

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

***МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ***

Рівне 2021

УДК 373.5.016.8(07)

Методика розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей. Методичні рекомендації. Рівненський державний гуманітарний університет. – 2021 р. – 66 с.

Автори:

Цьовка Н. В. – магістрантка кафедри математики та методики її викладання РДГУ.

Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики з методикою її викладання РДГУ.

Рецензенти:

Павелків О.М. – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики з методикою викладання РДГУ.

Антонюк М. С. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформаційно-комунікаційних технологій та методики викладання інформатики.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її викладання РДГУ (протокол № 11 від 7.12.2021 р.)

Затверджено радою факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету.

Протокол № 9 від «21» «грудня» 2021 р

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ	6
1.1. Тригонометричні функції та їх властивості	6
1.2. Обернені тригонометричні функції: означення, графіки та властивості	15
2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ	22
2.1. Найпростіші тригонометричні рівняння	22
2.2. Приклади розв'язування тригонометричних рівнянь	25
2.3. Завдання для самостійного опрацювання	48
3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ.....	50
3.1. Найпростіші тригонометричні нерівності.....	50
3.2. Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей....	55
3.3. Завдання для самостійного опрацювання	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	64

ВСТУП

Одним із найважливіших видів навчальної діяльності є вміння розв'язувати математичні задачі, а саме рівняння та нерівності. В процесі такої діяльності, учні краще засвоюють матеріал, розвивають логічне мислення та творчі здібності.

Вивчення теми «Тригонометрія» умовно можна поділити на два етапи:

- 1) основи вивчення тригонометрії в курсі геометрії (7-9) клас;
- 2) поглиблене вивчення в курсі алгебри та початків аналізу.

Педагогічний досвід роботи багатьох вчителів показує, що вивчення теми «Тригонометрія» є однією з найскладніших в шкільному курсі математики. Для легкого сприймання, усвідомлення та більшого розуміння учнями матеріалу потрібно застосовувати не тільки традиційні засоби навчання. Серед нетрадиційних засобів можна виділити мультимедійні, які дозволяють відтворювати теоретичний матеріал у більш наочній формі, збільшувати мотивацію навчальної діяльності та темпи засвоєння, відтворення та застосування учнями матеріалу при розв'язуванні вправ.

Варто зауважити, що знання теоретичного та практичного матеріалу з тригонометрії включає в себе також програма зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) (Програма зовнішнього незалежного оцінювання, 2018).

При цьому учні повинні знати:

- означення синуса, косинуса, тангенса числового аргументу;
- основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
- формули зведення;
- формули додавання та наслідки з них;
- методи розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Вміти:

- виконувати тотожні перетворення тригонометричних виразів та знаходити їх числове значення при заданих значеннях змінних;
- розв'язувати різні види тригонометричних рівнянь та нерівностей.

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Тригонометричні функції та їх властивості

Припустимо, що в прямокутній системі координат одиничний вектор OP_α показує додатний напрямок осі x . Нехай кут $P_0OP_\alpha = \alpha$, координати точки $P_\alpha(x; y)$ (див. рис. 1.1.) (Нелін проф. рівень, 2018).

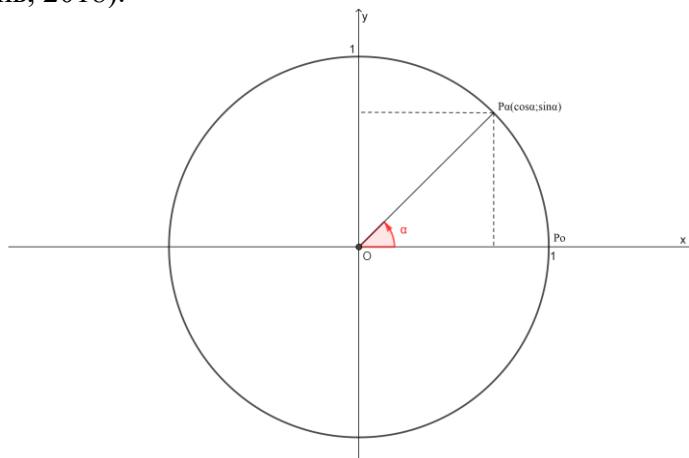


Рис. 1.1. Одиничне коло з одиничним радіусом

Синусом кута α називають ординату точки P_α : $\sin \alpha = y$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

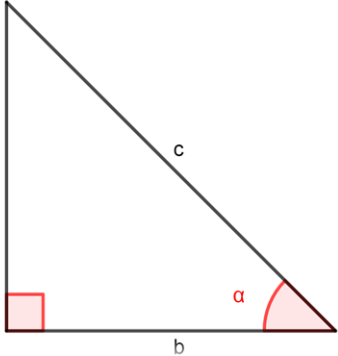
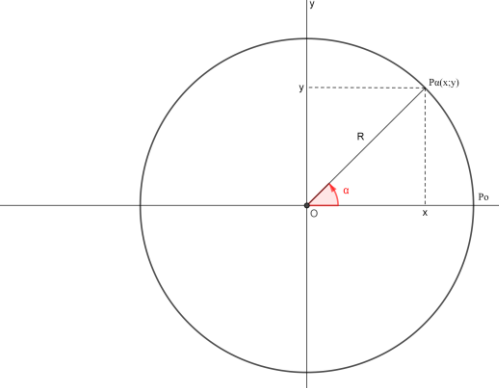
Косинусом кута α називають абсцису точки P_α : $\cos \alpha = x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Тангенсом кута α називають відношення ординати кінця одиничного радіуса до його абсциси: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Котангенсом кута α називають відношення абсциси кінця одиничного радіуса до його ординати: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Означення тригонометричних функцій ми можемо ще подати через прямокутний трикутник або коло довільного радіуса R .

Таблиця 1. Означення тригонометричних функцій

Через прямокутний трикутник	Через коло довільного радіуса R
	
$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \sin \alpha = \frac{a}{c},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$	$\cos \alpha = \frac{x}{R}, \sin \alpha = \frac{y}{R},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$

(Нелін проф. рівень, 2018)

Функція синус (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$$y = \sin(x)$$

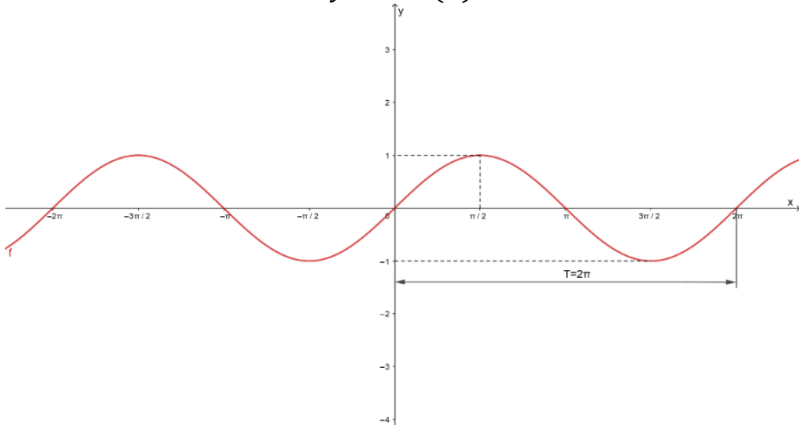


Рис. 1.2. Графік функції $y = \sin(x)$

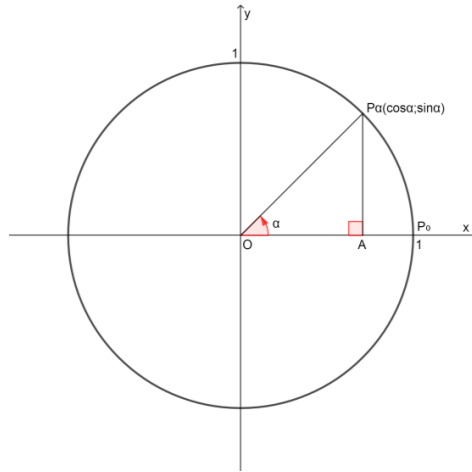


Рис. 1.3. Означення функції синус через одиничне коло $\sin x = AP_\alpha$ (ордината точки одиничного кола), AP_α – лінія синуса (див. рис. 1.3).

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1; 1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно початку координат (див. рис. 1.2.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π : $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX : $(\pi k; 0)$, $k \in Z$.

З віссю OY : $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$\sin x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in Z$.

$\sin x > 0$ (додатна) для всіх $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

$\sin x < 0$ (від'ємна) для всіх $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.4.):

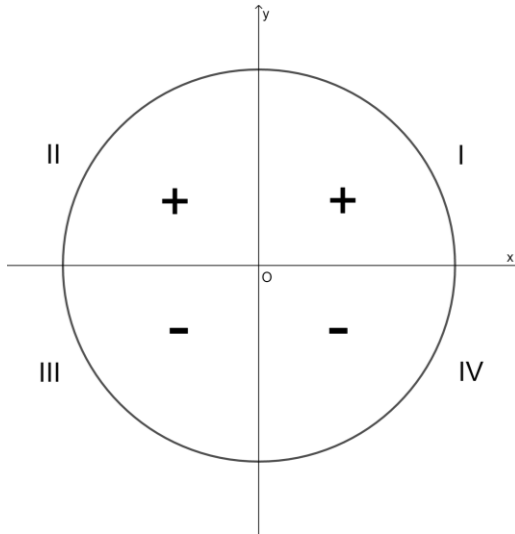


Рис. 1.4. Знаки функції синус

Функція зростає від -1 до 1 на проміжках: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$.

