

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Кафедра математики та методики її навчання**

**Тимчук М.В.**

# **Комплексний аналіз**

**Рівне 2026**

УДК 517.53:378.147.014.24(076.5)

Комплексний аналіз. Навчально-методичний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач М. В. Тимчук. 2026. 83 с.

**Укладач:**

Тимчук М. В. – старший викладач кафедри математики та методики її навчання.

**Рецензенти:**

*Генсіцька-Антонюк Н. О.* – к. п. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

*Петрівський Я. Б.* – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 7 від 26 травня 2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 5 від «27» «травня» 2026 р.)

## ЗМІСТ

§ 1. Комплексні числа та дії над ними. ....	4
§ 2. Послідовності та ряди комплексних чисел. ....	8
§ 3. Функції комплексної змінної. Елементарні функції. ....	10
§ 4. Похідна. ....	18
§ 5. Відображення за допомогою лінійної функції. ....	24
§ 6. Відображення за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$ . ....	27
§ 7. Дробово-лінійна функція. ....	30
§ 8. Степенева функція з раціональним показником $w = z^{\frac{p}{q}}$ . ....	33
§ 9. Відображення за допомогою функцій $w = e^z$ та $w = \ln z$ . ....	36
§ 10. Функція Жуковського. ....	43
§ 11. Відображення тригонометричними та гіперболічними функціями. ....	46
§ 12. Інтегрування функції комплексної змінної. ....	51
§ 13. Інтегральна теорема Коші. ....	54
§ 14. Інтегральна формула Коші. ....	57
§ 15. Ряд Тейлора. ....	60
§ 16. Ряд Лорана. ....	65
§ 17. Ізольовані особливі точки. ....	70
§ 18. Лишки. ....	74
§ 19. Обчислення інтегралів по замкненому контуру. ....	78
<i>Література</i> . ....	83

## § 1. Комплексні числа та дії над ними.

Комплексне число  $z = x + iy$ , відмінне від нуля, можна записати у показниковій формі  $z = |z|e^{i\arg z}$  та тригонометричній формі  $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ .

Модуль числа  $z$  знаходиться за формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Значення аргумента числа  $z$ , що міститься в проміжку  $[0; 2\pi)$ , називається головним значенням аргумента і обчислюється за формулами:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0, y > 0 \text{ (I четверть)} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, \text{ якщо } x < 0, y < 0 \text{ та } x < 0, y > 0 \text{ (II і III четверть)} \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, \text{ якщо } x > 0, y < 0 \text{ (IV четверть)} \end{cases} \quad (2)$$

Багатозначна функція  $\text{Arg}z$  пов'язана з функцією  $\arg z$  співвідношенням  $\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi (k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$

**Завдання 1.** Записати показникову та тригонометричну форму комплексного числа  $z$

1)  $z = (1 + i)^6$ .

**Розв'язання.** Запишемо спочатку в показниковій та тригонометричній формі число  $1 + i$ . Для цього знайдемо модуль і аргумент числа  $1 + i$ , скориставшись формулами (1) та (2):

$$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}; \quad \arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ .

Тоді  $z = (1 + i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 6} = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$  – показникова форма

$z = 8(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$  тригонометрична форма.

2)  $z = 1 + i$ ; 3)  $z = 1 - i$ ; 4)  $z = -3$ ; 5)  $z = 4i$ ; 6)  $z = -2i$ ;

7)  $z = -1 + i$ ; 8)  $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ; 9)  $z = 3 + i\sqrt{3}$ ; 10)  $z = 7\sqrt{3} - 7i$ ;

11)  $z = -\frac{1}{7\sqrt{3}} - \frac{i}{21}$ ; 12)  $z = \frac{1}{i}$ ; 13)  $z = \frac{1-i}{1+i}$ ; 14)  $z = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$ ;

15)  $z = (1 + i)^6$ ; 16)  $z = (1 - i)^4$ .

Якщо задано два комплексних числа  $z_1=x_1+iy_1$ ,  $z_2=x_2+iy_2$ , то арифметичні дії над ними виконуються наступним чином:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x^2 + y^2}$$

(тут  $z_2 \neq 0$ ).

### Завдання 2, Виконати дії

$$1) \left( \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^{45}.$$

#### Розв'язання.

$$\left( \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^{45} = \left( \frac{1+i-(1-i)}{(1-i)(1+i)} \right)^{45} = \left( \frac{2i}{2} \right)^{45} = i^{45} = i^{44} \cdot i = (i^4)^{11} \cdot i = i$$

Тут використана періодичність значень  $i^n$ :  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$  і т.д.

$$2) (2-i)(3+2i) - (i+1)(3-i); 3) (-1+2i)(4-i) + i(3+i);$$

$$4) \frac{1+i}{2-i} - \frac{2-i}{3+i}; 5) \frac{2-i}{1+i} + \frac{3}{2-i}; 6) \left( \frac{2+i}{3-i} - \frac{4-i}{1-i} \right)^2; 7) \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{102}$$

$$8) \left( \frac{1-i}{2+2i} \right)^7; 9) \left( \frac{3}{1-i} + \frac{2}{1+i} \right)^3.$$

Піднесення до степеня комплексного числа виконується за формулами

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n e^{in\varphi}, \text{ де } \varphi = \arg z.$$

Корінь  $n$ -го степеня із комплексного числа  $z$  має  $n$  значень, які обчислюються за формулою  $\sqrt[n]{z} = \{z_k\}$ ,

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (3)$$

Значення, що відповідає  $k = 0$  називається головним або арифметичним значенням кореня.

### Завдання 3. Знайти всі значення коренів:

$$1) \sqrt[3]{4-4i}.$$

**Розв'язання.** Для обчислення всіх значень  $\sqrt[3]{4-4i}$  скористаємося

формулою (3), в якій  $n = 3, k = 0, 1, 2$ . Так як  $|4 - 4i| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ,  $\arg(4 - 4i) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ , то

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4}}{3} \right) = \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = \\ &= \sqrt[6]{32} \left( \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2}} \\ z_1 &= \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \\ &= -\sqrt[6]{32} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt[6]{4}(1+i) = -\sqrt[3]{2}(1+i) \\ z_2 &= \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right) = \\ &= \sqrt[6]{32} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{32} \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2}} \end{aligned}$$

- 2)  $\sqrt[4]{-1}$ ; 3)  $\sqrt[3]{1}$ ; 4)  $\sqrt[4]{-i}$ ; 5)  $\sqrt[3]{i}$ ; 6)  $\sqrt{1+i}$ ; 7)  $\sqrt{-1-i}$ ; 8)  $\sqrt{-2-2i}$ ; 9)  $\sqrt[3]{2-2i}$ ; 10)  $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$ ; 11)  $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}i}$ ; 12)  $\sqrt[4]{-4-4i}$ .

**Завдання 4.** Знайти множину точок, які задовольняють рівності, і зобразити її на комплексній площині

1)  $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| = 1$

**Розв'язання.** Введемо позначення  $z = x + iy$ , тоді

$$\left| \frac{x+iy-2}{x+iy+2} \right| = 1.$$

$$|x + iy - 2| = |x + iy + 2|, \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2},$$

$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2, x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4,$$

$$8x = 0, x = 0.$$

Шуканою множиною точок є уявна вісь.

$$2) |z-2| = 2; \quad 3) |z+1-2i| = 3; \quad 4) |z-1-i| = 2; \quad 5) |z-1| + |z+1| = 3;$$

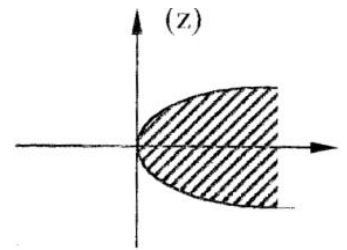
$$6) |z-1+i| = |-1+i-z|; \quad 7) \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2; \quad 8) \arg z = \frac{\pi}{4};$$

$$9) \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}; \quad 10) |z+2| - |z-2| = 3; \quad 11) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1; \quad 12) \operatorname{Re} z^2 = 1;$$

$$13) |z^2 - 1| = 1; \quad 14) \arg e^{z^2} = 1; \quad 15) |z|^2 = \operatorname{Im} z.$$

Областю називається відкрита зв'язна множина.

Однозв'язною областю називається область, будь-яку замкнену лінію якої можна деформувати в точку,



залишаючись при цьому в даній області.

Мал. 1

**Завдання 5.** Знайти множину точок, що задовольняють відповідній нерівності, і зобразити її на комплексній площині

$$1) (\arg(e^z))^2$$

**Розв'язання.** Введемо позначення  $z = x + iy$  і підставимо в умову, одержимо:

$(\arg e^{x+iy})^2 \leq x, \quad y^2 \leq x$  – замкнена область, обмежена параболою  $y^2 \leq x$  (мал. 1).

$$2) |z+i| < 1; \quad 3) |z-1+i| < 2; \quad 4) |z+1-i| < 3; \quad 5) \operatorname{Re} z > 2;$$

$$6) \operatorname{Im} z \leq -1; \quad 7) 0 < \operatorname{Re} z < 2; \quad 8) 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 3; \quad 9) |z| + \operatorname{Re} z < 1;$$

$$10) 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}; \quad 11) -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0; \quad 12) \begin{cases} |z-1| > 1; \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases};$$

$$13) \begin{cases} 0 < \operatorname{Im} z < 1 \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}; \quad 14) \operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}; \quad 15) \operatorname{Im} \frac{1}{z} > 1;$$

$$16) |z-1| + |z+1| < 4; \quad 17) \arg e^{z^2} < 1; \quad 18) |e^z|^2 < \operatorname{Im} z.$$

## § 2. Послідовності та ряди комплексних чисел.

Послідовність  $\{z_n\}$ , де  $z_n = x_n + iy_n$  називається послідовністю комплексних чисел. Для того, щоб ця послідовність мала границю  $c = \alpha + i\beta$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ . Так як збіжність послідовності комплексних чисел  $\{z_n\}$  зводиться до збіжності двох послідовностей дійсних чисел  $\{x_n\}$  і  $\{y_n\}$ , то всі властивості послідовностей дійсних чисел залишаються в силі і для послідовностей комплексних чисел.

**Завдання 6.** Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin 4n}{5n} + i \frac{n-2}{2n+1} \right).$$

**Розв'язання.** Так як послідовність комплексних чисел  $\{z_n\}$  має границю  $c = \alpha + i\beta$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ , то знайдемо границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 4n}{5n}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2n+1}$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 4n}{5n} = 0$ . Обчислимо границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2n+1}$ , поділивши почленно чисельник та знаменник на  $n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ . Отже  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin 4n}{5n} + i \frac{n-2}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}i$ .

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n+4} + i \frac{n^2+1}{3n^2+2n-1} \right); \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-1}{n+2} - i \frac{n-1}{n^2+2} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{3}{n} + i \right); \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3n \sin \frac{2}{n} + i \frac{n+1}{2n+1} \right);$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \left( 1 - \cos \frac{3}{n} \right) + i \left( \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} \right) \sin \frac{1}{n} \right);$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{3n} \right)^{2n} - i \left( 2 - \frac{1}{2n} \right)^{-n} \right).$$

**Завдання 7.** Дати відповідь на наступні питання:

- Чи існує скінченна границя послідовності?
- Чи послідовність обмежена?
- Яка множина всіх часткових границь послідовності?

$$1) z_n = \frac{1}{n^2} + (-1)^n i.$$

**Розв'язання,** а) Так як  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  не існує, то границя даної послідовності не існує.

б) Послідовності  $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$  та  $\{(-1)^n\}$  обмежені, а тому обмеженою є і задана послідовність.

