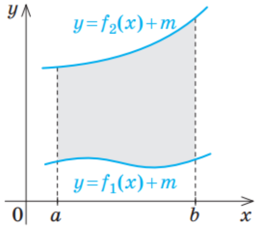


Рис.5.б. Фігура, обмежена лініями

Таке перетворення означає, що задані функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ замінили відповідно на функції $y = f_1(x) + m$ і $y = f_2(x) + m$. Площа фігури, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа

$$S = \int_a^b \big((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m)\big)dx$$

$$= \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx\,.$$

Обчислення об'ємів тіл

Задача обчислення об'єму тіла за допомогою певних інтегралів схожа на задачу знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай дано тіло об'ємом V, є така пряма (вісь Ox на Рис.6.), незалежно від того, яку площину ми візьмемо, перпендикулярну до цієї прямої, ми знаємо площу S її поперечного перерізу тіла літак.

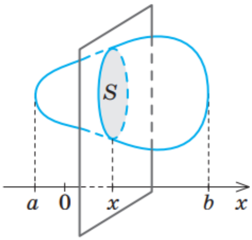


Рис.6. Тіло об'ємом V

Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Таким чином, кожному числу x на відрізку $[a;\ b]$

(див. рисунок) відповідає одне число $S(x)$ – площа перерізу тіла цією площиною. Тому на відрізку $[a;\ b]$ задана функція $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Поділимо відрізок $[a;\ b]$ на n відрізків однакової довжини точками x_k такими, що $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{n-1} = b$, і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{n-1}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (Рис.7, а). Об'єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (Рис.7, б) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

$$V = S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \cdots + S(x_n)\Delta x = V_n.$$

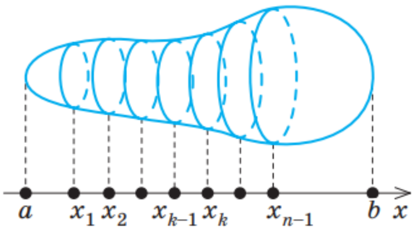


Рис.7. а. Площина α_k

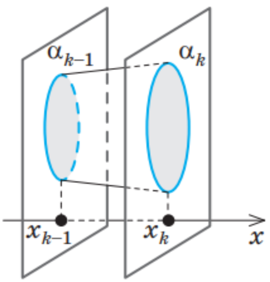


Рис.7. б. Шар між площинами α_{k-1} і α_k

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)dx$, якщо $n \to \infty$. Отже,

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a;\ b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;\ b]$. Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (Рис.8, а), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

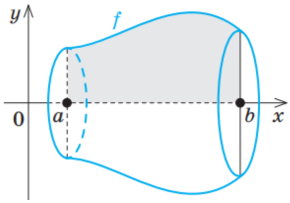


Рис.8, а. Тіло, утворене обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox

Справді, перерізом тіла кожною площиною, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a;\ b]$ цієї осі в точці x, є круг радіусом $f(x)$ і площею $S(x) = \pi f^2(x)$ (Рис.8, б).

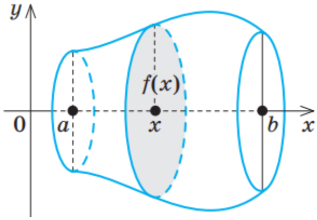


Рис.8, б. Тіло з перерізом, який перпендикулярний до осі Ox

Лекція 18. Методика вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики у старшій школі

План

1. Методика формування понять комбінаторики
2. Методика формування основних понять теорії ймовірностей
3. Методика формування основних понять математичної статистики

1. Методика формування понять комбінаторики

Згідно з чинною програмою з математики елементи комбінаторики, теорію ймовірностей та математичну статистику вивчають у одинадцятому класі. В класах з поглибленим вивченням математики починають вивчення у 9 класі.

Основними завданнями вивчення елементів комбінаторики у десятому класі профільної школи є формування понять перестановки, розміщення і комбінації без повторень та вироблення уміння застосування цих знань при розв’язуванні задач комбінаторики.

Вивченню даної теми з метою пропедевтики передує вивчення елементів комбінаторики у дев’ятому класі, де вивчають лише правила суми та добутку, але не вивчають сполуки і формули для обчислення їх кількості.

Повторити правила суми і добутку можна на таких задачах.

Приклад 1. В овочевому відділі супермаркету є 4 сорти яблук червоного кольору і 3 сорти зеленого. Скількома способами можна вибрати для покупки кілограм яблук одного сорту?

Зрозуміло, що обрати яблука сорту червоного кольору можна чотирма способами, а зеленого – трьома. Таким чином, обрати один із сортів яблук можна $4+3=7$ способами.

Приклад 2. В кіоску продають ручки 4-х видів і зошити 3-х видів. Скількома способами можна обрати набір із ручки та зошита?

До кожної із п’яти ручок можна взяти будь-який із чотирьох зошитів. Тоді, очевидно, пару – ручка і зошит можна $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Далі потрібно уточнити зміст правил суми і добутку, використовуючи поняття множин та операцій над ними.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B – з n елементів. Якщо множини A і B не перетинаються, то множина $A \bigcup B$ складається з $m+n$ елементів – уточнення правила суми.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B – з n елементів. Тоді множина всі упорядкованих пар $(a;b)$, де перший елемент належить множині A, а другий – множині B, складається з $m \cdot n$ елементів – уточнення правила добутку.

Варто зауважити, що подібну множину упорядкованих пар називають декартовим добутком множин A і B та позначають $A \times B$.

Методика формування основних понять комбінаторики починається із введення поняття сполук – різних груп, складених з певних предметів, які відрізняються одна від одної порядком даних предметів або ж самими предметами. Після цього вводиться спочатку описово, а потім і на рівні означення поняття розміщень.

Поняття перестановок можна вводити через поняття розміщення як його окремий випадок. Дійсно, перестановка – це розміщення з n елементів по n. Або ж поняття перестановок можна ввести окремим означення.

Комбінацію також можна вводити або окремим означення, або на основі розміщень: якщо з розміщень, що можна скласти n елементів по k, вибрати ті, які відрізняються принаймні одним елементом, то одержимо сполуки, які називаються комбінаціями.

У діючих підручниках за авторством Є. П. Неліна, О. Є. Долгової та А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, Б. В. Полонського, М. С. Якора сполуки вводяться у вказаному вище порядку, а у підручнику за авторством О. С. Істера, О. В. Єргіної спочатку дається означення розміщення, а вже потім означення перестановок і комбінацій.

Під час вивчення кожного виду сполук розглядається приклад, який наочно ілюструє суть даної сполуки, а лише потім дається чи доводиться формула, за якою можна обчислити кількість сполук. Наприклад, після означення розміщення можна розглянути множину із трьох цифр $\{1,5,0\}$ та скласти такі розміщення: $\{1,5\}$, $\{1,0\}$, $\{5,0\}$, $\{5,1\}$, $\{0,1\}$ та $\{0,5\}$.

Доведення формул для кількості розміщень, перестановок та комбінацій залежить від того, який вибрано порядок введення понять. Наведемо приклад доведення формул у порядку, який дається у діючих підручниках з алгебри та початків аналізу.

Доведемо, що кількість розміщень визначається за формулою $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Нехай нам дано множину з n елементами, а ми формуємо її впорядковану підмножину із k елементів.

Існує усього n способів як вибрати перший елемент цієї підмножини. Після вибору першого елемента, другий елемент підмножини можна вибрати $n-1$ способом. Для вибору третього елемента, після того як вибрано перший та другий елементи, залишається $n-2$. Якщо продовжити ці міркування, то отримаємо, що вибрати k-тий елемент можна $n-(k-1)$ способами. Використовуючи правило добутку, можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)).$$

Якщо поділити та помножити праву частину останньої рівності на $(n-k)!$ отримаємо формулу:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

що і потрібно було довести.

Доведення формули кількості перестановок ($P_n = n!$) виконуємо, враховуючи, що існує лише єдина n-елементна впорядкована підмножина даної n-елементної множини. Отже, $P_n = A_n^n$, тобто A_n^n – кількість перестановок n-елементної множини. Підставивши у формулу $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ n замість k, та, врахувавши, що $(n-n)! = 0! = 1$, отримаємо:

$$P_n = n!,$$

що і треба було довести.

Для доведення формули $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ складемо спочатку k-елементні підмножини n-елементної множини. Їх, як вже було доведено, усього є $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Дані підмножини є впорядкованими, а порядок не важливий для комбінацій. Елементи будь-якої із даних підмножин можна переставити між собою $P_n = n!$ способами. Таким чином, число C_n^k менше за число A_n^k у P_n разів, тобто:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

що і треба було довести.

Далі, використовуючи властивості факторіалу, можна довести основні властивості комбінацій:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (у тому числі $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$);

2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Але це можна не робити, обмежившись лише формулою для кількості комбінацій.

Для того, щоб учні правильно розв’язували комбінаторні задачі, важливо пояснити характерні ознаки сполук. Наприклад, розміщення характеризуються тим, що предмети і місце різні; $0 \leq k \leq n$; усі місця зайняті; порядок елементів є важливим. Автори згаданих вище підручників рекомендують користуватися наступною схемою для визначення того, формулою кількості якої сполуки потрібно користуватися в даній задачі:

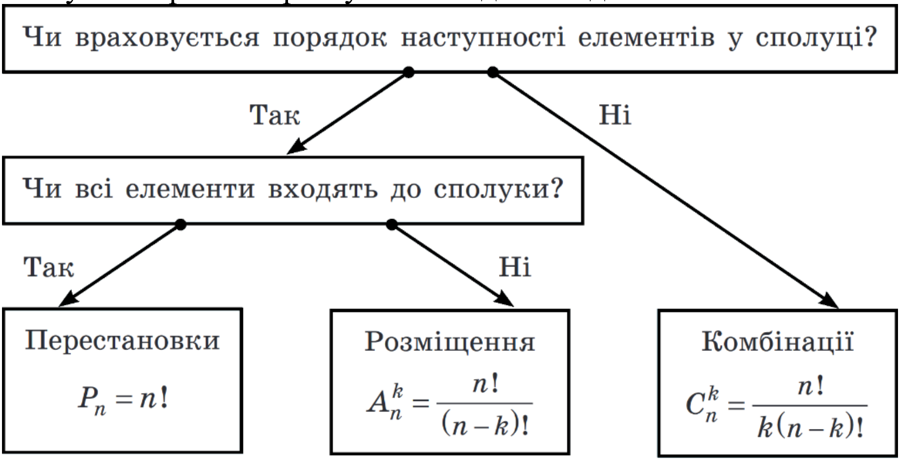


Рис. 2.1

Завершити розгляд даної теми потрібно розв’язуванням усіляких комбінаторних задач різного рівня складності.

2. Методика формування основних понять теорії ймовірностей

Основною метою вивчення теорії ймовірностей є введення основних теоретичних понять, поняття про теорію ймовірностей як науку, подання та доведення деяких теорем теорії ймовірностей, введення поняття класичної, статистичної і аксіоматичної ймовірності, навчання учнів обчисленню ймовірності випадкових величин. При цьому учні мають отримати уявлення про випадковий експеримент та випадкову подію, простір елементарних подій, несумісні події, рівноможливі та інші події; знати означення вірогідної та неможливої події, суми, добутку двох подій, протилежну подію, класичне, статистичне і аксіоматичне означення ймовірності, теореми теорії ймовірностей; вміти обчислювати ймовірність події за класичним означенням ймовірності, використовувати теореми теорії ймовірностей при розв’язування практичних задач та інше.

Вивченню теорії ймовірностей у десятому класі передує з метою пропедевтики вивчення основ теорії ймовірностей у дев’ятому класі та вивчення комбінаторики.

Перші уроки вивчення теми «Теорія ймовірності» потрібно присвятити формуванню основних понять. До них можна віднести такі поняття як випадковий експеримент, подія, випадкова подія, сумісні подій, однаково можливі події, вірогідні та не можливі події, простір елементарних подій та класичне означення ймовірності.

На наступних уроках потрібно розглянути статистичне означення ймовірності, аксіоматичне означення ймовірності, суму та добуток двох подій, протилежну подію. Далі розглядають незалежні події та умовну ймовірність.

На останніх уроках вивчення теорії ймовірностей розглядають поняття випадкової величини та її математичне сподівання.

До основних понять теорії ймовірностей належать поняття випадкового експерименту та події. На першому уроці потрібно ввести на конкретних прикладах дані поняття та переконати учнів, що для масових випадкових подій існують закономірності, що і вивчає теорія ймовірностей. Потрібно пояснити, що у науці, техніці та у реальному житті доводиться мати справу із подіями, які залежать від невідомих обставин або від таких, що не піддаються обліку. Наприклад, неможливо передбачити, скільки випускників загальноосвітніх шкіл України складуть на відмінно ЗНО.

Подібні події й отримали назву випадкових подій, їх вивчає теорія ймовірностей.

«Практика вивчення теорії ймовірностей на факультативних заняттях доводить, що надзвичайно важливо навести учням конкретні приклади, які підтверджують існування закономірностей масових випадкових подій» (Слєпкань, 2006). Можна навести таку таблицю, де вказано частоту випадіння аверса («герба») при підкиданні монети, яка приблизно дорівнює половині кількості підкидання монети:

Таблиця 2.1

Дослідник	Кількість підкидання монети, n	Частота випадання аверса, $n(A)$
Ж. Бюффон	4040	2048
Де Морган	4092	2048
В. Феллер	10 000	4979
К. Пірсон	12 000	6019
В. Джевонс	20 480	10 379
К. Пірсон	24 000	12 012
В. Романовський	80 640	40 151

Узагальнюючи розглянуті приклади потрібно ввести поняття випадкового експерименту та події, які розглядаються в теорії ймовірностей. Далі доцільно ввести класичне означення ймовірності, використовуючи поняття простору елементарних подій.

Наприклад, А. М. Колмогоров вводить рівноможливих випадків і поняття ймовірності на прикладі підкидання двох гральних кубиків і фіксації суми очок на верхніх гранях. Тут важливо пояснити, що теорія ймовірностей розглядає математичний образ грального кубика, тобто випадіння кожної з його граней рівноможливе, а сам кубик не має ніяких фізичних властивостей, які має його реальний прообраз – він не має ні розміру, ні кольору, ні ваги і т. д. Аналогічно і монета, яка наводиться у прикладах не має ні розміру, ні ваги, ні ціни. Вона не зроблена з якогось матеріалу і не може бути використана як платіжний засіб. Вона має тільки дві сторони – «герб» та «число», а при підкиданні вона падає лише однією стороною угору. Інших властивостей у математичного образу монети немає.

Також потрібно пояснити, що у задачах практичного змісту на обчислення ймовірності за її класичним означенням умови, зазвичай, є ідеалізованими.

Варто розв’язати достатню кількість досить складних задач, в яких кількість всіх рівноможливих несумісних подій, які утворюють простір елементарних подій, і кількість сприятливих для подій наслідків, які розглядаються, обчислюються за допомогою формул комбінаторики. Тематика задач повинна бути близькою для учнів.

