Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання

М.В. Тимчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ
(Конспект лекцій)

Рівне 2026

УДК 514.7:378.147.31(042.4)

Диференціальна геометрія (Конспект лекцій). Навчально-методичний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач М. В. Тимчук. 2026. 124 с.

Укладач:

Тимчук М. В. – старший викладач кафедри математики та методики її навчання.

Рецензенти:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – к. п. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Петрівський Я. Б. – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 7 від 26 травня 2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 5 від «27» «травня» 2026 р.)

ЗМІСТ

Лекція №1. Векторні функції скалярного аргументу

План

1. Із історії виникнення диференціальної геометрії.
2. Векторні функції скалярного аргументу та їх властивості.
3. Векторні функції у координатах.
4. Векторні функції сталої довжини та напрямку.

Короткий конспект лекції

1. Із історії виникнення диференціальної геометрії.

Диференціальна геометрія – це частина геометрії, яка вивчає геометричні образи, зокрема, криві лінії і поверхні у тривимірному просторі засобами математичного аналізу. Вивчаючи криві і поверхні у просторі, в диференціальній геометрії обмежуються їх невеликими частинками, які знаходяться в околі точки кривої, поверхні.

Цей курс є логічним продовженням курсу аналітичної геометрії. В аналітичній геометрії вивчаються лінійні образи та образи другого порядку, причому засоби вивчення – це вектори, координати, методи лінійної алгебри. Диференціальна геометрія вивчає криві та поверхні значно ширшого класу, основним інструментом при їх вивченні є математичний аналіз та диференціальні рівняння.

Диференціальна геометрія виникла в першій половині XVIII століття і її виникнення пов’язують з іменами Ейлера та Монжа. Диференціальна геометрія виникла одразу після створення диференціального числення і розвивалась паралельно із ним, хоч багатьом поняттям математичного аналізу передували геометричні. Так, поняттю похідної передувало поняття дотичної до графіка.

Перший етап розвитку пов'язаний з іменами Лейбніца і Ейлера. Лейбніц, вивчаючи криві лінії, розглядав стичність кривих. Учні Лейбніца – Якоб і Йоганн Бернуллі знаходять диференціальне рівняння геодезичних ліній. На кінець XVII століття, в основному, була створена теорія кривих ліній. Однією з відомих є праця Клеро «Про криві двоякої кривизни».

Другий етап розвитку диференціальної геометрії зв'язаний з Монжом, який створив нарисну геометрію. У 1795 році він видає свою працю «Застосування аналізу в геометрії», в якій розвиває теорії диференціальної геометрії. У 1827 році Гаусс надрукував працю «Загальні дослідження про криві поверхні». В цій праці теорія диференціальної геометрії викладена досить близько до сучасної. Після цього диференціальна геометрія перестала слугувати областю застосування математичного аналізу і відокремилася в самостійну науку.

Значний вклад у розвиток і становлення диференціальної геометрії внесли також Ньютон, Лагранж, Коші, Френе, Меньє, Міндінг, Петерсон та інші. Певний вклад внесли також і українські геометри, зокрема Погорєлов і Кованцов.

Курс диференціальної геометрії побудований на основі широкого використання теорії векторних функцій скалярного аргументу (векторозначних функцій).

2. Векторні функції скалярного аргументу та їх властивості.

Нехай дано деяку множину $X \subset R$.

Означення: векторною функцією (або вектор-функцією) скалярного аргументу називають відображення точок множини X у тривимірний евклідів простір E^3, яке кожному числу t з множини X ставить у відповідність вектор $\vec{r}(t)$ простору E^3.

Множину X при цьому називають *областю визначення* вектор-функції $\vec{r}(t)$.

Позначатимемо вектор-функції $\vec{r}(t)$, або $r(t)$.

Будемо розглядати такі відображення, у яких X – «хороша» множина. «Хорошими» вважатимемо множини: $[a;b]$, $(a;b)$, $(-\infty;+\infty)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$.

Розглянемо деякі властивості векторних функцій, зауваживши при цьому, що багато властивостей звичайних функцій аналогічно переносяться на векторні функції.

Границя вектор-функції

Означення: сталий вектор $\vec{a}$ називається *границею* векторної функції $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, якщо $|\vec{r}(t)-\vec{a}|$ є нескінченно малою величиною.

Записуватимемо цей факт так: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

Означення: вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається *нескінченно малою* при $t \to t_0$, якщо $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{0}$.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Сума скінченного числа нескінченно малих векторних функцій є нескінченно мала.

Теорема 2. Добуток нескінченно малої вектор-функції на обмежену вектор-функцію є нескінченно мала.

Зауважимо, що теорема 2 має місце і для скалярного, і для векторного добутку вектор-функцій.

Теорема. Якщо при $t \to t_0$ існують границі вектор-функцій $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, та $\vec{w}(t)$ і $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{u}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{b}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{w}(t) = \vec{c}$, то при $t \to t_0$ існують також границі їх суми, векторного, скалярного та мішаного добутків, причому:

1) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{u}(t) + \vec{v}(t) \right) = \vec{a} + \vec{b}$;

2) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) \right) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

3) $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{u}(t), \vec{v}(t)] = [\vec{a}, \vec{b}]$;

4) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t) \right) = \left(\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t) \right)$.

Доведемо 1) і 2).

1) Для доведення скористаємось означенням границі та властивістю модуля суми. Розглянемо вираз

$$\left|\vec{u}(t)+\vec{v}(t)-(\vec{a}+\vec{b})\right|=\left|(\vec{u}(t)-\vec{a})+(\vec{v}(t)-\vec{b})\right|\le\left|\vec{u}(t)-\vec{a}\right|+\left|\vec{v}(t)-\vec{b}\right|.$$

В силу умови теореми, кожен із доданків останньої суми є нескінченно малою. Тоді, згідно теореми 1, їх сума також є нескінченно малою, що і слід було довести.

2) Розглянемо вираз

$$\left|\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)-\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\vec{u}(t)\vec{v}(t)-\vec{a}\vec{b}+\vec{v}(t)\vec{a}-\vec{v}(t)\vec{a}\right|=\left|(\vec{u}(t)\vec{v}(t)-\right.$$

$$\left.-\vec{v}(t)\vec{a})+(\vec{v}(t)\vec{a}-\vec{a}\vec{b})\right|=\left|\vec{v}(t)(\vec{u}(t)-\vec{a})+\vec{a}(\vec{v}(t)-\vec{b})\right|\le$$

$$\le\left|\vec{v}(t)(\vec{u}(t)-\vec{a})\right|+\left|\vec{a}(\vec{v}(t)-\vec{b})\right|=\left|\vec{v}(t)\right|\cdot\left|\vec{u}(t)-\vec{a}\right|+\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{v}(t)-\vec{b}\right|.$$

У останній сумі кожен із доданків є нескінченно малим (як добуток обмеженої на нескінченно малу). Отже, і сама сума також буде нескінченно малою. ■

Неперервність векторної функції

Означення: векторна функція $\vec{r}(t)$ називається *неперервною* в точці t_0, якщо

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0).$$

Означення: векторна функція $\vec{r}(t)$ називається *неперервною на множині* X, якщо вона є неперервною у кожній точці цієї множини.

Означення: векторна функція $\vec{r}(t)$ називається *неперервною*, якщо вона є неперервною на всій її області визначення.

Теорема. Якщо векторні функції $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, та $\vec{w}(t)$ є неперервними в точці t_0, то неперервними у цій точці є також їх сума, скалярний, векторний і мішаний добутки.

(Доведіть самостійно, використовуючи відповідні теореми про границі).

Похідна векторної функції

Нехай на множині X задано вектор-функцію $\vec{r}(t)$.

1) Надамо аргументу скінченного приросту Δt так, щоб не вийти за X .

2) Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t).$$

3) Складемо відношення:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Означення: похідною векторної функції скалярного аргументу називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що останній прямує до нуля, і позначають

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Використовують також позначення $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Зауважимо, що похідна вектор-функції, у свою чергу, є вектор-функцією.

Якщо від похідної векторної функції знайти похідну, то отримаємо другу похідну: $\vec{r}''(t)$. Аналогічно приходять до поняття похідних вищих порядків.

Означення: вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається гладкою класу $C^k, k \geq 1$, якщо вона має неперервні похідні до *k*-го порядку включно.

Означення: вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається гладкою класу C^∞, якщо вона має неперервні похідні усіх порядків.

Означення: вектор-функція $\vec{r}(t)$ називається аналітичною, якщо вона розкладається у ряд Тейлора:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{\vec{r}'(t)}{1!}\Delta t + \frac{\vec{r}''(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \ldots + \frac{\vec{r}^{(n)}(t)}{n!}(\Delta t)^n + R.$$

Теорема. Нехай векторні функції $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ є вектор-функціями класу C^1, а $\lambda(t)$ – скалярна функція того ж класу. Тоді

$$(\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t))' = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t);$$

$$(\lambda(t)\vec{u}(t))' = \lambda(t)\vec{u}'(t);$$

$$(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t))' = \vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t);$$

$$[\vec{u}(t),\vec{v}(t)]' = [\vec{u}'(t),\vec{v}(t)] + [\vec{u}(t),\vec{v}'(t)];$$

$$(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t))' = (\vec{u}'(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)) + (\vec{u}(t),\vec{v}'(t),\vec{w}(t)) + (\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}'(t)).$$

Для векторної функції існують також поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів.

Означення: функцію скалярного аргументу $\vec{v}(t) = \int \vec{r}(t)dt$ називають невизначеним інтегралом від вектор-функції $\vec{r}(t)$, якщо $\vec{v}'(t) = \vec{r}(t)$.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a).$$

Мають місце наступні правила інтегрування вектор-функцій:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^c \vec{r}(t)dt + \int_c^b \vec{r}(t)dt;$$

$$\int \lambda \vec{r}(t)dt = \lambda \int \vec{r}(t)dt;$$

$$\int \vec{a} \cdot \vec{r}(t)dt = \vec{a} \cdot \int \vec{r}(t)dt;$$

$$\int [\vec{a}, \vec{r}(t)]dt = [\vec{a}, \int \vec{r}(t)dt].$$

3. Векторні функції у координатах.

Розглянемо у просторі ортонормований базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ і розглянемо векторну функцію $\vec{r}(t)$ у цьому базисі.

Як відомо, довільний вектор можна розкласти за базисними:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

При цьому коефіцієнти розкладу називатимемо координатами векторної функції, і позначатимемо

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Якщо вважати $x(t), y(t), z(t)$ – неперервними функціями та інтерпретувати t як час, то очевидно, що кінець вектора $\vec{r}(t)$ при зміні t опише деяку просторову криву.

Означення: годографом векторної функції $\vec{r}(t)$ називається геометричне місце точок простору, які є кінцями усіх векторів $\vec{r}(t)$, відкладених від однієї точки.

Теорема. Для того, щоб сталий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ був границею векторної функції $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ при $t \to t_0$, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1; \\ &\lim_{t \to t_0} y(t) = a_2; \\ &\lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Доведення

<u>Необхідність.</u> Дано: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ є границею функції $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Доведемо, що виконуються рівності (1).

Оскільки $\vec{a}$ – границя, то $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$, коли $t \to t_0$. Однак

$$\vec{r}(t) - \vec{a} = (x(t) - a_1, y(t) - a_2, z(t) - a_3),$$

тоді

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \to 0.$$

Звідси маємо, що

$$|x(t) - a_1| \to 0;$$

$$|y(t) - a_2| \to 0;$$

$$|z(t) - a_3| \to 0.$$

А це і означає, що виконуються рівності (1).

Необхідність доведено.

Достатність. Дано: виконуються рівності (1). Довести, що $\vec{a}$ є границею векторної функції $\vec{r}(t)$.

Доведення достатності проводиться у зворотному до необхідності порядку. ■

Для того, щоб функція $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ була диференційованою, достатньо, щоб диференційованими були функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$, причому

$$\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)).$$

Для того, щоб функція $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ була інтегрованою, достатньо, щоб інтегрованими були функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$, причому

$$\int\vec{r}(t)dt=\left(\int x(t)dt,\int y(t)dt,\int z(t)dt\right).$$

Наприклад, якщо $\vec{r}(t)=(2t,\,1,\,3t^2)$, то

$$\vec{r}'(t)=(2,\,0,\,6t),\ \int\vec{r}(t)dt=\left(t^2,t,t^3\right)$$

4. Векторні функції сталої довжини та напрямку.

Нехай $\vec{r}(t)$ – деяка векторозначна функція.

Означення: векторна функція скалярного аргументу $\vec{r}(t)$ називається *функцією сталої довжини*, якщо модуль цієї функції $|\vec{r}(t)|$ є величина стала

$$|\vec{r}(t)|=const.$$

Теорема. Для того, щоб векторна функція $\vec{r}(t)$ була функцією сталої довжини необхідно і достатньо, щоб похідна цієї функції була ортогональною до даної векторної функції, тобто щоб

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0.$$

Доведення

<u>Необхідність.</u> Дано: $\vec{r}(t)$ є функцією сталої довжини. Доведемо, що $\vec{r}(t)\perp\vec{r}\,'(t)$.

Маємо, що

$$|\,\vec{r}(t)\,|=\sqrt{\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)}=const.$$

Звідси

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=const. \qquad (2)$$

Продиференціюємо рівність (2):

$$\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0,$$

звідки

$$2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0,$$

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0,$$

тобто

$$\vec{r}(t)\perp\vec{r}\,'(t).$$

І необхідність доведено.

<u>Достатність.</u> Дано: $\vec{r}(t)\perp\vec{r}\,'(t)$. Довести, що векторна функція $\vec{r}(t)$ є функцією сталої довжини.

Доведення проводиться у зворотному порядку. ■

Означення: векторна функція скалярного аргументу $\vec{r}(t)$ називається *функцією сталого напрямку*, якщо її можна подати у вигляді

$$\vec{r}(t)=f(t)\vec{e},$$

де $f(t)$ – скалярна функція, а $\vec{e}$ – одиничний вектор.

Теорема. Якщо $\vec{r}(t)$ – функція сталого напрямку, то похідна цієї функції є колінеарною до даної векторної функції, тобто що $\vec{r}'(t) \parallel \vec{r}(t)$.

Доведення

Оскільки $\vec{r}(t)$ є функція сталого напрямку, то $\vec{r}(t) = f(t)\vec{e}$. Звідси

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}(t)}{f(t)} \tag{3}$$

і

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{e} + f(t)\vec{e}'$$

або

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{e}.$$

Звідси, враховуючи (3),

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\frac{\vec{r}(t)}{f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)}\vec{r}(t).$$

Позначивши $\dfrac{f'(t)}{f(t)} = \lambda(t)$, отримаємо умову колінеарності векторів $\vec{r}'(t)$ і $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \lambda(t)\vec{r}(t). \blacksquare$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення векторної функції скалярного аргументу, її границі та неперервності.

2. Диференційованість та інтегрованість вектор-функцій. Правила знаходження похідних та інтегралів.

3. Яку вектор-функцію називають гладкою класу C^k? класу C^∞? аналітичною?

4. Введіть поняття координат вектор-функції. Дайте означення годографу. Як диференціювати та інтегрувати вектор-функцію через координати?

5. Векторні функції сталої довжини та напрямку.

Лекція №2. Поняття кривої лінії. Тригранник Френе

План

1. Поняття регулярної просторової кривої. Способи аналітичного задання кривої.

2. Дотична до кривої та її рівняння.

3. Нормальна площина кривої.

4. Стична площина.

5. Бінормаль, спрямна площина, головна нормаль. Їх рівняння.

6. Тригранник Френе.

Короткий конспект лекції

1. Поняття регулярної просторової кривої. Способи аналітичного задання кривої.

Основним поняттям диференціальної геометрії кривих ліній є поняття кривої лінії. Це поняття пройшло довгий шлях формування. Криву лінію в математиці розуміють по-різному: як нерозтяжну нитку; як ГМТ, координати яких задовольняють певне рівняння; як лінію перетину двох поверхонь і т. п.

Введемо поняття кривої лінії як образ деякої множини точок при відображенні. Для цього пригадаємо деякі відомості про відображення множин.

Відображення множини у простір називається відповідність, при якій кожній точці множини (прообразам) відповідають однозначно визначені точки простору (образи).

Відображення називається *ін'єктивним*, якщо різним прообразам відповідають різні образи. Відображення називається *сюр'єктивним*, якщо для кожного образу знайдеться прообраз. Ін'єктивне і сюр'єктивне відображення називають *бієктивним* (або взаємно однозначним).

Крім взаємно однозначних існують також взаємно неперервні відображення.

Означення: відображення f множини X у множину Y називається *неперервним в точці* x, якщо при цьому відображенні точка x відображається в y, а окіл точки x відображається у окіл точки y.

Означення: відображення f називається *неперервним на множині* X, якщо воно є неперервним у кожній точці цієї множини. При неперервному відображенні будь-які дві нескінченно близькі точки відображаються в нескінченно близькі. Якщо для даного неперервного відображення f неперервним є і обернене відображення f^{-1}, то таке відображення називають *взаємно неперервним*.

Означення: відображення f, яке є одночасно взаємно однозначним і взаємно неперервним називають *гомеоморфним* (або *топологічним*).