в) Частковими границями даної послідовності є наступні:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + i \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 0 + i = i$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + i \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 0 - i = -i$$

Верхня границя послідовності дорівнює  $i$ , а нижня границя дорівнює  $-i$ .

$$2) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}; \quad 3) z_n = \frac{1}{n} + in; \quad 4) z_n = n^2 \sin \frac{2}{n} + \frac{(-1)^n}{3n} i;$$

$$5) z_n = (i)^n; \quad 6) z_n = \left(1 + (-1)^n\right)^n + i; \quad 7) z_n = n \sin \frac{3}{n} + (-1)^n i.$$

Для того, щоб збігався (абсолютно збігався) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n$  (1) необхідно і достатньо, щоб збігалися (абсолютно збігалися) ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  (2) і  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  (3). При цьому сумою ряду (1) буде число  $a + ib$ , де  $a$  та  $b$  суми рядів (2) і (3) відповідно.

**Завдання 8.** Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2n} \right).$$

**Розв'язання.** Даний ряд буде збіжним, якщо будуть збіжними такі два ряди дійсних чисел  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  є збіжним, як геометрична прогресія із знаменником  $q = \frac{1}{3}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  – розбіжний, його можна порівняти з гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Так як  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ , то із розбіжності гармонічного ряду випливає розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ . Отже вихідний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2n} \right)$  розбіжний.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} + \frac{i}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - i \frac{\sin \frac{1}{n}}{n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} + i \frac{2^n}{n!}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + i \frac{\sin n}{n^3}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2} + i \frac{(-1)^n}{n}.$$

### § 3. Функції комплексної змінної. Елементарні функції.

Якщо кожній точці  $z$  з деякої множини  $E$  комплексної площини поставлено у відповідність комплексне число  $w$ , то говорять, що на множині  $E$  задана функція  $w = f(z)$ .

Якщо позначити  $z = x + iy$ , а  $w = u + iv$ , то можна зробити висновок, що задання комплексної функції  $w = f(z)$  рівносильне заданню двох дійсних функцій двох змінних  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$ :  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Функція  $f(z)$  в точці  $z_0 = x_0 + iy_0$  має границю  $C = A + iB$  тоді і тільки тоді, коли функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  в точці  $(x_0, y_0)$  мають границі відповідно  $A$  та  $B$ .

**Завдання 9.** Чи існує границя функції  $f(z)$  в точці  $z = 0$

$$1) f(z) = \frac{\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} - 1}{|z|^2}$$

**Розв'язання.** Для того, щоб знайти  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} - 1}{|z|^2}$  домножимо

чисельник та знаменник на  $(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} - 1)(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)}{|z|^2(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \bar{z} + 1 - 1}{|z|^2(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)}$$

Так як  $|z|^2 = x^2 + y^2$  та  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ , то

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2(\sqrt{z \cdot \bar{z} + 1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& 2) f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}; \quad 3) f(z) = \frac{z}{|z|}; \quad 4) f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}; \quad 5) f(z) = \frac{z \operatorname{Im} z}{|z|}; \\
& 6) f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}; \quad 7) f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}; \quad 8) f(z) = \frac{z}{|z|^2}; \quad 9) f(z) = \frac{\bar{z}}{|z^2|}; \\
& 10) f(z) = \frac{|z|^2}{\sqrt{|z|^2 + 1} - 1}; \quad 11) f(z) = \frac{\sqrt{(\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z)^2 + 1} - 1}{|z|^2}; \\
& 12) f(z) = \frac{\sin(|z|^2)}{|z|^2}.
\end{aligned}$$

Функція  $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  буде неперервною в точці  $z_0 = x_0 + iy_0$  тоді і тільки тоді, коли будуть неперервними функції двох дійсних змінних  $U(x, y)$  та  $V(x, y)$  в точці  $(x_0, y_0)$ .

**Завдання 10.** Дослідити функцію  $f(z)$  на неперервність:

$$1) \begin{cases} f(z) = \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z}{z \cdot \bar{z}}, & z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Дана функція може мати розрив лише в точці  $z = 0$ . Якщо  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ , то функція в точці  $z = 0$  буде неперервною. Знайдемо  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z}{z \cdot \bar{z}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Перейдемо до полярної системи координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , при  $x \rightarrow 0$  та  $y \rightarrow 0$  радіус  $\rho$  також прямує до нуля.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin 2\varphi}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sin 2\varphi.
\end{aligned}$$

Границя даної функції в точці  $z = 0$  не існує, так як кут  $\varphi$  може набувати довільного значення із пів сегмента  $[0; 2\pi)$ , відповідно  $\sin 2\varphi$  набуває будь-якого значення із сегмента  $[-1; 1]$ .

Отже, функція  $f(z)$  має розрив в точці  $z = 0$ .

$$2) f(z) = \frac{z \cdot \bar{z}}{z^2 + 1}; \quad 3) f(z) = \operatorname{Re} z + i\bar{z}; \quad 4) f(z) = \arg z, z \neq 0;$$

$$\begin{aligned}
5) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{Im} z}{z}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. ; 6) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. ; 7) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{|z|}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. \\
8) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{(\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z)^2}{|z|^2}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. ; 9) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z}{|z|^2}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. \\
10) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{(\operatorname{Im} z \operatorname{Re} z)^3}{z \cdot \bar{z}}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right. ; 11) & \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z \cdot \bar{z}}, z \neq 0; \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Значення лінійної, дробово-лінійної, степеневі функцій виду  $z^n$ ,  $z^{\frac{1}{n}}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) обчислюються за відомими правилами дій над комплексними числами. Для показникової функції має місце формула Ейлера  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ . З неї одержуються формули для тригонометричних функцій

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \\
\operatorname{tg} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)};
\end{aligned} \tag{1}$$

Для гіперболічних функцій мають місце формули аналогічні відомим формулам функцій дійсної змінної

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}; \tag{2}$$

Із показникової форми комплексного числа маємо

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi). \tag{3}$$

За допомогою цих формул показникову функцію  $a^z$  та степеневу з довільним показником  $z^a$  можна подати так

$$a^z = e^{z \ln a}; \quad z^a = e^{a \ln z}.$$

Обернені до тригонометричних та гіперболічних функцій обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \\
\operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \\
\operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}, \\
\operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \\
\operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}), \\
\operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1-z}{1+z}.
\end{aligned} \tag{4}$$

**Завдання 11.** Виділити дійсну та уявну частини числа:

1)  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right)$ .

**Розв'язання.** Щоб виділити дійсну та уявну частини, скористаємося

формулою  $\operatorname{ctg} z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})i}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{(e^{2iz} + 1)i}{e^{2iz} - 1}$ .

Підставимо замість  $z$  значення  $\frac{\pi}{4} - 2i$ .

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right) &= \frac{\left( e^{2i \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right)} + 1 \right) i}{e^{2i \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right)} - 1} = \frac{\left( e^{\frac{\pi}{2} + 4} + 1 \right) i}{e^{\frac{\pi}{2} - 4} - 1} = \\
&= \frac{\left( e^4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right) i}{e^4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) - 1} = \frac{(e^4 \cdot i + 1)i}{e^4 \cdot i - 1} = \\
&= \frac{-e^4 + i}{-1 + e^4 i} = \frac{(-i + e^4)(1 + e^4 i)}{(1 - e^4 i)(1 + e^4 i)} = \frac{-i + e^4 + e^4 + ie^8}{1 + e^8} = \\
&= \frac{i(-1 + e^8) + 2e^4 i}{1 + e^8} = \frac{2e^4}{1 + e^8} + i \frac{e^8 - 1}{e^8 + 1}, \\
\operatorname{Re} \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right) \right) &= \frac{2e^4}{1 + e^8}, \\
\operatorname{Im} \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - 2i \right) \right) &= \frac{e^8 - 1}{e^8 + 1} = \operatorname{th} 4.
\end{aligned}$$

$$2) e^{-2+\frac{\pi}{2}i}; 3) \frac{e^{1-\frac{\pi}{4}i}}{1+i}; 4) (-2+2\sqrt{3}i)e^{-\frac{\pi}{3}i}; 5) (1-i\sqrt{3})^{1+i}; 6) -2ie^{1+\frac{\pi}{4}i};$$

$$7) \ln(-2); 8) \operatorname{Ln}(i-1); 9) \ln(\sqrt{3}-i); 10) \operatorname{Ln}(1-i); 11) \operatorname{Ln}(ie^2);$$

$$12) \operatorname{Ln}(1+i); 13) \sin(i-\pi); 14) \cos\left(\frac{\pi}{2}+2i\right); 15) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{4}i\right);$$

$$16) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2i\right); 17) \operatorname{sh}\left(1-i\frac{\pi}{2}\right); 18) \operatorname{th}(\ln 2-i\pi).$$

### Завдання 12. Розв'язати рівняння

$$1) \sin z = -2i.$$

**Розв'язання.** Скористаємося оберненою тригонометричною функцією арксинус:  $z = \operatorname{Arcsin}(-2i)$ . За формулами (4) маємо:

$$\operatorname{Arcsin}(-2i) = i \operatorname{Ln}\left(i(-2i) + \sqrt{1 - (-2i)^2}\right) = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{5}).$$

Обчислимо окремо значення  $\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{5})$  та  $\operatorname{Ln}(2 - \sqrt{5})$ , скориставшись формулою (3)

$$\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{5}) = \ln|2 + \sqrt{5}| + i \arg(2 + \sqrt{5}) + 2k\pi i.$$

Так як

$$|2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}, \quad \arg(2 + \sqrt{5}) = 0, \quad \text{то} \quad \begin{aligned} \operatorname{Ln}(2 + \sqrt{5}) &= \\ &= \ln(2 + \sqrt{5}) + 2k\pi i \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ln}(2 - \sqrt{5}) = \ln|2 - \sqrt{5}| + i \arg(2 - \sqrt{5}) + 2k\pi i.$$

Оскільки  $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2, \arg(2 - \sqrt{5}) = \pi$ , то

$$\operatorname{Ln}(2 - \sqrt{5}) = \ln(\sqrt{5} - 2) + i\pi + i2k\pi = \ln(\sqrt{5} - 2) + \pi(2k + 1)i$$

Значення  $\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{5})$  та  $\operatorname{Ln}(2 - \sqrt{5})$  об'єднаємо в одне

$$\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{5}) = \ln(\sqrt{5} + (-1)^n \cdot 2) + i\pi n$$

$$\text{Отже } \operatorname{Arcsin}(-2i) = -i(\ln(\sqrt{5} + (-1)^n \cdot 2) + i\pi n)$$

$$= -i \ln(\sqrt{5} + (-1)^n \cdot 2) + \pi n = \pi n - i \ln(\sqrt{5} + (-1)^n \cdot 2).$$

$$2) \cos z = 2; 3) \sin z = 2i; 4) \operatorname{sh} iz = 2; 5) \operatorname{tg} z = 4i; 6) \cos z = 4;$$

$$7) \operatorname{sh} z = 2i; 8) \sin z = i; 9) \operatorname{th} z = -3i; 10) \cos z = \frac{1}{2}.$$

**Завдання 13.** Знайти модуль і головне значення аргумента числа:

$$1) (\sqrt{3} + i)e^{2-i\frac{\pi}{4}}.$$

**Розв'язання.** Подамо число  $\sqrt{3} + i$  в показниковій формі.

Так як  $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \arg(\sqrt{3} + i) = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ , то

$$(\sqrt{3} + i)e^{2-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = 2e^2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

Отже модуль числа  $(\sqrt{3} + i)e^{2-i\frac{\pi}{4}}$  дорівнює  $2e^2$ , головне значення аргумента цього числа дорівнює  $2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23}{12}\pi$ .