Під час вивчення класичного означення ймовірності варто пояснити учням поняття «практично неможливої» та «практично вірогідної» події. Дані терміни широко використовуються у практиці та в побуті. Ймовірність таких подій близька до 0 та 1 відповідно. Зробити висновок про те, відбудиться дана подія чи ні, можна лише з урахуванням відповідних умов, за яких вона відбудеться або не відбудеться. Наприклад, якщо ймовірність запізнення потягу дорівнює 0,01, то подію «потяг запізниться» можна вважати практично неможливою, але якщо ймовірність того, що під час стрибка парашутиста його парашут не розкриється, дорівнює 0,01, то відповідну подію вважати практично неможливою не можна.

Принципи складання простору елементарних подій (ПЕП):

1. Умови досліду певною мірою ідеалізуються. Ті з них, які не мають суттєвого впливу на результати досліду, не враховуються.

Наприклад:

а) підкидаючи монету, вважають, що вона не може бути зігнутою, кудись закотитися або стати на ребро;

б) підкидаючи кубик, вважають, що він правильної форми і має рівномірну густину.

2. Елементарні події (ЕП) повинні охоплювати всі можливі результати досліду. Отже, простір елементарних подій (ПЕП) має бути вірогідною подією.

3. Елементарні події (ЕП) бажано вибирати такі, щоб у досліді вони мали однакові можливості відбутися. Для наочності ПЕП можна подати на площині, уявивши ЕП у вигляді точок.

Вибір з умови задачі інформації, корисної для розв'язування

1. Вибрати інформацію про те, яку проблему слід розв'язати.

2. З'ясувати, про який дослід іде мова в задачі. Дослід – це певна дія. Наприклад:

А) підкидається гральний кубик;

Б) беруть по олівцю з кожної коробки;

В) стріляють по мішені тощо.

3. Вибрати інформацію про умови проведення досліду.

4. З'ясувати, що є наслідками досліду.

Наслідок – це результат досліду.

Наприклад:

А) випадання числа на верхній грані кубика;

Б) взяли два олівці певних кольорів;

В) улучення або невлучення в мішень.

5. Визначитися з наявністю додаткової інформації, яка може бути корисною для розв'язування задачі.

Перед введенням статистичного означення ймовірності варто пояснити учням те, що класичне означення ймовірності має досить вузьке застосування. Дійсно, класичне означення ймовірності можна застосовувати лише за теоретично ідеальних умов, а на практиці не завжди є змога розрізнити однаково можливі події. Саме в таких випадках користуються статистичним означенням ймовірності, яке вводять, використовуючи поняття частоти та відносної частоти.

Також програмою передбачено розгляд аксіоматичного означення ймовірності. Його подають на основі трьох аксіом

Колмогорова, а саму ймовірність розглядають як функцію, яка визначається даними аксіомами.

У міні-курсі вивчення теорії ймовірностей передбачено розгляд кількох теорем, а саме теорема додавання ймовірностей несумісних подій, теорема множення ймовірностей, теорема множення ймовірностей для незалежних подій і теорема про ймовірність появи хоча б однієї з двох несумісних подій. Деякі з них даються у вигляді формули без доведення.

Теореми додавання та множення ймовірностей вводяться на основі класичного означення ймовірності. Перед вивчення кожної із них розглядають поняття суми і добутку двох подій та їх узагальнення на декілька подій, які належать до одного випадкового експерименту. Варто зауважити учням, що поняття суми і добутку двох подій аналогічне поняттям об'єднання і перерізу двох множин – це зменшить виникнення труднощів в учнів під час розгляду теоретичного матеріалу та розв'язування практичних задач.

Інколи доводиться складати математичну модель ситуації, що міститься в умові задачі. Послідовність складання математичної моделі є наступною:

1. Зробити аналіз початкових умов, за яких відбувалися події, що створили дану ситуацію. Визначити всі можливі наслідки та, зважаючи на те, що на слідки – це також події, позначити їх математичними символами.

2. Не порушуючи умов досліду, переформулювати інформацію так, щоб можна було її описати за допомогою можливих наслідків цього досліду.

3. Застосовуючи дії над подіями, записати ситуацію, про яку йдеться в умові задачі, у вигляді математичного виразу.

Послідовність розв'язування задач на обчислення ймовірності суми двох подій:

1. Переконатися в тому, що задача на обчислення ймовірності суми двох подій. Характерною ознакою є можливість вставити в умову задачі між описом подій сполучник «АБО».

2. Позначити події, про які йдеться в задачі.

3. Визначитися зі складом ПЕП і складом подій.

4. Виконати аналіз на сумісність позначених подій.

Для цього слід перевірити склади подій на наявність спільних елементарних подій (ЕП):

а) є спільні ЕП – події сумісні;

б) відсутні спільні ЕП – події несумісні.

5. За потрібною формулою обчислити ймовірність суми подій.

Послідовність розв'язування задач на обчислення ймовірності добутку двох подій:

1. Переконатися в тому, що задача на обчислення ймовірності добутку подій. Характерною ознакою є можливість вставити в умову задачі між описом подій сполучник «І».

2. Позначити події, про які йдеться в задачі.

3. Визначитися з умовами появи першої події. Описати склад ПЕП і склад події.

4. Визначитися з умовами появи другої події. Описати:

а) склад ПЕП і склад події в умовах, якщо попередня подія відбулася;

б) склад ПЕП в умовах, якщо попередня подія не відбулася.

5. Проаналізувати зазначені події на залежність між собою. Слід перевірити наявність змін ПЕП для другої події в умовах появи та непояви попередньої події:

а) немає змін – події незалежні;

б) є зміни – друга подія залежить від попередньої події

6. За потрібною формулою знайти ймовірність добутку подій.

Послідовність розв'язування задач із застосуванням формули повної ймовірності:

1. Позначити події, про які йдеться в задачі.

2. Скласти математичну модель ситуації.

3. Переконатися в тому, що задача на повну ймовірність. Для цього необхідно:

а) визначитися із складом попередніх подій та з їх простором елементарних подій;

б) перевірити всі можливі попередні події на утворення ними повної групи та на сумісність;

в) зробити висновки на відповідність здобутих результатів і ознаки можливості застосування формули повної ймовірності.

4. Визначитися зі складом події, ймовірність якої слід обчислити та простором елементарних подій в умовах появи кожної з можливих попередніх подій.

5 За формулою повної ймовірності обчислити ймовірність заданої події.

Ознаки для застосування формули повної ймовірності:

1. Подія, ймовірність якої потрібно знайти, відбувається за появи будь-якої з можливих попередніх подій.

2. Математична модель ситуації – сума попарних добутків події, ймовірність якої потрібно знайти, з кожною із можливих попередніх подій.

3. Сума можливих попередніх подій – це повна група подій (вірогідна подія).

4. Усі попередні події – несумісні.

Вивчення наведених вище та інших теоретичних відомостей повинно супроводжуватися розв’язуванням відповідних задач.

3. Методика формування основних понять математичної статистики

Основною метою вивчення математичної статистики в десятому класі є введення поняття про математичну статистику як науку, про її методи, завдання, способи подання даних і представлення статистичного розподілу наочно, а також розгляд полігонів і гістограм, моди, медіани, середнього значення.

Добираючи зміст навчального матеріалу, потрібно враховувати функції математичної статистики:

– інформаційну, суть якої полягає у збиранні, узагальненні і поданні інформації про актуальні процеси, про природні умови і різні сторони діяльності людини;

– прогностичну, суть якої полягає в оцінці ймовірностей різних значень важливих показників та параметрів під час прогнозування умов розвитку суспільства, техніки, економіки, науки тощо;

– аналітичну, суть якої полягає у кількісному дослідженні тенденцій розвитку або зміни різних масових процесів; у вивченні варіації явищ у статиці та динаміці; у вимірюванні та моделюванні зв'язків між явищами; у дослідженні суспільних та природніх процесів.

На першому уроці вивчення математичної статистики потрібно ознайомити учнів з поняттям статистики як науки та з її методами. При цьому слід зауважити, що такі фрази як «статистичні дані», «за даними статистики» тощо учні неодноразово могли чути у ЗМІ.

Слід звернути увагу учні на те, що статистику поділяють на пояснювальну та описову. Добір потрібної інформації – це справа описової статистики, а пояснювальна статистика використовується, коли на основі отриманих результатів описової статистики роблять висновки, будують прогнози та приймають рішення. Доцільно також дати коротку історичну довідку про виникнення та розвиток статистики, про її застосування в період її становлення.

Потрібно розповісти учням про статистичне спостереження – один із основних методів дослідження в статистиці, про його етапи (збирання первинного матеріалу, систематизація та групування даних, аналіз результатів та оформлення висновків), про його види (за часовою ознакою, за способом організації і за ступенем повноти охоплення одиниць) тощо.

Далі доцільно розглядати способи оброблення даних, ввести поняття генеральної сукупності, вибірки, варіанти, варіаційного ряду, ранжування тощо, а також наочного подання статистичного розподілу – діаграм, графіків, гістограм, полігонів частот. Даний урок потребує ґрунтовної підготовки, оскільки на ньому потрібно розглядати велику кількість зображень та таблиць.

Оформлюючи таблиці, потрібно дотримуватись певних правил. Потрібно учнів познайомити з ними.

1. Таблиця повинна містити тільки ту інформацію, яка безпосередньо характеризує об’єкт дослідження. Вона не повинна містити зайву чи другорядну інформацію.

2. Назва, заголовки рядків і граф повинні бути чіткими, лаконічними і не містити скорочень.

3. У заголовках після коми потрібно зазначати одиниці виміру, використовуючи загальноприйняті скорочення, наприклад, кг, грн, м^3, кДж тощо. Якщо таблиця виміру єдина для всіх даних у таблиці, то її потрібно навести у назві таблиці, відокремивши комою.

3. Рядки і графи доцільно нумерувати.

4. Інформацію, яка міститься в рядках таблиці, потрібно узагальнювати підсумковим рядком «Разом» чи «У цілому за сукупністю». Числа можна округлювати, причому в межах одного і того самого рядка чи графа з однаковою точністю.

6. Відсутність даних у таблиці позначається по-різному відповідно до причин:

а) «х», якщо клітинка таблиці не може бути заповнена (наприклад, вона є підсумковою;

б) «…» або «н. від.», якщо відомості про явища відсутні;

в) «–», якщо саме явище відсутнє.

7. Дуже малі числа записують так: «0,0» або «0,00».

8. До таблиць додають примітку, якщо потрібна якась додаткова інформація чи певні уточнення.

Приклад складання таблиці, яка характеризує склад населення (тис. осіб) за працездатністю з урахуванням поділу даних за статю:

Таблиця 2.2. Склад населення за працездатністю, тис. осіб

Населення	Чоловіки	Жінки	Разом
А	1	2	3

Допрацездатне			
Працездатне			
Старше за працездатне			
Разом			

Далі вивчають середнє значення, моду та медіану.

У статистиці середнє значення – це певна абстрактна і узагальнююча величина. Вона характеризує рівень варіювальної ознаки в якісно однорідній сукупності. Коливання індивідуальних значень ознаки, спричинені дією різних чинників, урівноважується в середній величині. Програмою передбачено вивчення середнього арифметичного, хоча існують ще середнє гармонічне, середнє геометричне та середнє квадратичне.

Середнє значення може бути таким, що не дорівнює жодному із спостережуваних значень, але навколо нього зосереджуються усі інші спостережувані значення. Про це варто зауважити учням.

Далі потрібно дати означення моди та медіани вибірки та розв’язати достатню кількість задач для закріплення матеріалу.

Лекція 19. Логічна будова курсу геометрії у закладах загальної середньої освіти

План

1. Логічна будова курсу геометрії для 5-9 класів
2. Логічна будова курсу геометрії для 10-11 класів
3. Тематика вивчення геометрії у старших класах

1. Логічна будова курсу геометрії для 5-9 класів

Зміст геометричного матеріалу у 5-6 класах включає початкові відомості про планіметричні (відрізок, промінь, пряма, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг) і стереометричні (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда) фігури. Учні набувають навичок вимірювання довжини відрізка й градусної міри кута, знаходження площ і об’ємів деяких фігур, побудови геометричних фігур за допомогою лінійки, косинця, транспортира і циркуля. Розширюються уявлення учнів про вимірювання геометричних величин на прикладах вимірювання і порівняння відрізків і кутів, побудови відрізків даної довжини і кутів із заданою градусною мірою, оперування формулами периметрів, площ і об’ємів геометричних фігур — знаходження невідомого компонента формули за відомими. Побудова кута за допомогою транспортира або косинця (прямого кута), прямої та відрізка за допомогою лінійки використовується при побудові трикутників, прямокутників, перпендикулярних і паралельних прямих.

Вивчення геометричних фігур має передбачати використання наочних ілюстрацій, прикладів із довкілля, життєвого досвіду учнів, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виділяти форму і розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (кутів, трикутників, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур спочатку обґрунтовуються дослідно-індуктивно, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів умінь доказово міркувати.

Основа інтеграції геометричного матеріалу з арифметичним і алгебраїчним — числові характеристики (довжина, площа, об’єм) геометричних фігур. Узагальнюються знання учнів про одиниці вимірювання довжини, площі, об’єму і вміння переходити від одних одиниць до інших, оскільки ці знання і вміння використовуються у вивченні предметів природничого циклу і в трудовому навчанні.

Головна лінія *курсу геометрії* у 7-9 класах— геометричні фігури та їх властивості. Основними поняттями курсу є: точка, пряма, площина, належати, лежати між. Перші три поняття – це основні геометричні фігури, а два останніх – основні відношення.

Це неозначувані поняття – для них не формулюються означення, але їх зміст розкривається через опис, показ, характеристику. Інші поняття курсу визначаються, а їх властивості встановлюються шляхом доказових міркувань. Учень має усвідомити, що під час доведення теорем можна користуватися означеннями і раніше доведеними теоремами.

Фігури, що вивчаються на площині — точка, пряма, відрізок, промінь, кут, трикутник, чотирикутник, многокутник, коло, круг. Учень повинен формулювати означення планіметричних фігур та їх елементів, зображати їх на малюнку, класифікувати кути, трикутники, чотирикутники, правильні многокутники.

У 7 класі учні ознайомлюються з основами геометричної науки –означеннями, теоремами, основними методами доведення теорем, основними задачами на побудову. Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута.

Однією з основних задач, що вивчається в курсі геометрії, є розв’язування трикутників. У 8 класі розглядається задача розв’язування прямокутного трикутника. Для цього вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Дана тема продовжується в 9 класі — розв’язуються довільні трикутники. Це потребує введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теорем косинусів і синусів.

Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину, градусну міру кута, площу. У 8 класі вводиться одне з найскладніших понять шкільного курсу — поняття площі. Виведення формул для обчислення площ планіметричних фігур (прямокутника, паралелограма, трикутника, ромба, трапеції) спирається на основні властивості площ. Вивчення формул площ фігур дає можливість розв’язувати низку прикладних задач.

У 9 класі розширюються уявлення учнів про аналітичне задання геометричних фігур, зокрема подається рівняння прямої, кола, виводяться формули довжини відрізка, координат середини відрізка, формується поняття про метод координат, який застосовується до доведення теорем та розв'язування задач.