Функція спадає від -1 до 1 на проміжках: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$.

Найбільше значення функції $\sin x = 1$ в точках: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Найменше значення функції $\sin x = -1$ в точках: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Функція косинус (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$$y = \cos(x)$$

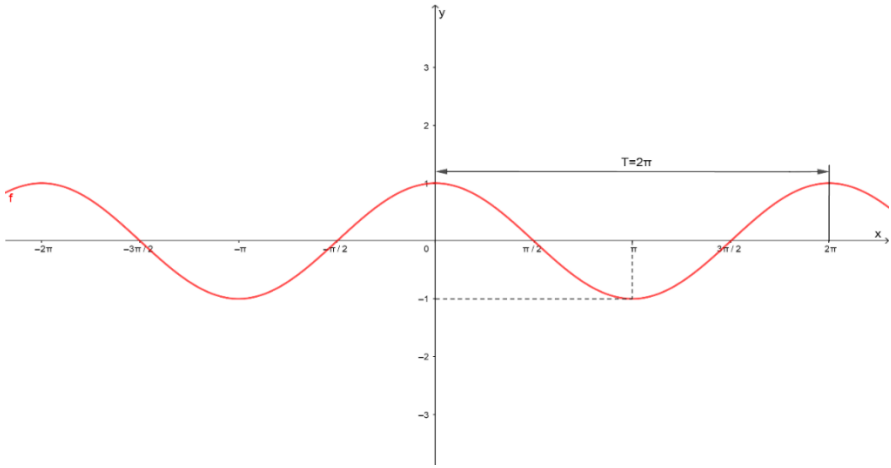


Рис. 1.5. Графік функції $y = \cos(x)$

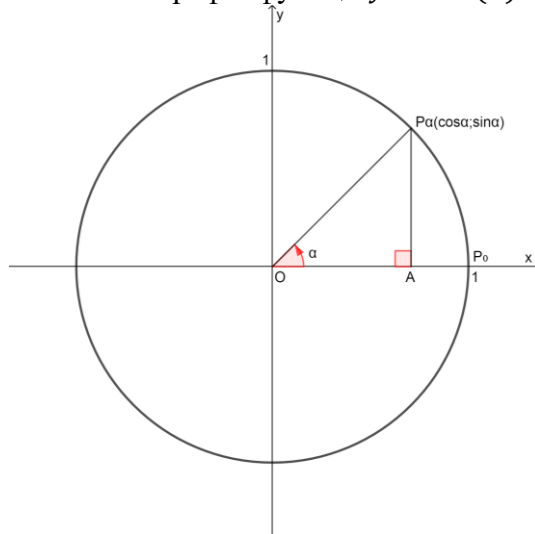


Рис. 1.6. Означення функції косинус через одиничне коло $\cos x = OA$ (абсциса точки одиничного кола), OA – лінія косинуса (див. рис. 1.6.).

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1; 1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\cos(-x) = \cos x$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно осі ОУ (див .рис. 1.5.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π : $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю ОХ: $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0), k \in Z$.

З віссю ОУ: $(0; 1)$.

Проміжки знакосталості:

$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$\cos x > 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, 2\pi k), k \in Z$.

$\cos x < 0$ для всіх $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k), k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.7.):

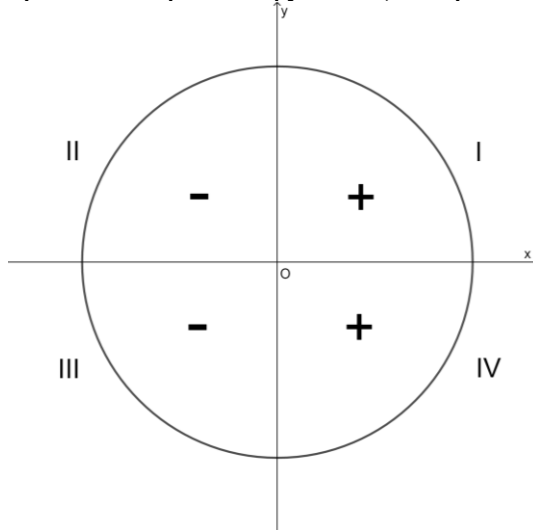


Рис. 1.7. Знаки функції косинус

Функція зростає від -1 до 1 на проміжках: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in Z$.

Функція спадає від -1 до 1 на проміжках: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$.

Найбільше значення функції $\sin x = 1$ в точках: $x = 2\pi k, k \in Z$.

Найменше значення функції $\sin x = -1$ в точках: $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Функція тангенс (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$$y = \operatorname{tg}(x)$$

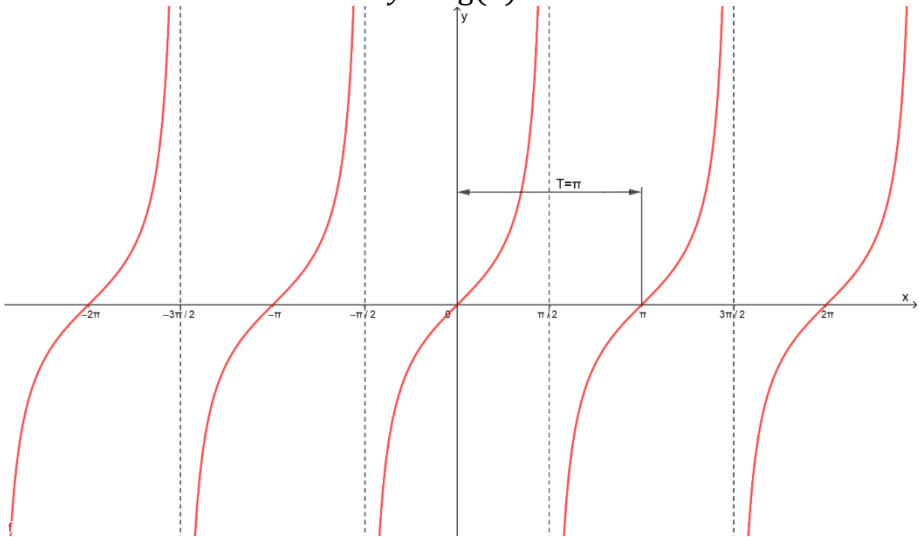


Рис. 1.8. Графік функції $y = \operatorname{tg}(x)$

Означення: $\operatorname{tga} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел, крім

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто тангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі ОУ (див. рис. 1.8.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом π : $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x$, де $k \in \mathbb{Z}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю ОХ: $(\pi k; 0), k \in \mathbb{Z}$.

З віссю ОУ: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$\operatorname{tg}x = 0$ при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg}x > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg}x < 0$ для всіх $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.9.):

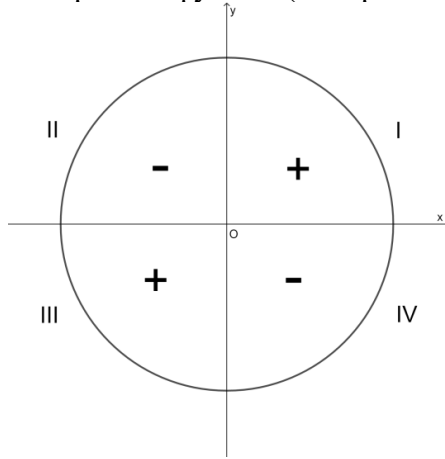


Рис. 1.9. Знаки функції тангенс

Функція зростає на проміжках: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Вертикальна асимптота $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Функція котангенс (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$$y = \operatorname{ctg}(x)$$

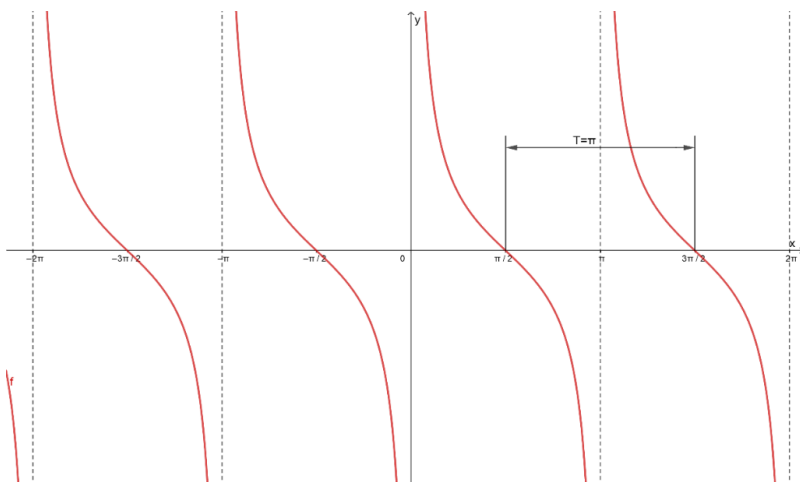


Рис. 1.10. Графік функції $y = \text{ctg}(x)$

Означення: $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Область визначення функції – множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто котангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі ОУ (див. рис. 1.10.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом π : $\text{ctg}(x + \pi k) = \text{ctg}x$, де $k \in \mathbb{Z}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю ОХ: $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0), k \in \mathbb{Z}$.