Введемо тепер поняття елементарної (простої) кривої лінії. Для цього розглянемо деякий відкритий відрізок $(a,b)\in R$. Будемо відображати усі точки цього відрізка у простір за допомогою гомеоморфного відображення. Тоді довільній точці $t\in(a,b)$ ставиться у відповідність точка M простору з координатами $(x;y;z)$, причому x,y,z – залежать від параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Означення: елементарною кривою у просторі називається геометричне місце точок простору, яке є образом відкритого відрізка при гомеоморфному відображенні його у простір.

Означення: кривою лінією у тривимірному евклідовому просторі називають геометричний образ, який складається із скінченного, або зчисленного, числа елементарних кривих.

Зауважимо, що, оскільки в диференціальній геометрії вивчаються властивості фігур у нескінченно малому, то нас в подальшому повністю задовольнить поняття елементарної кривої.

Зауважимо, що рівняння (1) визначають гомеоморфне відображення. Рівності (1) назвемо параметричними рівняннями кривої, тобто маємо перший спосіб задання кривої – параметричний.

Домножимо рівності (1): першу – на вектор $\vec{i}$, другу – на $\vec{j}$, третю – на $\vec{k}$, і додамо їх:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Отримали в результаті рівність двох векторів $\vec{r}$ і $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2}$$

(2) – векторне задання прямої.

Припустимо тепер, що одну із рівностей (1), наприклад першу, нам вдалося розв'язати відносно змінної t: $t = t(x)$. Підставивши значення t у інші два рівняння, отримаємо третій спосіб параметризації:

$$\begin{cases} y = y(t(x)); \\ z = z(t(x)). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases} \tag{3}$$

Всі, вказані вище, способи параметризації пов'язані між собою. Наприклад, якщо в (3) припустити, що $x = t$, то

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x); \\ x = t. \end{cases}$$

Якщо задана параметризація (1), то маємо

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Криву лінію у просторі можна задати ще як лінію перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0; \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

І, нарешті, криву лінію у просторі можна задати як годограф деякої векторної функції скалярного аргументу.

Означення: лінія γ називається гладкою, якщо у формулах (1) функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ є гладкими (мають неперервну похідну, модуль якої не тотожний нулю).

k-регулярною називають функцію, яка має похідні до *k*-го порядку включно, причому модуль першої похідної є відмінним від нуля.

Означення: лінія γ називається *k*-регулярною, якщо в рівності (1) функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ є *k*-регулярними.

Для того, щоб рівності (1) визначали у просторі регулярну криву, достатньо, щоб

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0.$$

2. Дотична до кривої та її рівняння.

Нехай криву γ у просторі задано векторним рівнянням:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2}$$

Зафіксуємо на кривій довільну точку P і означимо дотичну до γ у даній точці (рис. 1).

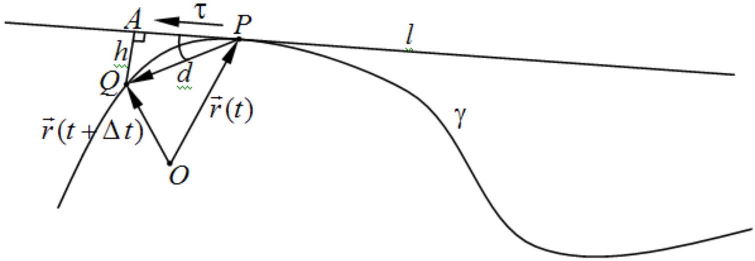


Рис. 1

Розглянемо поряд з P нескінченно близьку їй точку $Q \in \gamma$. Нехай O – полюс (початок системи координат у просторі), тоді точка P відповідає деякому значенню t параметра (вектору $\vec{r}(t)$), а точка Q – значенню $t+\Delta t$. Через точку P проведемо пряму l, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, паралельний до l.

Позначимо: $|\overrightarrow{PQ}| = d$, $\rho(Q,l) = |QA| = h$, $(\overrightarrow{PQ} \,\hat{}\, \vec{\tau}) = \alpha$. Тоді $\dfrac{h}{d} = \sin\alpha$.

Означення: дотичною до кривої γ в точці P називається пряма l, яка проходить через точку P і для якої виконується умова:

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d} = 0. \tag{5}$$

Теорема. Усяка гладка крива у кожній своїй точці має дотичну, причому єдину. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторна параметризація кривої, то дотична у точці P є паралельною до вектора $\vec{r}\,'(t)$.

Доведення

Доведемо, спочатку, що якщо пряма l, яка проходить через точку P, є дотичною, то вона паралельна до $\vec{r}\,'(t)$. При цьому використаємо означенням дотичної.

Знайдемо h і d:

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}| = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|.$$

Щоб знайти h, розглянемо модуль векторного добутку:

$$|[\overrightarrow{PQ},\vec{\tau}]|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cdot|\vec{\tau}|\cdot\sin(\overrightarrow{PQ}\,^{\wedge}\,\vec{\tau})=d\sin\alpha=d\cdot\frac{h}{d}=h.$$

Отже,

$$h=|[\overrightarrow{PQ},\vec{\tau}]|=|[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t),\vec{\tau}].$$

Використавши рівність (5), отримаємо:

$$\lim_{d\to 0}\frac{h}{d}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t),\vec{\tau}]}{|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}|[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t),\vec{\tau}]}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}=$$

$$=\frac{\dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}|[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t),\vec{\tau}]}{\Delta t}}{\dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}{\Delta t}}=\frac{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t},\vec{\tau}\right]\right|}{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\right|}=$$

$$=\frac{\left|\left[\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t},\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{\tau}\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}=\frac{\left|\left[\vec{r}\,'(t),\vec{\tau}\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}=0.$$

Оскільки функція є регулярною, то $|\vec{r}\,'(t)|\neq 0$. Тому

$$\left|\left[\vec{r}\,'(t),\vec{\tau}\right]\right|=0,$$

звідки

$$\left[\vec{r}\,'(t),\vec{\tau}\right]=0,$$

що означає, що $\vec{r}\,'(t)\,||\,\vec{\tau}$.

Доведемо тепер, що якщо пряма проходить через точку P і є паралельною до вектора $\vec{r}\,'(t)$, то вона є дотичною.

Для цього достатньо показати, що має місце рівність (5). Маємо:

$$\lim_{d\to 0}\frac{h}{d}=\frac{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\dfrac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t},\vec\tau\right]\right|}{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t}\right|}=\frac{|[\vec r\,'(t),\vec\tau]|}{|\vec r\,'(t)|}=0$$

(чисельник дорівнює нулю як векторний добуток двох колінеарних векторів).

Припустивши, що у точці існує дві різні дотичні, прийдемо до висновку, що напрямні вектори цих прямих – колінеарні. А це і означає єдиність дотичної. ■

Знайдемо тепер рівняння дотичної для різних способів параметризації кривої.

Нехай маємо криву γ і точку P_0 на ній, O – полюс, l – дотична (рис. 2).

1) Нехай криву задано векторним способом, тобто у виді (2). Розглянемо на дотичній біжучу точку M, а також вектори $\overrightarrow{OP_0}$ і $\overrightarrow{OM}$. Справедливо, що

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0M}.$$

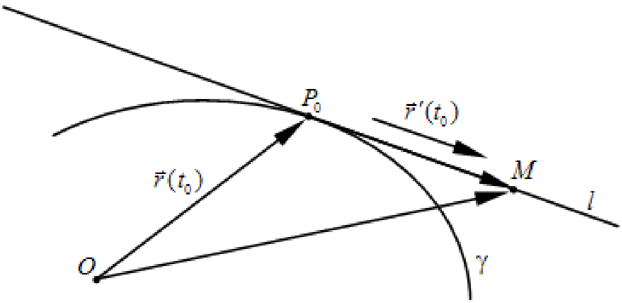


Рис. 2

Враховуючи, що $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(t_0)$, $\overrightarrow{P_0M} \,||\, \vec{r}(t_0)$, отримуємо:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0). \qquad (6)$$

(6) – *векторно-параметричне* рівняння дотичної.

2) Нехай тепер лінія γ задана параметричними рівняннями (1). Виведемо рівняння дотичної в її точці P_0.

Маємо:

$$\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$

Тоді

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Нехай $M(x,y,z)$ – біжуча точка кривої. Тоді $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = (x,y,z)$, і з (6) отримуємо

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0); \\ y = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0); \\ z = z(t_0) + \lambda\, z'(t_0). \end{cases} \qquad (7)$$

(7) – *параметричні* рівняння дотичної.

Визначивши із (7) з кожного із рівнянь і прирівнявши праві частини, отримаємо:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \qquad (8)$$

(8) – *канонічні* рівняння дотичної.

3) Нехай тепер лінія γ задана рівняннями

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases} \qquad (3)$$

Позначивши $x = t$, отримаємо параметризацію

$$\begin{cases} x = t; \\ y = y(x); \\ z = z(x), \end{cases}$$

еквівалентну параметризації (1). Тепер

$$\vec{r}(t_0) = (t_0, y(t_0), z(t_0)),$$

$$\vec{r}\,'(t_0) = (1, y'(t_0), z'(t_0)).$$

Тоді (8) набуде вигляду

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y(x_0)}{y'(x_0)} = \frac{z - z(x_0)}{z'(x_0)}. \tag{9}$$

4) Нехай, нарешті, лінія γ задана як лінія перетину двох поверхонь, тобто у виді

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0; \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Вважаючи x, y та z функціями від t, продиференціюємо кожне з рівнянь (4):

$$\begin{cases} F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t = 0; \\ \Phi_x x_t + \Phi_y y_t + \Phi_z z_t = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Позначимо: $\vec{r}\,' = (x_t, y_t, z_t)$, $\vec{a} = (F_x, F_y, F_z)$, $\vec{b} = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$. Тоді (10) набуде вигляду

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{r}\,' = 0; \\ \vec{b} \cdot \vec{r}\,' = 0, \end{cases}$$

звідки слідує, що $\vec{a} \perp \vec{r}'$ та $\vec{b} \perp \vec{r}'$. Звідси слідує, що

$$\vec{r}' \,\|\, [\vec{a}, \vec{b}] \,|.$$

Врахувавши, що

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} \right),$$

отримали координати напрямного вектора дотичної. Тоді із (8) матимемо рівняння дотичної до кривої, заданої як перетин двох поверхонь:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}.$$

3. Нормальна площина кривої

Означення: нормальною площиною лінії γ називається площина, яка проходить через точку P лінії і перпендикулярна до дотичної в цій точці.

Знайдемо рівняння нормальної площини для різних способів її параметризації.

Припустимо, що криву γ задано векторним способом: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Розглянемо на цій кривій довільну точку P_0, а також дотичну l в цій точці та нормальну площину (рис. 3).

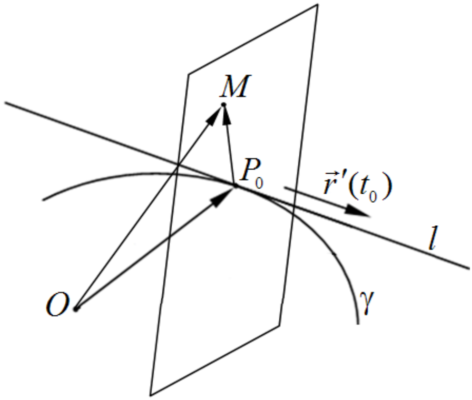


Рис. 3

Нехай $M(x,y,z)$ – біжуча точка нормальної площини. Тоді очевидно, що

$$\overrightarrow{P_0M} \perp \vec{r}'(t_0),$$

$$\overrightarrow{P_0M} = \overrightarrow{OM} - \vec{r}(t_0),$$

звідки

$$(\overrightarrow{OM} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0. \quad (11)$$

(11) – *векторне* рівняння нормальної площини.

Нехай тепер лінія γ задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Тоді

$$\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)),$$

$$\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Враховуючи, що $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$, знаходимо

$$\overrightarrow{OM} - \vec{r}(t_0) = (x - x(t_0), y - y(t_0), z - z(t_0)).$$

З рівняння (11) та застосувавши формулу для обчислення скалярного добутку через координати, отримуємо:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0. \quad (12)$$

(12) – рівняння нормальної площини у випадку параметричного задання кривої.

Нехай тепер маємо параметризацію

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Поклавши $x = t$, матимемо $\vec{r}'(t_0) = (1, y'(t_0), z'(t_0))$, або $\vec{r}'(x_0) = (1, y'(x_0), z'(x_0))$. Тоді з (12) отримуємо наступне рівняння нормальної площини:

$$x - x_0 + y'(x_0)(y - y(x_0)) + z'(x_0)(z - z(x_0)) = 0.$$

У випадку, коли крива γ задана як перетин двох поверхонь:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0; \\ \Phi(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

нормальна площина задається рівнянням:

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

4. Стична площина.

Розглянемо лінію γ. Зафіксуємо на ній точку P і виберемо полюс O. Проведемо через точку P площину Π (рис. 4).

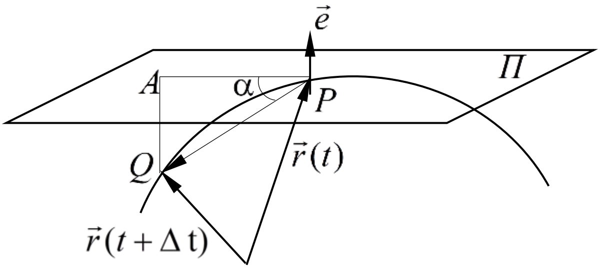


Рис. 4

Нехай точка $Q \in \gamma$ – нескінченно близька до точки P. Відстань QA від точки Q до площини Π позначимо через h. Позначимо також:

$$\overrightarrow{PQ} = d,$$

$$(\overrightarrow{PQ} \widehat{\ } \overrightarrow{PA}) = \alpha,$$

$$|\vec{e}| = 1, \vec{e} \perp \Pi.$$

Означення: стичною площиною кривої γ в точці P називається площина, яка проходить через точку P і для якої виконується умова:

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d^2} = 0. \tag{13}$$

Теорема. Усяка регулярна, принаймні двічі неперервно-диференційована крива, у кожній своїй точці P має стичну площину, яка є або єдиною, або всяка площина, яка містить дотичну до кривої у цій точці, є стичною. Якщо

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторна параметризація кривої, то стична площина є паралельною до векторів $\vec{r}'(t)$ і $\vec{r}''(t)$.

Доведення

Нехай площина Π, яка проходить через точку P, є стичною (тобто для неї виконуються рівності (13)). Доведемо, що $\vec{r}'(t) \| \Pi$ і $\vec{r}''(t) \| \Pi$. Для цього знайдемо h і d:

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|.$$

Розглянемо

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{e} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\overrightarrow{PQ} \,\hat{}\, \vec{e}) = d \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -d \sin\alpha = -d \cdot \frac{d}{h} = -h.$$

Прирівнявши модулі обох частин, отримаємо

$$h = |\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{e}|.$$

Скористаємося рівністю (13):

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|(r(t+\Delta t) - \vec{r}(t)) \cdot \vec{e}|}{|r(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|^2} =$$

та замінимо різницю у чисельнику і знаменнику згідно формули Тейлора:

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left| \left(\frac{\vec{r}'(t)}{1!} \Delta t + \frac{\vec{r}''(t)}{2!} (\Delta t)^2 + \varepsilon_1 (\Delta t)^2 \right) \cdot \vec{e} \right|}{\left| \frac{\vec{r}'(t)}{1!} \Delta t + \varepsilon_2 \Delta t \right|^2} =$$

(тут ε_1 і ε_2 залежать від Δt, і прямують до нуля, коли $\Delta t \to 0$)

(поділимо чисельник і знаменник на $(\Delta t)^2$)

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\left(\frac{\vec r'(t)}{\Delta t}+\frac{\vec r''(t)}{2!}+\varepsilon_1\right)\cdot\vec e\right|}{\left|\vec r'(t)+\varepsilon_2\right|^2}=\frac{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r'(t)\vec e}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r''(t)\vec e}{2!}\right|}{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec r'^2(t)\right|}=$$

$$=\frac{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r'(t)\vec e}{\Delta t}+\frac{\vec r''(t)\vec e}{2!}\right|}{\left|\vec r'^2(t)\right|}=0.$$

Оскільки $\vec r'^2(t)\neq 0$, то остання рівність можлива лише за умови, що $\vec r'(t)\vec e=0$ і $\vec r''(t)\vec e=0$. Звідси й випливає, що $\vec r'(t)\perp\vec e$ і $\vec r''(t)\perp\vec e$, тобто $\vec r'(t)\,||\,\Pi$ і $\vec r''(t)\,||\,\Pi$. Якщо, при цьому, $\vec r'(t)$ і $\vec r''(t)$ – не колінеарні, то стична площина – єдина; якщо ж $\vec r'(t)\,||\,\vec r''(t)$, то усяка площина, яка паралельна до дотичної, є стичною.

Доведемо тепер, що усяка площина, яка проходить через точку P кривої і є паралельною до векторів $\vec r'(t)$ та $\vec r''(t)$, є стичною.

Для цього достатньо показати, що у такому випадку виконується рівність (13). Очевидно, це можна зробити, використовуючи попередні викладки. Маємо:

$$\lim_{d\to 0}\frac{h}{d^2}=\frac{\left|\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r'(t)\vec e}{\Delta t}+\frac{\vec r''(t)\vec e}{2!}\right|}{\left|\vec r'^2(t)\right|}.$$

Оскільки $\vec{r}'(t) \parallel \Pi$, $\vec{r}''(t) \parallel \Pi$ і $\vec{e} \perp \Pi$, то $\vec{r}'(t)\vec{e} = 0$ і $\vec{r}''(t)\vec{e} = 0$. Звідси маємо, що

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{d^2} = 0. \blacksquare$$

Знайдемо тепер рівняння стичної площини для різних способів її параметризації.