До відомих учням скалярних величин долучаються векторні величини. Розглядаються рівні, протилежні, колінеарні вектори.

2. Логічна будова курсу геометрії для 10-11 класів

Як і в основній школі, геометрія у старшій школі має навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але для цього стереометрія має більше можливостей. Ідеться про розвиток логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок застосування геометрії до розв'язання практичних завдань. Розв'язання цих завдань розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі». У ній закладається фундамент для вивчення стереометрії — геометрії простору. Особливу увагу необхідно приділити реалізації прикладної спрямованості теми. Головним внеском у розв'язання зазначеної проблеми є формування чітких уявлень про взаємовідношення геометричних об'єктів (прямих, площин) і відношень між ними з об'єктами навколишнього світу. Важливе місце в темі необхідно відвести навчанню учнів зображенню просторових фігур на площині і застосуванню цих зображень при розв'язуванні задач.

В процесі вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» закладається фундамент для вимірювань у стереометрії. Значної уваги вимагає формування таких фундаментальних понять, як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин та двогранного кута як геометричної фігури. Із введенням відношення перпендикулярності прямих і площин, перпендикулярності площин, а також відстаней і кутів моделюючі можливості курсу стереометрії значно зростають. Розгляд теми «Координати і вектори» дозволить повторити навчальний матеріал із стереометрії і застосувати новий підхід до вивчення прямих і площин у просторі. Окремим завданням вивчення теми

«Координати і вектори» є узагальнення векторного і координатного методів у випадку простору.

У темах «Многогранники», «Тіла обертання» розглядаються основні види геометричних тіл та їхні властивості. При вивченні цих тем важливим є підхід, що передбачає формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь. Такий підхід вимагає використання конструктивних означень. Конструктивні означення дозволяють встановити спільність між призмами і циліндрами, пірамідами та конусами. У процесі вивчення теми «Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл» мають бути розглянуті різні методи обчислення об'ємів і площ поверхонь. Особливу увагу необхідно приділити методу розбиття, який має велике практичне значення. Використання аналогії між вимірюваннями площ плоских фігур і об'ємів сприятиме засвоєнню матеріалу учнями. При вивченні площ поверхонь тіл доцільно широко користуватися природною та важливою з практичної точки зору ідеєю розгортки.

Програма передбачає реалізацію діяльнісного підходу до навчання математики як головної умови забезпечення ефективності математичної освіти.

Навчальний процес у старшій школі потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена віковими особливостями старшокласників, набутими в основній школі навичками самостійної роботи, рівнем розвинення загальнонавчальних і пізнавальних видів діяльності. Основною формою проведення занять залишається система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь розв’язувати задачі, узагальнення та систематизації знань, контролю і корекції знань. Поряд із цим використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, інтегровані уроки математики з профільним предметом тощо).

Реалізація рівневої диференціації на практичних заняттях є однією з головних умов ефективності навчання. Особливістю практичних занять має бути постійне залучення учнів до самостійної роботи. Доцільно спільно обговорити ідею та алгоритм розв'язування певного класу задач. Після цього кожний учень може виконувати запропоновану систему вправ, спілкуючись із вчителем.

Важливе місце в організації навчання математики має посісти вдосконалення, у порівнянні з основною школою, системи самостійної роботи учнів. Формуванню відповідних мотивів до самостійної роботи сприяє застосування завдань на рисунках, контрольних запитань, зокрема прикладного характеру, домашніх робіт з дослідження конкретних класів функцій, геометричних конструкцій.

Важливим засобом навчання можуть стати контрольні запитання і тестові завдання, які спрямовані не на відтворення означень, фактів, формул, а на з'ясування елементів та структури означень математичних об'єктів; їх місця в системі інших понять; операцій, які можна виконувати з об'єктом, його особливостей та властивостей. Подібні контрольні запитання стимулюють продуктивне мислення учнів, сприяють неформальному засвоєнню теоретичного матеріалу, формують навички порівняння, класифікації, узагальнення, застосування математичних понять і об'єктів.

Обов'язковим елементом технології навчання має бути постійна діагностика навчальних досягнень учнів. Вивчення кожної теми слід починати з виконання діагностичної роботи, що дає змогу встановити рівень володіння матеріалом попередньої теми. За результатами діагностичної роботи виявляються прогалини у підготовці учня, його досягнення, що допомагає спрямувати зусилля його та викладача на поліпшення стану справ.

Значне місце у технології навчання має посідати тематичний контроль навчальних досягнень як засіб управління навчальним процесом. До кожної теми система контролю може складатися з тематичної контрольної роботи, що, як правило, включає дві частини — теоретичну і тестову.

Обов’язковим елементом навчання мають стати індивідуальні завдання з теми. Їх варто пропонувати на завершальному етапі вивчення теми для самостійного опрацювання після всіх контролюючих заходів. Мета завдань — охопити матеріал теми в цілому, привернути увагу до головного, дати додаткові приклади і пояснення окремих складних моментів, підкреслити особливості й тонкощі, переконати учнів у можливості розв’язання задач основних типів. Індивідуальні завдання перевіряються, оцінюються вчителем та захищаються учнем. Варто планувати виконання індивідуальних завдань, які передбачають ознайомлення як з розвитком математики в історичному аспекті (наприклад, з теми «Скільки існує геометрій?»), так і змістовних («Перспектива», «Математика і соціологія»).

Одним з ефективних засобів удосконалення навчання, особливо у старшій школі, є модульне проектування навчального процесу, яке передбачає, що одиницею виміру навчального процесу є не урок, а певна сукупність уроків, яка охоплює логічно пов’язаний блок навчальних питань теми.

3. Тематика вивчення геометрії у старших класах

Тематика годин з геометрії для 10 класу:

1) Тема 1. ***Паралельність прямих і площин у просторі*** (Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них. Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин).

2) Тема 2. ***Перпендикулярність прямих і площин у просторі*** **(**Перпендикулярність прямих. Перпендикулярність прямої і площини. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Двогранний кут. Вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами. Вимірювання кутів у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами).

3) Тема 3. ***Координати і вектори (***Прямокутні

координати в просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин).

Тематика годин з геометрії для 11 класу:

1) Тема 1. ***Многогранники*** **(**Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди).

2) Тема 2. ***Тіла обертання (***Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі. Куля і сфера. Переріз кулі площиною).

3) Тема 3. ***Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл*** (Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери).

Лекція 20. Методика вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі

План

1. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі в програмі алгебри 10 класу
2. Формування вмінь та навиків розв'язувати стереометричні задачі як психологічна складова
3. Методика вивчення теми «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі»

1. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі в програмі алгебри 10 класу

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі вивчається у 10 класі при вивченні дисциплін математика (для рівня стандарту) та геометрія (для профільного та поглибленого рівнів).

У пояснювальній записці навчальної програми чітко сформульовані мета та завдання вивчення взаємного розміщення прямих та площин у просторі: «Як і в основній школі, геометрія у старшій школі має навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але для цього стереометрія має більше можливостей. Ідеться про розвиток логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок застосування геометрії до розв’язання практичних завдань. Розв’язання цих завдань розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі». У ній закладається фундамент для вивчення стереометрії — геометрії простору. Особливу увагу необхідно приділити реалізації прикладної спрямованості теми. Головним внеском у розв’язання зазначеної проблеми є формування чітких уявлень про взаємовідношення геометричних об’єктів (прямих, площин) і відношень між ними з об’єктами навколишнього світу. Важливе місце в темі необхідно відвести навчанню учнів зображенню просторових фігур на площині і застосуванню цих зображень при розв’язуванні задач. В процесі вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» закладається фундамент для вимірювань у стереометрії. Значної уваги вимагає формування таких фундаментальних понять, як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин та двогранного кута як геометричної фігури. Із введенням відношення перпендикулярності прямих і площин, перпендикулярності площин, а також відстаней і кутів моделюючі можливості курсу стереометрії значно зростають…» [21, 22, 23].

У програмах профільного та поглибленого вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі поділяється на три теми: «Вступ до стереометрії», «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». Програмами визначено 87 годин на вивчення даних тем. Без урахуванням годин резерву обсяг вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі складає 75% від усього навчального матеріалу геометрії 10 класу. Тоді як у рівні стандарту тема «Вступ до стереометрії» входить до теми «Паралельність прямих і площин у просторі» і разом на взаємне розміщення прямих і площин у просторі відводиться 34 години, що складає 77% без врахування годин резерву [22, 23].

Слід відмітити, що пропедевтика вивчення стереометрії (початкові уявлення про фігури у просторі) відбувається у п'ятому класі при вивчені теми «Натуральні числа і дії з ними. Геометричні фігури і величини». Учні розглядають такі фігури як куб, прямокутний паралелепіпед та співвідносять дані фігури з фігурами в побуті. Розв'язують найпростіші задачі на застосування формули об'ємів [24].

Аналіз програми дав змогу виділити у дев'ятому класі з поглибленим вивченням теми, що стосується стереометрії, а саме «Початкові відомості зі стереометрії». При вивченні цієї теми учні розглядають взаємне розміщення прямих і площин у просторі, знаходять площі поверхонь та об'єми: призми, піраміди та тіл обертання. Таким чином, програмними результатами вивчення цієї теми є:

- пояснює: що таке: площина, «належати», «лежати між» у просторі; призма, піраміда, циліндр, конус, куля та їх елементи; площа поверхні та об'єм многогранника і тіла обертання; як можна задати площину;
- формулює означення: перпендикуляра, проведеного з точки до площини; відстані від точки до площини; записує і пояснює формули площ поверхонь і об'ємів зазначених у програмі геометричних тіл;
- зображує і знаходить на малюнках: взаємне розміщення прямих, площин, прямої і площини, многогранники і тіла обертання та їх елементи, розгортки призми, піраміди, циліндра, конуса;
- обчислює: відстань від точки до площини; площі поверхонь та об'єми геометричних тіл, указаних у змісті, у нескладних випадках; розв'язує задачі, що передбачають:

обґрунтування взаємного розміщення двох прямих, прямої і площини, двох площин у просторі, обчислення площ поверхонь і об'ємів геометричних тіл, указаних у змісті [24].

2. Формування вмінь та навиків розв'язувати стереометричні задачі як психологічна складова

Розглянемо поняття «знання», «вміння» і «навички» з точки зору психології. З праць Павелківа Р. В. можемо охарактеризувати і розмежувати поняття. Таким чином, поняття «знання» ототожнюється з пізнанням людини, тобто теоретично узагальнений досвід, що і є результатом оволодіння дійсності. Поряд із знаннями не менш важливими є вміння та навички. Павелків розділяє вміння на два рівні за їх психологічною структурою: елементарні вміння та вміння, які базуються на певних навичках. Вміння – це готовність до виконання завдань, що базуються на певний знаннях і навичках, а багаторазове повторення певних дій (виконання завдань) призводить до появи певних навичок. З огляду на це, у працях вчених відбувається дискус, що є першочерговим: вміння чи навички [27].

Таким чином, можна стверджувати, що елементарні вміння учень здобуває безпосередньо після вивчення теми, отримавши основні знання, на етапі закріплення знань, а вміння, як майстерність, що сформувалися у результаті ґрунтовних знань та попереднього досвіду, на уроках узагальнення і систематизації знань, повторення вивченого матеріалу і т.п. Виконання певних завдань на уроці та домашнього завдання призводить до автоматизації дій і як результат учень здобуває навички.

Мілерян Е. виділяє чотири етапи формування умінь: початковий або підготовчий, проміжний або аналітичний, синтетичний та етап автоматизації [20]. Етап автоматизації можна віднести до етапу формування навиків.

Виділимо основні три етапи роз'язування завдань на взаємне розміщення прямих та площин у просторі: підготовчий; тобто на цьому етапі вчитель пропонує підготовчі вправи, які ґрунтуються на раніше засвоєних знаннях, вміннях і навиках або ж вправи, що на початковому етапі формують просторову уяву (сюди можна віднести так звані усні вправи у підручнику, завдання із вже готовими рисунками, на застосування аксіом планіметрії та стереометрії); проміжний, тобто етап на якому розглядаються завдання, які потребують розв'язувань, застосувавши аксіоми, властивості та ознаки; заключний етап формування вмінь – це етап розв'язування різних, більш складних завдань, що потребують побудову, доведення та розв'язання.

Вміння розв'язувати стереометричні задачі тісно пов'язані з розвитком просторової уяви. Просторові уявлення, як особлива група зорових уявлень, дають змогу читати стереометричні рисунки та відтворювати просторові моделі, тіла тощо. На основі зорових відчуттів та сприймань створюються в уяві учнів певні геометричні образи. Таким чином, відчуття та сприймання включаються у процес засвоєння знань, тобто пізнання: сприймаючи, учень порівнює певні об'єкти з раніше побаченими. Аналіз просторових фігур (виділення в них певних ознак, властивостей і т.п.) та синтез (об'єднання певних ознак, властивостей, співвідношень і т.п.), що призводить до створення нового уявлення, здійснюється за допомогою уяви [34].

Вітчизняний вчений І. Тесленко вважав, що перешкодою у правильності просторових уявлень є недостатньо сформоване так зване «геометричне око» - відсутнє чи недостатнє вміння бачити на рисунку певні фігури, деталі або оптичні ілюзії, створені оком, враховуючи його будову [34].

При вивченні стереометрії вчителю необхідно приділити велику увагу у формуванні правильного зорового сприйняття, зображенню фігур у просторі. Велику роль у цьому відіграє наочність та проєкційні рисунки. Наведемо приклад неправильно та правильно сформованого зорового сприйняття двох перпендикулярних прямих у просторі.

Неправильне зображення | Правильне зображення

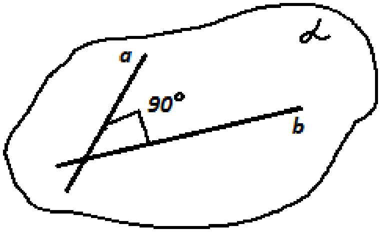


Рис. 1.2

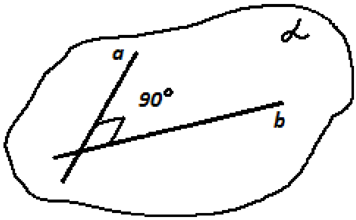


Рис. 2.2

Таким чином, в учнів на рис. 1.2 спостерігається сформоване спотворене уявлення. Правильний рисунок – запорука правильного розв'язування задачі. При вивченні тем на взаємне розміщення прямих та площин у просторі, а саме правильність побудови елементарних рисунків, дає змогу в подальшому уявляти і будувати стереометричні фігури та їх комбінації.

Протягом вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі для розвитку уяви та формування початкових вмінь, варто розв'язувати усні вправи на рисунках, наприклад, без лінійних даних: знайти кут між діагоналлю куба та його бічним ребром, між діагоналлю куба та діагоналлю його бічної грані, і між діагоналлю куба та його проєкцією на площину основи і т.п.

Зрозумілим є те, що процес формування вмінь і навиків залежить від багатьох факторів, основними з яких є: психологічна здатність учня до сприйняття матеріалу та вчителя як особистості, від рівня підготовки учнів та способу організації навчання учителем (використанням ним різних методів, засобів, новітніх технологій тощо).