$$2) 2^{1-i}; 3) (2i)^{-i}; 4) (-1+i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}; 5) (1-i)^{2i}; 6) 2^i \cdot 2^{-i};$$

$$7) (2\sqrt{3}-2i)e^{i\frac{\pi}{6}}; 8) e^{i\frac{1}{1-i}}; 9) (1-i\sqrt{3})e^{2+i\frac{\pi}{6}}; 10) \frac{i}{2}e^{-1-i\frac{\pi}{4}};$$

$$11) (\sqrt{3}+i)^{2i}; 12) e^i; 13) e^{1+i}; 14) e^{-3+2i}; 15) e^{2-3i}; 16) e^{5-i};$$

$$17) e^{\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}}.$$

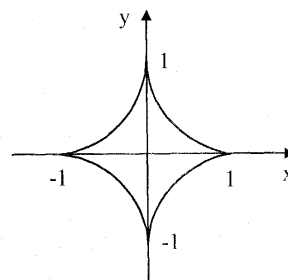
**Завдання 14.** З'ясувати, яку криву визначає комплекснозначна функція від дійсної змінної  $z(t)$  і побудувати цю криву.

$$1) z = e^{-it} \left( \cos 2t + \frac{i}{2} \sin 2t \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**Розв'язання.** Виділимо в правій і лівій частинах рівності дійсну та уявну частини, тоді

$$\begin{aligned} x + iy &= (\cos t - i \sin t) \left( \cos 2t + \frac{i}{2} \sin 2t \right) = \\ &= \cos t \cos 2t + \frac{1}{2} \sin t \sin 2t + i \left( \frac{1}{2} \sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t \right) = \\ &= \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin^2 t \cos t + \\ &+ i (\sin t \cos^2 t - \sin t (\cos^2 t - \sin^2 t)) = \\ &= \cos^3 t - \cos t \sin^2 t + \sin^2 t \cos t + \\ &+ i (\sin t \cos^2 t - \sin t \cos^2 t + \sin^3 t) = \cos^3 t + i \sin^3 t \end{aligned}$$

Отже  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ , це рівняння астроїди (мал. 2).



Мал. 2

- 2)  $z = t + \frac{it}{t^2 + 1}, \quad -\infty < t < \infty;$
- 3)  $z = t + it^2, \quad -\infty < t < \infty;$
- 4)  $z = t^2 + \frac{2i}{t}, \quad -\infty < t < 0;$
- 5)  $z = t + \frac{i}{t}, \quad 0 < t < \infty;$
- 6)  $z = t + i(t^3 + 1), \quad -\infty < t < \infty;$
- 7)  $z = t + i \frac{t-1}{t+1}, \quad 0 \leq t \leq 4;$
- 8)  $z = t + 2i\sqrt{t}, \quad 0 \leq t < \infty;$
- 9)  $z = t + \frac{i}{1-t^2}, \quad t \neq \pm 1;$
- 10)  $z = t^2 + \frac{it^2}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty;$
- 11)  $z = t + i \left( t^2 + \frac{1}{t} \right), \quad t \neq 0;$
- 12)  $z = t + it\sqrt{t}, \quad 0 \leq t < \infty;$
- 13)  $z = e^{it} (1 + \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$
- 14)  $z = ae^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$
- 15)  $z = ae^{it} e^{bt}, \quad -\infty < t < \infty.$

**Завдання 15.** Довести формули

$$1) \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{sh} 2z.$$

**Розв'язання.** Подамо гіперболічні функції  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} 2z$  через показникову функцію  $e^z$ , скориставшись формулами (2); тоді

$$\begin{aligned} \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 &= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} + e^{2z} - 2e^{-2z}}{4} = \\ &= \frac{2(e^{2z} - e^{-2z})}{4} = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2} = \operatorname{sh} 2z. \end{aligned}$$

$$2) \cos^2 z + \sin^2 z = 1;$$

$$3) \cos(-z) = \cos z;$$

- 4)  $ch^2 z - sh^2 z = 1$ ;
- 5)  $\sin(-z) = -\sin z$ ;
- 6)  $ch(-z) = ch z$ ;
- 7)  $sh(-z) = -sh z$ ;
- 8)  $tg(-z) = -tg z$ ;
- 9)  $ctg(-z) = -ctg z$ ;
- 10)  $th(-z) = -th z$ ;
- 11)  $cth(-z) = -cth z$ .

**Завдання 16.** Довести співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями

1)  $\cos z = ch iz$ .

**Розв'язання.** Скористаємося формулами (1) та (2);

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad ch iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Так як праві частини останніх двох рівностей тотожно рівні, то рівні і ліві, тобто  $\cos z = ch iz$ .

- 2)  $ch z = \cos iz$ ;
- 3)  $\sin z = -i sh iz$ ;
- 4)  $sh z = -i \sin iz$ ;
- 5)  $tg z = -i th iz$ ;
- 6)  $th z = -i tg iz$ ;
- 7)  $ctg z = i cth iz$ ;
- 8)  $cth z = i ctg iz$ .

**Завдання 17.** Нехай  $z = x + iy$ . Довести, що

1)  $|ch z| = \sqrt{ch^2 x - \sin^2 y}$ .

**Розв'язання.** Так як  $z = x + iy$ , то

$$ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2} =$$

$$\frac{\cos y(e^x + e^{-x})}{2} + i \frac{\sin y(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$|ch z| = \sqrt{(\operatorname{Re} ch z)^2 + (\operatorname{Im} ch z)^2},$$

У нас  $\operatorname{Re} ch z = \cos y ch x$ ,  $\operatorname{Im} ch z = \sin y sh x$ . Отже,

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{ch} z| &= \sqrt{\cos^2 y \operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x} = \\
 &= \sqrt{(1 - \sin^2 y) \operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)}
 \end{aligned}$$

Так як  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , то  $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$

2)  $\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$ ;

3)  $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y$ ;

4)  $\operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y$ ;

5)  $\operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y$ ;

6)  $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y$ ;

7)  $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$ ;

8)  $\operatorname{Re} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$ ;

9)  $\operatorname{Im} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y$ ;

10)  $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$ ;

11)  $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ ;

12)  $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$ .

**Вказівка:** використати формули Ейлера.

**Завдання 18.** Довести, що функції  $\sin z$  та  $\cos z$  необмежені на всій комплексній площині.

#### § 4. Похідна.

Для того, щоб функція  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  була диференційованою в точці  $z = x + iy$ , необхідно і достатньо, щоб функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  були диференційовані по  $x$  та  $y$  і щоб виконувалися рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

Ці рівності називаються умовами Коші-Рімана. Похідна при цьому може бути обчислена за формулою

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Однозначна функція  $f(z)$  називається диференційованою в області, якщо вона диференційована в кожній точці цієї області.

**Завдання 19.** Знайти область диференційовності функції

1)  $w = \bar{z} + z^2$ .

**Розв'язання.** Виділимо дійсну та уявну частини функції  $w = \bar{z} + z^2$

$$u + iv = x - iy + x^2 + 2xyi - y^2;$$

$$u = x^2 + x - y^2; \quad v = 2xy - y.$$

Знайдемо частинні похідні функцій  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1.$$

Визначимо для яких значень змінних  $x$  та  $y$  виконуються умови Коші -

Рімана (1)

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2x - 1 \\ -2y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ y = y \end{cases}$$

Так як перше рівняння системи розв'язків не має, то не має розв'язків і сама система, а отже задана функція недиференційовна у всій комплексній площині.

2)  $w = \frac{1}{z}$ ; 3)  $w = |z|^2$ ; 4)  $w = z \cdot e^{z-\bar{z}}$ ; 5)  $w = z \cdot \bar{z}$ ; 6)  $w = e^{z-2}$ ;  
7)  $w = z^2$ ; 8)  $w = \cos 3z$ ; 9)  $w = z^2 + 2z - 1$ ; 10)  $w = \sin 2z$ ;  
11)  $w = \bar{z}^2 - z^2$ ; 12)  $w = z \cdot \operatorname{Im} z$ ; 13)  $w = \frac{z}{|z|}$ ; 14)  $w = (\bar{z})^2$ ;  
15)  $w = |z|^2$ ; 16)  $w = z \operatorname{Re} z$ ; 17)  $w = z \cdot \bar{z} + 2i \operatorname{Im} z (\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)$ .

Функція  $u(x, y)$  називається гармонічною, якщо вона має частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

**Завдання 20.** Визначити, чи функція є гармонічною

1)  $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2$ .

**Розв'язання.** Знайдемо другі частинні похідні  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  та  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  і перевіримо,

чи задовольняють вони рівнянню Лапласа (2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y - 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y + 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y + 2 - e^x \cos y - 2 = 0.$$

Другі частинні похідні задовольняють рівнянню Лапласа, отже функція  $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2$  є гармонічною функцією.

$$2) u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2); \quad 3) u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$4) u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 5) u(x, y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3;$$

$$6) u(x, y) = e^x \sin y; \quad 7) u(x, y) = e^x \cos y;$$

$$8) u(x, y) = 2 \cos x \cosh y - x^2 + y^2; \quad 9) u(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$10) u(x, y) = 2x^2 + y; \quad 11) u(x, y) = e^{2xy} \sin(y^2 - x^2);$$

$$12) u(x, y) = 2xy.$$

Гармонічні функції, які задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються спряженими гармонічними. Дійсна і уявна частина аналітичної функції є спряженими гармонічними функціями. За заданою дійсною (уявною) частиною аналітичної функції можна відновити уявну (дійсну частину) з точністю до довільної сталої

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (3)$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C, \quad (4)$$

**Завдання 21.** Побудувати аналітичну функцію

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

за її дійсною або уявною частиною.

$$1) v = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

**Розв'язання.** Перевіримо спочатку чи задана функція є гармонічною,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2 + \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \\ &= 2 - \frac{2x(x^2 + y^2 + 2y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 2 - \frac{(3y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -2y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2x + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -2 - \frac{2x(x^2 + y^2)^2 - 2xy(x^2 + y^2) \cdot 2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \\ &= -2 - \frac{2x(x^2 + y^2 - 4y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -2 + \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial' v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 2 - \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} - 2 + \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0. \end{aligned}$$

Задана функція є гармонічною, отже можемо побудувати спряжену до неї. Скориставшись формулою (4), будемо мати

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-2y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) dx - \left(2x + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) dy + c.$$

Виберемо за точку  $(x_0, y_0)$  точку  $(1, 0)$ , тоді

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1, 0)}^{(x, y)} \left(-2y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) dx - \left(2x + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) dy + c = \\ &= -\int_0^y \left(2x + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) dy + c = -2xy - \int_0^y \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \\ &+ 2x^2 \int_0^y \frac{dy}{(x^2 + y^2)^2} + c = -2xy - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \\ &+ 2x^2 \frac{1}{2x^2} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \int_0^y \frac{dy}{x^2 + y^2}\right) + c = -2xy - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \\ &+ \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c = -2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} + c. \end{aligned}$$

Отже  $u(x, y) = -2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} + c$ , а функція  $f(z)$  дорівнює

$$f(z) = -2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} + i\left(x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + c =$$

$$= iz^2 + i \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} + c = iz^2 + \frac{i}{z} + c = i\left(z^2 + \frac{1}{z}\right) + c$$

$$f(z) = i\left(z^2 + \frac{1}{z}\right) + c.$$

$$2) v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3;$$

$$3) v(x, y) = x^3 - 3xy^2;$$

$$4) u(x, y) = x^2 - y^2 + x;$$

$$5) u(x, y) = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (x > 0);$$

$$6) u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (x > 0);$$

$$7) u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$8) v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$9) u(x, y) = e^x \cos y + x;$$

$$10) v(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^x \sin y;$$

$$11) v(x, y) = 2xy + e^x \sin y;$$

$$12) u(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y;$$

$$13) u(x, y) = xye^y \cos x;$$

$$14) v(x, y) = x^2 - y^2 + 1;$$

$$15) u(x, y) = x + chy \cos x;$$

$$16) v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x;$$

$$17) u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Нехай функція  $w = f(z)$  визначена, неперервна в обл.  $D$  і  $w'(z_0) \neq 0$ , де  $z_0 \in D$ . Модуль похідної  $|w'(z_0)|$  визначає коефіцієнт розтягу в околі точки  $z_0$  всіх кривих, що проходять через цю точку при відображенні за допомогою функції  $w = f(z)$ . Аргумент похідної  $\arg(w'(z_0))$  визначає кут, на який повертаються всі криві в точці  $z_0$  при відображенні  $w = f(z)$ .