Припустимо, що криву γ задано векторним способом: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Розглянемо на цій кривій довільну точку P_0, а також стичну площину Π в цій точці та полюс O (рис. 5).

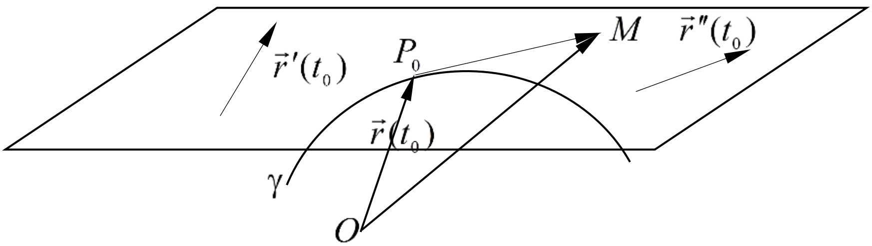


Рис. 5

Нехай $M(x,y,z)$ – біжуча точка стичної площини. Згідно попередньої теореми, $\vec{r}'(t_0) \parallel \Pi$ і $\vec{r}''(t_0) \parallel \Pi$. Тоді вектори $\overrightarrow{P_0M}$, $\vec{r}'(t_0)$ і $\vec{r}''(t_0)$ – компланарні, тобто

$$\left(\overrightarrow{P_0M}, \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)\right) = 0. \tag{14}$$

(14) – *векторне* рівняння стичної площини.

З іншого боку, компланарні вектори є лінійно залежними, тобто

$$\overrightarrow{P_0M} = \lambda \vec{r}'(t_0) + \mu \vec{r}''(t_0).$$

Врахувавши, що $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_0) + \overrightarrow{P_0M}$, отримаємо:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0) + \mu\vec{r}\,''(t_0). \qquad (15)$$

(15) – *векторно-параметричне* рівняння стичної площини.

Нехай тепер криву γ задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Тоді

$$\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)),$$

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

$$\vec{r}\,''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M} = (x, y, z).$$

Підставивши ці значення у (15), отримаємо

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0) + \mu\, x''(t_0); \\ y = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0) + \mu\, y''(t_0); \\ z = z(t_0) + \lambda\, z'(t_0) + \mu\, z''(t_0). \end{cases} \qquad (16)$$

(16) – *параметричні* рівняння стичної площини.

Зауважимо, що у випадку задання кривої рівняннями (1) векторне рівняння (14) можна переписати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

5. Бінормаль, спрямна площина, головна нормаль. Їх рівняння.

Означення: бінормаллю регулярної кривої в точці P_0 називається пряма, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до стичної площини.

Виведемо векторне рівняння бінормалі, взявши за її напрямний вектор $[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]$, а точку P_0 – за початкову. Нехай криву задано як $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тоді

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

$$\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Отже,

$$[\vec{r}', \vec{r}''] = \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right).$$

Тоді *канонічне рівняння бінормалі* матиме вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}}.$$

Одиничний вектор бінормалі позначатимемо $\vec{\beta}$, $\vec{\beta} = \dfrac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}$.

Означення: спрямною площиною регулярної кривої в точці P_0 називається площина, яка визначається дотичною і бінормаллю в цій точці.

Для того, щоб написати рівняння спрямної площини, точку P_0 приймаємо за початкову, а вектори $\vec{r}\,'(t_0)$ і $[\vec{r}\,'(t_0), \vec{r}\,''(t_0)]$ за напрямні. Тоді шукане рівняння матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

(18) – *канонічне рівняння спрямної площини*.

Означення: головною нормаллю кривої в точці P_0 називається пряма, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до спрямної площини.

Із означення випливає, що головна нормаль є перпендикулярною до дотичної і до бінормалі, а також головна нормаль лежить у стичній площині. Одиничний вектор головної нормалі позначають $\vec{\nu}$.

Для того, щоб написати рівняння головної нормалі, потрібно точку P_0 прийняти за початкову, а нормальний вектор спрямної площини $\left[\vec{r}',[\vec{r}',\vec{r}'']\right]$ – за напрямний.

6. Тригранник Френе.

Як встановлено вище, із кожною точкою регулярної кривої можна співставити наступні шість понять:

1) дотична;

2) бінормаль;

3) головна нормаль;

4) стична площина;

5) нормальна площина;

6) спрямна площина.

Означення: геометричний образ, який складається з шести елементів: трьох прямих (дотичної, бінормалі і головної нормалі) та трьох площин (стичної, нормальної і спрямної), які проходять через одну точку кривої, називається *тригранником Френе*.

Тригранник Френе інколи ще називають супроводжуючим тригранником Френе, оскільки тригранник можна побудувати в кожній точці кривої.

Вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ і $\vec{\nu}$, разом з точкою P_0, утворюють канонічний репер тригранника Френе, причому

$$\vec{\nu}=[\vec{\beta},\vec{\tau}],\quad \vec{\beta}=[\vec{\tau},\vec{\nu}],\quad \vec{\tau}=[\vec{\nu},\vec{\beta}].$$

Причому, як встановлено вище

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|},\quad \vec{\beta}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|},\quad \vec{\nu}=\frac{\left[\vec{r}',[\vec{r}',\vec{r}'']\right]}{\left\|\left[\vec{r}',[\vec{r}',\vec{r}'']\right]\right\|}..$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Поняття регулярної кривої та способи її аналітичного задання.

2. Дотична до кривої. Теорема існування і єдиності.

3. Рівняння дотичної для різних способів задання кривої.

4. Нормальна площина кривої та її рівняння.

5. Стична площина кривої, теорема існування. Рівняння стичної площини.

6. Записати рівняння стичної площини (17) у випадку параметризації кривої виду $\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$

7. Бінормаль, спрямна площина та головна нормаль кривої, їх рівняння.

8. Тригранник Френе. Вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ і $\vec{\nu}$.

Лекція №3. Довжина дуги кривої. Кривина кривої

План

1. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація.

2. Кривина кривої.

3. Обчислення кривини кривої у випадку звичайної параметризації.

Короткий конспект лекції

1. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація.

Нехай дано регулярну криву

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

Означення: дугою, або відрізком, кривої (1) називається топологічний образ відрізка $[t_1,t_2]$.

Нехай маємо відрізок $[t_1,t_2]$ і дугу кривої γ. Впишемо в дугу γ ламану g.

Означення: ламана g називається *правильно вписаною* в дугу γ, якщо її вершини слідують у тому ж порядку, як відповідні їм прообрази на $[t_1,t_2]$.

Означення: довжиною дуги γ кривої називається точна верхня грань довжин всіх правильно вписаних ламаних в дугу γ.

Лінію, яка має скінченну довжину, називають *спрямною*.

З курсу математичного аналізу відомо, що якщо лінія задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases} \tag{2}$$

то довжину s дуги γ цієї кривої для $t \in [t_1,t_2]$ можна знайти як

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \tag{3}$$

Враховуючи те, що задання (2) еквівалентне $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, знаходимо $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Тоді (3) набуде вигляду

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt. \tag{4}$$

Розглянемо тепер довжину дуги, як функцію від параметра :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt.$$

Знайдемо похідну по t від обох частин:

$$s'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right| > 0.$$

Отримали, що похідна від довжини дуги є додатною. Це означає, що сама функція $s(t)$ є монотонно зростаючою. Отже, вона є оборотною, тобто існує

$$t = t(s).$$

Підставимо це значення t у (1). Отримаємо

$$\vec{r} = \vec{r}(s).$$

Означення: параметризація, при якій за параметр виступає довжина дуги кривої, називається *натуральною*.

Натуральна параметризація цікава тим, що

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}\,.$$

Доведемо це.

Справді, оскільки $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – це похідна вектора $\vec{r}(s)$, то (як доведено в лекції 2) вектор $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ має напрям одиничного вектора $\vec{\tau}$ дотичної.

Покажемо тепер, що $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$. Із вище викладемо маємо:

$$s'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right|,$$

тобто

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|,$$

звідки

$$ds = \left|d\vec{r}\right|,$$

$$\frac{ds}{ds} = \frac{\left|d\vec{r}\right|}{ds},$$

тобто

$$\frac{\left|d\vec{r}\right|}{ds} = 1. \quad \blacksquare$$

Таким чином, щоб від звичайної параметризації перейти до натуральної, потрібно:

1) знайти довжину дуги кривої, виразивши її як функцію від параметра t;

2) виразити параметр t як функцію від s;

3) у вихідне рівняння кривої замість t підставити отримане в 2) значення.

2. Кривина кривої.

Нехай криву γ задано в натуральній параметризації:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{5}$$

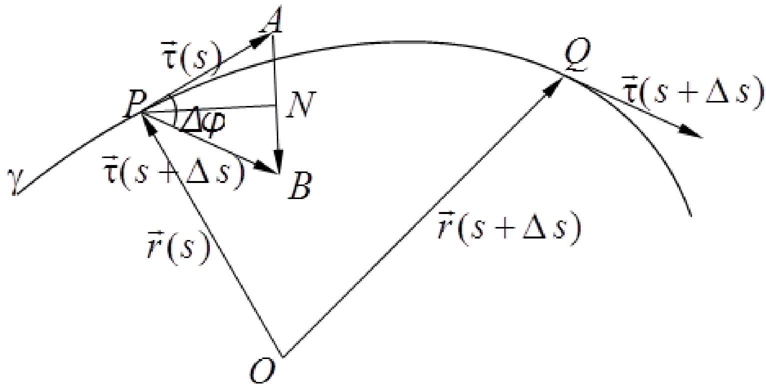


Рис. 1

Зафіксуємо на γ точку P і побудуємо в ній одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}(s)$ (рис. 1). Розглянемо поряд з P нескінченно близьку їй точку $Q \in \gamma$, і в ній також побудуємо одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}(s+\Delta s)$.

Нехай O – полюс, $|\cup PQ| = \Delta s$, $(\vec{\tau}(s)^\wedge \vec{\tau}(s+\Delta s)) = \Delta\phi$ – кут повороту дотичної при переході від точки P кривої до нескінченно близької точки Q.

Означення: кривиною k *кривої* γ в точці P називається границя відношення кута $\Delta\phi$ повороту дотичної до довжини Δs дуги PQ між двома нескінченно близькими точками, у яких побудовані дотичні, при умові, що Δs прямує до нуля:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}.$$

Теорема. Усяка регулярна, принаймні двічі неперервно диференційована, крива у кожній своїй точці має кривину, яка визначається так:

$$k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|.$$

Домовимося позначати: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'$, $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}$. Тоді $k = \left|\ddot{\vec{r}}\right|$.

Доведення

Розглянемо

$$\left|\ddot{\vec{r}}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\right| = \left|\frac{d\,\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\dot{\vec{\tau}}\right| = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)}{\Delta s}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right|}{\Delta s}.$$

Зауважимо, що $\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right| = |\overrightarrow{BA}| = BA$ (рис. 1).

Проведемо у рівнобедреному ΔABP висоту (і медіану) PN. Тоді

$$\frac{BN}{PB} = \sin\frac{\Delta\phi}{2} \Rightarrow BN = PB\cdot\sin\frac{\Delta\phi}{2} = \sin\frac{\Delta\phi}{2};$$

$$BA = 2BN = 2\sin\frac{\Delta\phi}{2}.$$

Таким чином,

$$\left|\ddot{\vec{r}}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{BA}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}\cdot\frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta s\cdot\frac{\Delta\phi}{2}} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = 1\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = k. \quad \blacksquare$$

Теорема (про необхідні і достатні умови рівності кривини нулю). Для того, щоб кривина кривої дорівнювала 0, необхідно і достатньо, щоб крива була прямою (або відрізком прямої).

Доведення

<u>Необхідність.</u> Дано: $k=0$. Доведемо, що лінія є прямою.

Маємо:

$$k=0 \Rightarrow \left|\ddot{\vec{r}}\right| = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} = const = a \Rightarrow \vec{r} = as+b.$$

Отримали лінійний вектор $\vec{r}(s)$, який визначає пряму лінію.

<u>Достатність.</u> Дано: лінія є прямою. Доведемо, що $k=0$.

Пряма лінія визначається лінійною вектор-функцією $\vec{r}(s)=as+b.$. Тоді

$$\dot{\vec{r}} = a \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow k = \left|\ddot{\vec{r}}\right| = 0. \quad \blacksquare$$

3. Обчислення кривини кривої у випадку звичайної параметризації.

Нехай лінія γ задана у звичайній параметризації:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1)$$

Припустимо, що t є функцією від s:

$$t = t(s).$$

Тоді $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$.

Розглянемо вираз

$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| \cdot \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \cdot \sin\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \,\hat{}\, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) = \left|\vec{\tau}\right| \cdot \left|\dot{\vec{\tau}}\right| \cdot \sin\left(\vec{\tau} \,\hat{}\, \dot{\vec{\tau}}\right) =$$

$$= 1 \cdot \left|\dot{\vec{\tau}}\right| \cdot 1 = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|.$$

Тоді

$$k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left|\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\right|.$$

Знайдемо похідні по s як похідні від складеної функції:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{r}\,' \frac{dt}{ds};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}\,' \frac{dt}{ds}\right) = \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,' \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

Таким чином,

$$k = \left|\left[\vec{r}\,' \frac{dt}{ds}, \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,' \frac{d^2 t}{ds^2}\right]\right| = \left|\left[\vec{r}\,' \frac{dt}{ds}, \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right] + \left[\vec{r}\,' \frac{dt}{ds}, \vec{r}\,' \frac{d^2 t}{ds^2}\right]\right| =$$

$$=\left|[\vec{r}',\vec{r}'']\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+[\vec{r}',\vec{r}']\cdot\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\right|=|[\vec{r}',\vec{r}'']|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right|^3=\frac{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|^3}.$$

Врахувавши, що $s'=|\vec{r}'|$, остаточно отримаємо:

$$k=\frac{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3}.$$

Зауваження.

$\vec{\tau}=\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{\tau}}=\ddot{\vec{r}}$.

$\vec{\tau}\perp\dot{\vec{\tau}}$ (як вектор-функція сталої довжини). Оскільки $\dot{\vec{\tau}}$ лежить у стичній площині, то $\dot{\vec{\tau}}\perp\vec{\beta}$. Тому $\dot{\vec{\tau}}\,||\,\vec{\nu}$, тобто $\dot{\vec{\tau}}=\lambda\vec{\nu}$. Тоді $|\dot{\vec{\tau}}|=|\lambda||\vec{\nu}|=|\lambda|$. Звідси: $\dot{\vec{\tau}}=|\dot{\vec{\tau}}|\vec{\nu}$, тобто $\dot{\vec{\tau}}$ – співнаправлений з $\vec{\nu}$.

Отримали, що

$$\dot{\vec{\tau}}=k\vec{\nu}.$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Довжина дуги кривої.

2. Натуральна параметризація кривої.

3. Кривина просторової кривої. Означення, теорема існування.

4. Необхідні і достатні умови рівності кривини нулю.

5. Обчислення кривини у випадку звичайної параметризації.

Лекція №4. Скрут кривої. Формули Френе. Натуральні рівняння кривої

План

1. Скрут просторової кривої.

2. Обчислення скруту у випадку довільної параметризації.

3. Формули Френе.

4. Натуральні рівняння кривої.

5. Плоскі криві. Еволюта та евольвента кривої.

6. Інтегрування натуральних рівнянь плоскої кривої.

Короткий конспект лекції

1. Скрут просторової кривої.

Нехай лінію γ задано в натуральній параметризації:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \qquad (1)$$

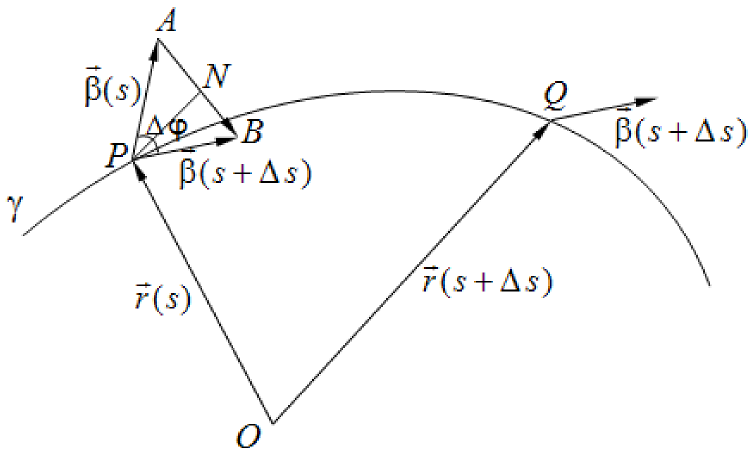


Рис. 1

Розглянемо на γ нескінченно близькі точки P і Q, які відповідають значенням параметра s і $s+\Delta s$ відповідно (рис.1). Побудуємо в кожній з цих точок одиничні вектори бінормалі $\vec{\beta}(s)$ та $\vec{\beta}(s+\Delta s)$.

Нехай O – полюс, $|\cup PQ| = \Delta s$, $(\vec{\beta}(s)^\wedge\vec{\beta}(s+\Delta s)) = \Delta\phi$ – кут повороту бінормалі при переході від точки P кривої до нескінченно близької точки Q.