3. Методика вивчення теми «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі»

Вивчення взаємного розміщення прямих та площин у просторі закладає основу вимірювань у стереометрії.

Курс стереометрії як і курс планіметрії має однакові змістові лінії: властивості фігур; побудова фігур; координати і вектори; геометричні перетворення; геометричні величини. Отже, курс стереометрії узагальнює і систематизує знання з планіметрії, доповнюючи знаннями основні змістові лінії, вивчені в основній школі. Тому задля формування вмінь і навиків, при вивченні стереометрії, важливим є використання тих аналогій, які дозволяють краще усвідомити знання з стереометрії та застерегти від тих аналогій, які діють хибні твердження і уявлення. Згідно аналізу програми, учням на достатньому рівні необхідно вміти розрізняти і зображати фігури простору, їх перерізи, розв'язувати задачі на обчислення (кутів, довжин, площ та об'ємів стереометричних фігур) і доведення твердження на основі аксіом, властивостей елементарних фігур простору та фігур на площині, і їх взаємного розміщення.

Задля формування просторової уяви та виокремлення істотних властивостей фігур і абстрагування від неістотних, слід використовувати наочні моделі та рисунки. Наочність та побудова рисунка дозволяють виокремити зв'язки між елементарними фігурами, здійснити аналіз при розв'язуванні задач на обчислення чи доведення, поширювати твердження на фігури певного класу. Хоча рисунок і є наочною моделлю, але неправильне його виконання дає спотворене уявлення. Тому на початкових уроках зі стереометрії важливими є як логічне мислення, розвинута уява та знання властивостей фігур площини, що дозволяють правильно уявляти фігури в просторі та їх відношення.

Так як стереометрія вивчається у 10 класі, вік учнів дозволяє по-іншому організовувати навчальну діяльність з математики, а саме більше організовувати самостійну діяльність учнів, а також використовувати лекційно-практичну систему навчання, особливо при вивченні взаємного розміщення прямих та площин у просторі.

На перших уроках, коли вивчаються аксіоми стереометрії, важливими є введення позначень у геометрії: $\in -$ належить, $\notin -$ не належить, $\cap -$ перетин.

При доведенні теорем стереометрії як і планіметрії використовуємо метод від супротивного або метод доведення, що спирається на аксіоми або раніше доведені теореми (ознаки, властивості). Важливим є те, що кожне твердження має бути обґрунтованим. Доведемо теорему про існування і єдиність площини, що проходить через дві прямі, що перетинаються. Вітчизняна методистка З. Слєпкань, пропонує оформлювати доведення у вигляді таблиці:

Оформлення доведень на початкових уроках вивчення стереометрії

Твердження	Обгрунтування
1. Виберемо точку A на прямій a, та точку B на прямій $в$ і позначимо точку C як точку перетину прямих a і $в$.	1. За аксіомою планіметрії про належність і не належність точок прямій
2. Проведемо через ці три точки площину α	2. За аксіомою стереометрії про існування та єдиність площини, що проходить через дві точки
3. Так як точки A і C належать прямій a, а точки B і C належать прямій $в$, то дві прямі a і $в$ теж належать площині α	3. За аксіомою стереометрії, що якщо дві точки належать площині, то вся пряма належить цій площині

Доведення теорем стереометрії не є громіздкими, але вимагають обґрунтування. Однією з важливих теорем стереометрії є теорема про три перпендикуляри. Порівнюючи з планіметрією, то теорем стереометрії, що вивчаються в шкільному курсі не багато, але на перших уроках необхідно розв’язувати багато задач на доведення, що і пропонують автори підручників. При розв’язуванні даних задач на доведення можна будувати реальний рисунок на дошці або уявний рисунок, який дозволяє довести можливість існування об’єкта (наприклад, див. доведення представлене в таблиці).

Відомості про прямі та площини є основами при вивченні стереометрії. Спочатку вивчається паралельність прямих, прямих та площин, площин у просторі та паралельне проєктування як спосіб зображення просторових фігур на площині. При вивченні паралельності прямих розглядаються такі їх властивості: 1) дві паралельні прямі обов'язково лежать в одній площині; 2) дві паралельні прямі в просторі не перетинаються.

На основі моделей площини і прямої показуємо взаємне розміщення прямих та площин. При доведенні ознаки паралельності прямої і площини використовуємо метод від супротивного, при цьому наголошуємо на мету доведення, а саме, що пряма a, яка не належить площині α і паралельна прямій, що належить цій площині ніколи її не перетне.

Розгляд паралельності прямих проводиться за тією ж методикою, з використанням моделей. На цьому етапі пропонується доведення ознаки паралельності площин, знову ж таки методом від супротивного, формулюючи мету доведення, а саме неможливість перетину площин і підвести учнів до означення паралельності площин.

Аналогічність доведення та означення як в планіметрії та стереометрії призводить до хибних висновків, а саме:

1) якщо $a \parallel \alpha\ i\ \alpha \parallel b,$ то $a \parallel b,$
2) якщо $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

Перпендикулярність прямих і площин можна поділити на такі теми: перпендикулярність прямих у просторі, перпендикулярність прямих і площин та перпендикулярність площин.

Методика вивчення перпендикулярності аналогічна до паралельності прямих і площин, але особливу увагу слід приділити поняттям похилої та перпендикуляру до площини і проєкції похилої на площину. І в цій темі вивчаємо теорему про три перпендикуляри як основу при розв'язуванні задач в многогранниками і тілами обертання.

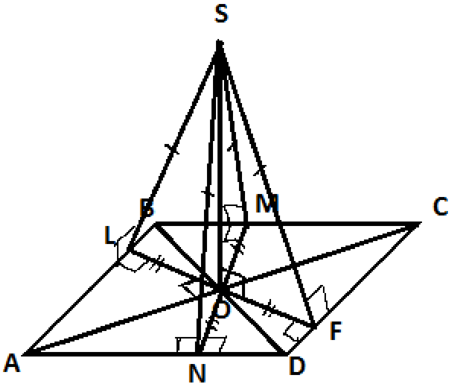
У шкільному курсі математики теорема відіграє важливе значення, оскільки є основою при розв'язуванні задач із стереометричними фігурами; особливу роль відіграє при побудові рисунків, найбільше її застосовують у задачах з пірамідою, а саме визначення видів трикутників бічних граней, при побудові кутів нахилу бічних граней тощо. До того ж теорему дуже важливо зрозуміти, оскільки вона не є легкою, особливо для тих, кому важко уявляти просторові фігури на площині. Її користь та значущість можна виділити також і в іншому:

- розвиток просторової уяви учнів, їх математичної мови;
- повторення важливих понять: перпендикуляр, похила, проекція похилої на площину, відстань від точки до площини, кут між похилою і площиною, а також пряма, площина, основа перпендикуляра, основа похилої, апофема та інші;
- практичне застосування теореми, приклади в повсякденному житті;
- практичне значення побудови просторових фігур;
- розвиток навичок доведення теореми на основі почутого;
- розвиток навичок формулювання оберненого твердження та інше.

Для прикладу розглянемо методику розв'язування задачі на застосування теореми про три перпендикуляри.

Приклад. Точка, віддалена від кожної сторони ромба на 13 см, розміщена на відстані 12 см від площини ромба. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см.

Розв'язання:



Зобразимо на рисунку ромб $ABCD$. Точка S розміщена на відстані 12 см від площини ромба, і віддалена від кожної сторони ромба на 13 см. Таким чином, SO – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ і за умовою SO=12 см, $SF = SN = SM = SL =$ 13 см, SF, SN, SM, SL – відстані до сторін DC, AD, BC, AB відповідно.

Також SF, SN, SM, SL є похилими до площини ромба, а ОF, ON, OM, OL - проєкції цих похилих площину. За властивістю проекцій похилих проведених з однієї точки до площини, якщо похилі, проведені з однієї точки до площини рівні, то і проєкції цих похилих теж рівні.

За теоремою про три перпендикуляри, якщо SF, SN, SM, SL перпендикулярні до DC, AD, BC, AB відповідно, то і ОF, ON, OM, OL теж перпендикулярні до DC, AD, BC, AB відповідно. Таким чином, розглянемо ΔSOF ($\angle O$=90°).

За теоремою Піфагора $OF^2 = SF^2 - OS^2$.

$OF = \sqrt{SF^2 - OS^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ см.

За властивістю діагоналей ромба, вони перетинаються під прямим кутом, і ділять ромб на чотири рівні трикутники, а отже ΔDOC – прямокутний, де $\angle O$=90°.

Знайдемо площу ΔDOC.

$S_{\Delta DOC} = \frac{1}{2} \cdot OF \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ см^2. Так як таких трикутників чотири, то $S_{ABCD} = 4 \cdot 50 = 200$ см^2 .

У підручниках можна відмітити два означення перпендикулярності прямих, в яких зазначається про кут між прямими 90^0, але відмінність їх в тому, що в одному з них не вказується, що прямі перетинаються, таким чином охоплюються і мимобіжні прямі та згідно того є два означення перпендикулярності прямої і площини, в одному з яких є умова, що якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до прямої, що лежить у цій площині та *проходить через точку перетину*. І це означення виключає доведення умови перетину прямих.

При означенні перпендикулярності площин часто учні проводять аналогію з прямими і означають перпендикулярні площини як площини, що перетинаються під прямим кутом. Зважаючи на дану помилку, у деяких підручниках можна побачити, що перш ніж увести означення перпендикулярності площин вводиться поняття двогранного кута.

Зображення просторових фігур та паралельна проєкція сприяють формуванню чітких уявлень та образів, допомагають встановити зв'язки між елементами фігур.

Рисунок в планіметрії передає реальний образ фігур, тоді як рисунки у просторі мають спотворений вид і мають певні графічні умовності. Тому при зображенні фігур простору необхідно дати учням так звані правила-орієнтири. Зрозумілим є те, що правила виконання зображень стереометричних фігур відрізняється від складних зображень нарисної геометрії, тому зображення можуть містити певні умовності. Головним є те, що рисунки в стереометрії мають відповідати певним критеріям:

- зображення має бути правильним, тобто відповідати властивостям паралельного проєктування;
- Зображення має бути простим, без додаткових побудов, що не використовуються в процесі розв'язування певної задачі;
- Зображення має бути наочним, тобто є моделлю реальної фігури і дозволяє побачити відношення між елементами фігури (немає накладання ребер).

Побудову призми та циліндра слід починати в верхньої основи і рисунок має займати ¼ листка зошита. Видимі лінії слід зображати суцільними лініями, а невидимі – штрихованими.

Лекція 21. Методичні особливості зображення фігур у просторі

План

1. Властивості паралельного проєктування
2. Методичні особливості зображення плоских геометричних фігур простору на площині.
3. Методичні особливості зображення об'ємних геометричних фігур на площині.
4. Зображення комбінацій тіл обертання з многогранниками.

1. Властивості паралельного проєктування

При зображенні фігур простору на площині використовуємо метод паралельного проєктування. Пряма a вказує напрям проектування. Фігура F' є проекцією фігури F на площину α в напрямку a.

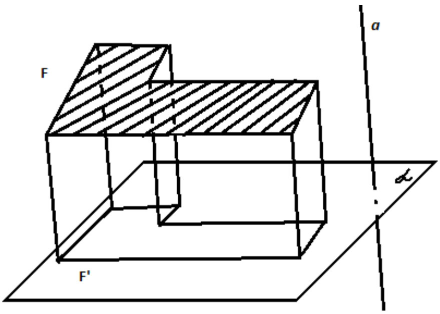
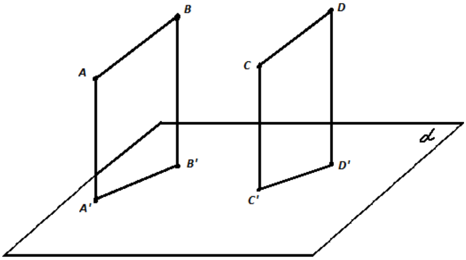


Рис.1.

Розглянемо *властивості паралельного проєктування*:

1. B_1. При паралельному проєктуванні прямі проєктуються у прямі, півпрямі – у півпрямі, відрізки – у відрізки.

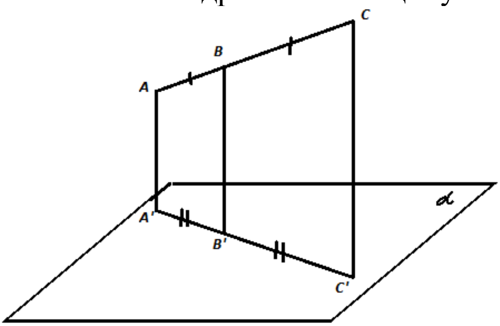
2. B_2. Паралельність при паралельному проєктуванні зберігається.



$$AB||CD, A'B'||C'D'$$

Рис.2

3. B_3. При паралельному проєктуванні відношення відрізків прямої чи паралельних прямих зберігається. Точка середини відрізка, при паралельному проєктуванні, зображається точкою середини спроєктованого відрізка на площину.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, AB = BC, A'B' = B'C'$$

Рис.3.

4. B_4. При паралельному проєктуванні спільна точка кількох фігур є спільною точкою проєкції цих фігур.

5. B_5. При паралельному проєктуванні відношення непаралельних прямих і величини кутів не зберігається.

2. Методичні особливості зображення плоских геометричних фігур простору на площині

Виконуючи зображення просторових фігур на площині, використовують два види паралельної проекції:

1) *косокутну* – проектувальні прямі нахилені під довільним кутом до площини зображень;

2) *прямокутну (ортогональну)* – проектувальні промені перпендикулярні до площини зображень.

Зображенням квадрата, прямокутника, ромба, паралелограма ***в довільній косокутній проекції*** може бути довільний паралелограм. Зображенням трапеції також є трапеція, причому з певним відношенням основ, якщо це відношення задане.

У правильному п’ятикутнику *ABCDE* (рис. 4) діагоналі *AC* і *BD* паралельні відповідно сторонам *DE* і *AE* і, крім того, діляться точкою *P* у наближеному відношенні 3:2.

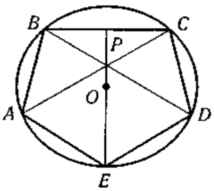


Рис. 4

Звідси випливає спосіб побудови зображення правильного п’ятикутника: будуємо довільний паралелограм $A'E'D'F'$, на продовженні його сторін $A'P'$ і $D'P'$ відкладаємо відрізки $P'B' = \frac{2}{3}D'P'$ і $P'C' = \frac{2}{3}A'P'$ (рис. 5).

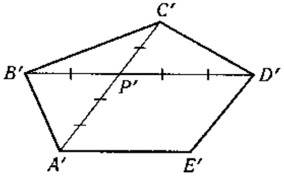


Рис. 5

Коло ***в ортогональній проекції*** має вигляд симетричного відносно горизонтального діаметра еліпса (рис. 6).

