Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання

М.В. Тимчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ
Індивідуальні довгострокові завдання

Рівне 2026

УДК 514.7:378.146.1(076.1)

Диференціальна геометрія. Індивідуальні довгострокові завдання. Навчально-методичний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач М. В. Тимчук. 2026. 36 с.

Укладач:

Тимчук М. В. – старший викладач кафедри математики та методики її навчання.

Рецензенти:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – к. п. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Петрівський Я. Б. – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 7 від 26 травня 2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 5 від «27» «травня» 2026 р.)

ЗМІСТ

1. Методичні вказівки та приклад розв'язування типового варіанту

Завдання 1. Для лінії $\vec{r} = (t^3,\ 1+t,\ t^2)$ в точці $t = 1$ написати рівняння всіх елементів тригранника Френе. В цій же точці знайти координатні вектори канонічного репера.

Розв'язання

Тригранник Френе складається із шести елементів: трьох прямих (дотичної, бінормалі та головної нормалі) та трьох площин (стичної, нормальної та спрямної), що ними попарно визначаються.

Перейдемо до параметричних рівнянь кривої:

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = 1 + t, \\ z = t^2 \end{cases}$$

та знайдемо

$$\begin{cases} x' = 3t^2, \\ y' = 1, \\ z' = 2t, \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = 6t, \\ y'' = 0, \\ z'' = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 2, \\ z_0 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0' = 3, \\ y_0' = 1, \\ z_0' = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0'' = 6, \\ y_0'' = 0, \\ z_0'' = 2, \end{cases}$$

$$[\vec{r}_0', \vec{r}_0''] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k} - 6\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k},$$

$$[\vec{r}_0', \vec{r}_0''] = (2;6;-6).$$

Рівняння *дотичної*, як відомо, має вид:

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}.$$

В даному випадку матимемо:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Рівняння *нормальної площини* має вид

$$x_0'(x-x_0)+y_0'(y-y_0)+z_0'(z-z_0)=0.$$

Звідси отримуємо

$$3(x-1)+1(y-2)+2(z-1)=0$$

або

$$3x-3+y-2+2z-2=0,$$

$$3x+y+2z-7=0.$$

Рівняння стичної площини запишемо, вибравши точку (1;2;1) за початкову, а вектори $\vec{r}_0'$ та $\vec{r}_0''$ – за напрямні. Тоді

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2(x-1)+12(y-2)-6(z-1)-6(y-2)=$$

$$=2x-2+12y-24-6z+6-6y+12=2x+6y-6z-20=0,$$

звідки $x+3y-3z-10=0$ – рівняння *стичної площини*.

Бінормаллю регулярної кривої в точці називається пряма, яка проходить через цю точку перпендикулярно до стичної площини. Рівняння *бінормалі* запишемо, вибравши точку (1;2;1) за початкову, а нормальний вектор стичної площини $\vec{n}=(1;3;-3)$ – за напрямний. Матимемо:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-3}.$$

Спрямною площиною регулярної кривої в точці називається площина, яка визначається дотичною і бінормаллю в цій точці. Щоб записати її рівняння, виберемо точку (1;2;1) за початкову, а вектори (3;1;2) та (1;3;-3) – за напрямні. Матимемо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3(x-1)+2(y-2)+9(z-1)-(z-1)+$$

$$+9(y-2)-6(x-1) = -3x+3+2y-4+9z-9-z+1+9y-$$

$$-18-6x+6 = -9x+11y+8z-21=0,$$

звідки $9x-11y-8z+21=0$ – рівняння *спрямної площини*.

Головною нормаллю кривої в точці називається пряма, яка проходить через цю точку перпендикулярно до спрямної площини. Тому, щоб записати її рівняння, виберемо точку (1;2;1) за початкову, а нормальний вектор $\vec{n}_1 = (9;-11;-8)$ спрямної площини – за напрямний. Отримаємо:

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-1}{-8}.$$

Координатні вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ та $\vec{\nu}$ канонічного репера тригранника Френе знайдемо за відомими формулами:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{(3;1;2)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{(3;1;2)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,'']}{|[\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,'']|} = \frac{(1;3;-3)}{\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}} = \frac{(1;3;-3)}{\sqrt{19}} = \left(\frac{1}{\sqrt{19}};\frac{3}{\sqrt{19}};-\frac{3}{\sqrt{19}}\right),$$

$$\vec{\nu} = \frac{\left[\vec{r}_0\,', [\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,'']\right]}{\left|\left[\vec{r}_0\,', [\vec{r}_0\,', \vec{r}_0\,'']\right]\right|} = \frac{(9;-11;-8)}{\sqrt{9^2+(-11)^2+(-8)^2}} = \frac{(9;-11;-8)}{\sqrt{266}} =$$

$$= \left(\frac{9}{\sqrt{266}};-\frac{11}{\sqrt{266}};-\frac{8}{\sqrt{266}}\right).$$

Завдання 2. Обчислити довжину дуги кривої $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{2}t^2, \quad \frac{2}{3}\sqrt{10}t^{\frac{3}{2}}, \quad t\right)$ для $0 \le t \le 1$.

Розв'язання

Оскільки криву задано векторним способом, то для знаходження довжини її дуги скористаємось відомою формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{r}'(t)\right| dt.$$

В даному випадку

$$|r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{(5t)^2 + (\sqrt{10}t^{\frac{1}{2}})^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{25t^2 + 10t + 1} = \sqrt{(5t+1)^2} = |5t+1| = 5t+1.$$

Тоді

$$s = \int_0^1 (5t+1)dt = \left(\frac{5}{2}t^2 + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2} + 1 - 0 = \frac{7}{2}(\text{л. од.}).$$

Завдання 3. Обчислити кривину і скрут кривої $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{t}; \ln t; -t^2\right)$ в довільній точці.

Розв'язання

Для знаходження кривини і скруту користуватимемося формулами:

$$k = \frac{\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3}, \qquad \left|\aleph\right| = \frac{|(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')|}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|^2}.$$

В даному випадку

$$\vec{r}'(t) = \left(-\frac{2}{t^2}; \frac{1}{t}; -2t\right), \quad \vec{r}''(t) = \left(\frac{4}{t^3}; -\frac{1}{t^2}; -2\right), \quad \vec{r}'''(t) = \left(-\frac{12}{t^4}; \frac{2}{t^3}; 0\right).$$

$$|\vec{r}'|=\sqrt{\frac{4}{t^4}+\frac{1}{t^2}+4t^2}=\sqrt{\frac{4t^6+t^2+4}{t^4}}=\frac{\sqrt{4t^6+t^2+4}}{t^2};$$

$$[\vec{r}',\vec{r}'']=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} & -2t\\ \frac{4}{t^3} & -\frac{1}{t^2} & -2\end{vmatrix}=-\frac{2}{t}\vec{i}-\frac{8}{t^2}\vec{j}+\frac{2}{t^4}\vec{k}-\frac{4}{t^4}\vec{k}-\frac{4}{t^2}\vec{j}-\frac{2}{t}\vec{i}=$$

$$=-\frac{4}{t}\vec{i}-\frac{12}{t^2}\vec{j}-\frac{2}{t^4}\vec{k}.$$

Отже, $[\vec{r}',\vec{r}'']=\left(-\frac{4}{t};-\frac{12}{t^2};-\frac{2}{t^4}\right)$. Тоді

$$\left|[\vec{r}',\vec{r}'']\right|=\sqrt{\frac{16}{t^2}+\frac{144}{t^4}+\frac{4}{t^8}}=\frac{2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{t^4};$$

$$(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')=\begin{vmatrix}-\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} & -2t\\ \frac{4}{t^3} & -\frac{1}{t^2} & -2\\ -\frac{12}{t^4} & \frac{2}{t^3} & 0\end{vmatrix}=\frac{24}{t^5}-\frac{16}{t^5}+\frac{24}{t^5}-\frac{8}{t^5}=\frac{24}{t^5}.$$

Остаточно маємо:

$$k=\frac{\dfrac{2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{t^4}}{\left(\dfrac{\sqrt{4t^6+t^2+4}}{t^2}\right)^3}=\frac{2t^2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{\sqrt{(4t^6+t^2+4)^3}};$$

$$\aleph=\frac{\dfrac{24}{t^5}}{\left(\dfrac{2\sqrt{4t^6+36t^4+1}}{t^4}\right)^2}=\frac{6t^3}{4t^6+36t^4+1}.$$

Завдання 4. Знайти натуральні рівняння кривої $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, at)$, $a>0$.