Означення: *абсолютним скрутом* кривої (1) в точці P називається границя відношення кута $\Delta\phi$ повороту бінормалі до довжини Δs дуги PQ між двома нескінченно близькими точками, у яких побудовані бінормалі, при умові, що Δs прямує до нуля.

Позначатимемо скрут літерою $\varkappa$ – «каппа». Згідно означення,

$$|\varkappa| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Теорема (про існування скруту). Усяка регулярна, принаймні тричі неперервно диференційована крива, у кожній своїй неособливій точці (кривина відмінна від нуля) має абсолютний скрут. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – натуральна параметризація кривої, то

$$|\varkappa| = \frac{|(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})|}{k^2}. \qquad (3)$$

Доведення

Доведемо, спочатку, що $|\varkappa| = |\dot{\vec{\beta}}|$. Справді,

$$|\dot{\vec{\beta}}| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)}{\Delta s}\right|.$$

Згідно рисунку 1,

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)|,$$

$$\frac{AN}{PA} = \sin\frac{\Delta\phi}{2} \Rightarrow AN = PA \cdot \sin\frac{\Delta\phi}{2} = \sin\frac{\Delta\phi}{2};$$

$$AB = 2AN = 2\sin\frac{\Delta\phi}{2}.$$

Таким чином,

$$\left|\dot{\vec{\beta}}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2} \cdot \frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta s \cdot \frac{\Delta\phi}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = = 1 \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = |\aleph|. \qquad (4)$$

Як відомо з лекцій №2 та №3,

$$\vec{\beta} = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]|} = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{k}.$$

Тоді

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{[\ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{k} = \frac{[\dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{k}. \qquad (5)$$

Відомо також, що

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}=0.$$

Звідси

$$\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\tau}+\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\tau}}=0.$$

Оскільки вектор $\dot{\vec{\tau}}=\ddot{\vec{r}}(s)$ належить стичній площині, а вектор $\vec{\beta}$ – ортогональний до неї, то $\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\tau}}=0$. Отримуємо, що

$$\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\tau}=0,$$

тобто

$$\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\tau}. \tag{6}$$

Враховуючи (6) і той факт, що $\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\beta}$ (як вектор-функція сталої довжини), отримуємо, що $\dot{\vec{\beta}}\parallel\vec{\nu}$.

Тоді

$$|\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\nu}|=\left||\dot{\vec{\beta}}|\cdot|\vec{\nu}|\cos(\dot{\vec{\beta}}\,\hat{}\,\vec{\nu})\right|=|\dot{\vec{\beta}}|\cdot 1\cdot 1=|\dot{\vec{\beta}}|.$$

Врахувавши (4), знаходимо, що

$$|\aleph|=|\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\nu}|. \tag{7}$$

У лекції №3 встановлено, що $\dot{\vec{\tau}}=k\vec{\nu}$. Звідси

$$\vec{\nu}=\frac{\dot{\vec{\tau}}}{k}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}. \tag{8}$$

Тоді, врахувавши (5), (7) та (8), знаходимо

$$|\aleph| = \left|\frac{[\dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{k} \cdot \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\right| = \left|\frac{[\dot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]\ddot{\vec{r}}}{k^2}\right| = \frac{|(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})|}{k^2}. \blacksquare$$

Теорема (Критерій рівності скруту нулю). Для того, щоб скрут кривої дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб крива була плоскою, тобто лежала у стичній площині.

Доведення

Необхідність. Дано: абсолютне значення скруту дорівнює нулю. Доведемо, що крива – плоска.

Маємо:

$$|\aleph| = 0 \Rightarrow |\dot{\vec{\beta}}| = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\beta}} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \mathrm{const}.$$

Отримали, що вектор бінормалі $\vec{\beta}$ в кожній точці кривої один і той же. Це означає, що стична площина в кожній точці кривої одна і та ж сама, що, в свою чергу, означає, що крива лежить у стичній площині і є плоскою.

Достатність. Дано, що крива – плоска. Доведемо, що її абсолютний скрут дорівнює нулю.

Так як крива є плоскою, то це означає, що вона лежить у стичній площині. Тоді у кожній точці кривої $\vec{\beta} = \mathrm{const}$. Звідси

$$\dot{\vec{\beta}} = 0 \Rightarrow |\dot{\vec{\beta}}| = |\aleph| = 0.$$

$\blacksquare$

2. Обчислення скруту у випадку довільної параметризації.

Нехай лінію задано рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Припустимо, що $t = t(s)$. Тоді $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$. Звідси

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \vec{r}\,'\frac{dt}{ds};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\vec{r}\,'\frac{dt}{ds}\right)'_s = \left(\vec{r}\,'\right)'_s\frac{dt}{ds} + \vec{r}\,'\left(\frac{dt}{ds}\right)'_s = \vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{dt}{ds} + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2};$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dddot{\vec{r}} = \left(\vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2}\right)'_s = \vec{r}\,'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2\vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2} +$$

$$+\vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}\,'\frac{d^3t}{ds^3} = \vec{r}\,'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}\,'\frac{d^3t}{ds^3}.$$

Підставивши отримані значення у (3) та врахувавши формулу із лекції №3 для обчислення кривини, отримуємо:

$$|\aleph| = \frac{\left|\left(\vec{r}\,'\frac{dt}{ds}, \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2}, \vec{r}\,'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec{r}\,''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}\,'\frac{d^3t}{ds^3}\right)\right|}{\dfrac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}{|\vec{r}\,'|^6}} =$$

$$= \frac{\left|\left(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''\right)\cdot\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^6\right|}{\dfrac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}{\left|\dfrac{ds}{dt}\right|^6}} = \frac{|(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')|}{\dfrac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}{\left|\dfrac{ds}{dt}\right|^6}\cdot\left|\dfrac{ds}{dt}\right|^6} = \frac{|(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')|}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}.$$

Зауважимо, що скруту приписують певний знак. Якщо при русі вздовж кривої у напрямку зростання параметра стична площина обертається навколо дотичної проти годинникової стрілки, то скрут вважається додатним; у протилежному випадку скрут – від’ємний.

Тому в останній рівності опустимо модуль зліва і справа:

$$\aleph = \frac{(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,''')}{\left|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']\right|^2}. \tag{9}$$

3. Формули Френе.

Нехай лінію γ задано в натуральній параметризації:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{1}$$

Тоді для неї мають місце так звані формули Френе, які виражають зв'язок між векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ і $\vec{\nu}$ та їх похідними по натуральному аргументу.

Теорема. Для усякої регулярної кривої (1) мають місце формули Френе:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}; \\ \dot{\vec{\beta}} = -\aleph\vec{\nu}; \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} + \aleph\vec{\beta}. \end{cases} \tag{10}$$

Формула $\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$ випливає із теореми про існування кривини. Формула $\dot{\vec{\beta}} = -\aleph\vec{\nu}$ випливає із теореми про існування абсолютного скруту. Доведемо третю формулу.

Як відомо,

$$\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}].$$

Звідси, з урахуванням двох перших формул у (10),

$$\dot{\vec{\nu}} = [\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}] = [-\aleph\,\vec{\nu}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, k\,\vec{\nu}] = -\aleph[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + k[\vec{\beta}, \vec{\nu}] =$$
$$= -\aleph(-\vec{\beta}) + k(-\vec{\tau}),$$

або

$$\dot{\vec{\nu}} = -k\,\vec{\tau} + \aleph\vec{\beta}. \blacksquare$$

4. Натуральні рівняння кривої.

Нехай задано деяку криву $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Як встановлено вище, кожній її неособливій точці можна співставити кривину $k(s)$ та скрут $\aleph(s)$, кожне з яких певним чином характеризує дану криву. Виникає питання: як характеризують криву лінію обидва ці поняття одночасно?

Виявляється, що якщо дано дві криві однакової довжини, які у відповідних точках мають однакові кривину та скрут, то існує переміщення, яке переводить одну з даних ліній в іншу. Це означає, що кривина і скрут визначають криву лінію з точністю до положення у просторі.

В той же час, якщо задано функції $k = k(s)$ і $\aleph = \aleph(s)$, причому $k > 0$, то завжди існує крива лінія (регулярна), для якої $k(s)$ і $\aleph(s)$ будуть відповідно кривиною і скрутом.

Рівняння виду

$$\begin{cases} k = k(s); \\ \aleph = \aleph(s) \end{cases} \qquad (11)$$

і називають *натуральними рівняннями* кривої.

Натуральні рівняння цікаві тим, що вони не залежать від введеної в просторі системи координат.

Якщо лінія задана у звичайній параметризації, то щоб записати її натуральні рівняння, потрібно знайти кривину і скрут лінії та перейти до натурального параметра.

Зауважимо, що для плоскої кривої натуральні рівняння мають вид

$$\begin{cases} k = k(s); \\ \aleph = 0. \end{cases}$$

5. Плоскі криві. Еволюта та евольвента кривої.

Нехай задано деяку криву лінію $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, причому плоску.

Означення: лінію γ називають *плоскою*, якщо усі її точки належать одній площині.

Плоска лінія завжди лежить у стичній площині! Припустимо, що цією площиною є координатна площина (XOY). Тоді для такої кривої можна ввести деякі поняття, аналогічні поняттям, які вище введено для просторової кривої.

Зокрема, аналогічно виведемо рівняння дотичної в даній точці.

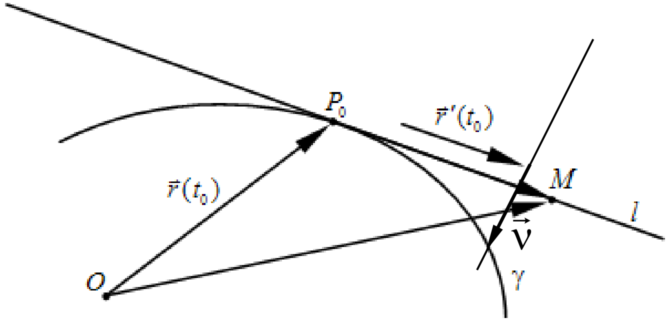


Рис. 2

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0).$$

Перейшовши від $\vec{r} = \vec{r}(t)$ до параметричних рівнянь плоскої кривої:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = 0, \end{cases}$$

отримаємо:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0); \\ y = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0), \end{cases}$$

звідки

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Із елементів тригранника Френе залишається головна нормаль, яку назвемо *нормаллю* до кривої – пряма, яка проходить через дану точку перпендикулярно до дотичної.

$(-y'(t_0); x'(t_0))$ можна вибрати за напрямний вектор нормалі. Тоді її канонічне рівняння матиме вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{-y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Виведемо формулу для знаходження кривини плоскої кривої.

Із лекції №3

$$k = \frac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

У випадку плоскої кривої $\vec{r} = (x(t), y(t), 0)$. Тоді

$$\vec{r}\,' = (x', y', 0),$$

$$\vec{r}\,'' = (x'', y'', 0),$$

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = x'y''\vec{k} - x''y'\vec{k} = (x'y'' - x''y')\vec{k},$$

$$[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] = (0;\ 0;\ x'y'' - x''y'),$$

$$|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (x'y'' - x''y')^2} = |x'y'' - x''y'|$$

і

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Означення: величина, обернена до кривини плоскої кривої, називається *радіусом кривини* кривої, і позначається

$$R = \frac{1}{k}.$$

Нехай маємо деяку криву γ. Побудуємо нормаль в точці P. Відкладемо на ній від точки P відрізок, довжиною $R = \frac{1}{k}$ – отримаємо точку O. Цю точку називають *центром кривини* кривої γ. Цю операцію можна проробити з усіма точками кривої – отримаємо множину центрів кривини.

Означення: еволютою кривої γ називається геометричне місце точок площини, які є центрами кривини даної кривої.

Означення: евольвентою кривої γ називається лінія, по відношенню до якої дана крива γ є еволютою.

6. Інтегрування натуральних рівнянь плоскої кривої.

Розглянемо деяку плоску регулярну криву

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{1}$$

Зауважимо, що для лінії (1) мають місце формули Френе:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\,\vec{\nu}; \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\,\vec{\tau}. \end{cases} \tag{12}$$

Покажемо, що якщо $k = k(s) > 0$ – деяка неперервна функція, то існує єдина (з точністю до положення у просторі) крива, для якої $k(s)$ буде кривиною.

Припустимо, що така лінія дійсно існує. Нехай вона задана рівняннями

$$\begin{cases} x = x(s); \\ y = y(s). \end{cases} \tag{13}$$

Тоді

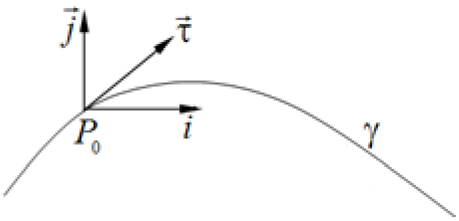
$$\vec{r} = (x(s), y(s));$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau} = (x'(s), y'(s)) \tag{14}$$

і, як встановлено у попередньому пункті,

$$\vec{\nu} = (-y'(s), x'(s)). \tag{15}$$

Розглянемо цю криву у просторі відносно деякої системи координат, початок якої помістимо у точку P_0:



Позначимо $(\vec{\tau}\,^\wedge\,\vec{i}\,) = \alpha$. Тоді

$$\vec{\tau} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}, \tag{16}$$

тобто

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Звідси, враховуючи (14) та (15),

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos\alpha, \\ y'(s) &= \sin\alpha, \\ \vec{\nu} &= (-\sin\alpha, \cos\alpha), \end{aligned} \tag{17}$$

або

$$\vec{\nu} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}. \tag{18}$$

Підставимо (16) та (18) у перше рівняння (12):

$$\frac{d}{ds}\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) = k\left(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right),$$

$$-\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{ds}\vec{i} + \cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{ds}\vec{j} = -\sin\alpha\, k\vec{i} + \cos\alpha\, k\vec{j}.$$

Звідси

$$\frac{d\alpha}{ds} = k,$$

$$d\alpha = k\,ds,$$

$$\alpha = \int_{s_0}^{s} k(s)\,ds. \tag{19}$$

Враховуючи (19), із (17) остаточно знаходимо:

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s}\left(\cos\int_{s_0}^{s} k(s)\,ds\right)ds; \\ y(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s}\left(\sin\int_{s_0}^{s} k(s)\,ds\right)ds. \end{cases} \tag{20}$$

(20) – параметричні рівняння шуканої кривої.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення абсолютного скруту просторової кривої.

2. Сформулюйте і доведіть теорему про існування скруту.

3. Сформулюйте і доведіть критерій рівності скруту нулю.

4. Виведіть формулу для обчислення скруту у випадку довільної параметризації кривої.

5. Які формули називають «формулами Френе»? що вони пов'язують?

6. Який вигляд та зміст мають натуральні рівняння кривої?

7. Яку криву називають плоскою? Виведіть рівняння дотичної, нормалі та формулу для обчислення кривини плоскої кривої.

8. Що таке радіус кривини плоскої кривої? еволюта? евольвента?

9. Відшукання параметричних рівнянь кривої за даною її кривиною $k(s)$.

Лекція №5. Векторні функції двох скалярних аргументів. Поняття поверхні та способи її параметризації

План

1. Векторні функції двох скалярних аргументів та їх властивості.

2. Поверхні в тривимірному евклідовому просторі. Способи параметризації поверхонь.

3. Лінія на поверхні і її рівняння.

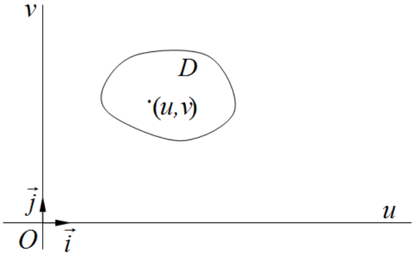
4. Дотична площина до поверхні.

5. Нормаль до поверхні.

Короткий конспект лекції

1. Векторні функції двох скалярних аргументів та їх властивості.

Розглянемо у прямокутній системі координат Ouv на площині деяку область D:



Означення: векторною функцією двох скалярних аргументів u і v називається функція, яка кожній точці $(u,v)\in D$ ставить у відповідність вектор $\vec{r}(u,v)$.

Для векторних функцій двох скалярних аргументів мають місце властивості, аналогічні властивостям скалярних функцій двох аргументів.

Означення: сталий вектор $\vec{a}$ називають границею функції $\vec{r}(u,v)$ в точці (u_0,v_0), якщо при $(u,v)\to(u_0,v_0)$ $|\vec{r}(u,v)-\vec{a}|\to 0$, і позначають

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v)=\vec{a}.$$

Теорема. Якщо в точці (u_0, v_0) існують границі вектор-функцій $\vec{r}_1(u,v)$, $\vec{r}_2(u,v)$ та $\vec{r}_3(u,v)$, і $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}_1 = \vec{a}$, $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}_2 = \vec{b}$, $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}_3 = \vec{c}$, то в цій точці існують також границі їх суми, скалярного, векторного та мішаного добутків, причому:

1) $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{a} + \vec{b}$;

2) $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

3) $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} [\vec{r}_1, \vec{r}_2] = [\vec{a}, \vec{b}]$;

4) $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Означення: векторна функція $\vec{r}(u,v)$ називається *неперервною* в точці (u_0, v_0), якщо

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u_0, v_0).$$

Означення: функція $\vec{r}(u,v)$ називається неперервною на множині D, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Теорема. Якщо функції $\vec{r}_1(u,v)$, $\vec{r}_2(u,v)$ і $\vec{r}_3(u,v)$ є неперервними, то неперервними також є їх сума, скалярний, векторний і мішаний добутки.