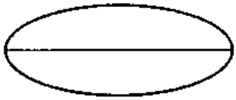


Рис. 6

Для побудови зображень двох взаємно перпендикулярних діаметрів за перший діаметр *AB* зручно обрати той, який розміщений приблизно під кутом 10° до горизонтального діаметра. Для побудови зображення діаметра, перпендикулярного до першого, досить скористатися властивістю хорд, паралельних діаметру: вони діляться навпіл діаметром, перпендикулярним до заданого. Отже, досить провести довільну хорду, паралельну діаметру *AB* (рис. 7), розділити її навпіл і через точку поділу та центр еліпса провести діаметр *CD*. Відрізок *CD* і є зображенням діаметра, перпендикулярного до діаметра *AB*.

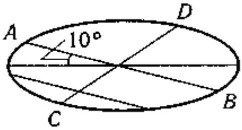


Рис. 7

Для побудови в ортогональній проекції зображень вписаного й описаного квадратів досить сполучити кінці діаметрів у першому випадку і провести дотичні в кінцях діаметрів — у другому (рис. 8).

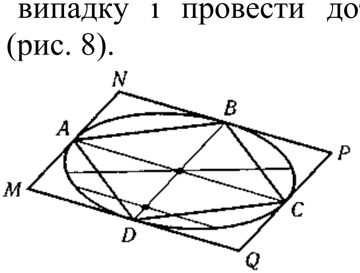


Рис. 8

Побудова зображень правильних вписаних і описаних трикутників:

1) виконуємо зображення еліпса і двох взаємно перпендикулярних діаметрів *AB* і *CD* (рис. 9) способом, розглянутим вище;

2) проводимо хорду *EF* через середину одного з радіусів паралельно діаметру *AB*;

3) сполучаємо кінці хорди *EF* з кінцем *C* діаметра.

Трикутник *ECF* є зображенням правильного вписаного в коло трикутника в ортогональній проекції.

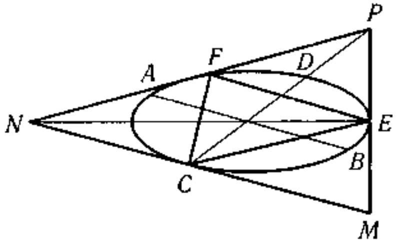


Рис. 9

Ортогональну проекцію правильного описаного трикутника легко виконати, якщо відкласти на продовженні будь-якої з висот вписаного трикутника відрізок, який дорівнює висоті, та провести через отриману точку *P* і дві інші вершини *E* і *F* вписаного трикутника дотичні. Третю дотичну проводять через третю вершину вписаного трикутника паралельно його протилежній стороні. Можна також, відклавши на одній з побудованих дотичних (наприклад, *PE)* відрізок *EM = PE,* провести дотичну через точки *M* і *C*.

3. Методичні особливості зображення об'ємних геометричних фігур на площині

*Зображення многогранників***.**

Доцільно дати учням загальні правила-орієнтири щодо зображення многогранників і окремих видів. Всі види призм і пірамід слід зображувати так, щоб найбільшу кількість граней і ребер було видно, а ребра не збігались. До того ж доцільно рекомендувати учням починати виконувати зображення призм з верхньої основи, оскільки всі сторони верхньої основи видно, а ребра зручніше проводити зверху вниз.

Виконувати зображення піраміди зручно в такій послідовності:

1) на площині зображають деякий многокутник (наприклад, п'ятикутник);

2) поза площиною многокутника (як правило, зверху) вибирають довільну точку *S* (вершину) і з'єднують її з вершинами основи, суцільними відрізками - ті, які видно, і штриховими лініями - ті, які не видно.

При зображенні правильних пірамід завжди відома проекція вершини піраміди на основі. Тому після виконання зображення основи треба визначити цю проекцію, провести пряму, якій належить висота піраміди, і на ній вибрати вершину. Відтак з'єднати вершину піраміди з вершинами основи.

Зображення циліндра:

1) побудувати прямокутник - осьовий переріз циліндра, в якому нижню основу зобразити штриховою лінією; 2) беручи верхню і нижню основи прямокутника за діаметри основ циліндра, намалювати рівні еліпси, при цьому в нижній основі частину еліпса, яку не видно, зобразити штриховою лінією.

Зображення конуса:

1) спочатку провести діаметр основи конуса штриховою лінією, а потім з його середини *O* провести перпендикуляр - висоту конуса; позначити на проведеному перпендикулярні вершину S конуса; 2) зобразити в основі еліпс, провівши штриховою лінією його невидиму частину; 3) провести діаметр *AC* приблизно під кутом 10° до горизонтального діаметра; точку *A* взяти за точку дотику твірної конуса; 4) провести твірну *SA* і симетрично до неї стосовно висоти *SO* - твірну *SB.* Якщо треба зобразити осьовий переріз конуса, то можна провести твірну *SC,* яку видно. Тоді *SAC*- зображення осьового перерізу.

Зображення кулі.

Наочним в ортогональній проекції є таке зображення кулі, в якому великий круг або будь-який переріз кулі горизонтальною площиною є еліпсом. Таке зображення можна дістати, коли вертикальний діаметр кулі нахилений під певним кутом до горизонтальної площини. В цьому разі верхній кінець його зобразиться точкою *N*, розміщеною нижче від кола, що відокремлює видиму частину поверхні кулі від невидимої, а нижній кінець S - вище цього кола. Очевидно, що при такому зображенні більшу частину верхньої півсфери видно, а нижньої - не видно.

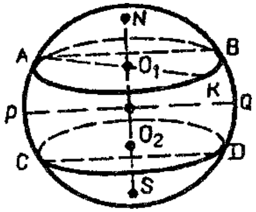


Рис. 10

4. Зображення комбінацій тіл обертання з многогранниками

Піраміда, вписана в кулю:

1) провести коло, що зображує сферу і її вертикальний діаметр; верхній кінець діаметра прийняти за вершину *S* піраміди; 2) у нижній півсфері зобразити переріз. Для цього провести горизонтальну хорду і позначити на вертикальному діаметрі трохи вище від хорди центр *O* перерізу. Точка *O* є основою висоти піраміди. Зобразити еліпс так, щоб більша частина його була невидима, а менша - видима; 3) якщо основою піраміди є до вільний многокутник, то його вершини обирають на еліпсі (перерізі) так, щоб найбільшу кількість граней піраміди було видно. Якщо в основі піраміди правильний многокутник, то його зображення виконують за поданими вище правилами.

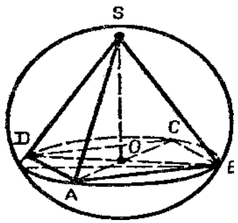


Рис. 11

Призма, вписана в кулю:

1) виконати зображення кулі і її вертикального діаметра; 2) на однаковій відстані від центра кулі провести хорди в зображенні нижньої і верхньої півсфер; позначити на вертикальному діаметрі центри перерізів, нарисувати еліпси; 3) якщо призма неправильна, вибрати вершини на верхньому еліпсі так, щоб найбільшу кількість граней призми було видно; для правильної — зобразити правильний вписаний многокутник в основі; 4) спроектувати обрані вершини на нижній переріз і провести всі ребра призми.

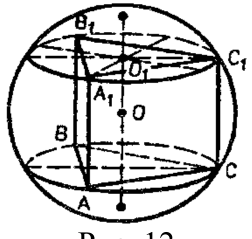


Рис. 12

Куля, вписана в пряму призму.

Слід дати учням загальний орієнтир: зображення кулі, вписаної в многогранник, циліндр і конус, доцільно завжди починати із зображення кулі.

1) виконати зображення кулі і її вертикального діаметра; 2) зобразити великий круг, площина якого паралельна основі призми, й описати навколо нього многокутник. Якщо многокутник неправильний, то провести сторони (дотичні) так,

щоб найбільшу кількість граней було видно, якщо правильний, - виконати його зображення за поданими вище правилами; 3) через вершини многокутника провести прямі, паралельні вертикальному діаметру кулі, і відкласти на них від кожної вершини по обидві сторони відрізки, що дорівнюють радіусу кулі; 4) одержані точки з'єднати відрізками.

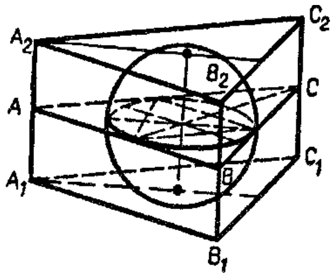


Рис. 13

Куля, вписана в конус або правильну піраміду:

1) зобразити кулю і її вертикальний діаметр; 2) зобразити довільний горизонтальний переріз у верхній півсфері; 3) з точки K_1 дотику еліпса і кола провести дотичну до перетину з продовженням діаметра кулі в точці S; 4) виконати зображення описаного навколо круга перерізу піраміди - правильного многокутника - за вже відомими правилами; 5) щоб дістати зображення основи піраміди, виконати перетворення гомотетії в просторі відносно вершини S з коефіцієнтом $k = \frac{SO}{SO}$.

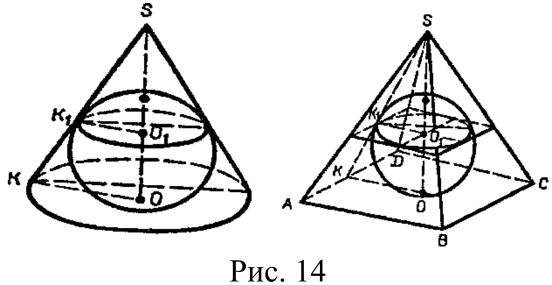


Рис. 14

Лекція 22. Методи геометричних побудов у просторі та їх застосування

План

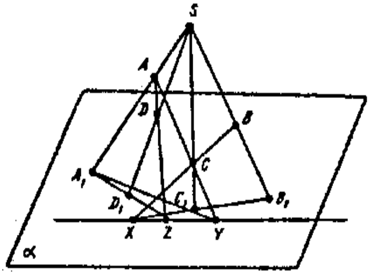
1. Методи побудови плоских перерізів многогранників
2. Плоскі перерізи тіл обертання.

1.Методи побудови плоских перерізів многогранників

На рівні обов'язкових результатів навчання програмою і підручником передбачено найпростіші випадки побудови перерізів. На гурткових або факультативних заняттях, в класах з поглибленим вивченням математики доцільно ознайомити учнів із загальними методами побудови перерізів тіл, зокрема многогранників. Мається на увазі метод внутрішнього проектування (метод відповідності) і метод слідів при паралельному і центральному проектуванні. Алгоритми обох методів зручно подати у вигляді таблиці.

Центральне проектування

I. *Метод слідів*



Д а н о: α – площина,
S – центр проектування, $A(A_1)$, $B(B_1)$,
$C(C_1)$ – точки і їх проекції,
D_1 – проекція невідомої точки D.

З н а й т и: D.

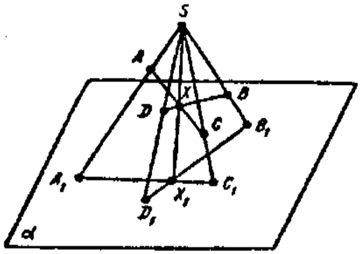
А л г о р и т м р о з в' я з а н н я

1. $X = BC \cap B_1C_1$
2. $Y = AC \cap A_1C_1$

XY – слід пл. ABC на α

3. $Z = D_1A_1 \cap XY$
4. $D = AZ \cap SD_1$

II. *Метод відповідності*



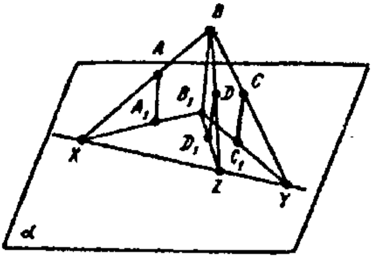
Д а н о: α – площина,
S – центр проектування, $A(A_1)$, $B(B_1)$,
$C(C_1)$ – точки і їх проекції,
D_1 – проекція невідомої точки D.

З н а й т и: D.

А л г о р и т м р о з в' я з а н н я

1. $X_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$
2. $X = AC \cap X_1S$
3. $D = BX \cap D_1S$

I. *Метод слідів*



Д а н о: α – площина, $A(A_1)$, $B(B_1)$, $C(C_1)$ – точки і їх проекції, D_1 – проекція невідомої точки D.

З н а й т и: D.

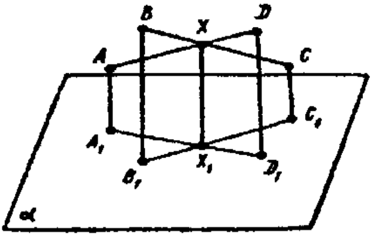
А л г о р и т м р о з в' я з а н н я

1. $X = AB \cap A_1B_1$
2. $У = BC \cap B_1C_1$

$XУ$ – слід пл. ABC на α

3. $Z = D_1B_1 \cap XY$
4. $D = ZB \cap D_1D$

II. *Метод відповідності*



Д а н о: α – площина, $A(A_1)$, $B(B_1)$, $C(C_1)$ – точки і їх проекції, D_1 – проекція невідомої точки D.

З н а й т и: D.

А л г о р и т м р о з в' я з а н н я

1. $X_1 = B_1C_1 \cap A_1D_1$
2. $X = BC \cap X_1X$
3. $D = AX \cap DD_1$

Побудова перерізу зводиться до побудови многокутника у площині перерізу, який перетинає грані многогранника.

Слідом перерізу на вказаній площині називається пряма, що перетинає цю площину з площиною перерізу.

Основні правила побудови перерізів

1. Якщо дано (або вже побудовані) дві точки, що належать площині перерізу (грані многогранника), то слід буде походити по прямій, що містить відрізок, який сполучає ці дві точки.
2. Якщо даний або ж побудований слід на деякій грані многогранника і є точка, що належить іншій грані многогранника, то треба знайти точку перетину цього сліду з гранню, на якій знаходиться ця точка. Якщо ж даний слід на одній грані і є точка, що знаходиться на паралельній грані, то слід на грані, де знаходиться точка, буде паралельним до даного сліду і проходитиме через цю точку.

3. Точка перетину площини перерізу з гранню многогранника – це точка перетину будь-якої прямої, що лежить в площині перерізу, з її проєкцією на площину грані многогранника.

Методи побудови перерізів

2. *Метод відповідності (внутрішнього проєктування)*.

Для побудови перерізу треба побудувати точки нижньої основи многогранника, які відповідають точкам шуканого перерізу.

3. *Метод слідів*.

Полягає в тому, що на грані многогранника виконується побудова слідів, за допомогою яких легко виконується побудова точок перетину січної площини з ребрами многогранника та ліній перетину січної площини з гранями многогранника.

«Метод слідів» є досить зручним для обґрунтування побудов, оскільки він спирається на добре відому учням властивість площини: «Якщо пряма має з деякою площиною дві спільні точки, то вона належить цій площині».

Однак цей метод не зручно використовувати тоді, коли січна площина мало нахилена до основної площини, оскільки в цьому випадку основний слід січної площини виходить, як правило, далеко за межі рисунка.