Розв'язання

Натуральні рівняння кривої мають вид $\begin{cases} k=k(s), \\ \aleph=\aleph(s). \end{cases}$ Тут роль параметра s виконує довжина дуги.

Знайдемо кривину і скрут даної кривої:

$$\vec{r}\,'(t)=(-a\sin t, a\cos t, a),\ \vec{r}\,''(t)=(-a\cos t, -a\sin t, 0),$$

$$\vec{r}\,'''(t)=(a\sin t, -a\cos t, 0).$$

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a,$$

$$[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & a \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=-a^2\cos t\vec{j}+a^2\sin^2 t\vec{k}+a^2\cos^2 t\vec{k}+$$

$$+a^2\sin t\vec{i}=a^2\sin t\vec{i}-a^2\cos t\vec{j}+a^2\vec{k}.$$

Отже, $[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']=(a^2\sin t; -a^2\cos t; a^2)$. Тоді

$$|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|=\sqrt{a^4\sin^2 t+a^4\cos^2 t+a^4}=\sqrt{2a^4}=\sqrt{2}a^2;$$

$$(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,''')=\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & a \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=a^3\cos^2 t+a^3\sin^2 t=a^3;$$

$$k=\frac{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}=\frac{\sqrt{2}a^2}{(\sqrt{2}a)^3}=\frac{1}{2a};$$

$$|\aleph|=\frac{|(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,''')|}{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|^2}=\frac{|a^3|}{(\sqrt{2}a^2)^2}=\frac{1}{2a}.$$

Оскільки останні два рівняння не містять t, то вони і є натуральними рівняннями даної кривої.

Зауваження. Якби хоч у одне з цих рівнянь входив параметр t, то слід би було знайти зв'язок між t та s, і замінити у цих рівняннях t на відповідний вираз через s.

Завдання 5. В кожній точці кривої $\vec{r}(t) = (e^t, 2e^{-t}, 2t)$ відкладено вектор $\vec{a}(t) = [r', r]'$. Знайти параметричні рівняння лінії, утвореної кінцями цих векторів.

Розв'язання

Позначимо $M(x, y, z)$ – біжучу точку кривої, рівняння якої слід знайти, O – початок відліку. Тоді $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) + \vec{a}(t)$. Знайдемо $\vec{a}(t)$:

$$\vec{r}\,'(t) = (e^t, -2e^{-t}, 2);$$

$$[\vec{r}\,', \vec{r}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t & -2e^{-t} & 2 \\ e^t & 2e^{-t} & 2t \end{vmatrix} = -4te^{-t}\vec{i} + 2e^t\vec{j} + 2\vec{k} + 2\vec{k} - 2te^t\vec{j} - 4e^{-t}\vec{i}.$$

$$= -4te^{-t}\vec{i} + 2e^t\vec{j} + 2\vec{k} + 2\vec{k} - 2te^t\vec{j} - 4e^{-t}\vec{i}.$$

Отже, $[\vec{r}\,', \vec{r}\,] = \left(-4e^{-t}(t+1); 2e^t(1-t); 4\right)$, і

$$\vec{a}(t) = \left(4e^{-t}(t+1) - 4e^{-t}, 2e^t(1-t) - 2e^t, 0\right) = \left(4te^{-t}, -2te^t, 0\right).$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{OM} = (e^t, 2e^{-t}, 2t) + (4te^{-t}, -2te^t, 0) = (e^t + 4te^{-t}, 2e^{-t} - 2te^t, 2t).$$

Перейшовши від векторного задання кривої до параметричного, остаточно отримаємо:

$$\begin{cases} x(t) = e^{t} + 4te^{-t}; \\ y(t) = 2e^{-t} - 2te^{t}; \\ z(t) = 2t. \end{cases}$$

Завдання 6. Скласти параметричні рівняння поверхні, утвореної дотичними до лінії $\vec{r}(t) = (t^3, 1+t^2, t^4)$.

Розв'язання

Зауважимо, що напрямним вектором дотичної є вектор $\vec{r}\,'(t)$.

Позначимо $M(x, y, z)$ – біжучу точку поверхні, рівняння якої слід знайти, O – початок відліку. Тоді $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) + v\vec{r}\,'(t)$. Знайдемо:

$$\vec{r}\,'(t) = (3t^2, 2t, 4t^3).$$

Отже,

$$\overrightarrow{OM} = (t^3, 1+t^2, t^4) + v(3t^2, 2t, 4t^3) = (t^3 + 3vt^2, 1 + t^2 + 2vt, t^4 + 4vt^3).$$

Поклавши $t = u$ та перейшовши від векторної форми запису до параметричної, отримаємо:

$$\begin{cases} x = u^3 + 3u^2 v; \\ y = 1 + u^2 + 2uv; \\ z = u^4 + 4u^3 v. \end{cases}$$

Завдання 7. Написати параметричні рівняння конічної поверхні з вершиною у точці S(1;1;2) і напрямною $\vec{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

Розв'язання

Нехай $M(x, y, z)$ – біжуча точка конічної поверхні, O – початок відліку, точка A належить напрямній. Тоді

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{r}(t) + v\overrightarrow{AS}.$$

Знайдемо:

$$\overrightarrow{AS} = (1 - e^t \sin t, 1 - e^t \cos t, 2 - e^t),$$

$$\overrightarrow{OM} = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t) + v(1 - e^t \sin t, 1 - e^t \cos t, 2 - e^t),$$

покладемо $t = u$ та перейдемо до параметричної форми запису:

$$\begin{cases} x = e^u \sin u + v(1 - e^u \sin u); \\ y = e^u \cos u + v(1 - e^u \cos u); \\ z = e^u + v(2 - e^u). \end{cases}$$

Завдання 8. Дано поверхню $\vec{r}(u,v) = (u + v, 2uv, u^3 + v^3)$ і на ній лінію $\gamma : u = v + 1$, яка проходить через точку P(2;1) поверхні.

1) Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці P.

2) Знайдіть координати одиничного вектора нормалі.

3) Напишіть рівняння дотичної до даної кривої в точці P.

4) Обчисліть кривину даної кривої в точці P.

5) Обчисліть нормальну і геодезичну кривини в точці P.

6) Обчисліть повну і середню кривини в точці P.

7) Визначте тип точки P.

8) Обчисліть кути, які утворює крива з координатними лініями в точці Р.

9) Знайдіть головні напрямки на поверхні точці Р.

10) Знайдіть асимптотичні напрямки поверхні в точці Р (якщо вони є).

11) Знайдіть асимптотичні лінії на поверхні, які проходять через точку Р.

12) Знайдіть лінії кривини на поверхні, які проходять через точку Р.