З віссю ОУ: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$\text{ctg}x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\text{ctg}x > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

$\text{ctg}x < 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.11.):

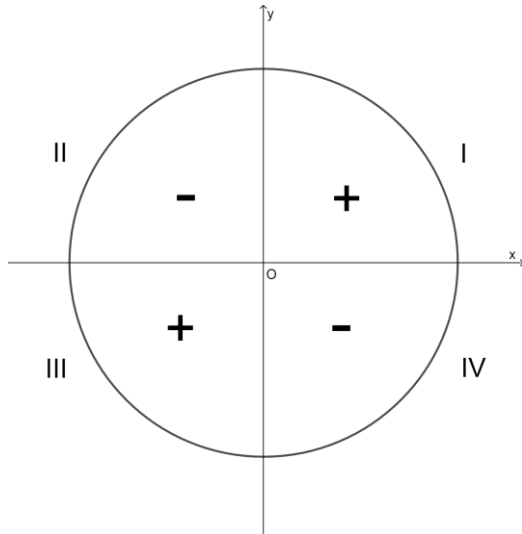


Рис. 1.11. Знаки функції котангенс
 Функція зростає на проміжках: $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Найбільшого і найменшого значень функція не має.
 Вертикальна асимптота $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.2. Обернені тригонометричні функції: означення, графіки та властивості

Арксинусом числа α називають кут або число з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$y = \arcsin x$ – функція, обернена до $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Запис $b = \arcsin a$ означає, що $b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin b = a$.

Зауважимо, що у деяких випадках не можна назвати точного значення $\arcsin a$. Наприклад, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, але для $\arcsin \frac{1}{5}$ можемо знайти тільки наближене значення.

Властивості функції:

- 1) область визначення $[-1; 1]$;

- 2) область значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 3) функція непарна, бо $[-1; 1]$ – симетрична відносно 0; $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Отже, графік $y = \arcsin x$ симетричний відносно початку координат;

- 4) функція не є періодичною;
- 5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю OX: $(0; 0)$,

З віссю OY: $(0; 0)$;

6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на відрізку $[-1; 1]$;

7) проміжки знакосталості:

$\arcsin x > 0$ при $x \in (0; 1]$,

$\arcsin x < 0$ при $x \in [-1; 0)$;

8) найбільше значення $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, найменше $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.12.):

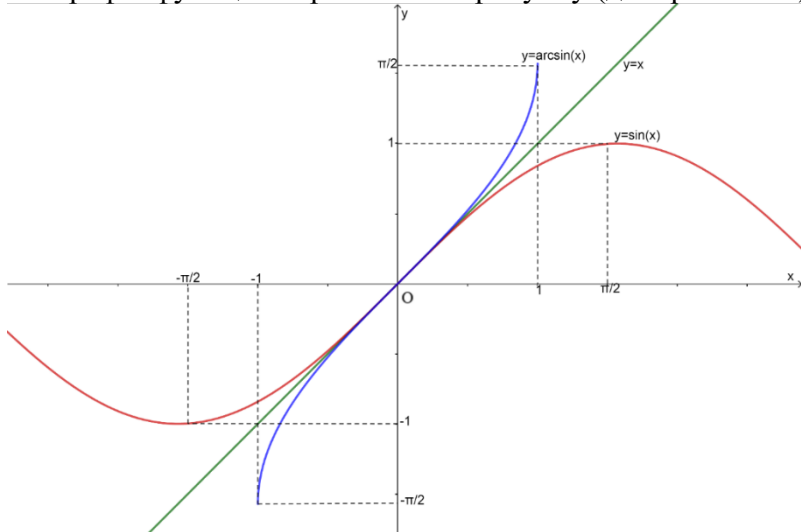


Рис. 1.12. Графік функції арксинус

Звернемо увагу на рівності:

$$\arcsin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1.$$

Арккосинусом числа α називають кут або число з відрізка $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$y = \arccos x$ – функція, обернена до $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Запис $b = \arccos a$ означає, що $b \in [0; \pi]$; $\cos b = a$.

Властивості функції:

- 1) область визначення $[-1; 1]$;
- 2) область значень $[0; \pi]$;
- 3) функція не є ні парною, ні непарною;
- 4) функція не є періодичною;
- 5) координати точок перетину графіка функції з осями

координат:

З віссю ОХ: $(1; 0)$;

З віссю ОУ: $(0; \frac{\pi}{2})$;

6) функція спадає від π до 0 на відрізку $[-1; 1]$;

7) проміжки знакосталості:

$\arccos x > 0$ на всій області визначення;

8) найбільше значення $-\pi$, якщо $x = -1$, найменше $-\pi$, якщо $x = 1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції $y = \arccos x$ зображений на рисунку (див. рис. 1.13.):

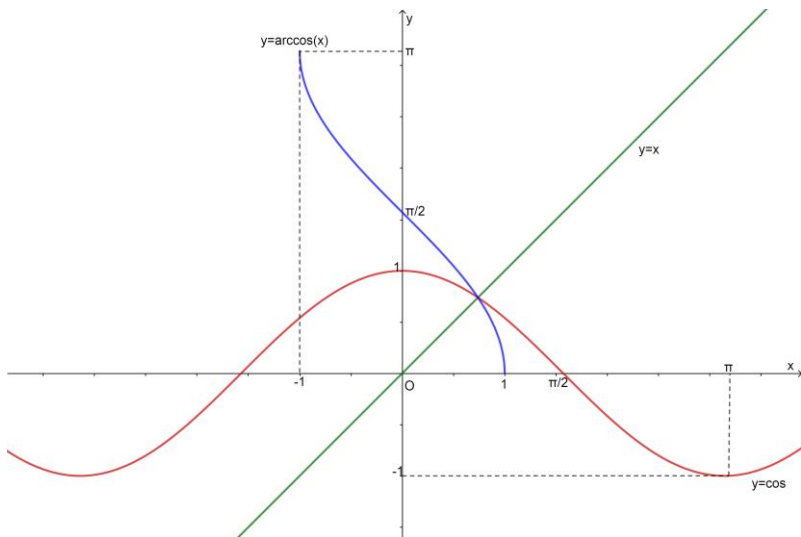


Рис. 1.13. Графік функції арккосинус

Звернемо увагу на рівності:

$$\arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1.$$

Зауважимо: $y = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Арктангенсом числа α називають кут або число з відрізка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$y = \arctg x$ – функція, обернена до $y = tg x$, якщо $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Запис $b = \arctg a$ означає, що $b \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $tgb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;

2) область значень $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$;

3) функція непарна, симетрична відносно 0;

$$\arctg(-x) = -\arctg x.$$

Отже, графік симетричний відносно початку координат;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: $(0; 0)$,

З віссю ОУ: $(0; 0)$;

6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) проміжки знакосталості:

$\operatorname{arctg} x > 0$ при $x > 0$,

$\operatorname{arctg} x < 0$ при $x < 0$;

8) функція не набуває найбільшого і найменшого значень;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.14.):

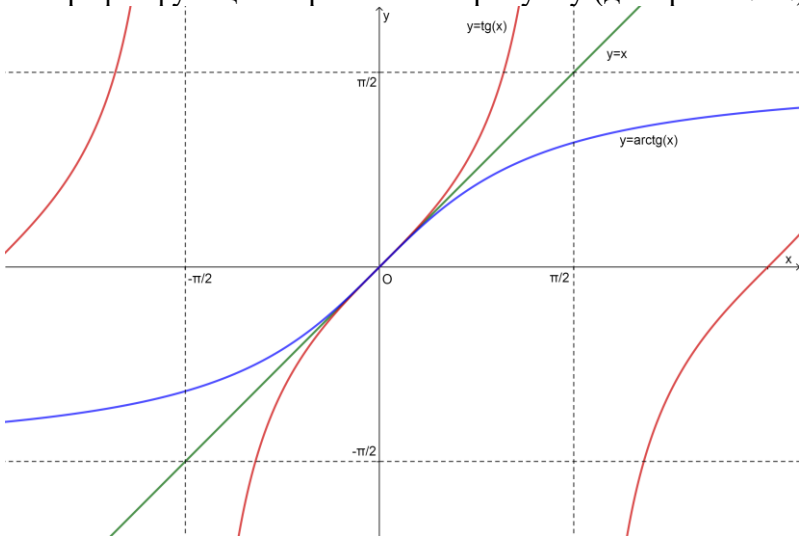


Рис. 1.14. Графік функції арктангенса

Звернемо увагу на рівності:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Арккотангенсом числа α називають кут або число з відрізка $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$y = \text{arctg}x$ – функція, обернена до $y = \text{ctg}x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Запис $b = \text{arctg}a$ означає, що $b \in (0; \pi)$; $\text{ctg}b = a$.

Властивості функції:

- 1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;
- 2) область значень $(0; \pi)$;
- 3) функція не є ні парною, ні непарною;
- 4) функція не є періодичною;
- 5) координати точок перетину графіка функції з осями

координат:

З віссю ОХ: немає;

З віссю ОУ: $(0; \frac{\pi}{2})$;

6) функція спадає від π до 0 на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) додатна на всій області визначення;

8) функція не набуває найбільшого і найменшого

значень.;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.15.):

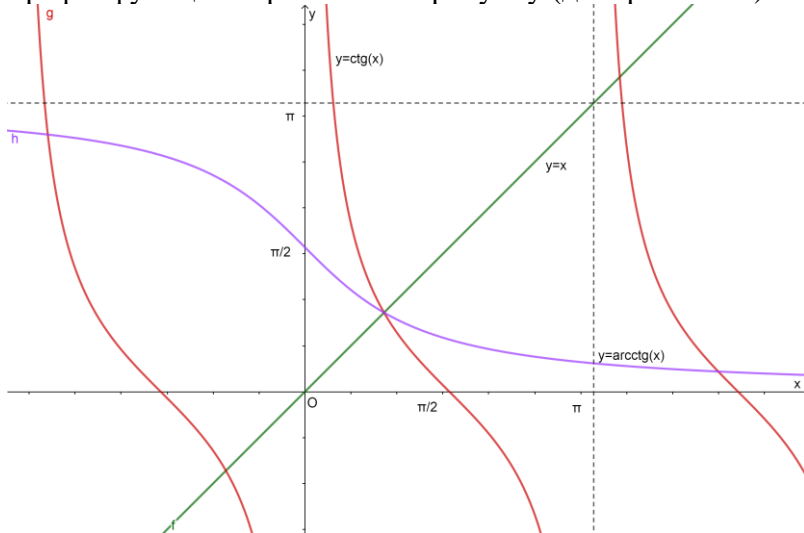


Рис. 1.15. Графік функції арккотангенса

Звернемо увагу на рівності:

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x) = x, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x) = x, -\infty \leq x \leq \infty.$$

$$\text{Зауважимо: } y = \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}x, -\infty \leq x \leq \infty.$$

2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

2.1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції.