Введемо для векторної функції двох аргументів $\vec{r}(u,v)$ поняття частинних похідних.

Зафіксуємо аргумент v, отримаємо функцію однієї змінної u. Надамо аргументу u скінченного приросту Δu і знайдемо відповідний частинний приріст функції:

$$\Delta_u \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u,v).$$

Означення: границю відношення частинного приросту $\Delta_u \vec{r}$ функції до приросту відповідного аргументу при умові, що останній прямує до нуля, називають *частинною похідною* функції $\vec{r}(u,v)$ по аргументу u, і позначають

$$\vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u \vec{r}}{\Delta u}.$$

Якщо зафіксувати аргумент u та провести аналогічні міркування, то отримаємо частинну похідну

$$\vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta_v \vec{r}}{\Delta v}.$$

Функцію $\vec{r}(u,v)$ будемо називати диференційованою, якщо існують її частинні похідні $\vec{r}_u'$ та $\vec{r}_v'$.

Теорема. Якщо функції $\vec{r}_1(u,v)$, $\vec{r}_2(u,v)$ і $\vec{r}_3(u,v)$ – диференційовані по u, то диференційованими по u також будуть їх сума, скалярний, векторний та мішаний добутки, причому:

1) $\dfrac{\partial(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}{\partial u}=\dfrac{\partial\vec{r}_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\vec{r}_2}{\partial u}$;

2) $\dfrac{\partial(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{\partial u}=\dfrac{\partial\vec{r}_1}{\partial u}\vec{r}_2+\vec{r}_1\dfrac{\partial\vec{r}_2}{\partial u}$;

3) $\dfrac{\partial[\vec{r}_1,\vec{r}_2]}{\partial u}=\left[\dfrac{\partial\vec{r}_1}{\partial u},\vec{r}_2\right]+\left[\vec{r}_1,\dfrac{\partial\vec{r}_2}{\partial u}\right]$;

4)

$$\frac{\partial(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)}{\partial u}=\left(\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial u},\vec{r}_2,\vec{r}_3\right)+\left(\vec{r}_1,\frac{\partial\vec{r}_2}{\partial u},\vec{r}_3\right)+\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\frac{\partial\vec{r}_3}{\partial u}\right).$$

Розглянемо тепер векторні функції двох аргументів у координатах.

Нехай у просторі задано прямокутний декартовий репер $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ і вектор $\vec{r}(u,v)$. Тоді $\vec{r}(u,v)$, як відомо, можна розкласти за базисними:

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}.$$

Звідси маємо

$$\vec{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big). \qquad (1)$$

(1) – задання векторної функції через координати.

Теорема. Для того, щоб сталий вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ був границею функції $\vec{r}=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}x(u,v)=a_1;$$

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} y(u,v) = a_2;$$

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} z(u,v) = a_3.$$

Теорема. Для того, щоб векторна функція $\vec{r} = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ була диференційованою, необхідно і достатньо, щоб диференційованими були функції $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$. При цьому

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right).$$

2. Поверхні в тривимірному евклідовому просторі. Способи параметризації поверхонь.

Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат Ouv на площині деяку область D.

Означення: область D називають *елементарною,* якщо вона гомеоморфна відкритому кругу.

Кожна точка області D характеризується впорядкованою парою дійсних чисел (u,v) – так званими криволінійними координатами (координатами Гауса).

Будемо відображати точки області D за допомогою гомеоморфного відображення у простір (рис.1). При цьому кожна точка (u,v) області D відображатиметься у точку простору, яка відносно ортонормованого реперу $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ матиме координати (x, y, z). Очевидно, що координати образу залежать від координат прообразу, тобто:

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v). \end{cases} \qquad (2)$$

Відобразивши таким чином усі точки області D, у просторі отримаємо деяку множину точок, яку назвемо елементарною поверхнею.

Означення: елементарною поверхнею у тривимірному просторі називають геометричне місце точок простору, які є образом елементарної області D при топологічному відображенні її у простір.

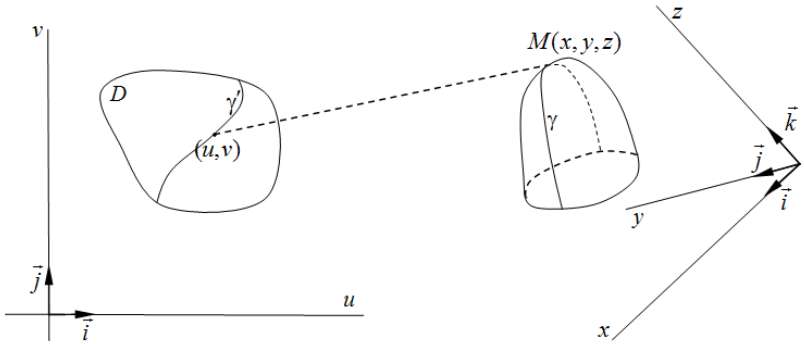


Рис. 1

Означення: поверхнею у просторі називається геометричний образ, який складається із скінченної, або зчисленної, кількості елементарних поверхонь.

Оскільки диференціальна геометрія вивчає властивості геометричних фігур у нескінченно малому, то в подальшому нас повністю задовольнить поняття елементарної поверхні.

Рівності (2) називають *параметричними рівняннями* елементарної поверхні.

Означення: поверхня (2) називається *k*-регулярною, якщо кожна з функцій (2) є *k*-регулярними (диференційовані *k* разів включно по u і по v).

Домножимо перше рівняння (2) на $\vec{i}$, друге – на $\vec{j}$, третє – на $\vec{k}$, і додамо почленно:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Отримали рівність двох векторів:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v). \tag{3}$$

(3) – *векторне* рівняння поверхні.

Поверхню у просторі можна задати і *неявно*:

$$F(x,y,z) = 0. \tag{4}$$

Якщо рівняння (4) удасться розв'язати відносно однієї із змінних, наприклад z , то отримаємо четвертий спосіб задання поверхні:

$$z = f(x,y). \tag{5}$$

Очевидно, (5) є частковим випадком параметризації (2). Справді,

$$\begin{cases} x = u; \\ y = v; \\ z = f(u,v). \end{cases}$$

Поверхню в просторі можна також задати як годограф деякої векторної функції $\vec{r}(u,v)$.

3. Лінія на поверхні і її рівняння.

Розглянемо тепер в області D лінію γ' (рис. 1). Тоді, при відображенні області D в простір, в простір відображається також і лінія γ'. При цьому на поверхні отримаємо деяку множину точок γ, яка є образом лінії γ'.

Означення: лінією γ на поверхні називається множина точок простору, яка є образом лінії $\gamma' \in D$ при топологічному відображенні її у простір.

Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ – рівняння поверхні. Задамо лінію γ' параметричними рівняннями:

$$\gamma' : \begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t). \end{cases} \tag{6}$$

Для того, щоб знайти рівняння лінії γ на поверхні (зовнішні рівняння), потрібно в рівняння поверхні підставити замість u та v їх значення з (6):

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t).$$

Розглянемо похідну вектора $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{r}_u{}' \frac{du}{dt} + \vec{r}_v{}' \frac{dv}{dt}. \tag{7}$$

Звідси

$$d\vec{r} = \vec{r}_u{}'du + \vec{r}_v{}'dv.$$

Вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ у рівності (7) є вектором дотичної до лінії γ. З'ясуємо, що являють собою вектори $\vec{r}_u{}'$ і $\vec{r}_v{}'$.

Для цього в області D розглянемо пряму, паралельну осі Ou, рівняння якої мають вид

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v_0 = \mathrm{const} \end{cases} \tag{8}$$

та пряму, паралельну осі Ov, рівняння якої

$$\begin{cases} u = u_0 = \mathrm{const}; \\ v = v(t). \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, що таких прямих у області D знайдеться безліч, і їх множина утворить прямокутну координатну сітку.

Образ прямої (8) при її гомеоморфному відображенні у простір називають u-лінією, а образ прямої (9) – v-лінією. При відображенні прямолінійна сітка у області D переходить у криволінійну координатну сітку з u- та v-ліній на поверхні. Зауважимо, що через кожну точку на поверхні проходить дві координатні лінії: u та v.

Виявляється, що $\vec{r}_u{}'$ є вектор дотичної до u-лінії, а $\vec{r}_v{}'$ – вектор дотичної до v-лінії.

4. Дотична площина до поверхні.

Розглянемо у просторі регулярну поверхню (рис. 2)

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v). \tag{3}$$

Зафіксуємо на поверхні точку P і проведемо через неї площину Π.

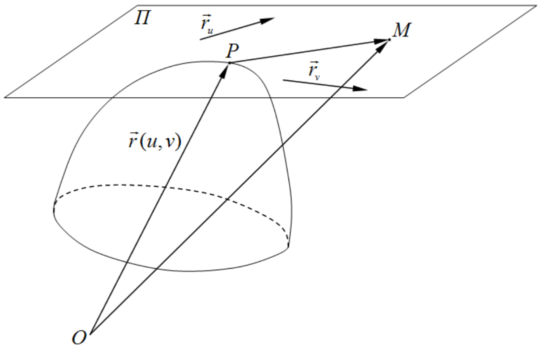


Рис. 2

Означення: площина Π називається *дотичною площиною* до поверхні (3) в точці P, якщо вона проходить через точку P паралельно до векторів $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$.

Якщо в точці P провести дотичні прямі до поверхні, то всі вони лежатимуть в дотичній площині. Виходячи з цього, маємо інше означення: дотична площина – це площина, якій належать усі дотичні прямі до даної поверхні в даній точці.

Знайдемо рівняння дотичної площини для різних способів параметризації поверхні.

Розглянемо у просторі декартову систему координат $Oxyz$. Нехай $M(x, y, z)$ – біжуча точка дотичної площини (рис. 2).

Тоді вектори $\overrightarrow{PM}$, $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$ – компланарні. Отже,

$$(\overrightarrow{PM}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0. \tag{10}$$

Якщо поверхня задана векторним способом (3), то

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} - \vec{r}(u,v)$$

і (10) набуде вигляду

$$\left(\overrightarrow{OM} - \vec{r}(u,v), \vec{r}_u, \vec{r}_v\right) = 0. \tag{11}$$

(11) назвемо *векторним* рівнянням дотичної площини.

З компланарності векторів $\overrightarrow{PM}$, $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$ випливає також, що

$$\overrightarrow{PM} = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v,\ \alpha, \beta \in R,$$

або

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u,v) + \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v. \tag{12}$$

(12) – *векторно-параметричне* рівняння дотичної площини.

Нехай тепер поверхня задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{2}$$

які еквівалентні заданню

$$\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Врахувавши, що $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, з (12) отримаємо:

$$\begin{cases} x = x(u,v) + \alpha\, x_u + \beta\, x_v; \\ y = y(u,v) + \alpha\, y_u + \beta\, y_v; \\ z = z(u,v) + \alpha\, z_u + \beta\, z_v, \end{cases} \tag{13}$$

(13) – *параметричні* рівняння дотичної площини.

Запишемо тепер (11) через координати:

$$\begin{vmatrix} x - x(u,v) & y - y(u,v) & z - z(u,v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

(14) – *канонічне* рівняння дотичної площини.

У випадку, коли поверхня задана явно:

$$z = f(x, y),$$

це задання слід звести до параметризації (2):

$$\begin{cases} x = u; \\ y = v; \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

та скористатися канонічним рівнянням (14).

Матимемо:

$$\begin{cases} x_u = 1; \\ y_u = 0; \\ z_u = f_u = f_x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_v = 0; \\ y_v = 1; \\ z_v = f_v = f_y. \end{cases}$$

Тоді, підставивши у (14), знайдемо

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-f(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$z-f(x_0,y_0)-f_x(x-x_0)-f_y(y-y_0)=0,$$

або

$$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)-z+f(x_0,y_0)=0.$$

Нехай тепер поверхню задано неявно:

$$F(x,y,z)=0. \tag{4}$$

Знайдемо рівняння дотичної площини до поверхні (4) у точці (x_0,y_0,z_0).

Припустимо, що поверхня може бути задана параметрично, а саме

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v). \end{cases} \tag{2}$$

Підставимо (2) у (4):

$$F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0.$$

Продиференціюємо отриману рівність повним чином по u і по v:

$$\begin{cases} F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0, \\ F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Позначимо $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, $\vec{a} = (F_x, F_y, F_z)$. Тоді (15) набуде виду

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{r}_u = 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{r}_v = 0. \end{cases}$$

Звідси слідує, що $\vec{a} \perp \vec{r}_u$ і $\vec{a} \perp \vec{r}_v$, тобто $\vec{a} \,||\, [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, тобто $\vec{a} \perp \Pi$.

Отже, $\vec{a}$ можемо прийняти за нормальний вектор дотичної площини. Тоді її рівняння матиме вид:

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0.$$

5. Нормаль до поверхні.

Означення: нормаллю до поверхні у даній точці P називається пряма, яка проходить через точку P перпендикулярно до дотичної площини.

Знайдемо рівняння нормалі для різних способів параметризації поверхні.

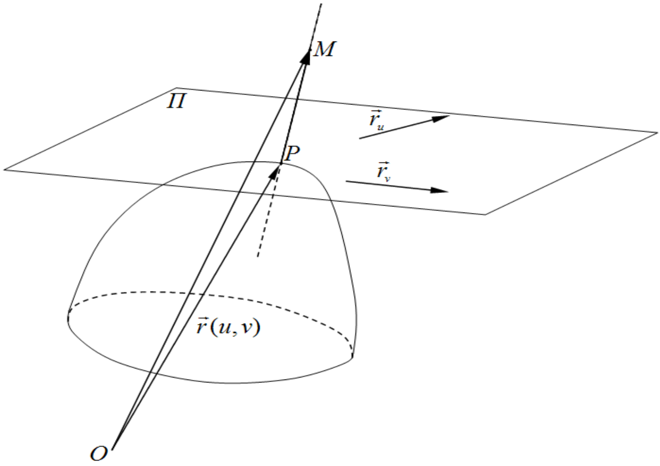


Рис. 3

Нехай $П$ – дотична площина, O – полюс, $M(x, y, z)$ – біжуча точка нормалі.

Нехай поверхню задано векторним способом:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v). \qquad (3)$$

Тоді $\overrightarrow{PM} \parallel [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, тобто $\overrightarrow{PM} = \lambda[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$. З (рис. 3):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM},$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u,v) + \lambda[\vec{r}_u, \vec{r}_v]. \qquad (16)$$

Якщо поверхню задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (2)$$

то

$$\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big), \ \vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u),$$

$$\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

і з (16) отримуємо

$$\begin{cases} x = x(u,v) + \lambda \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}; \\ y = y(u,v) + \lambda \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}; \\ z = z(u,v) + \lambda \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \end{cases} \qquad (17)$$

Виразимо λ із кожного з рівнянь (17) і прирівняємо праві частини:

$$\frac{x - x(u,v)}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y(u,v)}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z(u,v)}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}. \qquad (18)$$

(18) – канонічні рівняння нормалі.

У випадку явного задання поверхні:

$$z = f(x, y),$$

із отриманого вище рівняння дотичної площини

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0$$

знаходимо координати її нормального вектора:

$$\vec{n} = (f_x, f_y, -1),$$

вибравши який у якості напрямного вектора нормалі, знайдемо її рівняння:

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Нехай, нарешті, поверхню задано неявно:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

І у цьому випадку, з виведеного вище рівняння дотичної площини

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

знаходимо координати її нормального вектора:

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z),$$

який вибираємо за напрямний вектор нормалі. Тоді канонічні рівняння нормалі до поверхні у точці (x_0, y_0, z_0) матимуть вид:

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Сформулюйте означення основних понять та теореми теорії векторних функцій двох аргументів.

2. Дайте означення регулярної поверхні. Укажіть відомі вам способи аналітичного її задання.

3. Що називають лінією на поверхні? Що таке *u*- та *v*-лінії? Як ви розумієте поняття криволінійних координат?

4. Дайте означення дотичної площини до поверхні та виведіть різні її рівняння.

5. Дайте означення нормалі до поверхні та виведіть різні її рівняння.

Лекція №6. Перша квадратична форма і її застосування

План

1. Перша квадратична форма.
2. Застосування першої квадратичної форми.

2.1. Обчислення довжини дуги кривої на поверхні.

2.2. Обчислення кута між двома кривими на поверхні.

2.3. Обчислення площі куска поверхні.

Короткий конспект лекції

1. Перша квадратична форма.

У диференціальній геометрії поверхонь досить важливе значення мають поняття трьох квадратичних форм:

1) $d\vec{r}^{\,2}$;

2) $-d\vec{r}\cdot d\vec{n}$;

3) $d\vec{n}^{\,2}$.

Тут $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні.

У даному курсі детально розглядатимемо перші дві з них.

Означення: першою квадратичною формою поверхні $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ називається квадрат повного диференціала вектора $\vec{r}$, і позначають

$$\phi_1 = d\vec{r}^{\,2}.$$

Знайдемо повний вираз для першої квадратичної форми:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv;$$

$$\varphi_1 = d\vec{r}^{\,2} = \left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2.$$

Введемо позначення:

$$E = \vec{r}_u^{\,2},\ F = \vec{r}_u\vec{r}_v,\ G = \vec{r}_v^{\,2}.$$

Тоді

$$\varphi_1 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

E, F, G – коефіцієнти Гауса першої квадратичної форми.