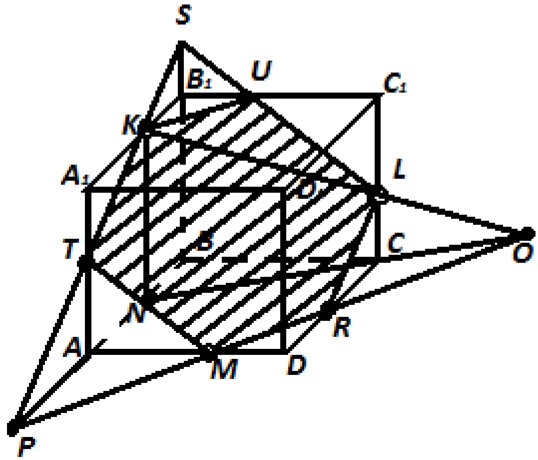
«Метод внутрішнього проектування» зручний тим, що дозволяє зробити основний рисунок більш крупним в порівнянні з першим методом.

Основний його недолік – наявності великої кількості допоміжних ліній, які можуть ускладнити читання відповідних побудов на рисунку.

Взагалі кажучи, обидва методи є рівноправними, а тому користуватися можна будь-яким з них. Більш того, часто доцільно комбінувати ці методи побудови перерізів.

Розглянемо дані методи на прикладі.

Побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, через три задані точки K, L, M.

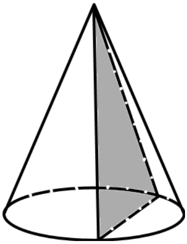


Спроєктуємо точки K і L на площину основи $ABCD$ куба: $K \longrightarrow N, L \longrightarrow C$. Проведемо прямі KL і NC, вони перетнуться у точці O (точки K, L, N, C, O лежать в одній площині). Проведемо пряму MO (так як точки M і O належать одній площині $ABCD$), яка перетне ребро CD у точці R (MR – слід перерізу на грані $ABCD$, LR – слід перерізу на грані CC_1D_1D) та продовження ребра AB у точці P. Проведемо пряму PK (так як точки P і K належать одній площині AA_1B_1B), яка перетне ребро AA_1 у точці T (MT – слід перерізу на грані AA_1D_1D, TK – слід перерізу на грані AA_1B_1B) та продовження ребра B_1B у точці S. З'єднаємо точки S і L (так як точки S і L належать одній площині BB_1C_1C), SL передне ребро B_1C_1 у точці U (KU – слід перерізу на грані $A_1B_1C_1D_1$, UL – слід перерізу на грані BB_1C_1C). Таким чином, шестикутник $TKURLM$ – шуканий переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

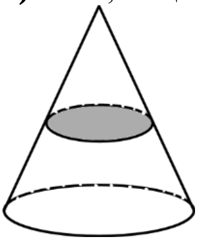
2. Плоскі перерізи тіл обертання

Увагу учнів доцільно звернути на те, що в перерізі конуса можемо отримати:

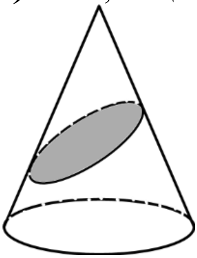
а)Трикутник, якщо січна площина проходить через вершину конуса і перетинає його основу;



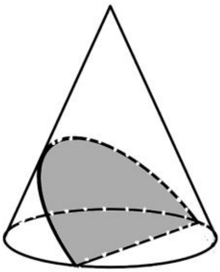
б) Коло, якщо січна площина паралельна основі конуса;



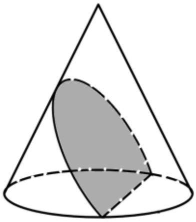
в)Еліпс, якщо січна площина перетинає всі твірні конуса;



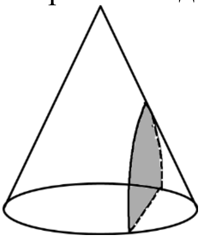
г) Лінія, що є об'єднанням дуги еліпса і відрізка прямої, якщо січна площина перетинає основу і не паралельна жодній твірній конуса;



д) Лінія, що є об'єднанням параболи і відрізка, якщо січна площина паралельно одній із твірних конуса;

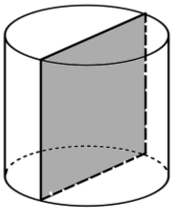


е) лінія, що є об'єднанням дуги вітки гіперболи і відрізка, якщо січна площина паралельна двом твірним конуса.

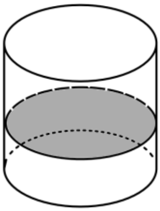


Розв'язуючи задачі в школі, учням доцільно показати, що в перерізі циліндра конуса можемо отримати:

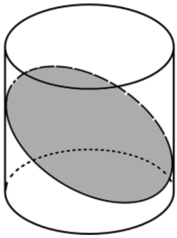
а) прямокутник, якщо січна площина паралельна твірній циліндра;



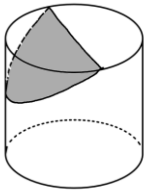
б) Коло, якщо січна площина паралельна основі циліндра;



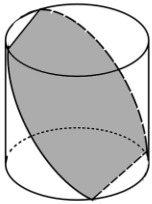
в) еліпс, якщо січна площина не паралельна основі циліндра і не паралельна його твірній;



г) лінія, що є об'єднанням дуг еліпса і відрізка прямої, якщо січна площина не паралельна твірній і перетинає одну основу циліндра;



д) лінія, що є об'єднанням двох дуг еліпса і двох відрізків, якщо січна площина не паралельна твірній і перетинає обидві основи циліндра.

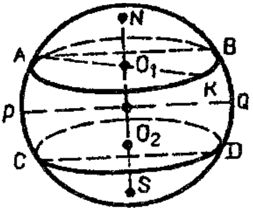


При зображенні перерізів верхньої і нижньої півкуль сфери горизонтальними площинами, відмінними від великого круга, треба враховувати таке:

1) Зображення перерізу верхньої півсфери - еліпс, який дотикається до сфери не в кінцях зображення горизонтального діаметра, а в кінцях *A* і *B* паралельної йому хорди, тому центр еліпса зобразиться точкою O_1 розміщеною нижче від хорди *AB,* а центр O_2 в перерізі нижньої півсфери - вище, ніж відповідна хорда *CD.*

2) Якщо через точки *A і* O_1 провести діаметр *AK,* то це - один з діаметрів, з яких зручно починати побудову двох взаємно перпендикулярних діаметрів зображення кола.

3) У верхній півсфері більшу частину еліпса (зображення перерізу) видно, а в нижній півсфері, навпаки, більшу частину еліпса не видно.



Лекція 23. Методика вивчення координат та векторів у просторі

План

1. Координати та координатний метод при розв’язуванні задач
2. Вектори та векторний метод при розв’язуванні задач

У 10 класі програмою передбачено вивчення координат і векторів у тривимірному просторі разом з геометричними перетвореннями такими як центральна і осьова симетрії, симетрія відносно площини, паралельне перенесення. Слід відмітити, що вивчення координат і векторів у просторі є продовженням і розширенням знань програми 9 класу з цієї теми. Тобто такі теми як знаходження довжини відрізка (вектора), знаходження координат середини відрізка, знаходження координат вектора, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів, умови колінеарності і перпендикулярності векторів, рівняння сфери і інші у просторі слід вводити через проведення аналогій з вивченим у 9 класі на площині.

1. Координати та координатний метод при розв’язуванні задач

Цілі й навчальні завдання вивчення координатного методу в школі.

1. Показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, використовуючи які можна виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою у вигляді рівнянь, нерівностей, їхніх систем чи сукупностей, функцій з подальшим переведенням указаних моделей на геометричну мову (графіків).

2. Сформувати понятійний апарат координатного методу

3. Сформувати конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри й геометрії. ІІ. Понятійний апарат координатного методу для прямокутної системи координат.

Абсциса (лат. «відтинати») — це відрізок, що відтинається на осі Ох.

Ордината (лат. «упорядкований») — це відрізок, що відтинається на осі Оу .

Аплікáта (лат. applicata — прикладена, прилегла, суміжна) — це відрізок, що відтинається на осі Oz.

Координати (точки) — числа, узяті в певному порядку, й точки, що характеризують положення точки на лінії, на площині, у просторі. Пряма, на якій застосовано зазначений спосіб зображення дійсних чисел, називається координатною. Зауважимо, що у математиці є теорема (аксіома), що вводить координатну пряму або координати на прямій. У школі координатна пряма вводиться поступовим «присвоєнням» точкам прямої певних чисел у зв’язку з розширенням числових множин й осмисленням операції відкладання відрізка (вимірювання відрізка). Координатна площина — площина, на якій розглядаються два класи таких ліній, що кожна лінія одного класу перетинається з кожною лінією іншого класу тільки в одній точці.

Оглядовий характер вивчення теми і невелика кількість уроків, що передбачені для її опрацювання базовою програмою, не дають можливості систематично використовувати координатний і векторний методи для розв'язування геометричних задач у просторі. Проте такі задачі можна розв'язувати під час вивчення наступних тем, на заняттях математичного гуртка, факультативах. У класах з поглибленим вивченням математики це потрібно робити систематично.

Для забезпечення ефективного повторення і засвоєння нового матеріалу доцільно використовувати наочні посібники, в яких зіставляються відомості про вектори на площині і в просторі. З цією метою можна виготовити таблиці, послуговуватися персональними комп'ютерами, кодопозитивами.

Введення декартових координат.

Розглядаючи декартові координати у просторі, потрібно нагадати учням відомості про координати точок на прямій і площині. З цією метою можна застосувати в класі для фронтальної роботи таку систему запитань і завдань.

1. Що таке координатна пряма? Чим визначається положення точок на координатній прямій?
2. Позначити на координатній прямій точки $A(2)$, $B(-3)$, $C(2,7)$. Знайти координати точки O (рис. 1).

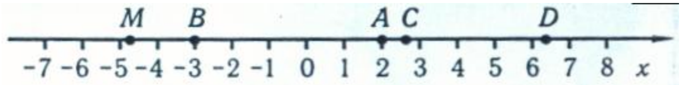
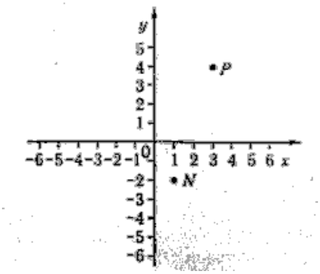


рис. 1

3. Як визначити відстань між точками $A_1(x_1)$ і $A_2(x_2)$ координатної прямої?

4. Знайти відстань між точками $A(2)$ і $B(-3)$.
5. Що таке система координат на площині?
6. Чим визначається положення будь-якої точки на координатній площині? Що називається абсцисою; ординатою точки?
7. Як знайти точку $M(x_1;y_1)$ на координатній площині, якщо задано її координати x_1 і y_1 ? Знайти точку N (1; - 2) на координатній площині (рис.2).



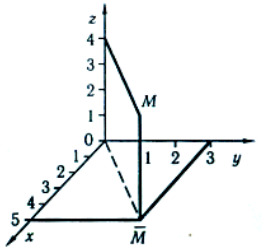


рис.2 *рис.3*

8. Як знайти координати точки *P,* заданої на координатній площині (рис.2)?
9. Як визначити відстань між точками $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ за їх координатами?
10. Знайти відстань між точками A (1; -2) і B(-2; 2).
11. Визначити координати середини відрізка *AB,* якщо A(1;0) і B(3;2).

Після введення декартових координат у просторі, означення координат і пояснення прямої задачі потрібно за готовим рисунком або за моделлю координатного простору пояснити два можливі способи розв'язування оберненої задачі. Перший спосіб наведено на рис.3

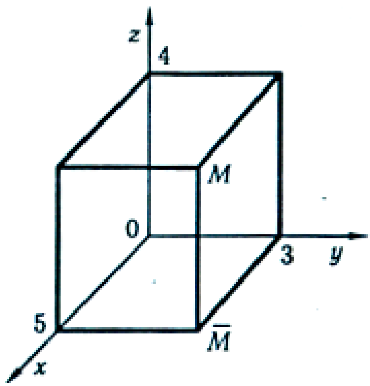


рис.4

Другий спосіб зводиться до побудови прямокутного паралелепіпеда (рис.4).

Можна зробити висновок про те, що положення будь-якої точки в координатному просторі задається впорядкованою трійкою чисел *x, y, г.* Кожній точці координатного простору відповідає певна впорядкована трійка чисел і, навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел відповідає точка координатного простору.

Доведення формул відстані між двома точками і координат середини відрізка в просторі.

Після постановки завдання знайти і довести формулу відстані між двома точками A_1 (x_1;y_1;z_1) і $A_2(x_2;y_2;z_2)$ У просторі та формулу координат середини відрізка *AB* учні можуть висловити гіпотезу: за аналогією з відповідними формулами планіметрії вони мають вигляд

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Здавалося б, що доведення цих формул, аналогічних планіметричним, не повинні спричинити труднощі в учнів. Проте досвід показує інше. У частини учнів доведення формули відстані між двома точками зумовлює значні труднощі на етапі обґрунтування побудови прямокутного трикутника в просторі. Тому доцільно організувати колективний пошук доведення.

Можна запропонувати учням довести формули координат середини відрізка у просторі самостійно за підручником під час виконання домашнього завдання, а на наступному уроці перевірити засвоєння цього матеріалу.

При вивченні координат у просторі важливим є вміння знаходити координати точок на рисунках, відстаней від точки до осей та площин.

Координатний метод — спосіб визначення положення точки (на прямій, на площині, у просторі) з допомогою чисел (для декартової системи координат). Використовуючи координатний метод, алгебраїчні рівняння можна витлумачити у вигляді геометричних образів (графіків) і, навпаки, шукати розв’язування геометричних задач з допомогою аналітичних формул (рівнянь і їхніх систем).

Нагадаємо основні етапи вивчення в школі координатного методу:

а) переведення з аналітичної мови на графічну основного відношення задачі (із графічної на аналітичну, якщо задача задана графічною мовою);

б) перетворення або дослідження об’єкта новою мовою, більш зручною і результативною для вивчення об’єкта;

в) переведення результату перетворення або дослідження на мову розв’язуваної задачі;

г) осмислення отриманого результату.

Задача 1. У сферу вписано правильну чотирикутну піраміду з двогранним кутом при основі α. Знаючи, що площа сфери дорівнює S, знайти площу основи піраміди.

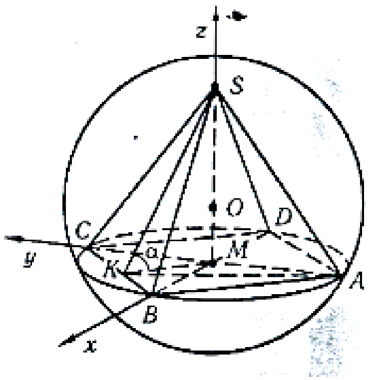


рис. 5.

Розв'язання. У цьому випадку зручно вибрати систему координат так, щоб початок її був у центрі M основи, а додатні напрямки осей x, y, z збігалися відповідно з напрямками променів MB, MC, MS, на яких лежать діагоналі основи і висота піраміди (рис.5). Позначимо висоту основи як a.

У вибраній системі координат $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), S\left(0;0;\frac{a}{2}tg\alpha\right), O(0;0;z)$

Аплікату точки *S* визначимо з прямокутного трикутника *SMK*, де $MK=\frac{a}{2}$, $\angle SKM=\alpha$. Отже, $SM=\frac{a}{2}tg\alpha$.