Розв'язати тригонометричне рівняння – означає знайти множину значень невідомого, що задовольняють його (Нелін проф. рівень, 2018).

Найпростіші тригонометричні рівняння (Нелін проф. рівень, 2018).

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де x – невідома величина, a – довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Рівняння $\sin x = a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

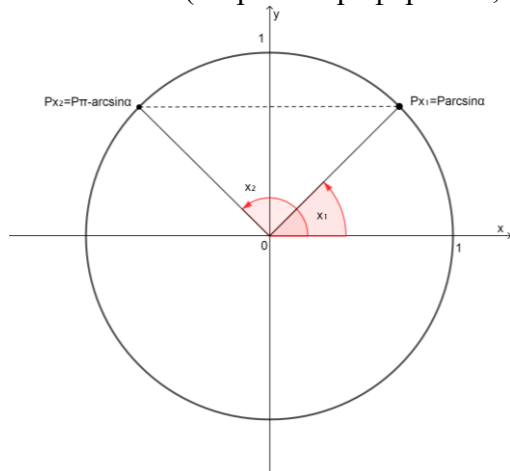


Рис. 2.1. Рівняння $\sin x = a$ на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1$, $\sin x = a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{arcsin} a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = \pi - \operatorname{arcsin} a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k \operatorname{arcsin} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|\sin x| \leq 1$.
Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $\sin x = -1$.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 0$, $\sin x = 0$.

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 1$, $\sin x = 1$.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження:

1) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

2) Якщо $0 < a < 1$, то рівняння $\sin x = -a$ має таку

множину розв'язків:

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рівняння $\cos x = a$ (Бурда, 2018).

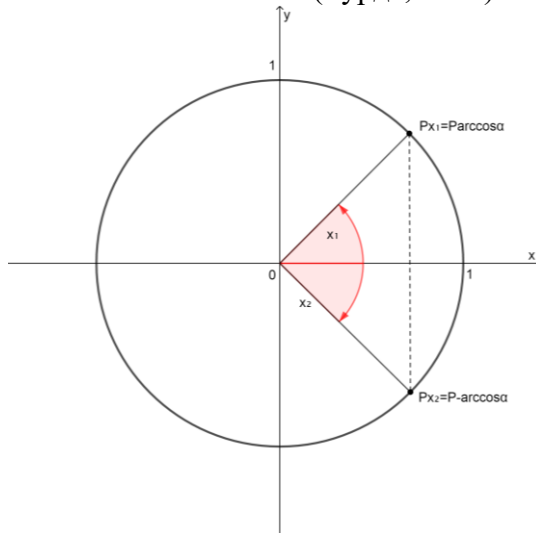


Рис. 2.2. Рівняння $\cos x = a$. на одиничному колі

$$\text{Якщо } |a| \leq 1, \cos x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \arccos a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|\cos x| \leq 1$.
Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $\cos x = -1$.

$$x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 0$, $\cos x = 0$.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $a = 1$, $\cos x = 1$.

$$x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

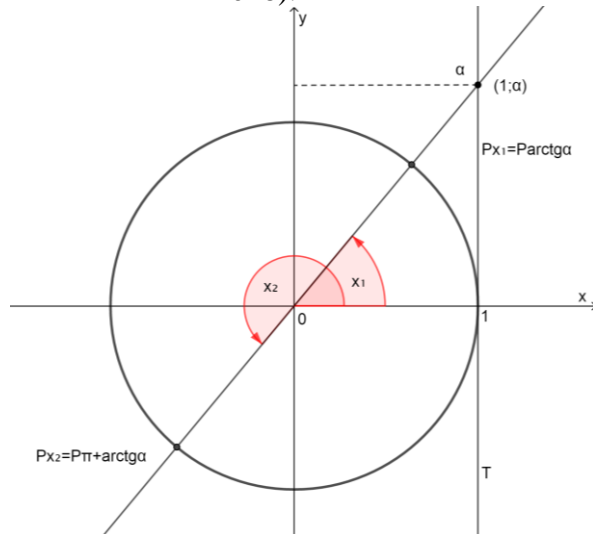


Рис. 2.3. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут α такий, що $\operatorname{tg} \alpha = a$. Це кут $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

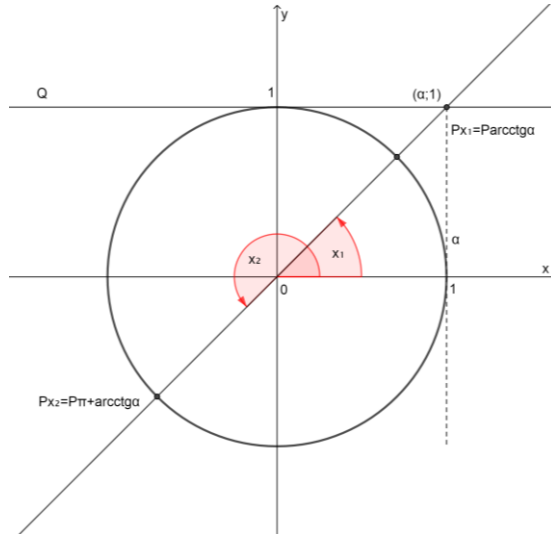


Рис. 2.4. Рівняння $\text{ctg} x = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(0; \pi)$ існує тільки один кут a такий, що $\text{ctg} x = a$. Це кут $\alpha = \text{arcctg} a$. Враховуючи періодичність функції $y = \text{ctg} x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\text{ctg} x = a$: $x = \text{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Окремі випадки

Якщо $\text{tg} x = 0$, то

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $\text{ctg} x = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження:

- 1) $\text{arctg}(-\alpha) = -\text{arctg} \alpha$,
- 2) $\text{arcctg}(-\alpha) = \pi - \text{arcctg} \alpha$.

2.2. Приклади розв'язування тригонометричних рівнянь

I. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Приклад 2.1. $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in Z$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z; \frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Відповідь. } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Приклад 2.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; 3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; 3x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

$$\text{Відповідь. } x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Приклад 2.3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою коренів рівняння $\sin a = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z; t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 2.4. $\sin \frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{x} &= -\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z; \\ \frac{2\pi}{x} &= (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z; \\ x &= \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z; x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z$.

Приклад 2.5. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin \frac{\pi}{3}\cos x + \cos \frac{\pi}{3}\sin x = 2.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.6. $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = \pm \arccos(b) + 2\pi n, n \in Z$, можемо записати:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Приклад 2.7. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z; \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z.$

Приклад 2.8. $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.$

Отримаємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \arccos 0 + \pi n, n \in Z.$$

Тоді:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; 7x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n, n \in Z;$$

$$7x = \pm \frac{7\pi}{10} + \pi n, n \in Z; x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$

Приклад 2.9. $\cos \pi x^2 = 1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\pi x^2 = 2\pi n, n \in Z; x^2 = 2n, n \in Z.$$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in N \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Приклад 2.10. $tg \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + nk, k \in Z; \frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + nk, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z$.

Приклад 2.11. $ctg(\frac{2\pi}{3} - x) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$ctg\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1; x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arctg}1 + nk, k \in Z;$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + nk, k \in Z; x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z$.

Приклад 2.12. $tg 2x = 5$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$2x = \operatorname{arctg}5 + \pi k, k \in Z; x = 0,5\operatorname{arctg}5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Відповідь. $0,5\operatorname{arctg}5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Приклад 2.13. $ctg x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою $x = \operatorname{arctg}a + \pi k, k \in Z$. маємо:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

II. Спосіб розкладання на множники

Приклад 2.14. $\sin 2x - \cos x = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\sin 2x - \cos x = 0; 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0; \cos x(2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.15. $\cos^2 2x - \cos 2x = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\cos^2 2x - \cos 2x = 0; \cos 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x = 1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = 2\pi k, k \in Z; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.16. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z.$

$$\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x; \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0; \operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0; \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi t, t \in Z; \end{array} \right.$$

Об'єднавши множини розв'язки другого і третього рівнянь сукупності, остаточно отримаємо розв'язки вихідного рівняння:

$$x_1 = \pi n, n \in Z; x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z.$$

Відповідь. $\pi n, n \in Z; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z.$

III. Спосіб розв'язання однорідних рівнянь

Приклад 2.17. $\sin x - \cos x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $\cos x = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $\sin x = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$, отримаємо:

$$tgx - 1 = 0; tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.18. $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Значення x , при яких $\cos x = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $\cos x = 0$, то мала б виконуватись рівність $3\sin^2 x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2 x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 24 = 25; \sqrt{D} = 5; a_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}; a_2 = \frac{-1 - 5}{6} = -1.$$

Повернемося до заміни:

$$1) \quad tgx = \frac{2}{3}; x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$2) \quad tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.19. $\sin^3 x = \cos x$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Помножимо праву частину на рівняння на тригонометричну одиницю $\sin^2 x + \cos^2 x$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x); \sin^3 x = \cos x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x; \\ \sin^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x - \cos^3 x &= 0. \end{aligned}$$

Дістали однорідне рівняння третього степеня, відносно $\sin x$ і $\cos x$. У випадку $\cos x = 0$, розв'язків, очевидно, немає.