Знайдемо коефіцієнти Гауса для різних форм параметризації.

Нехай поверхню задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

Тоді

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u),\ \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

і

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\ \ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Якщо ж поверхню задано явно:

$$z = f(x,y),$$

то

$$E = 1 + f_x'^2,\ \ F = f_x' f_y',\ G = 1 + f_y'^2.$$

2. Застосування першої квадратичної форми.

2.1. Обчислення довжини дуги кривої на поверхні.

Нехай на поверхні $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ задано деяку лінію

$$\gamma:\begin{cases}u=u(t);\\ v=v(t).\end{cases}$$

Знайдемо довжину лінії γ між точками $P(t_1)$ і $P(t_2)$. Для цього використаємо відому з лекції №3 формулу

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{r}\,'(t)\right|dt. \tag{1}$$

Знайдемо зовнішнє рівняння лінії γ, тобто рівняння лінії на поверхні:

$$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))=\vec{r}(t).$$

Тоді

$$\vec{r}\,'(t)=\frac{d\vec{r}}{du}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}=\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt},$$

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{\left(\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt}\right)^2}=\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\frac{du^2}{dt^2}+2\vec{r}_u\vec{r}_v\frac{dudv}{dt^2}+\vec{r}_v^{\,2}\frac{dv^2}{dt^2}}.$$

Підставимо вираз для $|\vec{r}\,'(t)|$ у (1):

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\frac{du^2}{dt^2}+2\vec{r}_u\vec{r}_v\frac{dudv}{dt^2}+\vec{r}_v^{\,2}\frac{dv^2}{dt^2}}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{\vec{r}_u^{\,2}du^2+2\vec{r}_u\vec{r}_vdudv+\vec{r}_v^{\,2}dv^2}{dt^2}}dt=$$

$$=\int_\gamma\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}du^2+2\vec{r}_u\vec{r}_vdudv+\vec{r}_v^{\,2}dv^2}=\int_\gamma\sqrt{\varphi_1}.$$

Зауважимо, що всі поняття на поверхні, які виражаються через першу квадратичну форму, належать до внутрішньої геометрії поверхонь. Внутрішньою геометрією поверхні називається геометрія, яка вивчає властивості геометричних об’єктів на поверхні засобами тільки самої поверхні.

2.2. Обчислення кута між двома кривими на поверхні.

Розглянемо деяку регулярну поверхню

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v),$$

на якій зафіксуємо точку $P(u,v)$. Виберемо на ній дві лінії γ і γ', які проходять через точку P (рис. 1).

Означення: напрямом $(du:dv)$ на поверхні в точці P називається напрям, який визначається вектором $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$.

Нехай лінія γ має напрям $(du:dv)$, а лінія γ' – напрям $(\partial u:\partial v)$, який визначається вектором $\partial\vec{r} = \vec{r}_u \partial u + \vec{r}_v \partial v$. Вектор $d\vec{r}$ є дотичним до лінії γ в точці P, а $\partial\vec{r}$ – дотичним до лінії γ'.

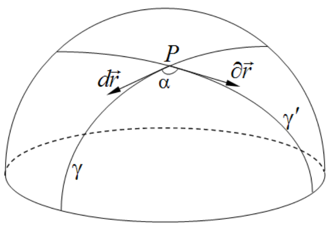


Рис. 1

Означення: кутом між двома лініями γ і γ' на поверхні називається кут між напрямами цих ліній.

Знайдемо кут між лініями γ і γ' як кут між векторами $d\vec{r}$ і $\partial\vec{r}$:

$$\cos(d\vec{r}\,\hat{}\,\partial\vec{r}) = \frac{d\vec{r}\cdot\partial\vec{r}}{|d\vec{r}|\cdot|\partial\vec{r}|}. \tag{2}$$

Виразимо

$$d\vec{r}\cdot\partial\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \partial u + \vec{r}_v \partial v) = \vec{r}_u^{\,2} du\partial u + \vec{r}_u\vec{r}_v du\partial v + \vec{r}_u\vec{r}_v \partial u dv +$$

$$+\vec{r}_v^{\,2} dv\partial v = \vec{r}_u^{\,2} du\partial u + \vec{r}_u\vec{r}_v(du\partial v + \partial u dv) + \vec{r}_v^{\,2} dv\partial v =$$

$$= Edu\partial u + F(du\partial v + \partial u dv) + Gdv\partial v,$$

$$|d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}} = \sqrt{d\vec{r}^{\,2}} = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

$$|\partial\vec{r}| = \sqrt{E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2}.$$

Підставимо отримані вирази у (2), остаточно отримаємо:

$$\cos(d\vec{r}\,\hat{}\,\partial\vec{r}) = \frac{Edu\partial u + F(du\partial v + \partial u dv) + Gdv\partial v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2}},$$

або

$$\cos\alpha = \frac{\phi_1(d,\partial)}{\sqrt{\phi_1(d)}\cdot\sqrt{\phi_1(\partial)}}.$$

Оскільки кут між двома лініями на поверхні виражається через коефіцієнти першої квадратичної форми, то поняття кута належить до понять внутрішньої геометрії поверхні. Коефіцієнти Гауса визначаються в точці перетину ліній.

Припустимо, що лінії γ і γ' є координатними лініями на поверхні (u - та v -лініями відповідно):

$$\gamma:\begin{cases}u=u(t);\\ v=\text{const},\end{cases}\qquad \gamma:(du:0),\qquad dv=0.$$

$$\gamma':\begin{cases}u=\text{const};\\ v=v(t),\end{cases}\qquad \gamma':(0:\partial v),\qquad \partial u=0.$$

Тоді

$$\cos\alpha=\frac{Fdu\partial v}{\sqrt{Edu^2}\cdot\sqrt{G\partial v^2}}=\frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}.$$

З'ясуємо, за яких умов координатна сітка на поверхні буде ортогональною.

Якщо сітка ортогональна, то $\cos\alpha=0$. Звідси:

$$\cos\alpha=0\Rightarrow\frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}=0\Rightarrow F=0.$$

Таким чином, із останньої формули випливає, що координатна сітка на поверхні буде ортогональною, якщо другий коефіцієнт першої квадратичної форми дорівнював нулю.

2.3. Обчислення площі куска поверхні.

Нехай дано деяку регулярну поверхню

$$\vec r=\vec r(u,v).$$

Розглянемо на ній деяку область Q, обмежену кусково-гладкою лінією (рис. 2) та поставимо задачу знайти площу цієї області.

Розіб’ємо область Q довільним чином кусково-гладкими кривими на n частинних областей q_i. В області q_i зафіксуємо довільну точку P_i і побудуємо в ній дотичну площину до поверхні. Спроектуємо область q_i на дотичну площину – отримаємо деяку область q_i'.

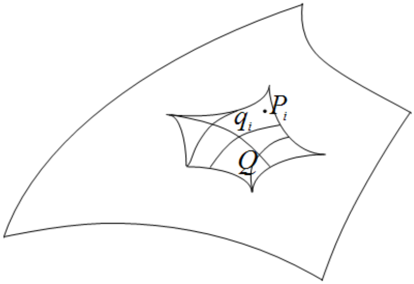


Рис. 2

Якщо область q_i – нескінченно мала (розбиття досить густе), то таке проектування буде взаємно однозначним, тобто області q_i і q_i' будуть мало відрізнятися. Якщо позначимо через $S(q_i)$ площу області q_i, а через $S(q_i')$ – площу області q_i', то різниця між цими площами буде досить мала.

Спроектувавши всі частинні області на відповідні дотичні площини, площу S області Q можна знайти як границю суми площ проекцій:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S(q_i').$$

З курсу математичного аналізу відомо, що якщо поверхня задана явно:

$$z = f(x, y),$$

то площу куска цієї поверхні можна знайти за формулою

$$S = \iint\limits_{(Q)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy. \qquad (3)$$

Явне задання еквівалентне параметризації

$$\begin{cases} x = u; \\ y = v; \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Тоді

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2$$

і

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2 + f_x^2 f_y^2 - f_x^2 f_y^2 =$$
$$= (1 + f_x^2) + f_y^2(1 + f_x^2) - f_x^2 f_y^2 =$$
$$= (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = EG - F^2.$$

Підставивши у (3), отримаємо

$$S = \iint\limits_{(Q)} \sqrt{EG - F^2}\, dxdy.$$

З'ясуємо геометричний зміст виразу $\sqrt{EG - F^2}$:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \cos(\vec{r}_u \,{}^\wedge\, \vec{r}_v);$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot |\sin(\vec{r}_u \,{}^\wedge\, \vec{r}_v)|;$$

$$(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 + |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 = \vec{r}_u^{\,2} \cdot \vec{r}_v^{\,2};$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 = \vec{r}_u^{\,2} \cdot \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

Отже, вираз $\sqrt{EG - F^2}$ виражає площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$ поверхні.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення першої квадратичної форми поверхні та виведіть для неї повний вираз.
2. Виведіть формулу для обчислення довжини дуги кривої на поверхні.
3. Дайте означення напряму у точці на поверхні та кута між кривими на поверхні.
4. Як знайти кут між координатними лініями на поверхні? За яких умов координатна сітка є ортогональною?
5. Введіть поняття площі куска поверхні. Виведіть формулу для знаходження площі у випадку явного задання поверхні.

Лекція №7. Друга квадратична форма. Нормальна кривина поверхні

План

1. Друга квадратична форма.
2. Кривина кривої на поверхні. Нормальна кривина поверхні. Теорема Меньє.
3. Індикатриса кривини. Класифікація точок на поверхні.

Короткий конспект лекції

1. Друга квадратична форма.

Розглянемо регулярну поверхню

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v),$$

точку $P(u,v)$ на ній, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці P.

Тоді

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Означення: другою квадратичною формою поверхні називають вираз

$$\phi_2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{n}.$$

Знайдемо більш детальний вираз для ϕ_2:

$$\phi_2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = -(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) =$$

$$= (-\vec{r}_u \vec{n}_u) du^2 + (-\vec{r}_u \vec{n}_v - -\vec{r}_v \vec{n}_u) du dv + (-\vec{r}_v \vec{n}_v) dv^2.$$

Введемо позначення:

$$L = -\vec{r}_u \vec{n}_u,\ 2M = -\vec{r}_u \vec{n}_v - \vec{r}_v \vec{n}_u,\ N = -\vec{r}_v \vec{n}_v.$$

Тоді

$$\phi_2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2. \tag{1}$$

Тут L, M, N – коефіцієнти Гауса другої квадратичної форми. Знайдемо вирази для обчислення даних коефіцієнтів.

Розглянемо добуток

$$d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0.$$

Звідси

$$d(d\vec{r}\cdot\vec{n})=0,$$

$$d^2\vec{r}\cdot\vec{n}+d\vec{r}\cdot d\vec{n}=0,$$

$$-d\vec{r}\cdot d\vec{n}=d^2\vec{r}\cdot\vec{n}.$$

Отже,

$$\varphi_2=d^2\vec{r}\cdot\vec{n}. \tag{2}$$

Знайдемо

$$d^2\vec{r}=d(d\vec{r})=d(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)=\vec{r}_{uu}du^2+\vec{r}_{uv}dudv+$$

$$+\vec{r}_u d^2u+\vec{r}_{vv}dv^2++\vec{r}_{uv}dudv+\vec{r}_v d^2v. \tag{3}$$

Підставивши (3) у (2), отримаємо:

$$\varphi_2=(\vec{r}_{uu}du^2+2\vec{r}_{uv}dudv+\vec{r}_{vv}dv^2+\vec{r}_u d^2u+\vec{r}_v d^2v)\cdot\vec{n}=$$

$$=(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n})du^2+2(\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n})dudv+$$

$$+(\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n})dv^2+(\vec{r}_u\cdot\vec{n})d^2u+(\vec{r}_v\cdot\vec{n})d^2v.$$

Врахувавши, що

$$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0,\ \ \vec{r}_v\cdot\vec{n}=0,$$

отримаємо

$$\varphi_2=(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n})du^2+2(\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n})dudv+(\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n})dv^2. \tag{4}$$

Порівнявши (4) і (1), знаходимо:

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n},\ \ M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n},\ \ N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}. \tag{5}$$

Коефіцієнти Гауса другої квадратичної форми можна виразити також через коефіцієнти першої квадратичної форми. Маємо

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Підставимо вираз для $\vec{n}$ у (5):

$$\begin{aligned} L &= \frac{\vec{r}_{uu} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= \frac{\vec{r}_{uv} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= \frac{\vec{r}_{vv} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Припустимо, що поверхню задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v); \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

Знайдемо, за формулами (6), коефіцієнти Гауса другої квадратичної форми:

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \; M = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \; N = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

У випадку, якщо поверхня задана явно

$$z = f(x, y),$$

маємо:

$$\begin{cases} x = u; \\ y = v; \\ z = f(u,v). \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x_u = 1; \\ y_u = 0; \\ z_u = f_u, \end{cases} \quad \begin{cases} x_v = 0; \\ y_v = 1; \\ z_v = f_v, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{uu} = 0; \\ y_{uu} = 0; \\ z_{uu} = f_{uu}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{uv} = 0; \\ y_{uv} = 0; \\ z_{uv} = f_{uv}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{vv} = 0; \\ y_{vv} = 0; \\ z_{vv} = f_{vv}, \end{cases}$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2) - f_u^2 f_v^2}} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}};$$

$$M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}; \ N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$$

або

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}; \ M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}; \ N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

2. Кривина кривої на поверхні. Нормальна кривина поверхні. Теорема Меньє.

Розглянемо деяку регулярну поверхню

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v).$$

На даній поверхні розглянемо лінію γ, віднесену до натуральної параметризації:

$$\begin{cases} u = u(s), \\ v = v(s). \end{cases}$$

Зафіксуємо також точку P на поверхні, через яку проходить лінія γ. Нехай $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці P, $\vec{\nu}$ – одиничний вектор бінормалі.

Знайдемо зовнішнє рівняння лінії γ. Для цього в рівняння поверхні замість u і v підставимо їх значення з рівнянь лінії γ:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s)) = \vec{r}(s). \qquad (7)$$

Для лінії (7) мають місце формули Френе, зокрема

$$\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}. \qquad (8)$$

Врахувавши, що

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds},$$

знаходимо

$$\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right) = \left(\vec{r}_{uu} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{uv} \frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds} +$$

$$+ \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\vec{r}_{vu} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv} \frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} =$$

$$= \vec{r}_{uu} \frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv} \frac{dudv}{ds^2} + \vec{r}_{vv} \frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Підставивши у (8), отримуємо

$$k\vec{\nu}=\vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2}+2\vec{r}_{uv}\frac{dudv}{ds^2}+\vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2}+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Домножимо останню рівність на $\vec{n}$:

$$k(\vec{\nu}\cdot\vec{n})=\left(\vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2}+2\vec{r}_{uv}\frac{dudv}{ds^2}+\vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2}+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\right)\cdot\vec{n}.$$

Врахувавши, що $\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0$, $\vec{r}_v\cdot\vec{n}=0$, отримаємо

$$k\cdot|\vec{\nu}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\left(\vec{\nu}\ {}^\wedge\ \vec{n}\right)=(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n})\frac{du^2}{ds^2}+2(\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n})\frac{dudv}{ds^2}+(\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n})\frac{dv^2}{ds^2},$$

або

$$k\cos\varphi=L\frac{du^2}{ds^2}+2M\frac{dudv}{ds^2}+N\frac{dv^2}{ds^2}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{ds^2}.$$

Врахувавши, що $ds=d\vec{r}$, отримуємо

$$k\cos\varphi=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{d\vec{r}^{\,2}}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

$k\cos\varphi$ назвемо *нормальною кривиною* поверхні в точці P, і позначимо

$$k_n=k\cos\varphi=\frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2M\left(\frac{du}{dv}\right)+N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dv}\right)+G}.$$

Із останньої рівності випливає, що права частина залежить лише від напряму. Тому в даній точці в даному напрямку нормальна кривина поверхні є величина стала:

$$k_n=k\cos\varphi=\text{const}. \tag{9}$$

Рівність (9) виражає суть теореми Меньє.

Теорема (Меньє). Нормальна кривина поверхні в даному напрямку є величина стала:

$$k_n = \text{const}.$$

Виявляється, що в даній точці з точністю до знаку нормальна кривина поверхні в даному напрямку збігається із кривиною нормального перерізу у даному напрямку.

Означення: нормальним перерізом поверхні називається переріз даної поверхні площиною, яка є перпендикулярною до дотичної площини в даній точці в даному напрямку.

3. *Індикатриса кривини. Класифікація точок на поверхні.*

Розглянемо регулярну, принаймні двічі неперервно диференційовану, поверхню $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ і точку P на ній.

В точці P побудуємо дотичну площину до поверхні. Знайдемо нормальну кривину k_n поверхні в точці P у всіх напрямках. У дотичній площині від точки P в кожному напрямку відкладемо відрізок, довжиною $\dfrac{1}{\sqrt{|k_n|}}$. Кінці цих відрізків у дотичній площині утворять деяку множину точок, яку назвемо *індикатрисою кривини (індикатрисою Дюпена)*.

Знайдемо рівняння індикатриси кривини. Для цього у дотичній площині введемо афінну систему координат з початком у точці P і координатними векторами $\vec{r}_u$ та $\vec{r}_v$.