Аплікату z центра *O* сфери визначимо із співвідношення $OM^2+MB^2=OB^2$, враховуючи, що $OB=OS$, $MB=\frac{MK}{\sin 45^\circ}, MB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Отже, маємо $z^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{atg\alpha}{2}-z\right)$. Звідси $z=\frac{a\left(tg^2\alpha-2\right)}{4tg\alpha}$.

Радіус описаного кола

$$R^2=OB^2=z^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha-2\right)^2}{16tg^2\alpha}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{16tg^2\alpha}.$$

Відомо, що $S=4\pi R^2$, або $S=\frac{\pi a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{4tg^2\alpha}$. Із цієї рівності визначимо площу основи піраміди *SABCD*:

$$Q=a^2=\frac{4Stg^2\alpha}{\pi\left(tg^2\alpha+2\right)^2}$$

2. Вектори та векторний метод при розв'язуванні задач

1. Вектор — одне з фундаментальних понять сучасної математики й широко використовується в різних її областях. У роботах Г. Бесселя, Ж. Аргана й К. Ф. Ґаусса з теорії комплексних чисел встановлено зв'язок між арифметичними операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами у двовимірному просторі. У роботах В. Гамільтона, Г. Ґрассмана, Ф. Мебіуса поняття вектора знайшло широке застосування при вивченні властивостей тривимірного й багатомірного просторів. У цей час на векторній основі викладаються лінійна алгебра, аналітична й диференціальна

геометрія, функціональний аналіз та ін. До поняття вектора як направленого відрізка приводять багато завдань механіки й інших областей фізики: теорії пружності, теорії електромагнітних полів тощо. У методиці викладання математики вектор виступає як сполучна ланка між мірою і напрямком. Цілі вивчення векторного методу в школі є такими:

• дати ефективний метод розв'язування різних геометричних задач (як аффінних, так і метричних) і доведення теорем;

• показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії, лінгвістиці й т. д. — і на базі цього формувати в учнів поняття про матеріальну картину світу;

• використати векторний метод при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення й конкретизацію;

• формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість (нешаблонність), цілеспрямованість, раціональність, критичність У процесі проведення занять з розв'язування математичних задач векторному методу приділяється велика увага з виділенням основних компонентів розв'язування задач цим методом.

2. Основні компоненти векторного методу розв'язування задач.

1) Переклад умови задачі на мову векторів, у тому числі:

• уведення в розгляд векторів;

• вибір системи координат (якщо це необхідно);

• вибір базисних векторів;

• розкладання всіх уведених векторів за базисними.

2) Складання системи векторних рівностей (або однієї рівності). Відмітимо, що в школі частіше використовуються векторні тотожності і їхні перетворення, рідше — векторні рівняння. Тому ми будемо використовувати термін «рівність».

3) Спрощення векторних рівностей.

4) Заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язування.

5) Пояснення геометричного змісту отриманого розв'язування системи рівнянь (або одного рівняння).

3. Понятійний апарат та уміння, які повинен опанувати учень, щоб навчитися розв'язувати задачі векторним методом:

• основні поняття: вектор, початок вектора, кінець вектора, однаково направлені вектори, протилежно направлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, неколінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між ненульовими векторами;

• основні дії, уміння, виконання яких має бути сформоване в учнів: додавання векторів (користуючись «правилом трикутника», «правилом паралелограма», «правилом паралелепіпеда»); віднімання векторів; множення вектора на число; подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, у вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним з допомогою паралельного перенесення; подання вектора у вигляді його розкладуза двома неколінеарними векторами; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між їхніми довжинами й виконання зворотної дії; вираження довжини вектора через його скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжини цих векторів;

• дії для оволодіння компонентами методу: переведення геометричних термінів на мову векторів і розв'язування зворотної задачі; переведення умови задачі на мову векторів, тобто складання системи векторних рівностей за умовою задачі; вибір базис векторів, розкладання введених у розгляд векторів за базисними векторами; спрощення системи векторних рівностей; заміна векторних рівностей алгебраїчними.

3. Основні етапи формування в учнів векторного методу.

1) Підготовчий етап. Його мета — оволодіння перерахованими основними поняттями й основними діями.

2) Мотиваційний етап. Його завдання — показати необхідність оволодіння цим методом і домогтися усвідомлення того факту, що на наступних етапах метою діяльності учнів буде саме засвоєння цього методу розв’язування задач. Прийоми, що використовуються при цьому, — розв’язування таких задач, які векторним методом розв’язуються простіше, ніж будь-яким іншим, або іншим узагалі розв’язати неможливо.

3) Етап орієнтування. Його мета — роз’яснити суть методу й виділити його основні компоненти на прикладі аналіза розв’язаної цим методом задачі.

4) Етап оволодіння компонентами методу. Мета — використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компонента, потім — двох, трьох і т. д.).

5) Етап формування методу «в цілому». Мета етапу — розв’язування задач, у яких працюють всі або більшість компонентів методу (в тому числі й на матеріалі фізики, хімії та інших предметів). Розподіл формування методу на етапи є досить умовним, тому що перелічені етапи тісно взаємопов’язані. Очевидно, не варто чітко розділяти учням задачі на формування компонентів, але сам учитель повинен чітко знати, який компонент з допомогою якої із задач він буде формувати в учнів. Однак мета кожного етапу повинна бути ясна і вчителеві, і учням.

4. Методика формування векторного методу розв’язування задач.

I. Підготовчий етап формування методу (введення понятійного апарату, основних понять та основних дій) є в кожному з розглянутих навчальних посібників, хоча він і не зосереджений на якій-небудь короткій частині викладу.

II. На мотиваційному етапі можна розглянути з учнями розв’язування конкретної задачі.

Лекція 24. Методика вивчення многогранників у старшій школі

План

1. Методика введення поняття многогранників та їх побудова.
2. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл. Методика вивчення.

1. Методика введення поняття многогранників та їх побудова.

На початку вивчення даної теми доцільно звернути увагу на те, що в стереометрії фігурами, аналогічними многокутникам, є многогранники. З найпростішими з них уже доводилось ознайомлюватися на уроках математики, праці, креслення, у побуті (прямокутний паралелепіпед, куб, призма, піраміда).

Елементами многокутників є вершини, сторони, кути. Варто пригадати означення кута, плоского кута, звернути увагу на те, що існують два плоскі кути з даними сторонами. Треба також пригадати введене в курсі стереометрії поняття півплощини, кута між площинами.

Елементами многогранників є вершини, грані, двогранні, тригранні або многогранні кути. Отже, виникає потреба з'ясувати, що таке двогранний, тригранний і многогранний кут.

Далі можна ввести означення многогранника: Многогранником називають тіло, поверхнею якого є об'єднання скінченної кількості многокутників.

Означення многогранників: призми і піраміди у діючих підручниках вводиться по різному. Так, наприклад, у підручниках авторських складів А. Мерзляка і О. Істера вводиться так (аналогічно щодо піраміди):

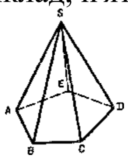
Многогранник, дві грані якого – рівні многокутника, що лежать у паралельних площинах, а решта граней – паралелограми, називається призмою.

А в підручнику Є. Неліна та ін.: Призмою називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіма відрізками, які сполучають відповідні точки цих многогранників.

Доцільно дати учням загальні правила-орієнтири щодо зображення многогранників і окремих видів. Всі види призм і пірамід слід зображувати так, щоб найбільшу кількість граней і ребер було видно, а ребра не збігались. До того ж доцільно рекомендувати учням починати виконувати зображення призм з верхньої основи, оскільки всі сторони верхньої основи видно, а ребра зручніше проводити зверху вниз.

Виконувати зображення піраміди зручно в такій послідовності:

1) на площині зображають деякий многокутник (наприклад, п'ятикутник)



2) поза площиною многокутника (як правило, зверху) вибирають довільну точку S (вершину) і з'єднують її з вершинами основи, суцільними відрізками - ті, які видно, і штриховими лініями - ті, які не видно.

При зображенні правильних пірамід завжди відома проекція вершини піраміди на основі. Тому після виконання зображення основи треба визначити цю проекцію, провести пряму, якій належить висота піраміди, і на ній вибрати вершину. Відтак з'єднати вершину піраміди з вершинами основи.

При побудові многогранників, в основі яких лежать правильні многокутники, треба дотримуватись правил-орієнтирів їх зображення, що пропонувались у 10 класі при вивченнівластивостей паралельної проекції.

На рівні обов'язкових результатів навчання програмою і підручником передбачено найпростіші випадки побудови перерізів. На гурткових або факультативних заняттях, в класах з поглибленим вивченням математики доцільно ознайомити учнів із загальними методами побудови перерізів тіл, зокрема многогранників. Мається на увазі метод внутрішнього проектування (метод відповідності) і метод слідів при паралельному і центральному проектуванні.

Об’єми і площі поверхонь геометричних тіл. Методика вивчення.

Перше уявлення про об'єми тіл і їх обчислення учні дістають у курсі математики 5 класу у зв'язку з вивченням прямокутного паралелепіпеда. В 11 класі вони повертаються до вивчення об'ємів на дедуктивній основі. В умовах роботи за підручником Неліна за аналогією з введенням поняття площі фігури в курсі планіметрії запроваджується поняття об'єму спочатку простих тіл. Так само формулюється означення об'єму прострового тіла як додатної величини, числове значення якої має три властивості. Далі доводиться формула об'єму прямокутного паралелепіпеда. В останньому виданні підручника подано інший, коротший спосіб доведення цієї формули, ніж у попередніх, але теж з використанням ідеї граничного переходу.

Практика свідчить про те, що доведення формул об'єму похилого паралелепіпеда методом перетворення його додатковими побудовами в прямокутний, як і доведення формули об'єму призми, не викликають в учнів особливих труднощів, якщо до того ж використати заздалегідь виготовлені моделі, що ілюструють етапи перетворення. Важче сприймається учнями доведення формули об'єму трикутної піраміди.

У навчально-методичній літературі відомі кілька способів доведення цієї формули:

1. спосіб, що спирається на явне використання границі (спосіб границь);
2. спосіб, що спирається на використання принципу Кавальєрі;
3. спосіб доведення за допомогою формули Симпсона;
4. спосіб доведення за допомогою визначеного інтеграла;

5. спосіб, який спирається на попереднє доведене твердження про рівновеликість двох трикутних пірамід з рівними площами основ і рівними висотами.

У класах з поглибленим вивченням математики можливий інший методичний варіант використання визначеного інтеграла для обчислення об'ємів тіл, що вивчаються в шкільному курсі. Спочатку вводяться поняття довільного циліндра і конуса. Призма і піраміда в такому разі є окремими випадками циліндра і конуса. Попередньо вводиться теорема про об'єм прямого циліндра. Спочатку вона обґрунтовується наочними міркуваннями, а відтак доводиться строго.

Далі формулюється теорема про вираження об'єму простої фігури T інтегралом, тобто $V(T) = \int_0^H S(x)\,dx$, де $S(x)$ – площа фігури, отриманої в результаті перетину тіла площиною, перпендикулярної до осі абсцис.

Після цього доводять теореми про об'єм циліндра (зокрема, призми), об'єм конуса (зокрема, піраміди), кулі, тіл обертання.

Щодо площ поверхонь геометричних тіл, то обчислення площ многогранників не становить труднощів, оскільки задача зводиться до обчислення площ граней (многокутників). Площі поверхні циліндра і конуса теж неважко обчислити за допомогою їх розгорток. Обчислення площі сфери дещо складніше. Проте і для всіх тіл обертання важливо вміти знаходити відповідні формули площ поверхонь, використовуючи підхід, аналогічний до доведення формули площі круга. Тільки для тіл обертання доводиться вписувати відповідно правильну n-кутну призму (для циліндра), правильну n-кутну піраміду (для конуса) і описувати опуклий многогранник (для сфери). В цьому разі теж використовується ідея граничного переходу.

У шкільних підручниках попередніх років здійснено інший теоретичний і методичний підходи до виведення формул площ поверхонь, тіл обертання, ідею якого запропонував А. Лебег: тіло, наприклад кулю, покривали шаром фарби, обчислювали об'єм цього шару, і за умови, коли товщина шару прямувала до нуля, об'єм його прямував до числа, значення якого і приймали за числове значення площі поверхні.

Розглянемо методику розв'язання задач

Задача 1. Основою піраміди є трикутник з довжинами сторін 6 *см*, 5 *см* і 5 *см*. Бічні грані піраміди утворюють з її основою однакові кути, що містять по 45°. Визначити об'єм піраміди.

Розв'язання

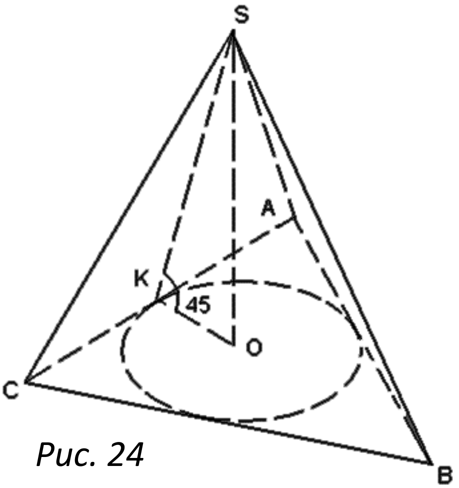


Рис. 24

На *рис. 24* піраміда *SABC, SO* – висота, точка *O* – центр вписаного кола. Маємо $p = \dfrac{6+5+5}{2} = 8;$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12; OK = r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = 1{,}5\,(см)$$

У Δ SOK: $\angle O = 90°; \angle K = 45°.$

Тоді $\angle KSO = 45°$ і $SO = OK = 1{,}5\,см$. Шуканий об'єм

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 1{,}5 = 6\,(см^3)$$

Відповідь. $6\,см^3$

Задача 2. Основою похилої призми є рівнобедрена трапеція, у якої бічна сторона і менша основа дорівнюють *a*, а гострий кут дорівнює β. Одна з вершин верхньої основи призми рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро утворює з площиною основи кут α.

Розв'язання

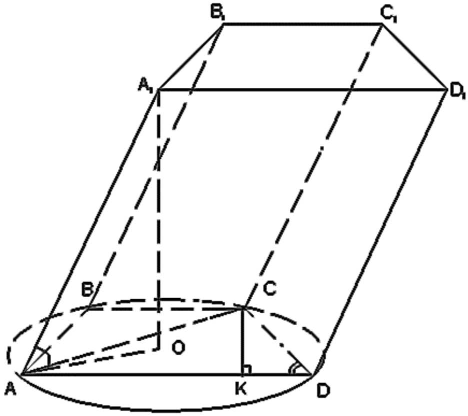


Рис. 25

ABCD – основа призми, *AD*||*BC*, *AB*=*BC*=*CD*=*a*, $\angle CDA = \beta$ *(рис. 25)* .

Оскільки A_1 – рівновіддалена від точок *A, B, C, D*, вона проектується в центр описаного кола – точку *O*. *AO* – проекція AA_1 на площину основи. Тоді $\angle A_1AO$ - кут, що утворює бічне ребро з основою $\angle A_1AO = \alpha$.