Розв'язання

1) Знайдемо

$$\vec{r}_u = (1,2v,3u^2),\ \vec{r}_v = (1,2u,3v^2),$$

$$\vec{r}_{uu} = (0,0,6u),\ \vec{r}_{uv} = (0,2,0),\ \vec{r}_{vv} = (0,0,6v).$$

Тоді

$$\vec{r}(P) = (3;4;9),\ \vec{r}_u(P) = (1;2;12),\ \vec{r}_v(P) = (1;4;3),$$

$$\vec{r}_{uu}(P) = (0;0,12),\ \vec{r}_{uv}(P) = (0;2;0),\ \vec{r}_{vv}(P) = (0,0,6).$$

Рівняння дотичної площини до поверхні у точці має вид:

$$\left(\overrightarrow{OM} - \vec{r}(u,v), \vec{r}_u, \vec{r}_v\right) = 0.$$

В даному випадку

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-9 \\ 1 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-3) + 12(y-4) + 4(z-9) - 2(z-9) -$$

$$-3(y-4) - 48(x-3) = 6x - 18 + 12y - 48 + 4z - 36 - 2z + 18 - 3y +$$
$$+12 - 48x + 144 = -42x + 9y + 2z + 72 = 0$$

або $42x - 9y - 2z - 72 = 0$ – рівняння дотичної площини.

Рівняння нормалі знайдемо, вибравши точку $P(3;4;9)$ – за початкову, а нормальний вектор $\vec{N}=(42;-9;-2)$ дотичної площини – за напрямний:

$$\frac{x-3}{42}=\frac{y-4}{-9}=\frac{z-9}{-2}.$$

2) Одиничний вектор нормалі знайдемо, унормувавши її напрямний вектор:

$$\vec{n}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{(42;-9;-2)}{\sqrt{42^2+(-9)^2+(-2)^2}}=\frac{(42;-9;-2)}{\sqrt{1849}}=\left(\frac{42}{43};-\frac{9}{43};-\frac{2}{43}\right).$$

3) Знайдемо зовнішнє рівняння кривої γ:

$$\vec{r}(v)=(v+1+v,2(v+1)v,(v+1)^3+v^3)=(2v+1,2v^2+2v,(v+1)^3+v^3).$$

Тоді рівняння дотичної запишемо, вибравши точку $P(3;4;9)$ – за початкову, а вектор $\vec{r}\,'(P)$ – за напрямний:

$$\vec{r}\,'(v)=(v,4v+2,3(v+1)^2+3v^2);$$

$$\vec{r}\,'(P)=\vec{r}\,'(1)=(1,6,15);$$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-9}{15}.$$

4) Для обчислення кривини кривої скористаємось формулою:

$$k=\frac{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

Знайдемо

$$\vec{r}\,''(v)=(1,4,6(v+1)+6v);$$

$$\vec{r}\,''(P)=(1,4,18);$$

$$|\vec{r}\,'(P)|=\sqrt{1^2+4^2+18^2}=\sqrt{1+16+324}=\sqrt{341};$$

$$[\vec r'(P),\vec r''(P)]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 6 & 15\\ 1 & 4 & 18\end{vmatrix}=108\vec i+15\vec j+4\vec k-6\vec k-18\vec j-60\vec i=48\vec i-3\vec j-2\vec k.$$

Отже, $[\vec r'(P),\vec r''(P)]=(48;-3;-2)$. Тоді

$$\left|[\vec r'(P),\vec r''(P)]\right|=\sqrt{48^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{2304+9+4}=\sqrt{2317}$$

і

$$k(P)=\frac{\sqrt{2317}}{\sqrt{341}^3}=\frac{\sqrt{2317}}{341\sqrt{341}}.$$

5) Для обчислення нормальної кривини скористаємось формулою:

$$k_n=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Знайдемо першу та другу квадратичну форми поверхні в точці P:

$\vec r_u(P)=(1;2;12),\ \vec r_v(P)=(1;4;3),$

$\vec r_{uu}(P)=(0;0,12),\ \vec r_{uv}(P)=(0;2;0),\ \vec r_{vv}(P)=(0,0,6).$

$E(P)=\vec r_u^{\,2}(P)=1^2+2^2+12^2=1+4+144=149,$

$F(P)=\vec r_u(P)\vec r_v(P)=1\cdot1+2\cdot4+12\cdot3=1+8+36=45,$

$G(P)=\vec r_v^{\,2}(P)=1^2+4^2+3^2=1+16+9=26,$

$\varphi_1(P)=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=149\,du^2+90\,dudv+26\,dv^2,$

$$(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{uu})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 12\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 12\end{vmatrix}=48-24=24,$$

$$(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{uv})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 12\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=24-6=18,$$

$$(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{vv})=\begin{vmatrix}1&2&12\\1&4&3\\0&0&6\end{vmatrix}=24-12=12,$$

$$L(P)=\frac{(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{24}{\sqrt{149\cdot 26-45^2}}=\frac{24}{\sqrt{1849}}=\frac{24}{43},$$

$$M(P)=\frac{(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{18}{43},$$

$$N(P)=\frac{(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{12}{43},$$

$$\varphi_2(P)=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=\frac{24}{43}du^2+\frac{36}{43}dudv+\frac{12}{43}dv^2.$$

Тоді

$$k_n(P)=\frac{\frac{24}{43}du^2+\frac{36}{43}dudv+\frac{12}{43}dv^2}{149du^2+90dudv+26dv^2}.$$

Оскільки нормальну кривину обчислюємо у напрямку кривої $\gamma: u=v+1$, то $du=dv$. З урахуванням цього, маємо:

$$k_n(P)=\frac{\frac{24}{43}dv^2+\frac{36}{43}dv^2+\frac{12}{43}dv^2}{149dv^2+90dv^2+26dv^2}=\frac{\frac{24}{43}+\frac{36}{43}+\frac{12}{43}}{149+90+26}=\frac{\frac{72}{43}}{265}=\frac{72}{11395}.$$

Тоді геодезична кривина

$$k_g(P)=\sqrt{k^2(P)-k_n^2(P)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2317}}{341\sqrt{341}}\right)^2-\left(\frac{72}{11395}\right)^2}=\ldots$$

6) Знайдемо повну та середню кривини поверхні:

$$K(P)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\frac{24}{43}\cdot\frac{12}{43}-\left(\frac{18}{43}\right)^2}{1849}=\frac{\frac{288-324}{43^2}}{1849}=-\frac{36}{43^4},$$

$$H(P)=\frac{GL-2FM+EN}{2(EG-F^2)}=\frac{26\cdot\frac{24}{43}-2\cdot 45\cdot\frac{18}{43}+149\cdot\frac{12}{43}}{2\cdot 1849}=$$

$$=\frac{624-1620+1788}{2\cdot 43^3}=\frac{792}{2\cdot 43^3}=\frac{396}{43^3}.$$

7) Оскільки $K(P)=-\frac{36}{43^4}<0$, то $P-$ точка гіперболічного типу.

8) Для знаходження кута між кривими користуватимемось формулою:

$$\cos\alpha=\frac{\phi_1(d,\partial)}{\sqrt{\phi_1(d)}\cdot\sqrt{\phi_1(\partial)}}.$$

Оскільки $\gamma: u=v+1$, то $du=dv$.