Поділивши обидві частини останнього на $\cos^3 x \neq 0$, отримаємо:

$$tg^3 x - tg^2 x - 1 = 0.$$

Нехай $tg x = y$, тоді маємо:

$$y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи штучний спосіб:

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 + y^3 - 1 &= 0; y^2(y - 1) + (y - 1) \cdot (y^2 + y + 1) = 0; \\ (y - 1) \cdot (2y^2 + y + 1) &= 0; y - 1 = 0; y = 1; \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 2y^2 + y + 1 &= 0; \\ D &= 1 - 8 = -7 < 0. \end{aligned}$$

Отже, $2y^2 + y + 1 > 0$ для будь-якого $y \in R$. Рівняння дійсних коренів немає.

Повернемося до заміни:

$$tg x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.20. $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x , при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0; 7tg^2 x - 8tgx - 15 = 0.$$

Звідси

$$\begin{cases} tgx = 1, \\ tgx = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg \frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Відповідь.

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg \frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

IV. Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

Приклад 2.21. $\cos^2 x - 5\cos x = 6$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\cos^2 x - 5\cos x - 6 = 0.$$

Нехай $\cos x = t$, де $|t| \leq 1$, тоді маємо:

$$t^2 - 5t - 6 = 0; t_1 = -1, t_2 = 6.$$

Корінь $t_2 = 6$ не задовольняє умову $|t| \leq 1$.

Повернемося до заміни:

$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.22. $tgx - 2ctgx + 1 = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$tgx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} + 1 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$a - \frac{2}{a} + 1 = 0; \frac{a^2 + a - 2}{a} = 0; \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} a = -2, \\ a = 1, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

1) $tgx = -2; x = -arctg2 + \pi n, n \in Z;$

2) $tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Відповідь. 1) $x = -arctg2 + \pi n, n \in Z;$

2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.23. $2\sin^2x + \cos4x - 2 = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Можна записати: $1 - \cos2x + 2\cos^22x - 1 - 2 = 0.$

Звідси $2\cos^22x - \cos2x - 2 = 0.$ Зробимо заміну $\cos2x = t.$ Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0.$ Розв'язавши його, отримаємо:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Оскільки $\frac{1 + \sqrt{17}}{4} > 1,$ а $\frac{1 - \sqrt{17}}{4} \in [-1; 1],$ то початкове рівняння рівносильне рівнянню $\cos2x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4},$ звідси

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \pi n, n \in Z.$

Приклад 2.24. $\sin x - 3\cos2x = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $\cos2x = 1 - 2\sin^2x,$ перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2x) - 2 = 0; 6\sin^2x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t.$ Отримаємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0.$

Звідси $t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}.$

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

V. Перетворення рівняння за допомогою тригонометричних формул

1. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад 2.25. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$ (Резуєнко, 2011).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) &= 1; \\ 2\sin \frac{15^\circ + x + 45^\circ - x}{2} \cdot \cos \frac{15^\circ + x - 45^\circ + x}{2} &= 1; \\ 2\sin 30^\circ \cdot \cos(x - 15^\circ) &= 1; 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15^\circ) = 1; \cos(x - 15^\circ) \\ &= 1; \end{aligned}$$

$$x - 15^\circ = 360^\circ \cdot n, n \in Z; x = 15^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in Z.$$

Відповідь. $15^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in Z$.

Приклад 2.26. $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin 7x - \sin x &= \cos 4x; 2\sin \frac{7x - x}{2} \cdot \cos \frac{7x + x}{2} = \cos 4x; \\ 2\sin 3x \cdot \cos 4x - \cos 4x &= 0; \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0; \\ \left[\cos 4x = 0, \left[4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \left[x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sin 3x = \frac{1}{2}; \left[3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \left[3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in Z. \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in Z. \end{cases}$

2. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад 2.27. $\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{4}; \frac{1 + \cos 3x}{2} = \frac{1}{4}; 1 + \cos 3x = \frac{1}{2}; \cos 3x = -\frac{1}{2};$$

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z; 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.28. $0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

$$0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0;$$

$$0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 0;$$

$$2\cos 6x \cdot \cos x - \cos 4x - \cos 6x$$

$$= 0; 2\cos 6x \cdot \cos x - 2\cos 5x \cdot \cos(-x) = 0;$$

$$2\cos 6x \cdot \cos x - 2\cos 5x \cdot \cos x = 0; 2\cos(\cos 6x - \cos 5x) = 0;$$

$$-4\cos x \cdot \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, & \left[x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \right. \\ \sin \frac{11x}{2} = 0, & \left[\frac{11x}{2} = \pi k, \right. \\ \sin \frac{x}{2} = 0; & \left[\frac{x}{2} = \pi t; \right. \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z, \\ x = 2\pi t, t \in Z. \end{cases}$$

Оскільки корені третього рівняння сукупності містяться серед коренів другого рівняння, то остаточно розв'язком даного рівняння будуть групи коренів:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x_2 = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \frac{2\pi k}{11}, k \in Z$.

3. Рівняння, що розв'язуються за допомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Приклад 2.29. $\sin 4x = \sin 3x$ (Гайштут, 1997).

Розв'язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\begin{cases} 4x + 3x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ 4x - 3x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \begin{cases} 7x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

Приклад 2.30. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$ (Резуєнко, 2011).

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $\operatorname{tg} 3x$.

Це можливо, бо з умови слідує, що $\operatorname{tg} 3x \neq 0$.

Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}; \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{ctg} 3x; \operatorname{tg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) (*) \end{aligned}$$

На основі умови рівності тангенсів двох кутів, отримаємо:

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi k, k \in Z;$$

$$8x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z.$$

При кожному значенні x з цієї множини розв'язків кожна з частин рівняння (*) існує.

Відповідь. $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z$.

4. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад 2.31. $\sin 6x \cdot \sin x - \cos 6x \cdot \cos x = 0$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin 6x \cdot \sin x - \cos 6x \cdot \cos x &= 0; -(\cos 6x \cdot \cos x - \sin 6x \cdot \sin x) \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$-\cos 7x = 0; 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

$$\text{Приклад 2.32. } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

(Гайштут, 1997).

Розв'язання.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$2\cos x + 2\sin x = 0; \cos x + \sin x = 0.$$

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $\cos x = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $\sin x = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$, отримаємо:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0; \operatorname{tg} x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

5. Рівняння, що розв'язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад 2.33. $\sin 2x \cdot \sin 6x = \sin 3x \cdot \sin 5x$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x); \cos 4x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x;$$

$$\cos 4x - \cos 2x = 0; -2 \cdot \sin 3x \sin x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin x = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x = \pi n, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Оскільки множина розв'язків другого рівняння сукупності включається в множину розв'язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.34. $8\sin 5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = 1$
(Резуєнко, 2011).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin 5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) &= \frac{1}{8}; \sin 5x \cdot \frac{1}{2}(\cos 10x - \cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{8}; \\ \sin 5x \cdot (\cos 10x + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{4}; 2\sin 5x \cdot \cos 10x + \sin 5x = \frac{1}{2}; \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin 15x - \sin 5x) + \sin 5x &= \frac{1}{2}; \sin 15x = \frac{1}{2}; \\ 15x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; x &= (-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z. \end{aligned}$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z$.

VI. Введення допоміжного кута

Приклад 2.35. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, a^2 + b^2 = 4, c^2 = 1, a^2 + b^2 > c^2.$$

Отже, рівняння має розв'язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ за дужки і отримаємо:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 1; \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}.$$

Використаємо заміну $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$.

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

VII. Метод раціоналізації

Приклад 2.34. $5\sin x - \cos x = 5$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях x . Здійснюючи заміну за допомогою формул 81, 82, отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = 5;$$

яке визначено при $x \neq \pi(2n + 1), n \in Z$, тобто при переході від $\sin x$ і $\cos x$ до $tg \frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x = \pi(2n + 1), n \in Z$.

Нехай $tg \frac{x}{2} = t$, тоді отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 5; 10t - 1 + t^2 = 5 + 5t^2; 4t^2 - 10t + 6 = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0; t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[tg \frac{x}{2} = 1, \left[\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \left[x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left[tg \frac{x}{2} = \frac{3}{2}; \left[\frac{x}{2} = \arctg \frac{3}{2} + \pi k; \left[x = 2\arctg \frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z. \right. \right. \right. \right. \right.$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n + 1), n \in Z$.