Розглянемо радіус-вектор $\overrightarrow{PM}$:

$$\overrightarrow{PM} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v. \tag{10}$$

В той же час,

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv}{|\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv|}. \tag{11}$$

Звідси

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv}{|\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv|}.$$

Тоді

$$x^2\vec{r}_u^{\,2} + 2xy\vec{r}_u\vec{r}_v + y^2\vec{r}_v^{\,2} = \frac{\vec{r}_u^{\,2}du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^{\,2}dv^2}{|k_n| \cdot |\vec{r}_u^{\,2}du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^{\,2}dv^2|}. \tag{12}$$

Врахувавши, що $k_n = \dfrac{\phi_2}{\phi_1}$, з (12) знаходимо:

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{\phi_1}{\left|\frac{\phi_2}{\phi_1}\right| \cdot |\phi_1|} = \frac{\phi_1}{|\phi_2|}. \tag{13}$$

З рівностей (10), (11) випливає, що $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{x}{y}$. Врахувавши це, підставимо у (13) значення ϕ_1 та ϕ_2:

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{\left|Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2\right|}=\frac{Ex^2+2Fxy+Gy^2}{\left|Lx^2+2Mxy+Ny^2\right|}.$$

Звідси отримуємо рівняння індикатриси:

$$\left|Lx^2+2Mxy+Ny^2\right|=1.$$

З рівняння випливає, що індикатриса є лінією другого порядку (або об'єднання таких кривих). Вигляд цієї лінії залежить від виразу $LN-M^2$. Якщо:

1) $LN-M^2>0$, то індикатрисою кривини є еліпс, а точку P називають *еліптичною* точкою;

2) $LN-M^2<0$, то індикатрисою кривини є гіпербола (дві спряжені гіперболи), а точку P називають *гіперболічною*;

3) $LN-M^2=0$, то індикатрисою кривини є пара паралельних прямих, а точку P називають *параболічною*.

Якщо нормальна кривина у даній точці у всіх напрямках однакова (індикатрисою кривини є коло), то таку точку називають *омбілічною*. Це можливо лише тоді, коли коефіцієнти Гауса першої і другої квадратичної форм є пропорційними, тобто

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}. \tag{14}$$

(14) – умова для знаходження координат омбілічних точок.

Класифікацію точок на поверхні можна також зробити, виходячи із того, як веде себе поверхня відносно дотичної площини в даній точці.

1) Якщо поверхня розміщується відносно дотичної площини в точці P по один бік від дотичної, то таку точку P називають *еліптичною*.

2) Якщо поверхня розміщується по різні боки від дотичної площини в точці P, то точку P називають *гіперболічною*.

3) Якщо дотична площина до поверхні в даній точці P дотикається до поверхні по прямій, або є елементом поверхні, то точка P називається *параболічною*.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення другої квадратичної форми поверхні та виведіть для неї повний вираз.

2. Виразіть коефіцієнти Гауса другої квадратичної форми через коефіцієнти першої квадратичної форми для різних випадків задання поверхні.

3. Дайте означення нормальної кривини поверхні та виведіть вираз для її знаходження.

4. Сформулюйте теорему Меньє.

5. Дайте означення індикатриси кривини та виведіть її рівняння.

6. Як здійснюють класифікацію точок поверхні?

Лекція №8. Головні кривини та головні напрямки на поверхні

План

1. Головні кривини на поверхні. Повна і середня кривина.

2. Головні напрямки на поверхні. Лінії кривини.

3. Класифікація точок поверхні, пов'язана із поняттям стичного параболоїда поверхні.

Короткий конспект лекції

1. Головні кривини на поверхні. Повна і середня кривина.

Нехай дано регулярну поверхню

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Означення: головними кривинами поверхні в даній точці називаються екстремальні значення нормальної кривини.

Для визначення головних кривин поверхні скористаємося формулою для обчислення нормальної кривини поверхні:

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Звідси

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = k_n(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2),$$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 - k_n(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) = 0.$$

Знайдемо похідну від обох частин по du та по dv:

$$\begin{cases} 2Ldu + 2Mdv - k_n(2Edu + 2Fdv) = 0, \\ 2Mdu + 2Ndv - k_n(2Fdu + 2Gdv) = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} Ldu + Mdv - k_n(Edu + Fdv) = 0, \\ Mdu + Ndv - k_n(Fdu + Gdv) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} (L - k_n E)du + (M - k_n F)dv = 0, \\ (M - k_n F)du + (N - k_n G)dv = 0. \end{cases}$$

Отримали однорідну систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими du і dv, яка відносно du і dv має ненульові розв'язки. Це можливо, коли визначник основної матриці системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Отримали рівняння, з якого і визначимо екстремальні значення нормальної кривини $k_{n1} = k_1$, $k_{n2} = k_2$.

Зауважимо, що оскільки, в загальному випадку, рівняння (2) є рівнянням другого степеня, то воно має два розв'язки.

Розкриємо визначник

$$LN - k_n LG - k_n EN + k_n^2 EG - M^2 + 2k_n MF - k_n^2 F^2 = 0,$$

$$(EG - F^2)k_n^2 - (LG - 2MF + EN)k_n + (LN - M^2) = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) – квадратне відносно k_n. За теоремою Вієта:

$$k_1 + k_2 = \frac{LG - 2MF + EN}{EG - F^2},$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Означення: повною, або гаусовою, кривиною поверхні називається добуток головних кривин, і позначається

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Означення: середньою кривиною поверхні називається півсума головних кривин поверхні, і позначається

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{LG - 2MF + EN}{2(EG - F^2)}.$$

2. Головні напрямки на поверхні. Лінії кривини.

Означення: головними напрямками на поверхні в точці називаються напрямки, в яких нормальна кривина набуває екстремальних значень.

Для знаходження головних напрямків скористаємося формулою (1):

$$\begin{cases} Ldu + Mdv - k_n(Edu + Fdv) = 0, \\ Mdu + Ndv - k_n(Fdu + Gdv) = 0. \end{cases}$$

З першої і другої рівностей визначимо k_n

$$\begin{cases} k_n = \dfrac{Ldu + Mdv}{Edu + Fdv}, \\ k_n = \dfrac{Mdu + Ndv}{Fdu + Gdv} \end{cases}$$

та прирівняємо праві частини:

$$\frac{Ldu + Mdv}{Edu + Fdv} = \frac{Mdu + Ndv}{Fdu + Gdv},$$

звідки

$$(Edu + Fdv)(Mdu + Ndv) - (Ldu + Mdv)(Fdu + Gdv) = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

(4) – рівняння для визначення головних напрямків поверхні.

Оскільки відносно $\dfrac{du}{dv}$ рівняння (4) є квадратним, то, в загальному випадку, в кожній точці поверхні існує два головних напрямки.

Зауважимо, що, якщо головні кривини в точці P – різні $(k_1 \neq k_2)$, то головні напрями визначені однозначно, і вони взаємно перпендикулярні. Якщо ж головні кривини – рівні $(k_1 = k_2)$, то будь-який напрям буде головним.

Означення: лінія на поверхні називається *лінією кривини*, якщо у кожній її точці напрямок є головним.

Для знаходження лінії кривини слід про інтегрувати рівняння (4), яке можна записати і в іншому, еквівалентному, вигляді:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння розглядають як диференціальне рівняння.

Для того, щоб координатні лінії на поверхні були лініями кривини, потрібно, щоб другі коефіцієнти і квадратичних форм поверхні дорівнювали нулю.

3. Класифікація точок поверхні, пов'язана із поняттям стичного параболоїда поверхні.

Розглянемо деяку регулярну поверхню $\Phi : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, точку P на ній та параболоїд F з вершиною в точці P (рис. 1). Нехай Q – точка поверхні Φ, близька до P; Q' – точка параболоїда F, така що відрізок QQ' – перпендикулярний до дотичної площини в точці P; $PQ = d$; $QQ' = h$.

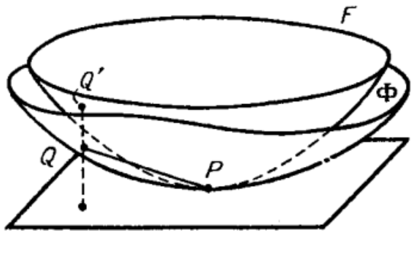


Рис. 1

Означення: параболоїд F називається *стичним параболоїдом* поверхні Φ у точці P, якщо

$$\lim_{d\to 0}\frac{h}{d^2}=0.$$

Стичний параболоїд володіє рядом чудових властивостей, кожна з яких може бути вибраною за основу при його означенні. Зокрема,

1) стичний параболоїд є графіком половини другої квадратичної форми поверхні в точці P, якщо її розглядати як функцію на дотичній площині;

2) в точці P у поверхонь Φ і F нормальні кривини у будь-якому напрямі співпадають;

3) за допомогою формули Тейлора можна довести, що стичний параболоїд F відтворює форму поверхні Φ поблизу точки P з точністю до нескінченно малих другого порядку малості відносно відстані від точки P.

В кожній точці регулярної поверхні існує єдиний стичний параболоїд, з допомогою якого здійснюють класифікацію точок поверхні, а саме:

1) точка P називається точкою *еліптичного типу*, якщо F – еліптичний параболоїд (рис. 2). Точка P еліптичного типу називається *точкою заокруглення*, або *омбілічною*, якщо F – параболоїд обертання (рис. 2а). У омбілічній точці нормальні кривини у всіх напрямках рівні.

2) Точка P називається точкою *гіперболічного типу*, якщо F – гіперболічний параболоїд (рис. 3);

3) Точка P називається точкою *параболічного типу*, якщо F – параболічний циліндр (рис. 4), або площина.

Зокрема, якщо F є площиною, то точку P називають *точкою сплощення* (рис. 4а).

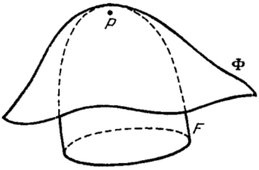


Рис. 2

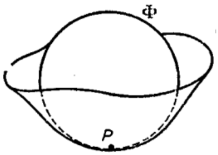


Рис. 2а

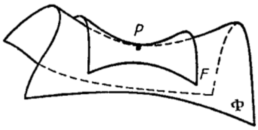


Рис. 3

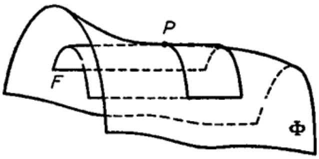


Рис. 4

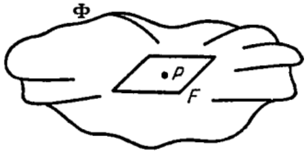


Рис. 4а

Зауважимо, що рівняння стичного параболоїда F поворотом осей координат можна звести до виду

$$z = \frac{1}{2}\left(k_1 x^2 + k_2 y^2\right),$$

тобто стичний параболоїд цілком визначається головними кривинами k_1 і k_2. В той же час, тип стичного параболоїда у точці P поверхні (а, значить, і тип самої точки P) повністю визначається повною кривиною K у цій точці. Зокрема, якщо

1) $K > 0$, то F – еліптичний параболоїд, а P – точка еліптичного типу;

2) $K < 0$, то F – гіперболічний параболоїд, а P – точка гіперболічного типу;

3) $K = 0$, то F – параболічний циліндр чи площина, а P – точка параболічного типу.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення головних кривин в точці на поверхні, виведіть рівняння для їх відшукання.

2. Що називають повною і середньою кривиною? Виведіть формули для їх відшукання.

3. Які напрямки на поверхні називають головними? Як їх знайти?

4. Що таке лінії кривини? Запишіть рівняння для їх відшукання.

5. Дайте означення стичного параболоїда поверхні, вкажіть його чудові властивості.

6. Наведіть класифікацію точок поверхні, пов'язану із поняттям стичного параболоїда. Схематично зобразіть поверхню в околі точки кожного виду.

Лекція №9. Асимптотичні напрямки і асимптотичні лінії на поверхні

План

1. Асимптотичні напрямки на поверхні і їх знаходження.

2. Асимптотичні лінії на поверхні і їх знаходження.

3. Сферичне зображення поверхні.

Короткий конспект лекції

1. Асимптотичні напрямки на поверхні і їх знаходження.

Нехай дано регулярну поверхню $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, P – точка на ній, $(du:dv)$ – напрям в точці P.

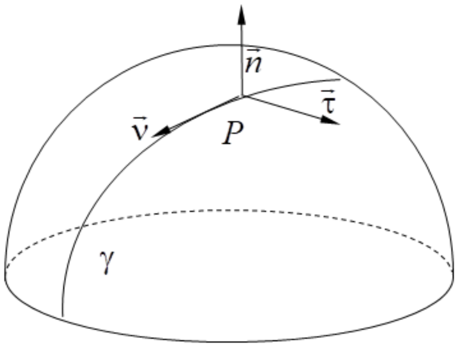


Рис. 1

Означення: напрям на поверхні в точці P називається асимптотичним, якщо в цьому напрямі нормальна кривина набуває значення нуль.

Для знаходження асимптотичних напрямків в точці на поверхні скористаємося формулою для визначення нормальної кривини:

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

З означення асимптотичного напряму отримуємо умову для їх знаходження:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0. \qquad (1)$$

(1) – рівняння для визначення асимптотичних напрямків.

В загальному випадку, рівняння (1) має два розв’язки. Це означає, що в загальному випадку в кожній точці поверхні існує два асимптотичні напрями.

Дослідимо рівняння (1). Для цього, перепишемо його у виді

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N = 0. \tag{2}$$

Кількість розв'язків рівняння (2) залежить від виразу $M^2 - LN$. Розглянемо випадки:

1) $M^2 - LN > 0 \quad \left(LN - M^2 < 0\right)$.

Рівняння (2) має два дійсні різні розв'язки, тобто на поверхні в даній точці існує два асимптотичні напрямки. Отже, в точці гіперболічного типу завжди існує два асимптотичні напрямки.

2) $M^2 - LN = 0 \quad \left(LN - M^2 = 0\right)$.

Рівняння (2) має один дійсний розв'язок, тобто на поверхні в даній точці існує один асимптотичний напрям. Отже, в точці параболічного типу існує один асимптотичний напрям.

3) $M^2 - LN < 0 \quad \left(LN - M^2 > 0\right)$.

Рівняння (2) не має дійсних розв'язків, тобто на поверхні в даній точці не існує асимптотичних напрямів. Отже, в точці еліптичного типу асимптотичних напрямів не існує.

2. Асимптотичні лінії на поверхні і їх знаходження.

Означення: лінія γ на поверхні називається *асимптотичною лінією*, якщо у кожній її точці напрям є асимптотичним.

Теорема. Для того, щоб лінія γ на регулярній поверхні була асимптотичною, необхідно і достатньо, щоб стична площина кривої γ в даній точці збігалася із дотичною площиною до поверхні в даній точці.

Доведення

Необхідність. Нехай дано, що лінія γ є асимптотичною. Доведемо, що стична площина збігається з дотичною площиною до поверхні.

Те, що лінія γ – асимптотична, означає, що в цій точці нормальна кривина дорівнює нулю:

$$k_n = 0.$$

Звідси

$$k\cos\phi = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0; \\ \cos\phi = 0. \end{array}\right.$$

Якщо $k = 0$, то крива є прямою (або відрізком прямої), тобто вона лежить у стичній площині, яка одночасно буде і дотичною площиною до поверхні.

Якщо ж $\cos\phi = 0$, то $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ і $\vec{n} \perp \vec{\nu}$. В той же час, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$. Тому маємо, що вектор $\vec{n}$ – перпендикулярний до стичної площини і до дотичної площини до поверхні в даній точці. Отже, ці площини збігаються.

Достатність. Дано, що стична площина кривої і дотична площина до поверхні у даній точці збігаються. Довести, що лінія γ є асимптотичною.

Для доведення достатньо показати, що нормальна кривина дорівнює нулю. Маємо:

$$k_n = k\cos\phi = k\cos(\vec{n}\,{}^\wedge\,\vec{\mathrm{v}}) = k\cos\frac{\pi}{2} = 0. \ \blacksquare$$

Для того, щоб знайти асимптотичні лінії на поверхні, потрібно проінтегрувати диференціальне рівняння (1). Оскільки рівняння (1) є квадратним відносно $\frac{du}{dv}$, то, в загальному випадку, розв'язавши дане рівняння, отримаємо два сімейства асимптотичних ліній.

Як встановлено вище, якщо точка – гіперболічна, то через неї проходять дві асимптотичні лінії, які належать різним сімействам. Якщо всі точки поверхні є гіперболічними, то множина усіх асимптотичних ліній утворює на поверхні асимптотичну сітку.

Знайдемо умови, за яких координатна сітка буде асимптотичною. Для цього розглянемо, наприклад, u-лінію. Для неї $v = \mathrm{const}$, звідки $dv = 0$. Тоді з рівняння (1) отримуємо:

$$Ldu^2 = 0 \Rightarrow L = 0.$$

Для v-лінії аналогічно отримуємо:

$$u = \mathrm{const} \Rightarrow du = 0,$$

$$(1) \Rightarrow Ndv^2 = 0 \Rightarrow N = 0.$$

Таким чином, для того, щоб координатна сітка на поверхні була асимптотичною, потрібно, щоб коефіцієнти

Гауса L і N другої квадратичної форми даної поверхні дорівнювали нулю.