Нехай $\gamma_1: u=const$. Тоді $\partial u=0$, і

$$\cos\angle(\gamma,\gamma_1)=\frac{Edu\partial u+F(du\partial v+\partial udv)+Gdv\partial v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\cdot\sqrt{E\partial u^2+F\partial u\partial v+G\partial v^2}}=$$

$$=\frac{149du\partial u+45(du\partial v+\partial udv)+26dv\partial v}{\sqrt{149du^2+90dudv+26dv^2}\cdot\sqrt{149\partial u^2+90\partial u\partial v+26\partial v^2}}=$$

$$=\frac{149dv\cdot 0+45(dv\partial v+0dv)+26dv\partial v}{\sqrt{149dv^2+90dv\cdot dv+26dv^2}\cdot\sqrt{149\cdot 0^2+90\cdot 0\cdot\partial v+26\partial v^2}}=$$

$$=\frac{45dv\partial v+26dv\partial v}{\sqrt{265dv^2}\cdot\sqrt{26\partial v^2}}=\frac{71dv\partial v}{\sqrt{265}dv\cdot\sqrt{26}\partial v}=\frac{71}{\sqrt{6890}}.$$

Нехай тепер $\gamma_2: v=const$. Тоді $\partial v=0$, і

$$\cos\angle(\gamma,\gamma_2)=\frac{Edu\partial u+F(du\partial v+\partial udv)+Gdv\partial v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\cdot\sqrt{E\partial u^2+F\partial u\partial v+G\partial v^2}}=$$

$$=\frac{149dv\cdot\partial u+45(dv\cdot 0+\partial udv)+26dv\cdot 0}{\sqrt{149dv^2+90dv\cdot dv+26dv^2}\cdot\sqrt{149\cdot\partial u^2+90\cdot\partial u\cdot 0+26\cdot 0^2}}=$$

$$=\frac{149dv\partial u+45\partial udv}{\sqrt{265dv^2}\cdot\sqrt{149\partial u^2}}=\frac{194dv\partial u}{\sqrt{265}dv\cdot\sqrt{149}\partial u}=\frac{194}{\sqrt{39485}}.$$

9) Головні напрямки в точці P шукатимемо з рівняння

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv \\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0.$$

Маємо:

$$\begin{vmatrix} 149du+45dv & 45du+26dv \\ \frac{24}{43}du+\frac{18}{43}dv & \frac{18}{43}du+\frac{12}{43}dv \end{vmatrix}=0,$$

$$(149du+45dv)\left(3du+2dv\right)-(45du+26dv)\left(4du+3dv\right)=0,$$

$$447du^2+298dudv+135dudv+90dv^2-180du^2-135dudv-104dudv-$$

$$-78dv^2=0,$$

$$267du^2+194dudv+12dv^2=0,$$

$$267\left(\frac{du}{dv}\right)^2+194\frac{du}{dv}+12=0,$$

$$D=194^2-4\cdot267\cdot12=37636-12816=24820,$$

$$a)\ \frac{du}{dv}=\frac{-194-\sqrt{24820}}{2\cdot267}=\frac{-194-2\sqrt{6205}}{2\cdot267}=-\frac{97+\sqrt{6205}}{267},$$

звідки

$$du=-\frac{97+\sqrt{6205}}{267}dv,$$

$$б)\ \frac{du}{dv}=\frac{-194+\sqrt{24820}}{2\cdot267}=\frac{\sqrt{6205}-97}{267},$$

звідки

$$du=\frac{\sqrt{6205}-97}{267}dv.$$

10) Асимтотичні напрямки знайдемо з умови

$$\varphi_2=0.$$

Звідси

$$\frac{24}{43}du^2+\frac{36}{43}dudv+\frac{12}{43}dv^2=0,$$

або

$$2\left(\frac{du}{dv}\right)^2+3\frac{du}{dv}+1=0,$$

$$D=3^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1,$$

$a)\ \frac{du}{dv}=\frac{-3-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{-3-1}{4}=-1,$

звідки

$du=-dv,$

$б)\ \frac{du}{dv}=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2},$

звідки

$du=-\frac{1}{2}dv.$

11) Асимптотичні лінії знайдемо, проінтегрувавши знайдені у пункті 10) асимптотичні напрямки:

$u=-v+C_1,$

$u=-\frac{1}{2}v+C_2.$

Підставимо у знайдені рівняння двох сімей асимптотичних ліній гаусові координати точки P:

$$\begin{cases}2=-1+C_1,\\ 2=-\frac{1}{2}\cdot 1+C_2,\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}C_1=3,\\ C_2=\frac{3}{2},\end{cases}$$

тобто шуканими асимптотичними лініями є:

$$u = -v + 3$$

та

$$u = -\frac{1}{2}v + \frac{3}{2}.$$

12) Лінії кривини знайдемо, проінтегрувавши знайдені у пункті 9) головні напрямки:

$$u = -\frac{97+\sqrt{6205}}{267}v + C_1,$$

$$u = \frac{\sqrt{6205}-97}{267}v + C_2.$$

Підставимо у знайдені рівняння двох сімей ліній кривини гаусові координати точки P:

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{97+\sqrt{6205}}{267}\cdot 1 + C_1, \\ 2 = \dfrac{\sqrt{6205}-97}{267}\cdot 1 + C_2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} C_1 = 2 + \dfrac{97+\sqrt{6205}}{267} = \dfrac{631+\sqrt{6205}}{267}, \\ C_2 = 2 - \dfrac{\sqrt{6205}-97}{267} = \dfrac{631-\sqrt{6205}}{267}, \end{cases}$$

тобто шуканими лініями кривини є:

$$u = -\frac{97+\sqrt{6205}}{267}v + \frac{631+\sqrt{6205}}{267}$$

та

$$u = \frac{\sqrt{6205}-97}{267}v + \frac{631-\sqrt{6205}}{267}.$$

2. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1.

Для лінії $\vec{r} = \vec{r}(t)$ написати рівняння всіх елементів тригранника Френе в точці Р. В цій же точці знайти координатні вектори канонічного репера

1. $\overrightarrow{r} = (3t - t^3,\ \ 3t^2, 3t + t^3)$, в точці $t = 0$.

2. $\overrightarrow{r} = (e^t cost,\ \ e^t sint,\ e^t)$, в точці $t = 0$.

3. $\vec{r} = (t - sint,\ \ 1 - cost,\ sint)$, в точці $t = \frac{\pi}{2}$.

4. $\vec{r} = (t^3,\ \ 1 + t,\ t^2)$, в точці $t = 1$.

5. $\vec{r} = (acost,\ asint,\ \ bt)$, в точці $t = 0$.

6. $\vec{r} = (2t,\ lnt,\ t^2)$, в точці $t = 1$.

7. $\vec{r} = (tcost, -tsint,\ \ t)$, в точці $t = 0$.

8. $\vec{r} = (4cost,\ 4sint,\ 3t)$, в точці $t = 0$.

9. $\vec{r} = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\right)$, в точці $t = \frac{\pi}{2}$.

10. $\vec{r} = \left(t^2\sqrt{\frac{3}{2}},\ 2 - t,\ t^3\right)$, в точці $t = 0$.

11. $\vec{r} = (e^t sint,\ \ e^t,\ \ e^t cost)$, в точці $t = 0$.

12. $\vec{r} = (2cost,\ \ 2sint,\ 3t)$, в точці $t = 0$.

13. $\vec{r} = (sint,\ cost,\ tgt)$, в точці $t = \frac{\pi}{4}$.

14. $\vec{r} = (2t,\ lnt,\ t^2)$, в точці $t = 1$.

15. $\vec{r} = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$, в точці $t = 0$.

16. $\vec{r} = \left(t,\ t^2,\ \frac{3}{2}t\right)$, в точці $t = 1$.

17. $\vec{r} = (1 - sint,\ \ cost,\ t)$, в точці $t = 0$.