Так як 2π – період $\sin x$ і $\cos x$, то достатньо перевірити значення $x = \pi$:

$$5\sin \pi - \cos \pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n + 1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; 2\arctg \frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

VIII. Зведення до однорідного відносно $\sin x$ та $\cos x$ ($\sin^2 x$ та $\cos^2 x$).

Приклад 2.35. $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 4\sin^2 x - 2\sin x \cos x \\ &= 3(\cos^2 x + \sin^2 x), \sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Так як $\cos x = 0$, то поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо

$$tg^2 x - 2tg x - 3 = 0.$$

Нехай $tg x = y$, тоді

$$y^2 - 2y - 3 = 0, y_1 = 3, y_2 = -1.$$

Повернемося до заміни:

$$tg x = 3, x = \arctg 3 + \pi n, n \in Z,$$

$$tg x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\arctg 3 + \pi n, n \in Z, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

IX. Піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Приклад 2.36. $\sin x - \cos x = 0$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0, \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$1 - \sin 2x = 0, \sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n$$

$$\in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

X. Метод заміни змінних

Приклад 2.37. $\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \cos x$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\sin x + \cos x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 = 0.$$

Нехай $\sin x + \cos x = t$, де $|t| \leq \sqrt{2}$, тоді

$$2\sin x \cdot \cos x = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0; t^2 - t = 0; t^2(t - 1) = 0; t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, & \left[\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0, \right. \\ \sin x + \cos x = 1; & \left. \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1; \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0, & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array} \right. \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.38. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin^4 2x + \cos^4 2x &= \sin 2x \cdot \cos 2x; \\ (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x &= \sin 2x \cdot \cos 2x. \end{aligned}$$

Нехай $\sin 2x \cdot \cos 2x = t$, Зрозуміло, що $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Отримаємо:

$$1 - 2t^2 = t; 2t^2 + t - 1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9; \sqrt{D} = 3, t_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1.$$

Корінь $t_2 = -1$ не задовольняє умову $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Отже, повернемося до заміни:

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot \cos 2x &= \frac{1}{2}; \sin 4x = 1; 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

ХІ. Методи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь

1. Дробово-раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад 2.39. $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $\cos x \neq 0$; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$\begin{aligned} \sin^4 x - 1 &= \cos^4 x; \sin^4 x - \cos^4 x \\ &= 1; (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1; \\ -(\cos^2 x - \sin^2 x) &= 1; \cos 2x = -1; 2x = \pi + 2\pi k, k \in Z; x \\ &= \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{aligned}$$

Оскільки множина розв'язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

2. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад 2.40. $4 \arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$4 \arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0; \arctg(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$$x^2 - 3x - 3 = 1; x^2 - 3x - 4 = 0; x_1 = -1; x_2 = 4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

Приклад 2.41. $\arcsin 4x + \arcsin(1 - 4x) = \frac{\pi}{3}$ (Гайштут, 1997).

Розв'язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1 - 4x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin 4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1 - 4x = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos(\arcsin 4x) - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\arcsin 4x);$$

$$1 - 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - 16x^2} - \frac{1}{2} \cdot 4x; 2 - 4x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - 16x^2};$$

$$4 - 16x + 16x^2 = 3 - 48x^2; 64x^2 - 16x + 1 = 0; (8x - 1)^2 = 0; x = 0,125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x = 0,125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. 0,125

3. Розв'язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад 2.42. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$ (Гайштут, 1997).

Розв'язання.

Оскільки $|\cos 3x| \leq 1$ і $|\cos \frac{5x}{2}| \leq 1$, то

$$\left| \cos 3x + \cos \frac{5x}{2} \right| \leq 2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos \frac{5x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \frac{4\pi k}{5}, k \in Z. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$;

$$5\pi n = 6\pi k; 5n = 6k.$$

Маємо: $n = 6t; k = 5t, t \in Z$.

Отже, $x = 4\pi t, t \in Z$.

Відповідь. $4\pi t, t \in Z$.

Приклад 2.43. $\sin^n x + \cos^n x = 1, n \in Z$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то рівняння зводиться до вигляду $\sin x + \cos x = 1$ (IX тип)

Якщо $n = 2$ маємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, де x – будь-яке дійсне число.

При $n \geq 3$, якщо $|\sin x| \neq 1$ і $|\cos x| \neq 1$, маємо

$$\begin{cases} \sin^n x < \sin^2 x, \\ \cos^n x < \cos^2 x, \end{cases}$$

бо показникова функція з основою, меншою за одиницю, спадна. Додавши почлено отримані нерівності, знайдемо, що:

$\sin^n x + \cos^n x < 1, n \geq 3$, при всіх x , для яких $|\sin x| \neq 1$ і $|\cos x| \neq 1$. Таким чином:

а) Якщо n – непарне число, то можливі випадки

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

з яких відповідно отримаємо розв'язки даного рівняння $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ або $x = 2\pi n, n \in Z$.

б) Якщо n – парне число, то можливі випадки

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{cases}$$

з яких отримуємо розв'язки даного рівняння у вигляді $x = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$.

4. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами

Приклад 2.44. $\cos 3x = m \cdot \cos x$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу 20, отримаємо:

$$4\cos^3 x - 3\cos x - m\cos x = 0; \cos x \cdot (4\cos^2 x - 3 - m) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ або } 4\cos^2 x - 3 - m = 0.$$

$$1) \quad \cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$2) \quad 4\cos^2 x - 3 - m = 0; 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 - m =$$

0;

$$2 + 2\cos 2x - 3 - m = 0; 2\cos 2x = m + 1; \cos 2x = \frac{m + 1}{2}.$$

$$2x = \pm \arccos \frac{m+1}{2} + 2\pi n, n \in Z, \text{ якщо } -1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1;$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z, \text{ якщо } -3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z, \text{ якщо } -3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$

Приклад 2.45. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язати.

Здійснюючи перетворення виразу, що стоїть у лівій частині рівняння:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3(1 - \cos 4x)}{8} = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}. \end{aligned}$$

Отже, $\frac{5+3\cos 4x}{8} = a;$

$$3\cos 4x = 8a - 5;$$

$$\cos 4x = \frac{8a - 5}{3}.$$

Це рівняння має розв'язки:

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a - 5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

якщо $-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1$, тобто $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

При інших значеннях параметра a розв'язки немає.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$, то розв'язків немає; якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, то $x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

ХІІ. Розв'язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Приклад 2.46. $\sin x = 1 - x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = 1 - x$ (див. рис. 2.5.).

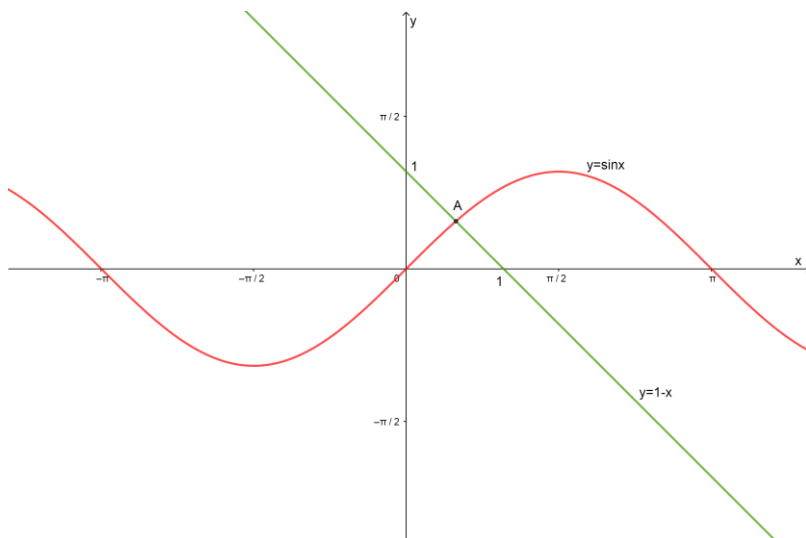


Рис. 2.5. Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = 1 - x$

Ці графіки перетинаються в одній точці A . Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0,5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0,5 \rightarrow \sin x \approx 0,4794$, $1 - 0,5 = 0,5$. Отже, $\sin x < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $\sin x = 1 - x$ буде більший ніж $0,5$.

Перевіримо значення $x = 0,6$. Маємо: $\sin x \approx 0,5446$, $1 - x = 0,4$.

Отже, $\sin x > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь x_0 повинен бути менший, ніж $0,6$.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0,5; 0,6]$. Тому з точністю до $0,1$:

$x_0 \approx 0,5$ (з недостатчею), $x_0 \approx 0,6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0,5$

ХІІІ. Зведення рівняння до рівносильної системи

Приклад 2.47. $\frac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x = 0, \\ 1 - \cos x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2\sin x(\sin x + 1,5) = 0, \\ \cos x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -1,5, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками системи (див. рис. 2.6.). Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$.

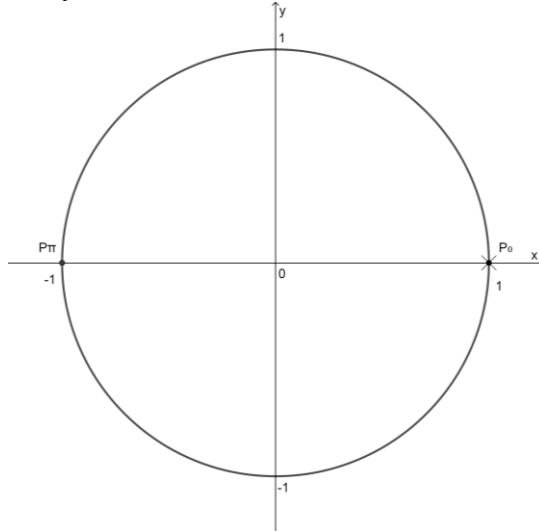


Рис. 2.6. Одиничне коло з розв'язками системи
Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.
Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

2.3. Завдання для самостійного опрацювання

Розв'язати рівняння:

1. $\sin^2 x + 4 \cos x = 2,75$.
2. $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$.
3. $1 + \cos x - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$.
4. $\sin 2x - \sin x = 0$.
5. $\cos^2 x - 2 \cos x \sin x = 0$.
6. $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$.
7. $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$.

$$8. 4\sin^2x - \sin 2x = 3.$$

$$9. \cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}.$$

$$10. \cos 2x \sin 4x = \cos x \sin 5x.$$

$$11. 3\sin x + 4\cos x = 5.$$

$$12. 8\cos x + 15\sin x = 17.$$

$$13. \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0.$$

$$14. \sin x - \cos x = 2x - \frac{1}{2}.$$

$$15. 4x^2 - 4x\sin(xy) + 1 = 0.$$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

3.1. Найпростіші тригонометричні нерівності

Нерівності, які містять зміну під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними.