**Завдання 22.** Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні за допомогою функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0$ .

$$1) w = \frac{z-i}{z+i}, \quad z_0 = 0.$$

**Розв'язання.**

Виходячи із геометричного змісту похідної коефіцієнт розтягу  $k = |w'(z_0)|$ , а кут повороту  $\alpha = \arg w'(z_0)$ .

Знайдемо похідну функції  $w(z) = \frac{z-i}{z+i}$  і обчислимо її в точці  $z_0 = 0$ .

$$w'(z) = \frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2},$$

$$w'(0) = \frac{2i}{i^2} = -2i.$$

Так як  $|-2i| = 2$ , а  $\arg(-2i) = \frac{3}{2}\pi$ , то коефіцієнт розтягу в точці  $z_0 = 0$  при відображенні функцією  $w(z) = \frac{z-i}{z+i}$  дорівнює  $k = 2$ , а кут повороту  $a = \frac{3}{2}\pi$ .

$$2) w = \frac{z-i}{z+i}, \quad z_0 = 1;$$

$$3) w = -2iz + 1, \quad z_0 = 0;$$

$$4) w = \frac{i}{z}, \quad z_0 = 1+i;$$

$$5) w = \frac{\bar{z}}{1+z}, \quad z_0 = i;$$

$$6) w = iz^3 - 3z, \quad z_0 = -i;$$

$$7) w = \frac{z-2}{2z+1}, \quad z_0 = i-1;$$

$$8) w = z^2 + 2zi, \quad z_0 = i;$$

$$9) w = z^2 - 2iz + 3, \quad z_0 = 1;$$

$$10) w = \frac{1+i}{z}, \quad z_0 = 1+i.$$

**Завдання 23.** Яка частина площини стикається при відображенні за допомогою функції  $w = f(z)$ .

$$1) w = z^3 + 2.$$

**Розв'язання.** Знайдемо похідну функції  $w = z^3 + 2$  та її модуль:

$$w' = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2 + 2xyi);$$

$$\begin{aligned} |w'| &= 3\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = 3\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2} = \\ &= 3\sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2} = 3\sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 3(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

При відображенні за допомогою функції  $w = f(z)$  стикається та частина площини, для точок якої виконується умова  $0 < \kappa < 1$ , або  $0 < |w'| < 1$ .

$$\text{Отже } 0 < 3(x^2 + y^2) < 1, \text{ звідки маємо } 0 < x^2 + y^2 < \frac{1}{3}$$

При відображенні за допомогою функції  $w = z^3 + 2$  стикається внутрішня частина кола  $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  з виколотою точкою  $z = 0$ .

- 2)  $w = z^2 - 2z$ ;
- 3)  $w = z^2 - 2iz + 2$ ;
- 4)  $w = \frac{1-i}{z}$ ;
- 5)  $w = \frac{z}{z+i}$ ;
- 6)  $w = z^2 - 6iz$ ;
- 7)  $w = \frac{i}{z}$ ;
- 8)  $w = z^3 + 5$ ;
- 9)  $w = z^2 + 2z$ ;
- 10)  $w = z^3 - 1$ ;
- 11)  $w = z^{-2}$ .

### **§ 5. Відображення за допомогою лінійної функції.**

Функція виду  $w = az + b$ , де  $a, b$  - сталі комплексні числа, називається лінійною. Відображення за допомогою цієї функції конформне у всій площині ( $w' = a \neq 0$ ). Якщо  $z$  та  $a$  подати у показниковій формі  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $a = |a|e^{i\alpha}$ , то

$$w = |a|e^{i\alpha} \rho e^{i\varphi} + b = |a|\rho e^{i(\alpha+\varphi)} + b$$

Із останньої рівності слідує, що відображення за допомогою лінійної функції можна розглядати як суперпозицію таких відображень:

- 1)  $t = |a|z$  – розтяг в  $|a|$  разів
- 2)  $\zeta = te^{i\alpha}$  – поворот на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки
- 3)  $w = \zeta + b$  – паралельне зміщення на  $b = \beta_1 + i\beta_2$ .

**Завдання 24.** Знайти образ на  $w$ -площині області при відображенні за допомогою лінійної функції  $w = az + b$ .

$$1) -1 < \operatorname{Re} z < 1$$

$$w = \sqrt{2}(1+i)z + 2\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \quad \frac{\sqrt{2}}{\beta}\right)$$

**Розв'язання.** Знайдемо модуль і аргумент похідної  $w' = \sqrt{2}(1+i)$ :

$$|w'| = \sqrt{2}\sqrt{1+1} = 2,$$

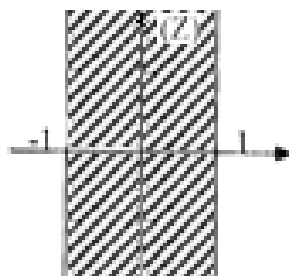
$$\arg w' = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Відображення функцією  $w = \sqrt{2}(1 - i)z + 2\sqrt{2}$  є послідовним виконанням таких відображень:

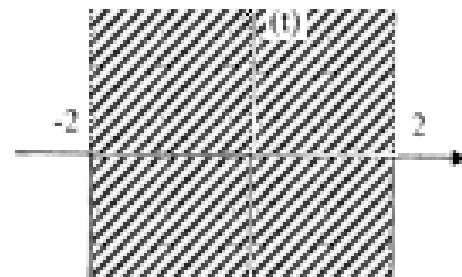
1)  $t = 2z$  – розтяг в два рази;

2)  $\zeta = t \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$  – поворот на кут  $\frac{\pi}{4}$  за годинниковою стрілкою;

3)  $w = \zeta + 2\sqrt{2}$  – паралельне переміщення.

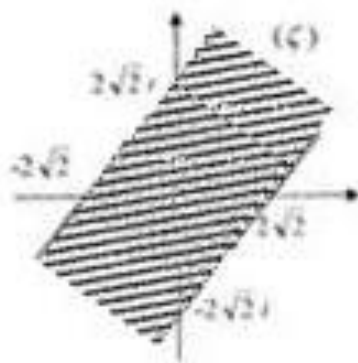


Мал. 3

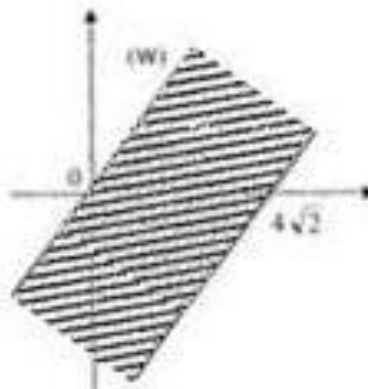


Мал. 4

4) Задана область і відображення 1)-3) подані на малюнках 3-6



Мал. 5



Мал. 6

2)  $|z - i| < 1, \quad w = 2iz - 1 + i;$

3)  $0 < \text{Im } z < \pi, \quad w = -2iz + 1 - i;$

4)  $\begin{cases} \text{Re } z > 0, \\ \frac{\pi}{2} < \text{Im } z < \pi, \end{cases} \quad w = 3iz - 1 - i;$

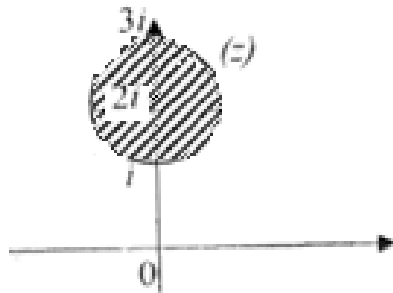
5)  $\begin{cases} |z| < 2, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad w = -2iz + 3 - i;$

- 6)  $\begin{cases} |z| > 1, \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, \end{cases} \quad w = (1+i)z + 2 - i;$
- 7)  $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z, \quad w = (-2 + 2\sqrt{3}i)z + 3 - i;$
- 8)  $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad w = (2\sqrt{3} + 2i)z - i;$
- 9)  $\operatorname{Im} z > 2, \quad w = \frac{1}{2}iz - 1 + 2i;$
- 10)  $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z - 1, \quad w = (\sqrt{3} + \sqrt{3}i)z - 1 + i;$
- 11)  $\operatorname{Im} z > \frac{1}{2}\operatorname{Re} z + 1, \quad w = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)z + 3i.$
- 12)  $|z + 1 - i| < \sqrt{2}; w = (1+i)z + 2 - i;$
- 13)  $|z - 2i| < 1; w = -2iz + 1 - i.$

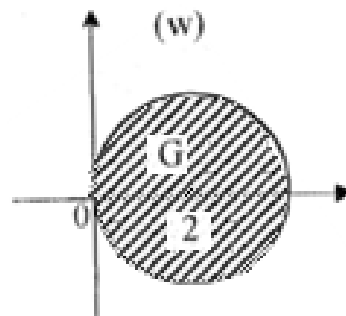
**Завдання 25.** Знайти одну з лінійних функцій, яка відображає область  $D$  на  $z$ -площині в область  $G$  на  $w$ -площині:

1)  $D: |z - 2i| < 1, \quad G: |w - 2| < 2.$

**Розв'язання.** Задані області зображені на малюнках 7-8.



Мал. 7



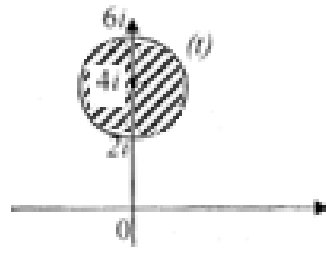
Мал. 8

Область  $D$  можна відобразити в область  $G$ , наприклад, так:

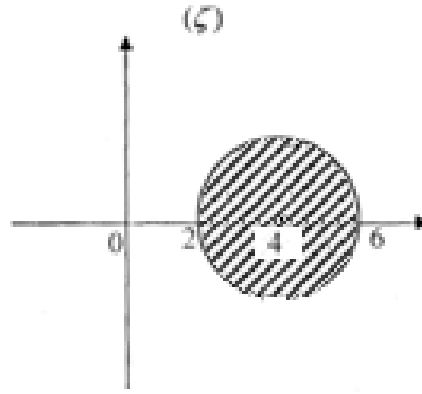
1)  $t = 2z$

2)  $\zeta = e \cdot y^{-i\frac{\pi}{2}}$

3)  $w = \zeta - 2$



Мал. 9



Мал. 10

Отже однією з лінійних функцій; що відображає область  $D$  на  $G$  є наступна:

$$\omega = \zeta - 2 = te^{-i\frac{\pi}{2}} - 2 = -it - 2 = -2iz - 2$$

- 2)  $D: \text{Im } z < \text{Re } z, \quad G: \text{Im } w > \frac{1}{2}\text{Re } w + 1;$
- 3)  $D: |z + 1 - i| < \sqrt{2}, \quad G: |w - 1| < 1;$
- 4)  $D: -\text{Re } z - 1 < \text{Im } z < -\text{Re } z + 1, \quad G: 0 < \text{Re } w < \pi;$
- 5)  $D: \text{Im } z < 2, \quad G: \text{Im } w < \text{Re } w - 1;$
- 6)  $D: |z - 1| > 1, \quad G: |w - 2i + 1| > 2;$
- 7)  $D: |z + 1 - i| < 1, \quad G: |w - 1 + i| < 2;$
- 8)  $D: 0 < \text{Im } z < 1, \quad G: -3 < \text{Re } w < -1;$
- 9)  $D: \begin{cases} -1 < \text{Im } z < 1, \\ \text{Re } z > 0, \end{cases} \quad G: \begin{cases} -1 < \text{Im } z < 1 \\ -\infty < \text{Re } z < 0; \end{cases}$
- 10)  $D: \begin{cases} -1 < \text{Re } z < 1, \\ \text{Im } z > 0, \end{cases} \quad G: \begin{cases} -2 < \text{Im } z < 0 \\ \text{Re } z < -1 \end{cases}.$

### § 6. Відображення за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$ .

Відображення  $w = \frac{1}{z}$  конформне у всіх точках площини за виключенням  $z = 0$  та  $z = \infty$ .