18. $\vec{r} = (cost,\ sint,\ t)$, в точці $t = \pi$.

19. $\vec{r} = (asin^2t,\ asintcost,\ acost)$, в точці $t = 0$.

20. $\vec{r} = \left(t - sint,\ \ 1 - cost,\ 4sin\frac{t}{2}\right)$, в точці $t = \pi$.

21. $y = x^2, z = y^2$ в точці $x = 1$.

22. $y = x, z = 2x^2$ в точці $x = 2$.

23. $y = x^3, z = 2y$ в точці $x = 1$.

24. $\vec{r} = (acht,\ asht,\ at)$, в точці $t = 0$.

25. $\vec{r} = \left(t,\ \frac{1}{2}lnt,\ \frac{1}{2}t\right)$, в точці $t = 1$.

26. $\vec{r} = (tsint,\ tcost,\ te^t)$, в точці $t = 0$.

27. $\vec{r} = (t,\ t^2,\ e^t)$, в точці $t = 0$.

28. $y = \frac{1}{2}x^2,\ \ z = \frac{1}{6}x^3$ в точці $x = 1$

29. $\vec{r} = \left(\frac{1}{2}asin2t,\ asin^2t,\ \ acost\right)$, в точці $t = \frac{\pi}{2}$.

30. 1. $\vec{r} = (3t - t^3,\ \ 3t^2, 3t + t^3)$, в точці $t = 0$.

31. $\vec{r} = (e^t cost,\ \ e^t sint,\ e^t)$, в точці $t = 0$.

32. $\vec{r} = (t - sint,\ \ 1 - cost,\ sint)$, в точці $t = \frac{\pi}{2}$.

33. $\vec{r} = (t^3,\ \ 1 + t,\ t^2)$, в точці $t = 1$.

Завдання 2.

Обчислити довжину дуги кривої.

1. $\vec{r}(t) = (tsint,\ \ tcost,\ \ t^2), 1 \le t \le 2$

2. $\vec{r}(t) = (sint,\ cost,\ 2t + 1),\qquad 1 \le t \le 3$

3. $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{2}t^2,\quad \frac{2}{3}\sqrt{10}\cdot t^{\frac{3}{2}},\quad t\right),\ 0 \le t \le 1$

4. $y = \frac{1}{2}lnx,\ z = \frac{x^2}{2}\quad 3 \le t \le 4$

5. $\vec{r}(t) = \left(t,\ t^2,\ \ \frac{2}{3}t^3\right), 0 \le t \le 3$

6. $\vec{r}(t) = \left(e^t,\ e^{-t},\ t\sqrt{2}\right), 0 \le t \le 2$

7. $\vec{r}(t) = (cos^3t,\ sin^3t,\ cos2t), 0 \le t \le 2\pi$

8. $x = acos^3t,\ \ y = asin^3t$

9. $\vec{r}(t) = \left(t, \sqrt{2}\ln t, \frac{1}{t}\right),\ \ 1 \le t \le 2$

10. $\vec{r}(t) = (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3), 1 \le t \le 2$

11. $\vec{r}(t) = \left(t - sint,\ \ 1 - cost,\ \ 4sin\frac{t}{2}\right), 0 \le t \le \pi$

12. $\vec{r}(t) = (t + \frac{1}{3}t^3,\ t - \frac{1}{3}t^3,\ t^2), 0 \le t \le 1$

13. $x^3 = 3a^2y,\ 2xz = a^2;\ 1 \le t \le 2$

14. $\vec{r}(t) = (acht,\ asht,\ at), 0 \le t \le 1$

15. $x = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}sh2t,\ y = 2cht;\ 1 \le t \le 2$

16. $y = \frac{x^2}{2},\ z = \frac{x^3}{6};\ \ \ 0 \le t \le 3$

17. $\vec{r}(t) = (tsint,\ \ \ tcost,\ \ t^2), 1 \le t \le 2$

18. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

19. $\vec{r}(t) = (3a\cos t,\ \ 3a\sin t,\ \ \ 4at), 2 \le t \le 3$

20. $\vec{r}(t) = (\sqrt{\frac{3}{2}}t^2,\ \ \ 2 - t,\ \ t^3), 0 \le t \le 1$

21. $\vec{r}(t) = (e^t sint,\ \ \ e^t cost,\ \ e^t), 1 \le t \le 2$

22. $\vec{r}(t) = (2cht,\ \ 2sht,\ \ 2t\ \ ), 2 \le t \le 3$

23. $\vec{r}(t) = (cost,\ \ t,\ \ sint\ \ ),\ 1 \le t \le 2$

24. $\vec{r}(t) = \left(t\sqrt{2},\ \ e^t,\ \ e^{-t}\right), 0 \le t \le 1$

25. $\vec{r}(t) = \left(lncost,\ \ lnsint\ ,\ \ \ t\sqrt{2}\right), 1 \le t \le \frac{\pi}{2}$

26. $\vec{r}(t) = (3cost,\ \ 4t,\ \ 3sint\ \ ),\ 1 \le t \le 3$

27. $\vec{r}(t) = (\int sintdt,\ \ \int costdt\ ,\ \ \ bt),\ 1 \le t \le 2$

28. $\vec{r}(t) = (2cost,\ \ \ 2sint,\ \ 5t + 2\ \ ),\ 1 \le t \le 3$

29. $\vec{r}(t) = (cost,\ \ \int costdt\ ,\ \ 3 + 2t\ \ ),\ 1 \le t \le 3$

30. $\vec{r}(t) = \left(\frac{4}{3}t^3,\ \ 1 + t,\ \ \sqrt{2}t^2\ \ \right),\ 0 \le t \le 2$

31. $x = 2(t - sint),\ \ y = 2(1 - cost), 0 \le t \le 2\pi$

32. $\vec{r}(t) = (sint,\ cost,\ 2t + 1),\qquad\quad 1 \le t \le 3$

33. $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{2}t^2,\ \ \ \frac{2}{3}\sqrt{10} \cdot t^{\frac{3}{2}},\ \ \ t\right),\ 0 \le t \le 1$

Завдання 3.

Обчислити кривину і скрут кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в довільній точці.

1. $\vec{r}(t) = (cost,\ \ \ sint,\ \ \ cos2t)$
2. $\vec{r}(t) = (at,\ \ \ a\sqrt{2}lnt,\ \ \ \frac{a}{t})$
3. $\vec{r}(t) = (cos^3t,\ sin^3t,\ cos2t)$.
4. $\vec{r}(t) = (acht,\ asht,\ at)$.
5. $\vec{r}(t) = (t,\ \ e^t,\ \ e^{-t})$.
6. $\vec{r}(t) = (acost,\ \ \ \ asint,\ \ \ bt)$.
7. $\vec{r}(t) = (2t,\ \ lnt^2,\ \ t^3)$.
8. $\vec{r}(t) = (e^tcost,\ \ e^tsint,\ \ \ e^t)$.
9. $\vec{r}(t) = (t,\ \ t^2,\ \ t^3)$.
10. $\vec{r}(t) = (cost,\ \ \ sint,\ \ \ t)$.

11. $\vec{r}(t) = (t, \quad \sqrt{2}lnt, \quad \frac{1}{t})$.

12. $\vec{r}(t) = (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$.

13. $\vec{r}(t) = \left(t, \quad t^2, \ \frac{3}{2}t\right)$.

14. $\vec{r}(t) = (achtcost, \quad achtsint, \quad at)$.

15. $y = x^2,\ z = y^2$.

16. $\vec{r}(t) = (t - sint,\ \ 1 - cost,\ \ sint)$.