Шуканий об'єм $V = S_{ABCD} \cdot A_1O$. Проведемо висоту *CK* трапеції *ABCD*. Тоді у $\Delta CKD : CK = a\sin\beta; KD = a\cos\beta.$

Оскільки $KD = \dfrac{AD - BC}{2}$, то $AD = 2KD + BC = 2\alpha\cos\beta + a.$

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{2a\cos\beta + a + a}{2} \cdot a\sin\beta = \alpha^2(1 + \cos\beta)\sin\beta$$

.

AO= *R* – радіус кола, описаного навколо *ABCD*, а також навколо ΔABC. Тому $\dfrac{BC}{\sin\angle ABC} = 2R; \angle ABC = \pi - \beta. \Delta ABC$ -

рівнобедрений (оскільки $AB=BC$). Тому $\angle BAC=\frac{\pi-(\pi-\beta)}{2}=\frac{\beta}{2}$.

Тоді $R=AO=\frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Маємо в $\Delta AOA_1(\angle O=90°):A_1O=AO\cdot tg\alpha=\frac{\alpha tg\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Тоді

$$V=a^2(1+\cos\beta)\sin\beta\frac{atg\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{a^3(1+\cos\beta)\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}tg\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=a^3\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}tg\alpha=2a^3\cdot\cos^3\frac{\beta}{2}tg\alpha$$

Відповідь. $2a^3\cdot\cos^3\frac{\beta}{2}tg\alpha$

Лекція 25. Методика вивчення тіл обертання

План

1. Методичний аналіз теми
2. Логіко-дидактичний аналіз теми

1. Методичний аналіз теми

Цією темою завершується вивчення властивостей фігур у просторі. Вивчення учнями тіл обертання має не тільки загальноосвітнє, а й практичне значення, оскільки їх форми мають деталі багатьох машин, приладів, архітектурні споруди, речі побуту, наприклад гончарні вироби.

Основна мета вивчення теми - ввести означення кожного з тіл обертання, спираючись на уявлення, одержані про них при вивченні математики, креслення, трудового навчання, навчити зображувати їх на площині, довести теореми про властивості тіл обертання та навчити застосовувати ці властивості при розв’язуванні задач.

Учні повинні володіти поняттями про тіла і поверхні обертання, зображувати їх і застосовувати властивості для розв’язування задач.

Теоретичний матеріал, що стосується тіл обертання, не великий за обсягом і засвоюється учнями без особливих труднощів. Досвід показує, що циліндр і конус доцільно вивчати за одним методичним планом, підкреслюючи спільне і відмінне в означеннях, властивостях, зображеннях.

Значні труднощі у частини учнів виникають при розв’язуванні задач, особливо задач на комбінації тіл обертання з многогранниками. Труднощі пов’язані насамперед з відсутністю умінь правильно і наочно зобразити комбінацію тіл, теоретично обґрунтувати рисунок і окремі етапи розв’язування задачі, правильно виконати наближені обчислення, особливо в задачах практичного змісту.

Для демонстрації тіл обертання можна використати відцентрову машину, яка є в кабінеті фізики, заготовивши заздалегідь набір дротяних рамок. Допоможуть правильному сприйманню моделей тіл обертання шаблони еліпсів для швидкого зображення тіл обертання та перерізів їх площиною.

Формування понять теми

У підручниках і методичних посібниках в різні роки вживались неоднакові терміни відносно розглядуваної теми: «круглі тіла , «Тіла обертання», «Фігури обертання». Слід мати на увазі, що фігури обертання - більш широке поняття, бо включає в себе тіла обертання, поверхні обертання та інші фігури. У переважній більшості шкільних підручників і посібників, йдеться про тіла обертання і відповідні їм поверхні: циліндр - поверхня циліндра, конус - поверхня конуса, куля - сфера. Традиційно тіла обертання і відповідні їм поверхні вивчаються після многогранників. В цьому разі використовується відоме учням на наочному рівні поняття «тіло», а послідовність вивчення окремих тіл обертання відповідає прийнятій послідовності вивчення многогранників: призма, піраміда, правильний многогранник - циліндр, конус, куля.

Можливий і інший порядок вивчення круглих тіл, від якого залежить і їх трактування. Зокрема, спочатку вводяться загальні відомості, що стосуються понять обмеженої фігури, опуклої фігури, тіла, опуклих тіл тощо. Потім вивчаються тіла обертання, раніше ніж многогранники, в такій послідовності: куля, циліндр, конус, оскільки поняттями сфери і кулі широко послуговуються при дальшому вивченні стереометрії. Не традиційно означаються циліндр і конус. Так, циліндром називається об’єднання паралельних відрізків, які йдуть з усіх точок деякої плоскої фігури до площини, що паралельна площині цієї фігури. Згідно з таким означенням циліндр може мати своєю основою точку, відрізок, трикутник, круг, пряму, півплощину і т. д. Після цього вводиться означення прямого кругового циліндра або циліндра обертання. При такому трактуванні не завжди циліндр і конус є тілами. Це тлумачення циліндра і конуса можна було б ввести в класах з поглибленим вивченням математики, а для масової школи воно складне для сприймання. Тому слід визнати більш вдалим те означення тіл обертання, яке пропонується в підручниках А. Мерзляка, О. Істера. Тут здійснений єдиний підхід до означення призми, піраміди, циліндра і конуса.

Означення цих фігур досить широке, бо включає не тільки прямий круговий циліндр (конус), а й похилі. На завершення вводяться означення прямого кругового циліндра і конуса, які найчастіше трапляються на практиці. Зокрема, циліндром (точніше, круговим циліндром) називається тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які з’єднують відповідні точки цих кругів. Якщо пригадати запроваджене раніше означення призми, то, скориставшись моделлю циліндра і вказівкою на схожість означень призми і циліндра, учні можуть самостійно сформулювати означення циліндра.

Аналогічний підхід можна здійснити і при введенні означення конуса. Означення вписаної в циліндр і описаної навколо циліндра призми не викликає в учнів труднощів. Після введення означень цих понять учні самі можуть за аналогією сформулювати означення вписаної в конус і описаної навколо конуса піраміди. Означення кулі учні теж здатні сформулювати самостійно, якщо їм попередньо нагадати означення круга і привернути їхню увагу до аналогії в означеннях круга і кулі. Варто звернути увагу учнів на аналогію понять коло - сфера. Коло – межа круга, сфера – межа кулі. Те ж саме стосується понять дотичної до кола і дотичної площини до сфери (кульової поверхні).

Після запровадження означень тіл обертання треба дати учням правила-орієнтири їх правильного і наочного зображення на площині.

2. Логіко-дидактичний аналіз теми

Проаналізувавши навчальну програму з математики, можна помітити, що основною метою вивчення стереометрії є розвиток просторової уяви учнів, освоєння способів обчислення практично важливих геометричних величин та подальший розвиток логічного мислення учнів. Темі притаманний систематизуючий і узагальнюючий характер викладу, спрямований на закріплення і розвиток умінь і навичок, отриманих в неповній середній школі. При доведенні теорем і розв'язуванні задач активно використовуються вивчені в курсі планіметрії властивості геометричних фігур, застосовуються геометричні перетворення, вектори і координати. Високий рівень абстрактності досліджуваного матеріалу, логічна строгість систематичного викладу з'єднуються із залученням наочності на всіх етапах навчального процесу і постійним зверненням до досвіду учнів. Уміння зображати найважливіші геометричні тіла, обчислювати їх об’єми мають велику практичну значимість.

Вивчення програмного матеріалу дає можливість учням:

• отримати уявлення про широту застосування геометрії в різних галузях людської діяльності; познайомитися з деякими фактами історії геометрії;

• засвоїти систематизовані відомості про просторові форми;

• навчитися проводити аналогію між плоскими і просторовими конфігураціями, бачити спільні і відмінні властивості аналогічних структур на площині і в просторі, використовувати планіметричні відомості для опису і дослідження просторових фігур;

- навчитися ілюструвати і моделювати проекційним кресленням просторові фігури;

• розв’язувати задачі на знаходження площ поверхонь і об'ємів тіл;

• розв’язувати задачі на доведення;

• опанувати набором прийомів, які часто застосовуються для розв’язання стереометричних задач на обчислення та доведення.

Рівень обов'язкової підготовки за темою «Тіла обертання» дає можливість учням навчитися:

• розпізнавати види тіл обертання та їх елементи;

• будувати зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів;

• обчислювати основні елементи тіл обертання;

• обґрунтовувати властивості тіл обертання, застосовувати їх до розв’язування задач;

• розпізнавати многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях;

• розв’язувати задачі на комбінацію просторових фігур.

Вивчення круглих тіл (циліндр, конус, куля) і їх поверхонь завершує знайомство учнів з основними просторовими фігурами. Вводяться поняття циліндричної і конічної поверхонь, циліндра, конуса, зрізаного конуса. За допомогою розгорток визначається площа їх бічних поверхонь, виводяться відповідні формули.

Потім даються означення сфери і кулі, вводиться рівняння сфери і з його допомогою досліджується питання про взаємне розташування сфери і площини. У завданнях розглядаються різні комбінації круглих тіл і многогранників, зокрема, описані і вписані призми і піраміди.

Аналіз теоретичного і задачного матеріалу теми дозволяє виділити наступні навчальні завдання теми:

- визначити новий вид тіл – тіла обертання (циліндр, конус, куля), довести, що дані тіла є тілами обертання;
- вивчити дані тіла, виявити їх властивості, властивості їх перетинів;
- вивести формули площ поверхонь циліндра і конуса і рівняння сфери;
- встановити три випадки взаємного розташування площини і сфери на основі аналогії з планіметрії;
- вивчити ознаку і властивість дотичної до сфери як взаємодоповнюючі теореми;
- формування узагальненого прийому розв'язування задач на обчислення довжин, кутів і площ просторових фігур;
- формування логічних і графічних умінь у ході розв'язування задач на доведення.

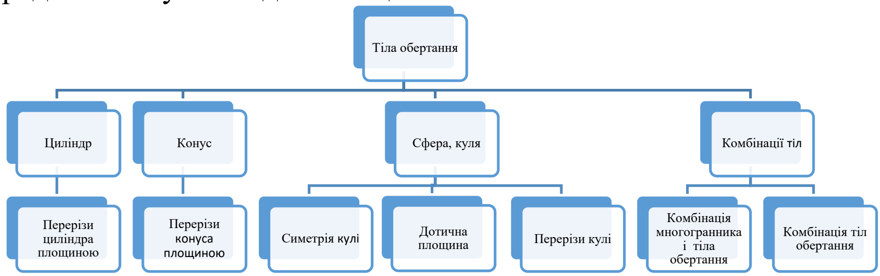
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Тіло обертання, циліндр, основи циліндра, радіус циліндра, бічна поверхня	Теорема про дотичну до кулі площину	Розпізнавати види тіл обертання та їх елементи; • будувати зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів; •

	циліндра, твірна циліндра, висота циліндра, конус, радіус конуса, бічна поверхня конуса, твірна конуса, висота конуса, зрізаний конус, куля, діаметр кулі, радіус кулі, сфера, комбінація тіл, вписані і описані тіла.		обчислювати основні елементи тіл обертання; • обґрунтовувати властивості тіл обертання, застосовувати їх до розв'язування задач; • розпізнавати многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях; • розв'язувати задачі на комбінацію просторових фігур.
Базові	Тіло, прямокутник, прямокутний трикутник, радіус, діаметр, коло, круг, дотична площина		Вміти задавати вісь обертання, та фігуру обертання.

Основний упор при вивченні матеріалу цього розділу робиться на розв'язування задач. Так як учні нерідко припускаються помилок в зображенні циліндра, конуса і сфери, вчителю слід акцентувати їх увагу (не особливо вдаючись до теорії) на правильному зображенні цих фігур, використовуючи готові рисунки. З метою економії навчального часу на виконання рисунків зручно використовувати шаблони для зображення тіл обертання; при розв'язувані деяких завдань доцільно зображувати не самі тіла обертання, а їх осьовий переріз. Особливу роль на уроці мають завдання по готовому рисунку. Вони не тільки економлять навчальний час, а й дозволяють концентрувати увагу учнів на найбільш істотних моментах поточного матеріалу.

Логіко-структурну модель вивчення тіл обертання можна представити у вигляді таблиці:



Список використаної літератури

1. Авраменко О.В., Лутченко Л.І., Ретунська В.В., Ріжняк Р.Я., Шлянчак С.О. Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики: Посібник для спецкурсу. Кіровоград: КДПУ, 2009. 200 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.
5. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.
6. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 416 с.: іл.
7. Істер О. С., Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ: Генеза, 2018. 384 с.: іл.
8. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.
9. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.
10. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

11. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2019. 352 с.
12. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
13. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://cutt.ly/5TXyf8j
14. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://cutt.ly/sTXylyI
15. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://cutt.ly/lTXycZZ
16. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Ранок, 2010. 416 с.
17. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Ранок, 2019. 240 с.
18. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.
19. Слєпкань З. І Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.
20. Швець Л. (2013) Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення: вступ до стереометрії // Математика в сучас. Шк. : наук.-метод. Журн. № 1. С. 17-23.
21. Якимович В. (2008) Теоретико-педагогічні засади розробки змісту навчання методів розв’язування стереометричних задач на побудову // Математика в школі. К. № 11-12. С. 55-61

22. Філон Л. Вивчення елементів стереометрії в курсі математики основної школи: автореф. Дис. На здобуття наукового ступеня канд. Пед. Наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання». К. 19 с.
23. Фіцула М. М. (2002) Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. К.: Видавничий центр «Академія». 528 с.
24. Тесленко І. (1954) Формування геометричних уявлень і розвиток просторової уяви учнів // Радянська школа. К. № 10. С. 27-34
25. Тести ЗНО онлайн. Завдання за темами з математики. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/tema.html.
26. Кобко Л. (2014) Аналогія: планіметрія – стереометрія // Математика в рід. Шк. : наук.-метод. Журн. № 11. С. 16-24
27. Істер О. (2018) Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 384 с.
28. Істер О., Єргіна О. (2018) Геометрія: (поглибл. Рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 384 с.
29. Істер О., Єргіна О. (2018) Геометрія: (проф. рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 368 с.
30. Нелін Є. (2010) Геометрія: дворівневий підручник для 10 кл. загальноосв. Навч. Закладів : академ. І проф. рівні. Х: Гімназія. 240 с.
31. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Геометрія: профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 240 с.
32. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Геометрія: початок вивчення на поглибл. Рівні з 8 кл, проф. рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 272 с.
33. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень

стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 256 с.
34. Лов'янова І.В. Методика сучасного уроку математики. Методична розробка для студентів заочників фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. м. Кривий Ріг: КДПУ, Кафедра математики, 2002. 28 с.
35. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Кривий Ріг: КДПУ, 2009. 237 с.
36. Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Москаленко Ю. Д. Методика навчання математики у вищій школі :метод. рек. до проведення практ. занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2021. 67 с.
37. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник (укладачі В.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк). Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2013. 224 с.