Наприклад, $\cos x \leq \frac{1}{3}$; $5\sin^2 x + 3\cos x > 6$ тощо.

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a$, $\cos x <> a$, $tg x <> a$, $ctg x <> a$.

1. Нерівності $\sin x > a$; $\sin x < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

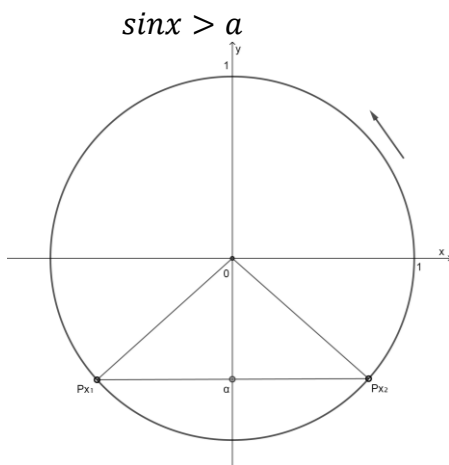


Рис. 3.1. Нерівність $\sin x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arcsin a, x_2 = \pi - \arcsin a, x_1 < x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

Розглянемо $\sin x < a$.

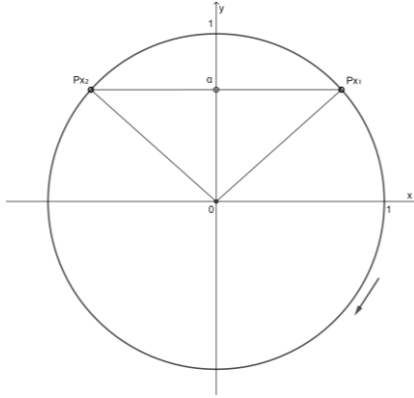


Рис. 3.2. Нерівність $\sin x < a$ на одиничному колі
 $x_1 = \arcsin a, x_2 = -\pi - \arcsin a, x_1 > x_2$.

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a \geq 1$, то $x \in \mathbb{R}$.

2. Нерівності $\cos x < a; \cos x > a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розглянемо $\cos x < a$

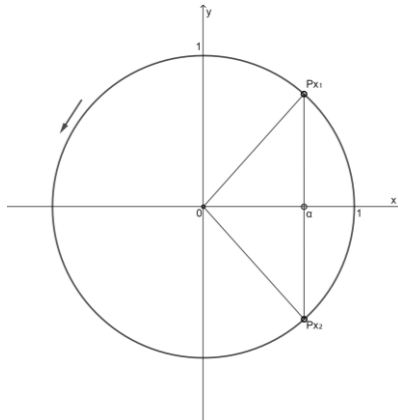


Рис. 3.3. Нерівність $\cos x < a$ на одиничному колі
 $x_1 = \arccos a, x_2 = 2\pi - \arccos a, x_1 < x_2$.

Якщо $a \leq -1$, то розв'язків немає. Якщо $-1 < a \leq 1$, то $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Якщо $a > 1$, то $x \in \mathbb{R}$.

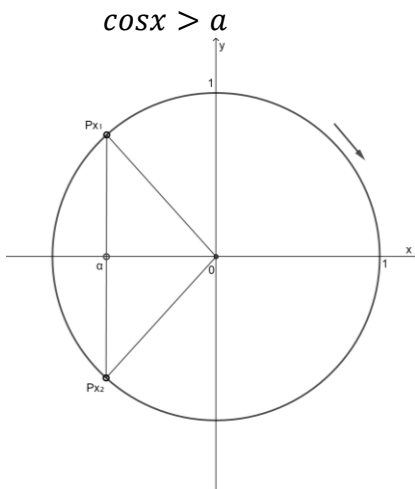


Рис. 3.4. Нерівність $\cos x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \arccos a, x_2 = -\arccos a, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in \mathbb{R}$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

3. Нерівність $\operatorname{tg} x > a; \operatorname{tg} x < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розглянемо $\operatorname{tg} x > a$.

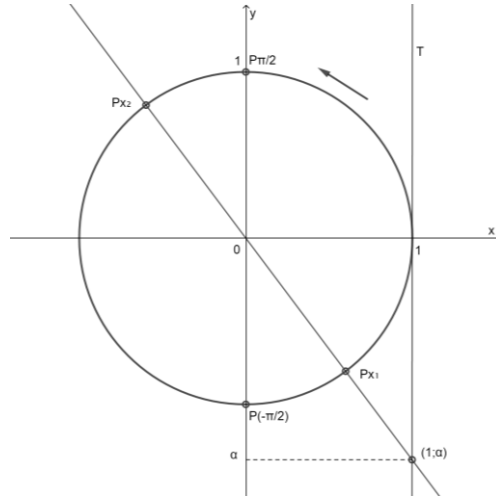


Рис. 3.5. Нерівність $\operatorname{tg} x > a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arctg} a, x_1 < \frac{\pi}{2}$$

Множина розв'язків: $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

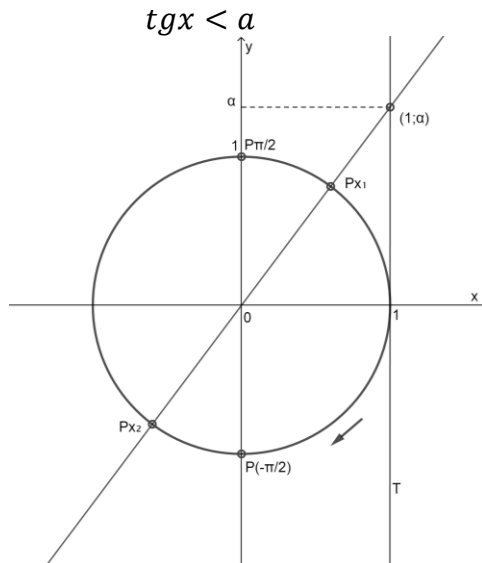


Рис. 3.6. Нерівність $\operatorname{tg} x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arctg} a, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$.

4. Нерівність $\operatorname{ctg} x > a; \operatorname{ctg} x < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

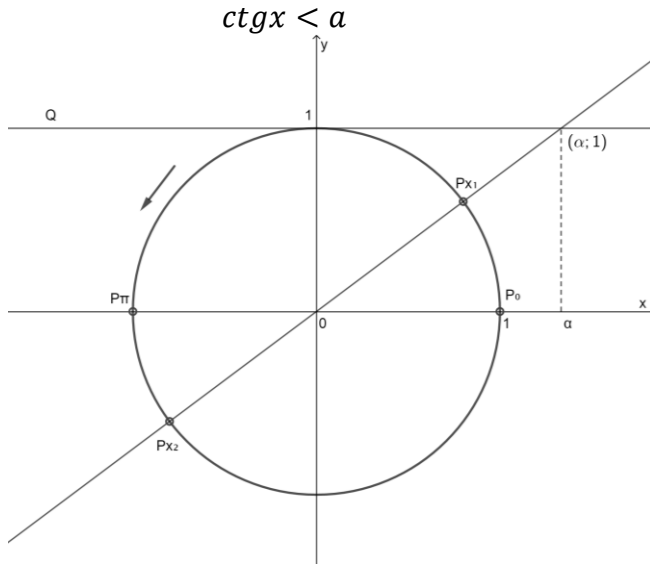


Рис. 3.7. Нерівність $\operatorname{ctg} x < a$ на одиничному колі

$$x_1 = \operatorname{arcctg} a, x_1 < \pi.$$

Множина розв'язків: $\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$.

$$\operatorname{ctg} x > a$$

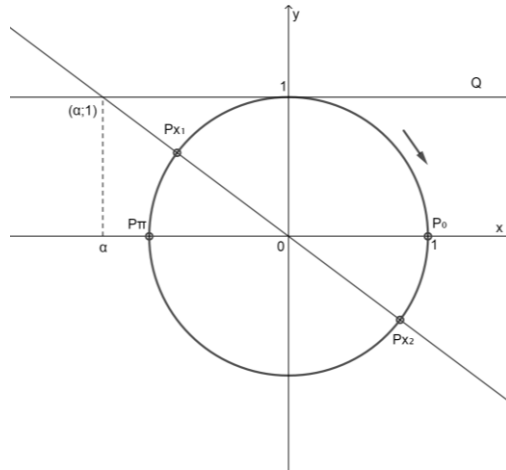


Рис. 3.8. Нерівність $\operatorname{ctgx} > a$ на одиничному колі
 $x_1 = \operatorname{arccctg} a, x_1 > 0$.

Множина розв'язків: $\pi n < x < \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.2. Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей

I. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Приклад 3.1. $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left| \frac{\sqrt{2}}{3} \right| \leq 1$, отже розв'язок нерівності існує.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\pi - \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{\sqrt{2}}{3}$, другої дуги – меншу (рис. 3.9.).