17. $\vec{r}(t) = (3t - t^2,\ 3t^2,\ 3t + t^2)$.

18. $\vec{r}(t) = (2t,\ \ lnt,\ \ t^2)$.

19. $\vec{r}(t) = (t, \quad t^2,\ \ e^t)$.

20. $\vec{r}(t) = (cos^3t,\ sin^3t,\ cos2t)$.

21. $y = x^3,\ z = \frac{1}{6}x^3$.

22. $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{t},\ \ lnt,\ \ t^2\right)$.

23. $\vec{r}(t) = (3cost, \quad 3sint,\ \ 4t\ )$.

24. $\vec{r}(t) = \left(t - sint,\ \ 1 - cost,\ \ 4sin\frac{t}{2}\right)$.

25. $\vec{r}(t) = (acost, \quad -asint, \quad bt)$.

26. $\vec{r}(t) = (cost, \quad sint, \quad \frac{1}{2}sin2t)$.

27. $\vec{r}(t) = (at, \quad a\sqrt{2}lnt, \quad \frac{a}{t})$.

28. $\vec{r}(t) = (e^tcost,\ \ e^tsint, \quad e^t)$.

29. $\vec{r}(t) = (\ e^t,\ \ e^{-t},\ \ t\sqrt{2}\ )$.

30. $\vec{r}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad lnsint, \quad \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

31. $\vec{r}(t) = (cost, \quad sint, \quad cos2t)$.

32. $\vec{r}(t) = (\sqrt{\frac{3}{2}}t^2, \quad 4-t, \quad t^3).$

33. $\vec{r}(t) = (cos^3t,\ sin^3t,\ cos2t).$

Завдання 4.

Знайти натуральні рівняння кривої.

1. $\vec{r}(t) = (\ 1 - \ sint, \quad cost, \quad t).$

2. $x = \frac{1}{5}\sin t + 2; \quad y = -\frac{1}{5}\cos t + 2.$

3. $\vec{r}(t) = (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t, t).$

4. $x = -\frac{1}{2}cost + 3; \quad y = \frac{1}{2}sint + 5.$

5. $\vec{r}(t) = (2t,\ 2chtcost, \quad achtsint).$

6. $\vec{r}(t) = (4t, \quad 3sint,\ 3cost\ ).$

7. $\vec{r}(t) = (chtcost, \quad chtsint,\ t).$

8. $\vec{r}(t) = \left(t\sqrt{2},\ lnsint,\ lncost\right).$

9. $\vec{r}(t) = \left(t\sqrt{2},\ e^t,\ e^{-t}\right).$

10. $\vec{r}(t) = (\ e^t,\ e^tsint, \quad e^tcost).$

11. $\vec{r}(t) = \left(t - sint,\ 1 - cost,\ 4sin\frac{t}{2}\right).$

12. $\vec{r}(t) = (acht,\ asht,\ at).$

13. $\vec{r}(t) = (e^tcost,\ e^tsint, \quad e^t).$

14. $\vec{r}(t) = \left(\ e^t, \quad t\sqrt{2},\ e^{-t}\right).$

15. $\vec{r}(t) = (\ e^t, \quad e^tcost, \quad e^tsint \quad).$

16. $\vec{r}(t) = \left(\ e^{-t}, \quad t\sqrt{2},\ e^t\right).$

17. $\begin{cases} x = a(2t - sint), \\ y = a(1 - \cos 2t). \end{cases}$

18. $y = \sqrt{2}lnx,\ z = \frac{1}{x}.$

19. $y = 2ch\frac{x}{2}.$

20. $\vec{r}(t) = (2sht,\ \ 2cht,\ \ 2t).$

21. $\vec{r}(t) = \left(4sin\frac{t}{2},\ \ \ t - sint,\ \ 1 - cost\right).$

22. $x = \frac{1}{c}sint + a;\ \ \ y = -\frac{1}{c}cost + b.$

23. $\begin{cases} x = 2t + sin2t, \\ y = 1 - \cos 2t\,. \end{cases}$

24. $y = ach\frac{x}{2};$

25. $\begin{cases} x = a(cost + tsint), \\ y = a(sint - \mathrm{t}\cos t). \end{cases}$

26. $\vec{r}(t) = (5sht,\ \ 5cht,\ \ 5t).$

27. $\vec{r}(t) = (at,\ \ \ asht,\ \ acht).$

28. $\vec{r}(t) = (sint,\ \ 1 - cost,\ \ 1 + t).$

29. $\vec{r}(t) = (sht,\ \ \ \ t,\ \ \ \ \ cht).$

30. $\vec{r}(t) = (t,\ \ \ \ \sqrt{2}lnt,\ \ \ \ \frac{1}{t}).$

31. $\vec{r}(t) = (3t,\ \ \ \ 3cost,\ \ 3sint\ ).$

32. $\vec{r}(t) = (\ 1 -\ \ sint,\ \ \ cost,\ \ \ t).$

33. $\vec{r}(t) = (acost,\ \ \ \ asint,\ \ \ at).$

Завдання 5.

В кожній точці кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ відкладено вектор $\vec{a}(t)$. Знайти параметричні рівняння лінії, утвореної кінцями цих векторів.

1. $\vec{r} = (cht,\ \ sht,\ \ t),\ \ \ \ \ a = [\bar{r}', \bar{r}'']$

2. $\vec{r} = (\ e^{t},\quad 2e^{-t}\ ,\quad 2t),\ \ a = [\bar{r}',\bar{r}]'$

3. $\vec{r} = (cost,\quad sint,\quad cos2t), \vec{r} =$ $\left(t,\ \ t^2,\ \frac{2}{3}\ t^2\right),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']$

4. $\vec{r} = \left(t,\ \ t^2,\ \frac{2}{3}\ t^2\right),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']\vec{r} =$ $(cht,\ \ sht,\ \ t),\quad a = [\bar{r}',\bar{r}'']$

5. $\vec{r} = (cost,\quad sint,\ \ t^2),\ \ a = \left[[\bar{r},\bar{r}']\bar{r}\right]$

6. $\vec{r} = (t^2,\ \ 1 - t,\ \ t^3),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']'$

7. $\vec{r} = (2t,\ \ln t\ ,\ \ t^2),\ \ a = [\bar{r},\bar{r}']$;

8. $\vec{r} = (3t - t^3,\ \ 3t^2,\ \ 3t +\ t^3),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']''$

9. $\vec{r} = \left(t,\ \ t^2,\ \frac{2}{3}\ t^2\right),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']$

10. $\vec{r} = (t^2,\ \ t^3,\ \ 1 + t^2),\quad a = [\bar{r}',\bar{r}]'$

11. $\vec{r} = (t^2,\ 1 - t,\quad t^3),\quad a = \left[[\bar{r},\bar{r}']\bar{r}''\right]$

12. $\vec{r} = (cht,\ \ sht,\ \ t),\quad a = [\bar{r}',\bar{r}'']$

13. $\vec{r} = (e^{t},\ \ e^{-t},\ \ t^2),\quad a = [\bar{r},\bar{r}'']'$

14. $\vec{r} = (t,\ \ t^2,\ \ t^3),\quad a = \left[\bar{r}',[\bar{r},\bar{r}'']\right]$;

15. $\vec{r} = (\ t^2,\ \ e^{-t},\ \ e^{t}), a = [\bar{r},\bar{r}']'$

16. $\vec{r} = (2t,\ \ln t\ ,\ \ t^2),\ \ a = [\bar{r}',\bar{r}'']$

17. $\vec{r} = \left(\frac{t^4}{4},\quad \frac{t^3}{3},\quad \frac{t^2}{2}\right),\quad a = [\bar{r}',\bar{r}]'$