3. Сферичне зображення поверхні.

Для вивчення ступеню викривлення поверхонь корисним є їх певне відображення на одиничну сферу.

Розглянемо деяку регулярну поверхню Φ, довільну точку P на ній та одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні у точці P.

З початку координат відкладемо вектори $\vec{n}$ для усіх точок поверхні Φ. Кінці цих векторів лежатимуть на одиничній сфері S^2. Побудоване таким чином відображення називають *сферичним,* або *гаусовим, відображенням* поверхні:

$$\Gamma : \Phi \to S^2.$$

Образи точок і множин при сферичному їх відображенні називають їх *сферичними зображеннями*.

Зауважимо, що при сферичному відображенні дотична площина до поверхні в точці P є паралельною до дотичної площини до одиничної сфери в зображенні точки P.

Приклади сферичних зображень

1) Якщо Φ – область на сфері S^2, то її сферичне відображення є тотожним відображенням, а сферичне зображення співпадає з Φ.

2) Сферичним зображенням будь-якої твірної циліндра є точка, а сферичним зображенням усього циліндра є деяка дуга великого кола на сфері.

3) Сферичне відображення плоскої області є стале відображення, а її сферичним зображенням є точка.

4) Сферичним зображенням еліптичного або гіперболічного параболоїда є відкрита півсфера (рис. 2).

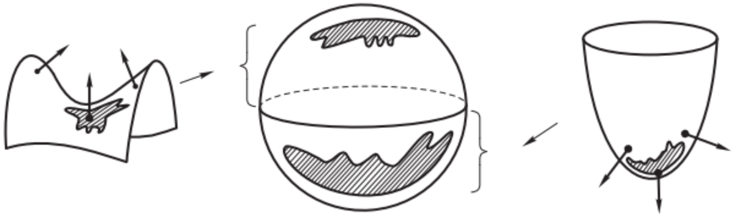


Рис. 2

Нехай Q – деякий малий окіл точки P на поверхні Φ, $S(Q)$ – її площа.

Теорема. Відношення площі сферичного зображення області Q до площі області Q прямує до абсолютного значення повної кривини K поверхні в точці P, якщо область стягується в точку (її діаметр $d(Q)$ – прямує до нуля):

$$\lim_{d(Q)\to 0} \frac{S(\Gamma(Q))}{S(Q)} = |K|.$$

Зауважимо, що в диференціальній геометрії важливе значення відіграють поверхні сталої гаусової кривини.

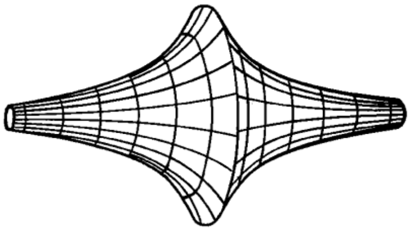
Якщо у кожній точці поверхні гаусова кривина є сталою додатною величиною, то поверхню називають *поверхнею сталої додатної гаусової кривини*. Прикладом такої поверхні є сфера.

Прикладом поверхні із сталою від'ємною гаусовою кривиною є псевдосфера.

Означення: псевдосферою називається поверхня, яка утворюється від обертання трактриси навколо її асимптоти (рис. 3а).

Означення: трактрисою називається плоска крива, для кожної точки якої довжина відрізка дотичної від точки дотику до точки перетину з даною прямою (асимптотою) є величина стала (рис. 3б).

Прикладом поверхні нульової гаусової кривини є площина.



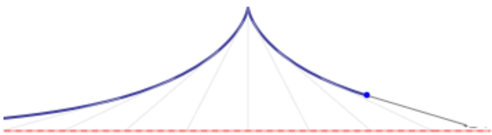


Рис. 3а Рис. 3б

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення асимптотичного напрямку та виведіть рівняння для їх відшукання.

2. Як залежить кількість асимптотичних напрямів у точці на поверхні від типу точки?

3. Дайте означення асимптотичної лінії поверхні та вкажіть спосіб їх відшукання.

4. Сформулюйте і доведіть критерій асимптотичності лінії.

5. Виведіть умову того, що координатна сітка на поверхні є асимптотичною.

6. Яка різниця між сферичним відображенням та сферичним зображенням поверхні? Наведіть приклади сферичних зображень.

7. Які вам відомі поверхні сталої гаусової кривини?

Лекція №10. Геодезична кривина кривої на поверхні. Теорема Гауса-Боне

План

1. Поняття про внутрішню геометрію поверхні. Ізометричні поверхні.

2. Геодезична кривина і геодезичні лінії на поверхні.

3. Теорема Гауса-Боне. Наслідки.

Короткий конспект лекції

1. Поняття про внутрішню геометрію поверхні. Ізометричні поверхні.

Нехай дано поверхні Φ і Φ', а також задано неперервне взаємно однозначне відображення $i:\Phi\to\Phi'$ однієї з них в іншу. Таке відображення встановлює взаємно однозначну відповідність між точками обох поверхонь. При цьому кожній кривій $\gamma\in\Phi$ відповідає певна крива $\gamma'\in\Phi'$, і навпаки:

$$\gamma' = i(\gamma), \qquad \gamma = i^{-1}(\gamma').$$

Якщо, при цьому, довжина кожної кривої γ дорівнює довжині відповідної кривої γ', то кажуть, що Φ' отримується із Φ за допомогою згинання, а саме відображення $i:\Phi \to \Phi'$ називають *згинанням*, або *ізометрією* (рис. 1).

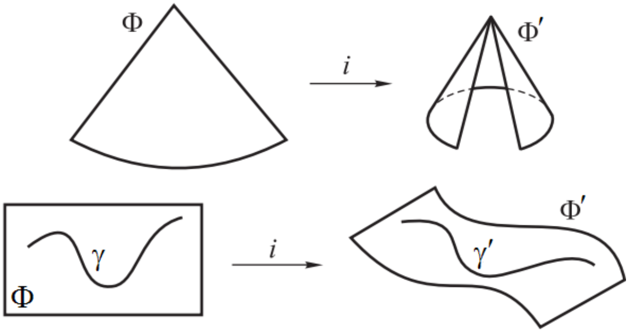


Рис. 1

Внутрішня геометрія поверхні вивчає ті властивості поверхонь і фігур на них, які не змінюються при ізометріях.

Для того, щоб поверхні Φ і Φ' були ізометричними, потрібно, щоб існували такі параметризації цих поверхонь, при яких поверхні мали б однакові перші квадратичні форми. І навпаки, якщо поверхні Φ і Φ' є ізометричними, то завжди існують параметризації цих поверхонь, при яких поверхні мають однакові перші квадратичні форми.

Розглянемо приклад ізометрії. Нехай поверхні Φ і Φ' параметризуються вектор-функціями $\vec{r}(u,v)$ і $\vec{r}'(u,v)$, заданими в одній і тій же області D. І нехай відображення i ставить у відповідність точці $P \in \Phi$ точку

$P' \in \Phi'$, що має такі ж внутрішні координати (рис. 2), тобто

$$i(\vec{r}(u,v)) = \vec{r}\,'(u,v).$$

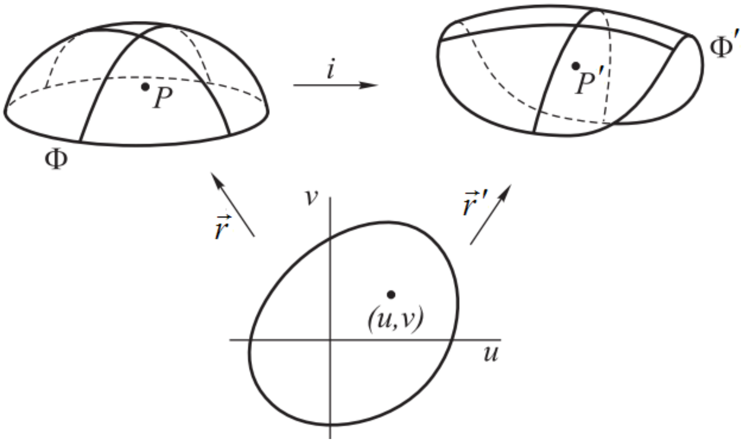


Рис. 2

Якщо, при цьому, у відповідних точках будуть співпадати коефіцієнти першої квадратичної форми поверхонь Φ і Φ':

$$E(u,v) \equiv E'(u,v), \quad F(u,v) \equiv F'(u,v), \quad G(u,v) \equiv G'(u,v),$$

то, як випливає із формули для довжини дуги кривої на поверхні, відображення буде ізометрією.

Отже, до внутрішньої геометрії відносяться ті властивості і величини, які можуть бути охарактеризовані або обчислені в термінах першої квадратичної форми поверхні (довжина кривої на поверхні, кут між кривими, площі фігур на поверхні).

Теорема (чудова теорема Гауса). Гаусова кривина поверхні не змінюється при згинанні.

Виразивши коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми через коефіцієнти E, F, G першої та підставивши отримані значення у відому з лекції №8 формулу

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

можна довести, що гаусова кривина може бути виражена лише через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх частинні похідні:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) & \frac{1}{2}E_u & (F_u - \frac{1}{2}E_v) \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right).$$

(А це і означає, що гаусова кривина відноситься до внутрішньої геометрії). Цю формулу називають формулою Гауса.

Як відомо, тип точки на поверхні визначається гаусовою кривиною поверхні у цій точці. Тому точку, наприклад, еліптичного типу не можна згинанням перетворити в точку гіперболічного чи параболічного типу.

Інший висновок стосується сферичного зображення поверхні. Очевидно, що при згинанні сферичні зображення усієї поверхні та різних фігур на ній можуть змінюватися. Проте *площа сферичного зображення фігури при згинанні не змінюється*. Це випливає з того, що площа сферичного зображення області Q на поверхні співпадає з абсолютною величиною її повної кривини, яка виражається інтегралом

$\iint\limits_{(Q)} KdQ$. А вказаний інтеграл, в силу теореми Гауса, при згинанні не змінюється.

2. Геодезична кривина і геодезичні лінії на поверхні.

Розглянемо деяку регулярну поверхню $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, лінію γ на ній та точку $P \in \gamma$ (рис. 3). В точці P побудуємо дотичну площину до поверхні і спроектуємо лінію γ на неї – отримаємо деяку лінію γ'.

Означення: кривину лінії γ' в точці P називають *геодезичною кривиною* лінії γ на поверхні в точці P, і позначають k_g.

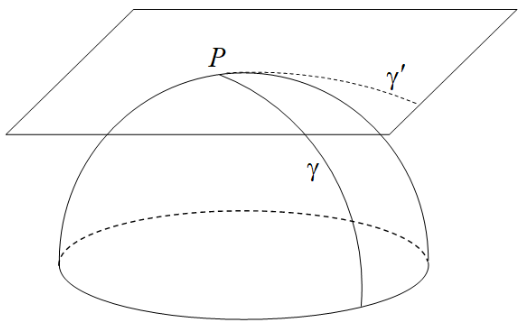


Рис. 3

Зв'язок між кривиною k кривої на поверхні, нормальною кривиною k_n поверхні і геодезичною кривиною k_g лінії виражається формулою:

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

Зауваження 1. Якщо крива – плоска, то геодезична кривина у кожній її точці співпадає з її кривиною.

Зауваження 2. Геодезична кривина відноситься до внутрішньої геометрії поверхні.

Означення: лінія на поверхні називається *геодезичною*, якщо її геодезична кривина у кожній точці дорівнює нулю.

Геодезичні лінії на поверхні представляють особливий інтерес. Адже вони є аналогами відрізків прямих на площині (кривина яких у кожній точці дорівнює нулю).

Вкажемо деякі властивості геодезичних ліній, кожну з яких можна вибрати за основу при їх означенні.

Якщо крива γ є геодезичною, то:

1) вектор головної нормалі кривої γ в кожній точці співпадає з вектором нормалі до поверхні (з точністю до знаку);

2) стична площина в кожній точці кривої γ проходить через нормаль до поверхні;

3) спрямна площина кривої γ у кожній точці співпадає з дотичною площиною до поверхні;

4) крива γ у кожній точці має найменшу кривину серед усіх кривих, що проходять через цю ж точку у тому ж напрямку (тобто вона є «найпрямішою» серед цих кривих);

5) якщо $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторна параметризація кривої γ, то $(\vec{r}'', \vec{r}', \vec{n}) \equiv 0$.

Як відомо, через кожні дві точки площини проходить єдина пряма. Для геодезичних ліній на поверхні ця властивість, взагалі кажучи, може і не виконуватись. Дві точки поверхні можуть з'єднуватися двома, трьома і, навіть, нескінченною кількістю геодезичних (а можуть і не з'єднуватися жодною). Однак має місце інша властивість.

Теорема. Через кожну точку регулярної поверхні у кожному напрямку проходить єдина геодезична.

Зауваження. Прямі на площині є геодезичними лініями. На циліндрі геодезичними є кола, гвинтові лінії і прямі. На сфері геодезичними є кола великих радіусів. Оскільки через кожну точку цих поверхонь у кожному напрямі проходить лінія одного із вказаних типів, то інших геодезичних на площині, циліндрі та сфері немає.

Теорема. Дуга геодезичної лінії γ між точками A і B буде найкоротшою серед усіх дуг кривих, які лежать на поверхні і сполучають точки A і B (якщо ці точки досить близькі).

Означення: параметризація регулярної поверхні називається *напівгеодезичною*, якщо усі координатні лінії одного сімейства є геодезичними і у кожній точці поверхні координатні лінії є ортогональними.

3. Теорема Гауса-Боне. Наслідки.

Нехай дано регулярну поверхню

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v).$$

Розглянемо на цій поверхні деяку область Q, обмежену кусково-регулярними кривими γ_1, γ_2, …, γ_n. Кути між лініями γ_i $(i=1,2,...,n)$ і γ_j $(j=2,3,...,n,1)$ позначимо відповідно α_1, α_2, …, α_n. Нехай k_{gi} $(i=1,2,...,n)$ – це геодезичні кривини ліній γ_1, γ_2, …, γ_n відповідно, K – гаусова кривина поверхні.

Виберемо напрям обходу області Q по лініях γ_i з того боку поверхні, з якого розміщений нормальний вектор до поверхні в даній точці області так, щоб область увесь час залишалася справа.

Тоді має місце теорема Гауса-Боне:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} k_{gi}ds+\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint_{(Q)} Kd\sigma,$$

де $d\sigma$ – елемент площі області Q, $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}$.

Наслідки з теореми

1) Припустимо, що область обмежена регулярною лінією γ. Матимемо:

$$\int_{\gamma} k_g ds=2\pi-\iint_{(Q)} Kd\sigma.$$

Зауважимо, що вираз $\iint_{(Q)} Kd\sigma$ інколи називають інтегральною кривиною поверхні.

1а) Якщо лінія γ є геодезичною, то отримаємо:

$$\iint_{(Q)} Kd\sigma=2\pi.$$

2) Припустимо, що кожна з ліній γ_i є геодезичною. Тоді теорема набуде вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint_{(Q)}Kd\,\phi.$$

3) Нехай тепер область Q обмежена трьома геодезичними лініями, тобто маємо так званий геодезичний трикутник. Тоді з останньої формули отримуємо:

$$(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+(\pi-\alpha_3)=2\pi-\iint_{(Q)}Kd\,\phi,$$

$$3\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=2\pi-\iint_{(Q)}Kd\,\phi,$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-\pi-\iint_{(Q)}Kd\,\phi,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi+\iint_{(Q)}Kd\,\phi.$$

Якщо K є сталою для області Q, причому $K>0$, то сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника на поверхні сталої додатної гаусової кривини (сфері) більша за 180°.

Якщо для області Q гаусова кривина $K=0$, то сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника на поверхні з нульовою гаусовою кривиною (площині) дорівнює 180°.

Якщо ж для області Q гаусова кривина $K<0$, то сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника на поверхні з від'ємною гаусовою кривиною (псевдосфері) менша за 180°.

Таким чином, на поверхнях сталої гаусової кривини $K \geq 0$ «в малому» виконується сферична геометрія (при $K > 0$) або планіметрія (при $K = 0$). При $K < 0$ на поверхні реалізується так звана геометрія Лобачевського.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Дайте означення згинання поверхні.
2. Які поверхні називають ізометричними? Сформулюйте достатню умову ізометричності поверхонь.
3. Які поняття відносять до внутрішньої геометрії поверхні? Чи належить до них гаусова кривина?
4. Дайте означення геодезичної кривини.
5. Яку лінію на поверхні називають геодезичною? Які вам відомі властивості геодезичних ліній?
6. Сформулюйте теорему Гауса-Боне та наслідки з неї.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія / О.А. Борисенко. – Харків, Основа, 2017. – 209 с.
2. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія та топологія / О.О. Пришляк. – Київ, 2018. – 232 с.
3. Гладка Ю.А. Геометрія і топологія / Ю.А. Гладка. – Київ, 2019. – 240 с.
4. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії / В.Н. Боровик, В.П. Яковець. – Суми, Університетська книга, 2019. – 464 с.
5. Tapp K. Differentional geometry of curves and surfaces / K. Tapp. – Springer, UTM, 2016. – 366 p.
6. Chern S. Lectures on Differential Geometry / S. Chern. – California : World Scientific, 2020. – 356 с.
7. Abbena E., Gray A., Salamon S. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica / E. Albena, A. Gray, S. Salamon. – New York, Taylor & Francis, 2016.