При цьому функція всю розширену комплексну площину відображає у всю розширену комплексну площину (точки  $z = 0$  та  $z = \infty$  відображаються відповідно у точки  $w = \infty$  і  $w = 0$ ).

Функція  $w = \frac{1}{z}$  володіє круговою властивістю та властивістю збереження симетрії.

Кругова властивість: коло в широкому розумінні функція  $w = \frac{1}{z}$  відображає у коло в широкому розумінні (колом в широкому розумінні називається коло або пряма у звичайному розумінні).

Властивість збереження симетрії: точки, які симетричні на  $z$ -площині відносно кола в широкому розумінні, відображаються у точки симетричні відносно образу цього кола на  $w$ -площині.

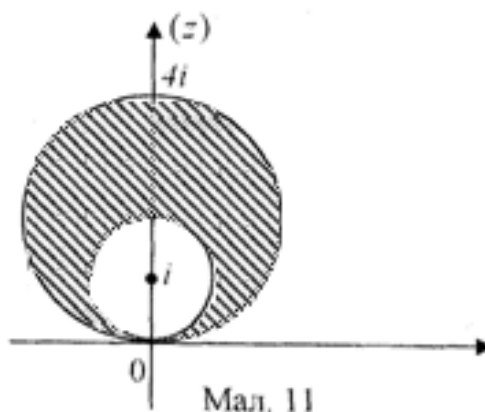
Точки симетричні відносно прямої - це точки, що лежать на перпендикулярі до цієї прямої і рівновіддалені від неї. Точки  $M$  та  $N$  симетричні відносно кола з центром в т.  $O$  і радіусом  $R$ , якщо вони лежать на одному промені, початком якого є точка  $O$ , і задовольняють рівності  $OM \cdot ON = R^2$ .

Для здійснення відображення за допомогою функції  $w = \frac{1}{z}$  запишемо  $z$  і  $w$  у полярних координатах  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ , тоді  $w = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ , звідки  $\rho = \frac{1}{r}$ ;  $\theta = -\varphi$ .

**Завдання 26.** Виконати відображення заданої лінії або області на  $z$ -площині за допомогою функції  $w = \frac{1}{z}$ .

$$1) w = \frac{1}{z}$$

$$\begin{cases} |z - i| > 1 \\ |z - 2i| < 2 \end{cases}$$



**Розв'язання.** Виконаємо малюнок заданої області (мал. 11). Для

відображення за допомогою функції  $w = \frac{1}{z}$  скористаємося круговою властивістю цієї функції.

Так як межі заданої області кола  $|z - i| = 1$  та  $|z - 2i| = 2$ , проходять через початок координат, то вони відобразяться у прями.

Пряма виражається двома точками, тому знайдемо образи двох точок кола  $|z - i| = 1$  та образи двох точок кола  $|z - 2i| = 2$ :

$$w(2i) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2},$$

$$w(1+i) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

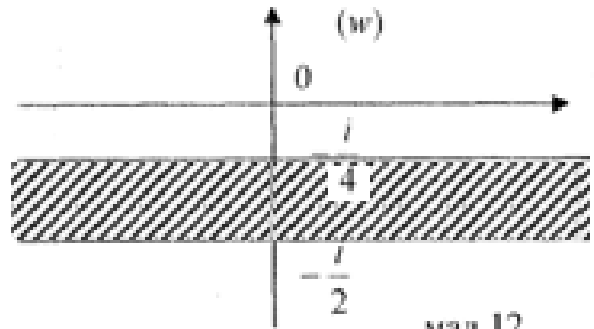
Отже коло  $|z - i| = 1$  відобразиться у пряму  $\text{Im } w = -\frac{i}{2}$ .

$$w(4i) = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4},$$

$$w(2+2i) = \frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{4+4} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}.$$

Образом кола  $|z - 2i| = 2$  є пряма

$$\text{Im } w = -\frac{i}{4}.$$



Межами образу заданої області  $D$  є

дві прямі, щоб визначити, чи образ лежить між ними, чи зовні, знайдемо образ будь-якої внутрішньої точки області  $D$ . Наприклад  $z = 3i$

$$w(3i) = \frac{1}{3i} = -\frac{i}{3}.$$

За властивістю конформних відображень внутрішні точки переходять у внутрішні, таким чином образом заданої області є смуга  $-\frac{1}{2} < \text{Im } z < -\frac{1}{4}$  (мал. 12)

$$2) z\bar{z} = \text{Im } z; \quad 3) \text{Re } z > 1; \quad 4) \text{Im } z > 2; \quad 5) \begin{cases} |z-1| > 1 \\ |z-2| < 2 \end{cases}; \quad 6) 0 < \text{Im } z < 1;$$

$$7) z\bar{z} = 4 \text{Im } z - 2 \text{Re } z - 1; \quad 8) |z|^2 = 2 \text{Re } z + 3; \quad 9) \text{Re } z = 2 \text{Im } z;$$

$$10) |z-2| > 1; \quad 11) |z-4| < 2.$$

**Завдання 27.** Відобразити за допомогою функції  $w = \frac{2i}{z}$  область

$$\begin{cases} |z+1| > 1 \\ |z-1| > 1 \end{cases}$$

**Завдання 28.** Смуку  $-1 < \text{Re } z < 1$  відобразити за допомогою функції  $w = 2i\left(\frac{1}{z} + 1\right)$ .

**Завдання 29.** Знайти конформне відображення області  $\begin{cases} |z-1| > 1 \\ \text{Re } z > 0 \end{cases}$  у

смугу  $0 < \text{Im } w < 1$ .

### § 7. Дробово-лінійна функція.

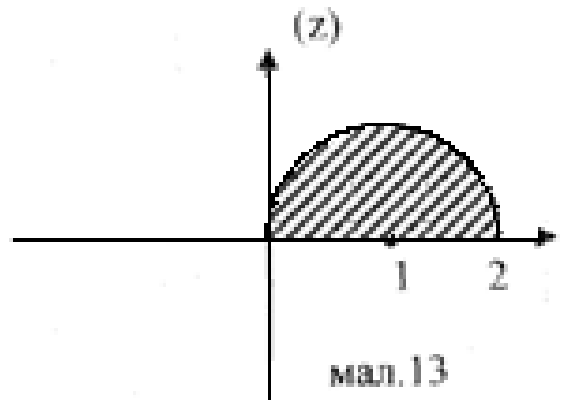
Функція виду  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  ( $a, b, c, d$  – сталі числа такі, що  $c \neq 0$  і  $ad - bc \neq 0$ )

називається дробово-лінійною.

Дробово-лінійна функція  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  всю розширену комплексну площину відображає у розширену комплексну площину.

Для функції  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  виконуються кругова властивість і властивість збереження симетрії наведені в §6.

Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке відображає три довільно взяті точки  $z$ -площини  $z_1, z_2, z_3$  відповідно у три точки  $w$ -площини  $w_1, w_2, w_3$ . Це відображення визначається рівністю  $\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$  яке називається ангармонічним відношенням.



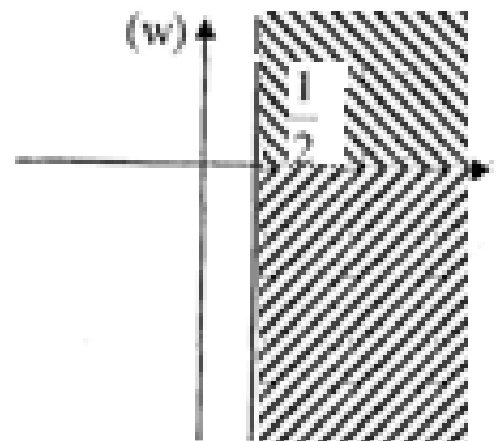
**Завдання 30.** Знайти образи області  $D$  на  $z$ -площині за допомогою функції  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ .

$$1) D: \begin{cases} |z-1| > 1 \\ \text{Im } z > 1 \end{cases} \quad w = \frac{z-1}{z-2}$$

**Розв'язання.** Виконаємо малюнок області  $D$  (мал. 13).

Межами області є коло  $|z-1| = 1$  та пряма  $\text{Im } z = 0$ . Обидві ці лінії проходять через точку  $z = 2$ , в якій знаменник дробу  $\frac{z-1}{z-2}$  перетворюється в нуль.

За круговою властивістю дробово-лінійної функції коло  $|z-1| = 1$  і пряма  $\text{Im } z = 0$  відобразяться у прями. Так як пряма визначається двома



точками, образи знайдемо двох точок, що належать прямій  $\text{Im} z = 0$  :  $w(0) = \frac{1}{2}$ ,  $w(3) = 2$ . Отже дійсна вісь функції  $w = \frac{z-1}{z-2}$  відображається у дійсну вісь. Так як коло  $|z - 1| = 1$  і дійсна вісь в точці  $z = 0$  взаємно перпендикулярні, то за властивістю збереження кутів при конформному відображенні, образ кола (пряма) в точці  $w(0) = \frac{1}{2}$  буде перпендикулярний до дійсної осі.

Рівняння прямої, що є образом кола  $|z - 1| = 1$ , буде  $\text{Re} w = \frac{1}{2}$ .

Точка  $z = i$  є внутрішньою точкою області  $D$ , тому точка  $w(i) = \frac{i-1}{i-2} = \frac{1-i}{2-i} = \frac{(1-i)(2-i)}{5} = \frac{3-i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{i}{5}$  є внутрішньою точкою образу області  $D$ . Отже образом області  $D$  при відображенні функцією  $w = \frac{z-1}{z-2}$  буде

$$\text{область} \begin{cases} \text{Re} w > \frac{1}{2} \\ \text{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$2) D: |z - 3| > 2, \quad w = \frac{z+1}{z-1};$$

$$3) D: \begin{cases} 0 < \text{Re} z < 1 \\ 0 < \text{Im} z < 1 \end{cases}, \quad w = \frac{z}{z-1};$$

$$4) D: \begin{cases} |z - 3| > 2 \\ |z + 2| > 3 \end{cases}, \quad w = \frac{z+1}{z-1};$$

$$5) D: \text{Im} z > 1, \quad w = \frac{z-1}{z+1};$$

$$6) D: |z| < 2, \quad w = \frac{z}{z+1};$$

$$7) D: \begin{cases} |z - 1 + i| > 1 \\ |z - 1 + 2i| < 2 \end{cases}, \quad w = \frac{z+1}{z-1};$$

$$8) D: \begin{cases} |z| > 1 \\ 0 < \arg z < \pi \end{cases}, \quad w = \frac{z}{z-1};$$

$$9) D: \begin{cases} 1 < |z| < 2 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad w = \frac{z-1}{z};$$

$$10) D: \begin{cases} \text{Im} z > 0 \\ |z| > 1 \end{cases}, \quad w = \frac{z+1}{z-1};$$

$$11) D: \begin{cases} |z| < 1 \\ \text{Im} z > 0 \end{cases}, \quad w = \frac{iz+1}{z+i}.$$

**Завдання 31.** Знайти конформне відображення верхньої півплощини на

нижню, при якому точки  $0, 1, \infty$  відображаються у точки  $\infty, 1, 0$ , відповідно.