18. $\vec{r} = (t^3,\ \ 1 + t,\ \ t^2\ ),\quad a = \left[[\bar{r}',\bar{r}'']\bar{r}'\right]$

19. $\vec{r} = (cost,\quad sint,\quad cos2t), a = [\bar{r},\bar{r}']'$

20. $\vec{r} = (2cht,\ \ 2sht,\ \ 2t),\quad a = [\bar{r}'',\bar{r}]$

21. $\vec{r} = (t^2,\ \ t^3,\ \ t + 1),\quad a = [\bar{r}',\bar{r}'']'$

22. $\vec{r} = (3t^2,\ 2 - t,\quad t^3),\qquad a = \left[\bar{r}[\bar{r}'',\bar{r}']\right]$

23. $\vec{r} = (3cost,\quad 3sint,\ \ 4t\ ), a = [\bar{r}',\bar{r}'']$

24. $\vec{r} = (t,\ \ t^2,\ \ t^4),\qquad a = \left[\bar{r}',[\bar{r}',\bar{r}]\right]$

25. $\vec{r} = \left(\ e^t,\qquad e^{-t}\ ,\quad t\sqrt{2}\right),\ \ a = [\bar{r},\bar{r}'']'$

26. $\vec{r} = (\ t^3,\quad t^2 - 2,\quad t^2 + 2),\qquad a = [\bar{r},\bar{r}']'$

27. $\vec{r} = (t^3,\ \ t,\ \ 3t^2\ ),\ \ a = [\bar{r},\bar{r}']$

28. $\vec{r} = (\quad t^2 + 1,\quad lnt,\quad 2t),\qquad a = [\bar{r},\bar{r}']''$

29. $\vec{r} = (sint,\quad cost,\ \ 2t^2 + 3),\ \ a = [\bar{r}',\bar{r}]$

30. $\vec{r} = \left(\frac{3}{4}t^3,\ \ 1 + t^2,\ \sqrt{2}t\ \right),\ \ a = [\bar{r},\bar{r}']$

31. $\vec{r} = \left(t^2 + 1,\quad e^t,\qquad t\sqrt{2}\ \right),\ \ a = [\bar{r}',\bar{r}'']$

32. $\vec{r} = (1 - cost,\quad sint,\quad 2t),\qquad a = [\bar{r},\bar{r}'']$

33. $\vec{r} = (\ e^t,\qquad 2e^{-t}\ ,\quad 2t),\ \ a = [\bar{r}',\bar{r}]'$

Завдання 6.

Скласти параметричні рівняння поверхні, утвореної дотичними до лінії $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

1. $\vec{r} = \left(t,\ \frac{1}{2}lnt,\ \frac{t^2}{2}\right)$.

2. $\vec{r} = (cost,\quad 1 + sint,\quad sint)$.

3. $\vec{r} = (t,\quad t^2,\quad t^3\ \ )$

4. $\vec{r} = \left(t - sint,\ \ 1 - cost,\ \ 4sin\frac{t}{2}\right)$.

5. $\vec{r} = (t,\quad sint,\ -cost)$.

6. $\vec{r} = \left(t + 2,\ \ \frac{1}{4}t^2,\ \ \frac{1}{3}t^3\right)$.

7. $\vec{r} = (t,\ at^2,\ \ bt^2 + ct + d)$.

8. $\vec{r} = (1 - sint, \quad cost, \; t)$.

9. $\vec{r} = (\, t^2, \; 2 - t, \quad t^3)$.

10. $\vec{r} = \; (t^3, \quad t^2, \quad t + 1)$.

11. $\vec{r} = (t^2\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad 2 - t, \quad t^3)$.

12. $\vec{r} = (t, \quad t^2, \quad t^3 \;)$.

13. $\vec{r} = \left(t, \; \sqrt{2}lnt, \quad \frac{1}{t}\right)$.

14. $\vec{r} = (t^3, \quad t^2, \; t^3 + 3)$.

15. $\vec{r} = (3cost, \quad 3sint, \; 4t \;)$.

16. $\vec{r} = (acht, \; asht, \; at)$.

17. $\vec{r} = \left(t - sint, \; 1 - cost, \; 4sin\frac{t}{2}\right)$.

18. $\vec{r} = \left(\, e^t, \quad e^{-t} \,, \quad t\sqrt{2}\right)$.

19. $\vec{r} = (\, t - sint, \; sint, \quad 1 - cost)$.

20. $\vec{r} = (cost, \quad sint, \quad 1 - cost - sint)$.

21. $\vec{r} = (t + 1, \; t^2 - 2, \quad t^4)$.

22. $\vec{r} = (2cost, \quad sint, \; t)$.

23. $\vec{r} = (2t, \; lnt, \quad t^2)$.

24. $\vec{r} = (t - sint, \; 1 - cost, \; sint)$.

25. $\vec{r} = (e^t cost, \; e^t sint, \quad e^t)$.

26. $\vec{r} = (3sin^2 t, \; 3sintcost, \; 3cost)$.

27. $\vec{r} = (\, t^2, \; 3t, \; lnt)$.

28. $\vec{r} = \; (t^3, \quad 1 + t, \quad t^2)$.

29. $\vec{r} = \left(t + \frac{t^3}{3}, \quad t - \frac{t^3}{3}, \quad t^2\right)$.

30. $\vec{r} = (cost, \quad sint, \ 2t + 3)$.

31. $\vec{r} = (t, \quad sint, \ -cost)$.

32. $\vec{r} = \left(\frac{t^4}{4}, \quad \frac{t^3}{3}, \quad \frac{t^2}{2}\right)$.

33. $\vec{r} = (t^3, \ 1 + t^2, \ t^4)$.

Завдання 7.

Написати параметричні рівняння:

а) конічної поверхні з вершиною в точці S і напрямною $\bar{r} = \bar{r}(t)$*;*

1. $\bar{r} = (e^{2t}cost, \ e^t sint, \ 3e^t); \quad S(2;1;3);$
2. $\bar{r} = (cos^3 t, \ sin^3 t, \ cos2t); \ S(0;4;2);$
3. $\bar{r} = (t, \quad t^2, \ e^t); \quad S(1;2;1);$
4. $\bar{r} = (e^t, \quad e^{-t} , \quad 2t); \ S(0;3;2);$
5. $\bar{r} = (3cht, \ 3sht, \ 3t); \ S(3;4;1);$
6. $\bar{r} = (t^2, \ t + 1, \ t^3); \ S(3;1;1);$
7. $\bar{r} = (t^2, \ e^t, \ t^3); \ S(3;0;2);$
8. $\bar{r} = (cost, \quad sint, \ t); \ S(0;1;2);$
9. $\bar{r} = (t - \sin t, \ 1 - \cos t , \sin t); \ S(0;3;1)$
10. $\bar{r} = (t + 1, t^2, \ t^3 + 2); \ S(2;1;2);$
11. $\bar{r} = (2t, 2\,t^2, t^3 + 1); \ S(3;0;1);$
12. $\bar{r} = (2\,t^2, t + 1, t^3 - 1); \ S(1;2;1);$
13. $\bar{r} = (t^3, 1 + t^2, t^4); \ S(1;0;3);$
14. $\bar{r} = \left(t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}, t^2\right); \ S(1;3;1);$

15. $\bar{r} = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}\sin 2t\right); S(0;2;1);$

16. $\bar{r} = \left(\sin t, \cos 2t, \frac{1}{2}\sin 2t\right); S(2;1;4);$

17. $\bar{r} = (\ln\cos t, \ln\sin t, t^2); S(3;3;1);$

б) циліндричної поверхні з напрямною лінією $\bar{r} = \bar{r}\,(t)$ і прямолінійними твірними паралельними до вектора $\vec{a}$.