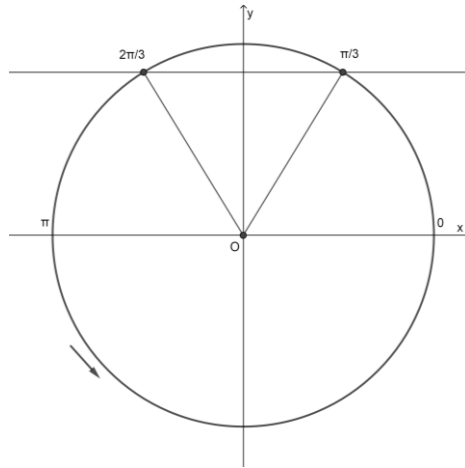


Рис. 3.9. Одиничне коло з прямою $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 3.2. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\arccos \frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-\arccos \frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу (рис. 3.10.).

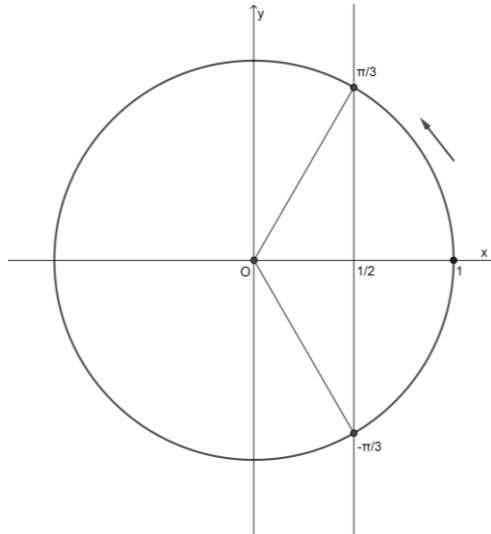


Рис. 3.10. Одиначне коло з прямою $x = \frac{1}{2}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 3.3. $\operatorname{tg} x \geq 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Враховуючи, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z},$$

отримаємо:

$$\operatorname{arctg} 2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\operatorname{arctg} 2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

II. Використання рівносильних перетворень, зокрема зведення до алгебраїчної нерівності за схемою: 1) до одного аргумента; 2) до однієї функції; 3) заміна змінної

Приклад 3.4. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз, 2018).

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис. 3.11.)

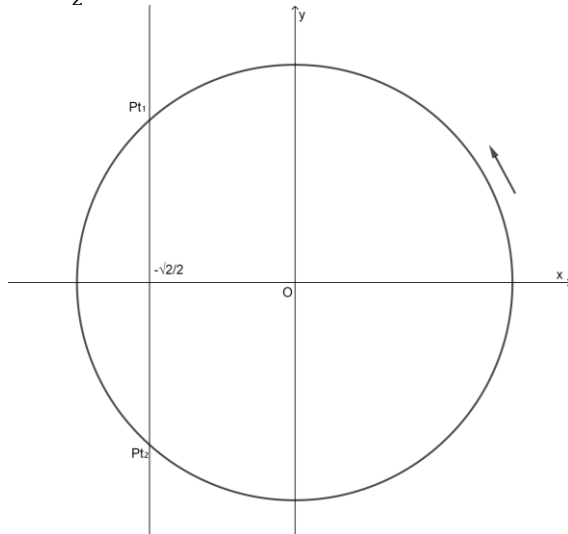


Рис. 3.11. Одиничне коло з множиною точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

Запишемо умову, за якої точка t належить дузі P_1P_2 :

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3.5. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < \sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис. 3.12.).

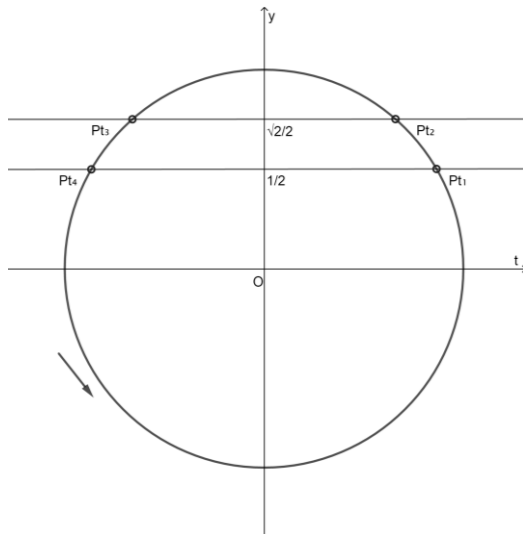


Рис. 3.12. Одиничне коло з множиною точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення t_1, t_2, t_3, t_4 , здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2, t_3 < t_4$.

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; t_3 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно x : $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

III. За допомогою тригонометричного кола

Приклад 3.6. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис. 3.13.).

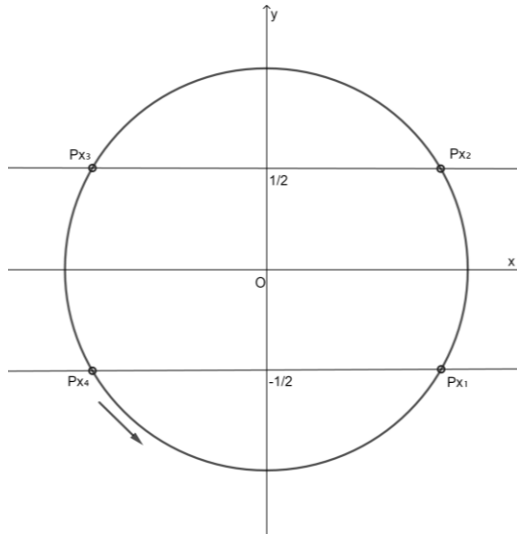


Рис. 3.13. Одиначне коло з множиною точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$

Знайдемо значення x_1, x_2, x_3, x_4 , виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2, x_3 < x_4, x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}; x_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; x_3 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}; x_4 = \pi + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

IV. Використання методу інтервалів

Приклад 3.7. Розв'язати нерівність $\sin 2x \cos 4x > 0$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання

1. ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Нулі функції $f(x) = \sin 2x \cos 4x$.

Розв'яжемо рівняння $\sin 2x \cos 4x = 0$

$$\sin 2x = 0, 2x = \pi k, k \in Z, x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$$

$$\cos 4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

3. Знаходимо точки розриву: функція неперервна на всій числовій осі.

4. Знаходимо період нерівності, який дорівнює періоду функції $f(x)$

$$T = \text{НСК}(T_1; T_2), \text{ де } T_1 = \pi, T_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $T = \pi$.

5. Визначаємо, які з коренів рівняння $\sin 2x \cos 4x = 0$ заходяться на відрізьку довжини в період π .

Якщо $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, то на відрізьку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = 0$ (при $k = 0$),

$x = \frac{\pi}{2}$ (при $k = 1$), $x = \pi$ (при $k = 2$).

Якщо $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$, то на відрізьку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = \frac{\pi}{8}$ (при $n = 0$),

$x = \frac{3\pi}{8}$ (при $n = 1$), $x = \frac{5\pi}{8}$ (при $n = 2$), $x = \frac{7\pi}{8}$ (при $n = 3$).

6. Позначаємо нулі функції $f(x)$ на відрізьку $[0; \pi)$ і визначаємо знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків (див. рис. 3.14.).

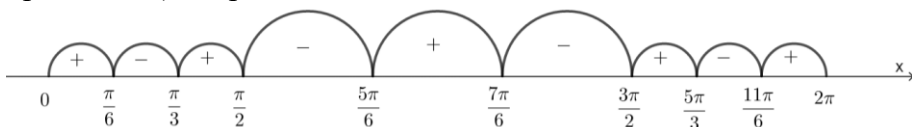


Рис. 3.14. Нулі функції на числовому промізьку.

7. У відповідь записуємо відповідь як об'єднання проміжків, на яких функція $f(x)$ набуває додатних значень, враховуючи період функції

$$x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k \right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k \right), k \in Z.$$

Відповідь. $\left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right), k \in Z$.

3.3. Завдання для самостійного опрацювання

Розв'язати нерівність:

1. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.
2. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.
3. $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$.
4. $\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. $\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{2 + \cos x} > 0$.
6. $\sin x + \cos 2x \geq 1$.
7. $\operatorname{tg} x < \operatorname{ctg} x$.
8. $\sin 3x - \sin 2x > 0$.
9. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x < 0$.
10. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.
11. $\sin^3 \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos^2 3x < 0$.
12. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x > 0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.
4. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія): підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
5. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Тригонометрія. Довідник-задачник. Київ: Магістр, 1997. 256 с.
6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. [Чинний від 23.11.2011]. Вид. офіц. Київ, 2011. 50 с.
7. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 1997. 304 с.
8. Збірник задач з математики з розв'язками / Геворкян Ю. Л. та ін. Харків: Прапор, 1999. 448 с.
9. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.
10. Істер О. С., Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ: Генеза, 2018. 384 с.: іл.
11. Капіносов А. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА. Профільний рівень і рівень стандарту. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 480 с.
12. Конет І. М. Тригонометрія: теорія і практика: посібник : Кам'янець-Подільський держ. ун-т. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. 243 с.

13. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2012. 412 с.: іл.

14. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.

15. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.

17. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі. Київ: Генеза, 2008. 352 с.

18. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.

19. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.

20. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 26 червня 2018. №696. URL: <https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Math.pdf> (дата звернення: 16.11.2021)

21. Резуненко В. О., Ярмак В. О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Харків: Основа, 2011. 94 с.

22. Сліпкань З. І Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

23. Смоляков А. Н., Севрюков П. Ф. Прийоми розв'язання тригонометричних рівнянь. Математика в школі. 2004. № 1. С. 24-26.

24. Токарева А. Тригонометричні нерівності. Математика. Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р.