**Розв'язання.** Для знаходження дробово-лінійного відображення, яке точки  $0, 1, \infty$  відображає у точки  $\infty, 1, 0$  відповідно скористаємося ангармонійним відношенням.

$$\frac{z-0}{z-1} \cdot \frac{\infty-1}{\infty-0} = \frac{w-\infty}{w-1} \cdot \frac{0-1}{0-\infty}$$

Замінивши різниці, в які входить нескінченно віддалена точка, одиницею, одержимо

$$\frac{z}{z-1} = \frac{-1}{w-1}$$

Звідки  $w = \frac{1}{z}$ . На підставі властивості конформного відображення про збереження обходу при такому відображенні верхня півплощина відображається на нижню півплощину.

**Завдання 32.** Знайти конформне відображення площини  $z$  самої в себе, яке точки  $z_1, z_2, z_3$ , переводить відповідно у точки  $w_1, w_2, w_3$ .

1)  $z_1 = \infty, z_2 = 0, z_3 = 1, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$ ;

2)  $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -1, w_1 = 1, w_2 = 1+i, w_3 = \infty$ ;

3)  $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i, w_1 = 0, w_2 = \infty, w_3 = 1$ ;

4)  $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 0, w_1 = 0, w_2 = \infty, w_3 = 1$ ;

5)  $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 1, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = -1$ ;

6)  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1, w_1 = \infty, w_2 = 1, w_3 = -1$ ;

7)  $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 1, w_1 = 1, w_2 = \infty, w_3 = 0$ ;

8)  $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1, w_1 = \infty, w_2 = 0, w_3 = 1$ ;

9)  $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = -2, w_1 = 1, w_2 = -1, w_3 = 0$ .

**Завдання 33.** Відобразити конформно круг  $|z-1| < 2$  в круг  $|w-i| < 2$  так, щоб точка  $O$  перейшла в центр круга.

**Завдання 34.** Відобразити конформно півплощину  $\text{Im } z > 1$  в круг  $|z - 2i| < 2$  так, щоб точка  $2i$  залишилася нерухомою.

**Завдання 35.** Знайти конформне відображення круга  $|z| < 2$  на

півплощину  $\text{Im } w > 0$ , яке точку  $O$  переводить у точку

**Завдання 36.** Знайти умови, при яких суперпозиція двох дробово-лінійних функцій є:

а) дробово-лінійною функцією;

б) лінійною функцією.

Дослідити чи можливі інші випадки.

### § 8. Степенева функція з раціональним показником $w = z^{\frac{p}{q}}$

Запишемо функцію  $w = z^{\frac{p}{q}}$  наступним чином  $w = (z^p)^{\frac{1}{q}}$  і розглянемо окремо функції  $t = z^p$  та  $w = t^{\frac{1}{q}}$ .

Похідна функції  $t = z^p$  (де  $p \in \mathbb{N}$ ) дорівнює  $t' = pz^{p-1}$  і є скінченною, відмінною від нуля у всіх точках площини, крім  $z = 0$  та  $z = \infty$ . Відображення цією функцією конформне всюди, крім зазначених точок. Запишемо  $z$  та  $t$  в полярних координатах  $z = re^{i\varphi}$ ,  $t = \rho e^{i\theta}$ , тоді із співвідношення  $t = z^p$  маємо

$$\begin{cases} \rho = r^p, \\ \theta = p\varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Якщо область задана на  $z$ -площині через нерівності для координат  $r$  та  $\varphi$ , то за допомогою рівностей (1) знаходимо нерівності для змінних  $\rho$  та  $\theta$ , які визначають образ області у  $t$ -площині.

Розглянемо тепер функцію

$$w = t^{\frac{1}{q}} \quad (q \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Як відомо, ця функція не є однозначною, вона складається з  $q$  функцій, які знаходяться за формулами (якщо  $t = \rho e^{i\theta}$ )

$$\begin{aligned} \left( t^{\frac{1}{q}} \right)_0 &= \rho^{\frac{1}{q}} e^{i\frac{\theta}{q}}, \quad \left( t^{\frac{1}{q}} \right)_1 = \rho^{\frac{1}{q}} e^{i\frac{\theta+2\pi}{q}}, \dots, \\ \left( t^{\frac{1}{q}} \right)_{q-1} &= \rho^{\frac{1}{q}} e^{i\frac{\theta+2\pi(q-1)}{q}} \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

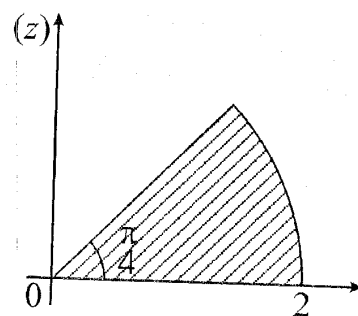
Кожна із вказаних функцій називається відповідною віткою степеневі функції (2).

Відображення функцією  $w = t^{\frac{1}{q}}$  виконуються за допомогою формул

$$\begin{cases} |w| = \rho^{\frac{1}{q}}, \\ \arg w = \frac{\theta}{q}. \end{cases}$$

Це відображення площину з розрізом  $0 < \theta < 2\pi$  переводить у область кута  $0 < \arg w < \frac{2\pi}{q}$ .

Функція  $w = \rho^{\frac{1}{q}} e^{i \frac{\theta+2\pi}{q}}$  відображає другий лист  $z$ -площини  $2\pi < \theta + 2\pi < 4\pi$  у кут  $\frac{2\pi}{q} < \arg w < \frac{4\pi}{q}$  на  $w$ -площині.



мал. 15

Функція  $w = \rho^{\frac{1}{q}} e^{i \frac{\varphi+2\pi(q-1)}{q}}$  відображає  $q$ -тий лист  $z$ -площини у кут  $\frac{2\pi(q-1)}{q} < \arg w < 2\pi$  на  $w$ -площині.

**Завдання 37.** Виконати відображення області  $D$  на  $z$ -площині за допомогою функції  $w = f(z)$

$$1) \begin{cases} |z| < 2 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

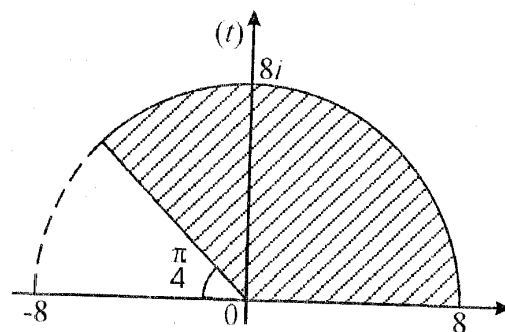
$$w = z^3 + 1 + i.$$

**Розв'язання.**

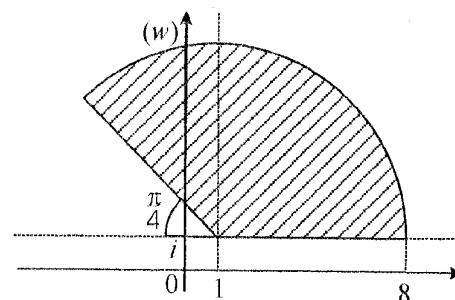
Виконаємо малюнок області (мал. 15).

Функція  $w = z^3 + 1 + i$  є складеною функцією. Відображення за допомогою цієї функції складається з послідовних відображень степеневі функції  $t = z^3$  та лінійної  $w = t + 1 + i$ .

Із формул (1) маємо, що  $\begin{cases} |t| = |z|^3 \\ \arg t = 3 \arg z \end{cases}$



мал. 16



$$\text{Так як } \begin{cases} 0 < |z| < 2 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} 0 < |t| < 8 \\ 0 < \arg t < \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

Результат відображення функцією  $t = z$  зображений на мал. 16.

мал. 17

Відображення функцією  $w = t + 1 + i$  є паралельним переміщенням на вектор  $\{11\}$ .

Результат цього відображення зображений на мал. 17

$$2) D : \operatorname{Im} z > 0, \quad w = z^2;$$

$$3) D : \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad w = z^3;$$

$$4) D : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, \quad w = z^4 + 1;$$

$$5) D : \begin{cases} |z| > 2, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{8}, \end{cases} \quad w = z^3;$$

$$6) D : \begin{cases} 1 < |z| < 2, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad w = z^4;$$

$$7) D : \operatorname{Re} z > 2, \quad w = z^2;$$

$$8) D : \operatorname{Im} z < 1, \quad w = z^2;$$

$$9) D : \begin{cases} |z| < 1, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad w = z^2 - 1;$$

$$10) D : \begin{cases} 0 < \arg z < 2\pi, \\ 1 < |z| < 2, \end{cases} \quad w = \sqrt[4]{z};$$

$$11) D : \begin{cases} 0 < \arg z < \pi, \\ |z| > 8, \end{cases} \quad w = \sqrt[3]{z};$$

$$12) D : 0 < \arg z < 2\pi, \quad w = \sqrt{z};$$

$$13) D : \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi, \quad w = \sqrt[4]{z}.$$

**Завдання 38.** Знайти конформне відображення області  $\begin{cases} |z| < 4 \\ 0 < \arg z < 2\pi \end{cases}$

на область  $\begin{cases} |w| < 2 \\ 0 < \arg w < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

**Завдання 39.** Круг  $|z| < 1$  з розрізом по радіусу від точки  $-1$  до точки  $0$  відобразити на область  $\begin{cases} |w| < 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \end{cases}$ .

**Завдання 40.** Півкруг  $\begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$  конформно відобразити у півплощину  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**Завдання 41.** Площину з розрізом по променю дійсної осі від точки  $-1$  до  $\infty$ , який проходить через точку  $0$ , конформно відобразити в круг  $|w| < 1$ .

**Завдання 42.** Знайти конформне відображення площини з розрізом по сегменту  $[-1;1]$  у півплощину  $\operatorname{Im} w > 1$ .

**Завдання 43.** Знайти конформне відображення зовнішності дуги одиничного кола від  $1$  до  $-1$ , що проходить через точку  $i$ , у зовнішність круга  $|w| > 1$ .

**Завдання 44.** Зовнішність круга  $|z| > 1$  з розрізом по променю уявної осі від точки  $1$  до  $\infty$  конформно відобразити на область  $|w| > 1$ .

**Завдання 45.** Область  $\begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$  з розрізом по відрізку уявної осі від точки  $\frac{i}{2}$  до точки  $i$  конформно відобразити у верхню півплощину.

### **§ 9. Відображення за допомогою функцій $w = e^z$ та $w = \operatorname{Ln} z$ .**

Відображення за допомогою функції  $w = e^z$  конформне у всій скінченній комплексній площині, тому що похідна  $w' = e^z$  скінченна і відмінна від нуля на цій площині.