18. $\bar{r} = (t^2, t^3, e^t); \quad \vec{a}(0;2;1)$

19. $\bar{r} = (t-2, t^2+1, t^3); \quad \vec{a}(1;2;3)$

20. $\bar{r} = (t^2+1, t^3, e^t); \quad \vec{a}(4;3;1)$

21. $\bar{r} = (t^2, \cos t, \sin t); \quad \vec{a}(2;1;5)$

22. $\bar{r} = (\cos t, \sin t, t); \quad \vec{a}(2;-1;3)$

23. $\bar{r} = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right); \quad \vec{a}(4;1;2)$

24. $\bar{r} = (t - \sin t, 1-\cos t, \sin t); \quad \vec{a}(2;4;1)$

25. $\bar{r} = (\sin^2 t, \sin t cos\ t, \cos t); \quad \vec{a}(3;2;4)$

26. $\bar{r} = (-\cos t, t, \sin t); \quad \vec{a}(2;4;1)$

27. $\bar{r} = (t^2, 3t, \ln t); \quad \vec{a}(5;3;2)$

28. $\bar{r} = (t^3+1, t^2-1, t+1); \quad \vec{a}(2;3;4)$

29. $\bar{r} = \left(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right); \quad \vec{a}(1;3;1)$

30. $\bar{r} = (\cos t\ cht, \sin t\ sht, t); \quad \vec{a}(-3;0;2)$

31. $\bar{r} = (\cos t, \sin t, t); \quad \vec{a}(2;-1;3)$

32. $\bar{r} = (t - \sin t, 1-\cos t, \sin t); \quad \vec{a}(2;4;1)$

33. $\bar{r} = \left(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right); \quad \vec{a}(1;3;1)$

Завдання 8.

Дано поверхню $\overline{r} = \vec{r}(u, v)$ і на ній лінію γ, яка проходить через точку P поверхні.

1) Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці P.

2) Знайдіть координати одиничного вектора нормалі.

3) Напишіть рівняння дотичної до даної кривої в точці P.

4) Обчисліть кривину даної кривої в точці P.

5) Обчисліть нормальну і геодезичну кривини в точці P.

6) Обчисліть повну і середню кривини в точці P.

7) Визначте тип точки P і схематично зобразіть вид поверхні біля цієї точки.

8) Обчисліть кути, які утворює крива з координатними лініями в точці P.

9) Знайдіть головні напрямки на поверхні точці P.

10) Знайдіть асимптотичні напрямки поверхні в точці P (якщо вони є).

11) Знайдіть асимптотичні лінії на поверхні, які проходять через точку P.

12) Знайдіть лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

1. $\overline{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v)$, $\gamma: u = 2u$, $P(1; 2)$;

2. $\overline{r}(u,v) = (u + 2v, 3uv, u^3 + v^3), \quad \gamma: u = u + 1, \ P(2;1);$

3. $\overline{r}(u,v) = (u^3 + v^3, uv, u + 1), \quad \gamma: u = 2u, \ P(1;2);$

4. $\overline{r}(u,v) = (3u, v, u^2 + v^2), \quad \gamma: u = 3u, \ P(2;1);$

5. $\overline{r}(u,v) = (u + v, uv, u^3 + v^3), \quad \gamma: u = v + 2, \ P(2;0);$

6. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad \gamma: u = v^2, \ P(0;0);$

7. $\overline{r}(u,v) = (u + v, 2uv, u^3 + v^3), \gamma: u = v + 1, P(1;0);$

8. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \ \gamma: u = 2v, P(2;1);$

9. $\overline{r}(u,v) = (2u, v, u^2 + v^2), \ \gamma: u = 3u \ , P(1;3);$

10. $\overline{r}(u,v) = (u + v, 2uv, u^3 + v^2), \gamma: u = 2u + 3, \ P(1;5);$

11. $\overline{r}(u,v) = (u + v, 2uv, u^2 + v^3), \gamma: u = v + 2, P(2;0);$

12. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad \gamma: u = v^2, \ P(0;0);$

13. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^3 + v^2), \quad \gamma: u = u^2, \ P(0;0);$

14. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u + v^2), \quad \gamma: u = 2v, \ P(0;0);$

15. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad \gamma: u = 2u, \ P(0;0);$

16. $\overline{r}(u,v) = (u, 2v, u^2 + v^3), \quad \gamma: u = 2v^2, \ P(2;1);$

17. $\overline{r}(u,v) = (2u, v, u^3 + v^2), \quad \gamma: u = u^2, \ P(0;0);$

18. $\overline{r}(u,v) = (3u, 2v, u^2 + v^2), \quad \gamma: u = 2v, \ P(0;0);$

19. $\overline{r}(u,v) = (u, 2v, u + v^2), \quad \gamma: u = 2v, \ P(2;1);$

20. $\overline{r}(u,v) = (u, 2v, u^3 + v^2)$, $\gamma: u = u^2$, $P(0;0)$;

21. $\overline{r}(u,v) = (3u, v, u^2 + v^2)$, $\gamma: u = 3u$, $P(2;1)$;

22. $\overline{r}(u,v) = (u + 2v, 2uv, u^3 + v^3)$, $\gamma: u = u + 2$, $P(0;2)$;

23. $\overline{r}(u,v) = (u^2, v^2, u^2 + v^3)$, $\gamma: u = v$, $P(1;1)$;

24. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v)$, $\gamma: u = 2u$, $P(0;0)$;

25. $\overline{r}(u,v) = (2u + v, uv, u^3 + v^3)$, $\gamma: u = 2u + 1$, $P(1;3)$;

26. $\overline{r}(u,v) = (u + v, 3uv, u^3 + v^3)$, $\gamma: u = u + 2$, $P(1;3)$;

27. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^3 + v^2)$, $\gamma: u = u^2$, $P(1;1)$;

28. $\overline{r}(u,v) = (2u, v, u + v)$, $\gamma: u = 2v$, $P(2;1)$;

29. $\overline{r}(u,v) = (u + v, uv, u^3 + v^3)$, $\gamma: u = v + 2$, $P(2;0)$;

30. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u + v^3)$, $\gamma: u = 3v$, $P(0;0)$;

31. $\overline{r}(u,v) = (2u, 2v, u^3 + v^2)$, $\gamma: u = u^2$, $P(1;1)$;

32. $\overline{r}(u,v) = (u + 2v, uv, u^3 + v^3)$, $\gamma: u = u + 1$, $P(1;2)$;

33. $\overline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $\gamma: u = v$, $P(1;1)$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія / О.А. Борисенко. – Харків, Основа, 2017. – 209 с.

2. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія та топологія / О.О. Пришляк. – Київ, 2018. – 232 с.

3. Гладка Ю.А. Геометрія і топологія / Ю.А. Гладка. – Київ, 2019. – 240 с.

4. Tapp K. Differentional geometry of curves and surfaces / K. Tapp. – Springer, UTM, 2016. – 366 p.

5. Жильцов О.Б. Практикум з вищої математики / О.Б. Жильцов, Г.М. Торбін. – К. : МАУП, 2022. – 286 с.

6. Chern S. Lectures on Differential Geometry / S. Chern. – California : World Scientific, 2020. – 356 с.

7. Abbena E., Gray A., Salamon S. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica / E. Albena, A. Gray, S. Salamon. – New York, Taylor & Francis, 2016.