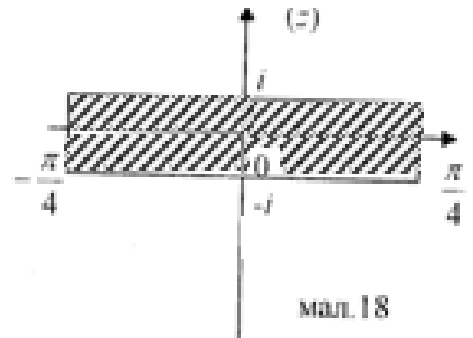
Запишемо змінну  $z$  в декартових координатах  $z = x + iy$ , а змінну  $w$  в полярних  $w = \rho e^{i\varphi}$ , тоді відображення за допомогою функції  $w = e^z$  можна записати наступним чином

$$\rho e^{i\varphi} = e^x e^{iy}.$$

Отже відображення показниковою функцією виконується за формулами:

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \varphi = y \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} |w| = e^x \\ \arg w = y \end{cases} \quad (1)$$

Як видно із формул (1) областю однолистості цієї функції є смуга  $0 < y < 2\pi$  ( $0 < \text{Im } z < 2\pi$ ).



Для відображення за допомогою логарифмічної функції змінну  $z$  запишемо в показниковій формі  $z = \rho e^{i\varphi}$  а змінну  $w$  - в алгебраїчній  $w = u + iv$ . Тоді функція  $w = \ln z$  запишеться наступним чином

$$u + iv = \ln \rho + i\varphi.$$

Відображення за допомогою логарифмічної функції виконується за формулами

$$\begin{cases} u = \ln \rho \\ v = \varphi \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \text{Re } w = \ln |z| \\ \text{Im } w = \arg z \end{cases} \quad (2)$$

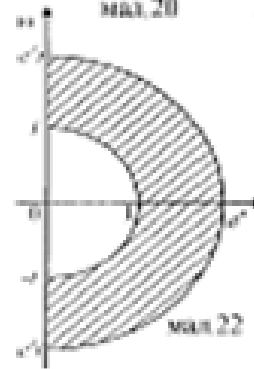
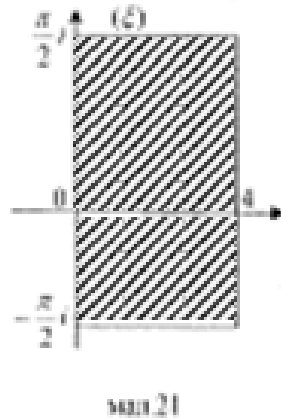
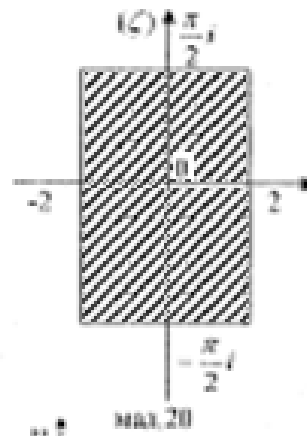
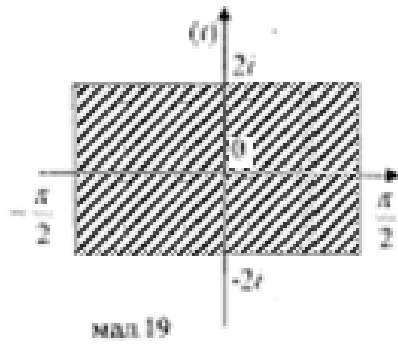
**Завдання 46.**  $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \text{Re } z < \frac{\pi}{4} \\ -1 < \text{Im } z < 1 \end{cases}$  знайти образ області при відображенні функцією  $w = e^{2iz + 2}$ .

**Розв'язання:**

Область, що задається, зображена на мал. 18. Функція  $w = e^{2iz + 2}$  складена, відображення цією функцією це послідовне виконання наступних відображень:

- 1)  $t = 2z$  – розтяг в два рази;
- 2)  $\zeta = e^{i\frac{\pi}{2}}t$  – поворот на кут  $\frac{\pi}{2}$  проти годинникової стрілки;
- 3)  $\xi = \zeta + 2$  – паралельне переміщення на вектор  $\{2;0\}$ ;
- 4)  $w = e^{\xi}$  – показникова: (формули 1).

Результати відображень 1) - 4) зображені на мал. 19 -22.



**Завдання 47.** Знайти образи областей при відображенні  $w = e^z$ .

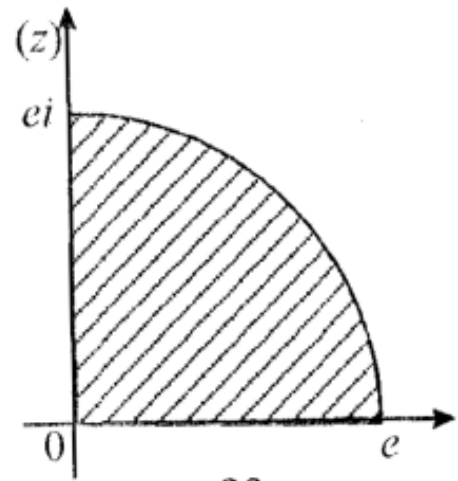
- 1)  $0 < \text{Im } z < 2\pi$ ;
- 2)  $\begin{cases} -\infty < \text{Re } z < 0, \\ 0 < \text{Im } z < \pi; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} 1 < \text{Re } z < 3, \\ 0 < \text{Im } z < \pi; \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} 0 < \text{Re } z < 1, \\ \frac{\pi}{3} < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$
- 5)  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}, \\ \text{Re } z > 0; \end{cases}$
- 6)  $\begin{cases} -1 < \text{Re } z < \ln 2, \\ \frac{\pi}{4} < \text{Im } z < \frac{5}{4}\pi; \end{cases}$
- 7)  $\begin{cases} 0 < \text{Im } z < \pi, \\ \text{Re } z > 0; \end{cases}$
- 8)  $\begin{cases} \text{Re } z > 0, \\ -\frac{\pi}{4} < \text{Im } z < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

**Завдання 48.** Півсмугу  $\begin{cases} 0 < \operatorname{Im} z < \pi \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$

відобразити за допомогою функції  $w = e^{\frac{1}{2}z}$ .

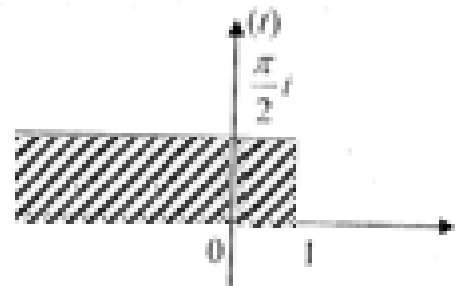
**Завдання 49.** Прямокутник

$\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \operatorname{Im} z < 1 \end{cases}$  відобразити за допомогою функції  $w = e^{2iz+1}$ .



мал.23

**Завдання 50.** Знайти відображення смуги, обмеженої прямими  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ ,  $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ , на верхню півплощину.



мал.24

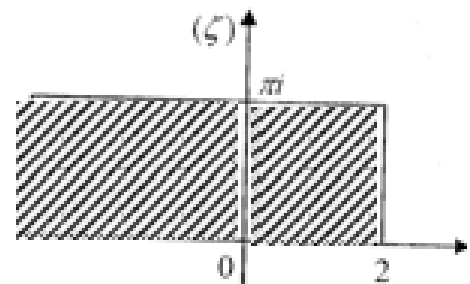
**Завдання 51.** Відобразити півсмугу  $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$  на півкруг

$\begin{cases} |w| < 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \end{cases}$

**Завдання 52.** Відобразити смугу  $0 < \operatorname{Re} z < 4$  на півплощину  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**Завдання 53.** Відобразити за допомогою

функції  $w = 2 \ln z - \frac{\pi}{2}i$  область  $\begin{cases} 0 < |z| < e \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$



мал.25

**Розв'язання.** Виконаємо малюнок заданої області (мал.23).

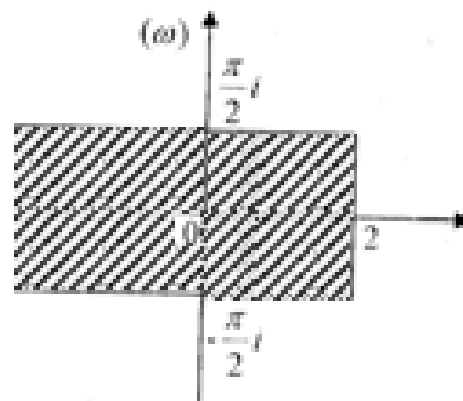
Відображення за допомогою функції  $w = 2 \ln z - \frac{\pi}{2}i$  є послідовним виконанням наступних відображень:

1)  $t = \ln z$ . Це відображення виконується за формулами (2). Так як  $0 < |z| < e$ , то  $-\infty < \operatorname{Re} t < 1$ , а  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ , звідси  $0 < \operatorname{Im} t < \frac{\pi}{2}$ . Результат відображення 1) зображений на мал.24.

2)  $\zeta = 2t$  – розтяг в два рази;

3)  $w = \zeta - \frac{\pi}{2}i$  – паралельне переміщення на вектор  $\{0; -\frac{\pi}{2}\}$ .

Області, які одержуються при відображеннях 2), 3) зображені на мал.25 та 26 відповідно.



мал.26

**Завдання 54.** Виконати відображення за допомогою функції  $w = \ln z$ :

1) кільце  $1 < |z| < 2$  з розрізом по інтервалу (1;2) дійсної осі; площину з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі;

2) площину з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі;

3) 
$$\begin{cases} 2 < |z| < 4, \\ 0 < \arg z < 2\pi; \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 0 < |z| < 1, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} 0 < |z| < 3, \\ 0 < \arg z < \pi; \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

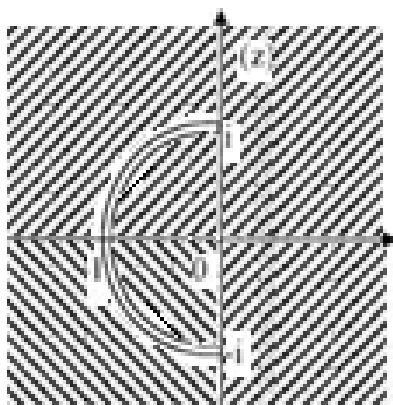
7) 
$$-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}.$$

**Завдання 54.** Відобразити за допомогою функції  $w = -2i \ln z$  сектор 
$$\begin{cases} |z| < e \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

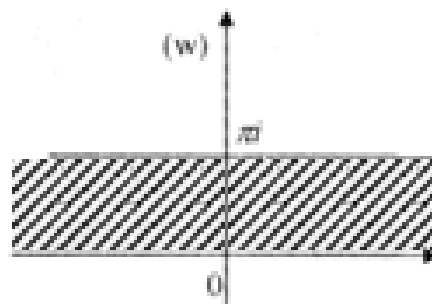
**Завдання 55.** Область 
$$\begin{cases} |z| < \frac{1}{e} \\ \pi < \arg z < 2\pi \end{cases}$$
 відобразити за допомогою функції  $w = \ln z - 1$ .

**Завдання 56.** Знайти функцію, яка конформно відображає:

1) область  $D$  на  $z$ -площині (мал. 27) на область  $G$  на  $w$ -площині (мал. 28).

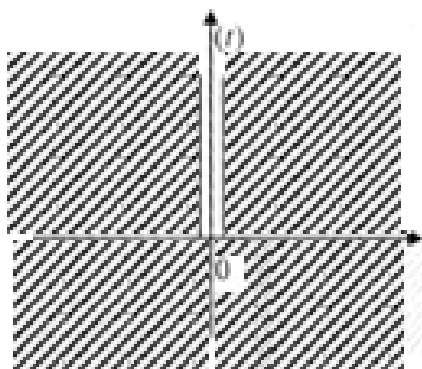


мал. 27

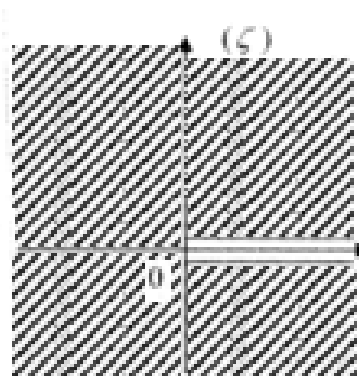


мал. 28

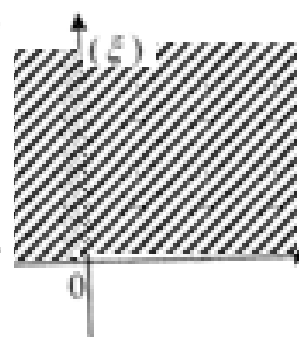
**Розв'язання.** За допомогою дробово-лінійної функції  $t = \frac{z-i}{z+i}$  площину з розрізом по дузі одиничного кола (мал. 27) відображаємо на площину з прямолінійним розрізом по променю  $(0; i\infty)$  уявної осі (мал.29). Повертаємо  $t$  - площину на кут  $-\frac{\pi}{2}$  за допомогою функції  $\zeta = te^{-\frac{\pi}{2}i} = -it$  (мал. 30). Застосуємо степеневу функцію  $\xi = \sqrt{\zeta}$  (мал. 31).



мал. 29



мал. 30



мал. 31

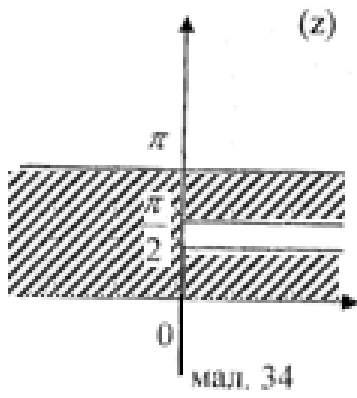
Логарифмічна функція  $w = \ln \xi$  верхню півплощину (мал.31) відображає на область  $G$  ( мал.28). Отже шукана функція

$$w = \ln \xi = \ln \sqrt{\zeta} = \ln \sqrt{-it} = \ln \sqrt{-i \frac{z-i}{z+i}} = \ln \sqrt{\frac{-iz-1}{z+i}} = \frac{1}{2} \ln \frac{-iz-1}{z+i}$$

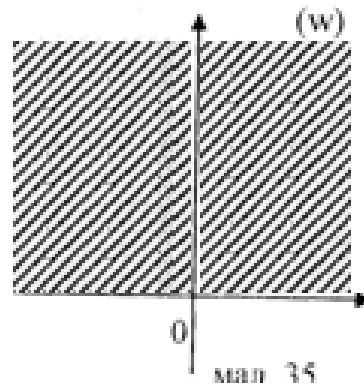
2) область  $0 < \arg z < \pi$  на смугу  $0 < \text{Im } w < 1$ ;

$$3) \begin{cases} |z| < 1 \\ \text{Im } z > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < \text{Im } w < \pi$$

4)

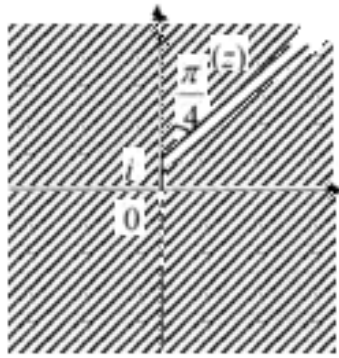


МАЛ. 34

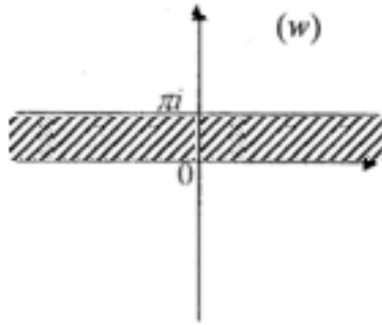


МАЛ. 35

5)



МАЛ. 32

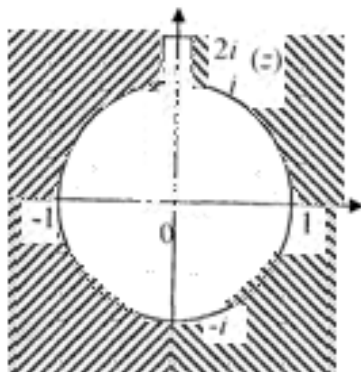


МАЛ. 33

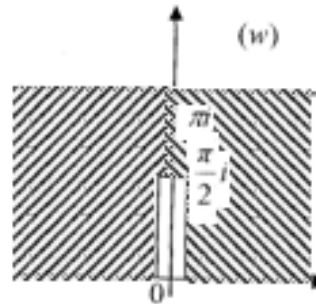
6)

Площину з розрізом по дузі одиничного кола від точки  $i$  до точки  $-1$  у смугу  $0 < \text{Im } w < \pi$ .

7)

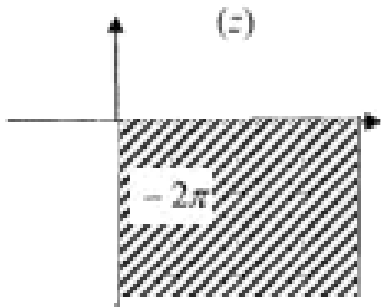


МАЛ. 36

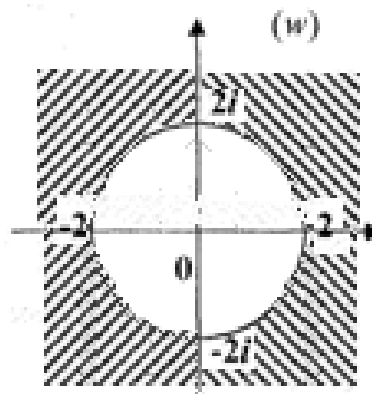


МАЛ. 37

8)

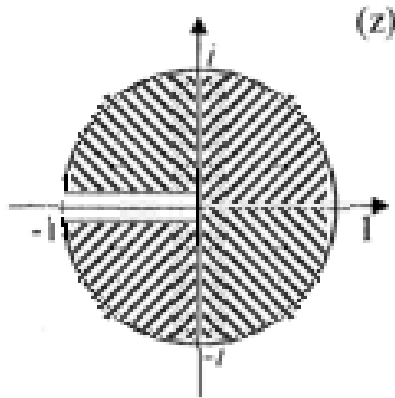


МАЛ. 38

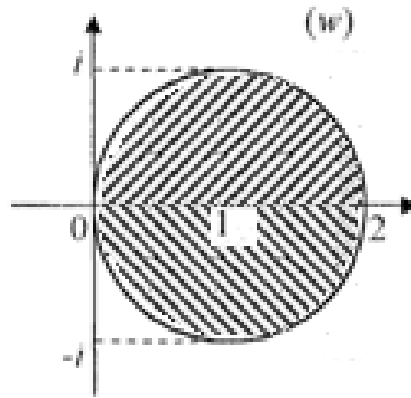


МАЛ. 39

9)



мал. 40



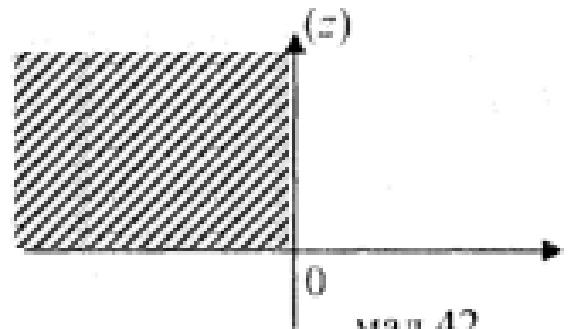
мал. 41

### § 10. Функція Жуковського.

Функція виду  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  називається функцією Жуковського. Вона аналітична для всіх  $z \neq 0$ . При заміні  $\frac{1}{z} = \zeta$ , функція Жуковського не змінюється, тому в точках  $z = 0$  та  $z = \infty$  вона поводить себе однаково. Функція  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  однолиста в області  $D$  тоді і тільки тоді, коли в цій області немає різних точок  $z_1$  та  $z_2$ , пов'язаних рівністю  $z_1 \cdot z_2 = 1$ . Геометрично остання рівність означає, що точка  $z_2 = \frac{1}{z_1}$  одержується із точки  $z_1$  подвійною симетрією: відносно кола  $|z| = 1$  і відносно прямої  $\text{Im } z = 0$ . Областями однолистості є, наприклад,

- а)  $|z| > 1$  - зовнішність одиничного кола;
- б)  $|z| < 1$  - одиничний круг;
- в)  $\text{Im } z > 0$  - верхня півплощина;
- г)  $\text{Im } z < 0$  - нижня півплощина.

Відображення функцією



мал. 42

Жуковського кіл і променів виконується за формулами

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

які одержуються, якщо позначити  $w = u + iv$  та  $z = re^{i\varphi}$ .

Функція  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$  – обернена до функції Жуковського.

**Завдання 57.** Виконати відображення функцією Жуковського наступних областей та ліній:

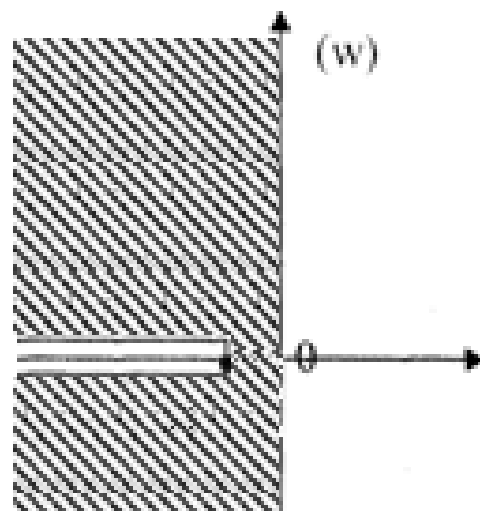
$$1) \begin{cases} \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Задана область є другою чвертю комплексної площини (мал.42). Виконаємо відображення меж області, скориставшись формулами (1). Знайдемо

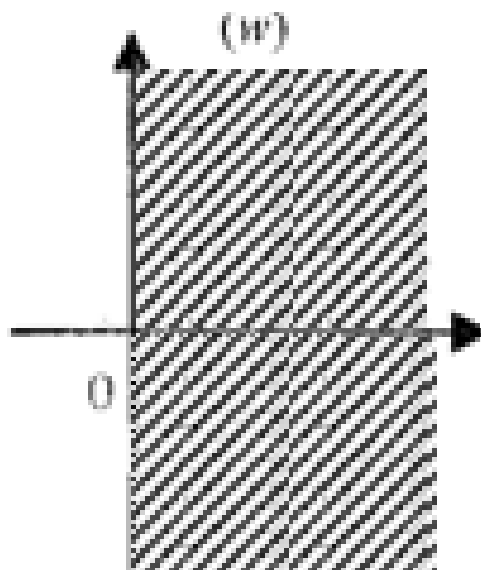
образ променя уявної осі  $(0; +\infty)$ . В формулі (1) необхідно покласти  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , при цьому  $r$  змінюється від нуля до нескінченності. Отже маємо, що  $u = 0$ , а  $v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)$

Точка  $z = 0$  ( $r = 0$ ) відобразиться у точку  $w = -i\infty$ , точка  $z = i$  ( $r = 1$ ) відображається у точку  $w = 0$ , а точка  $z = +i\infty$  ( $r = \infty$ ) відобразиться у точку  $w = +i\infty$ . Таким чином промінь  $(0; +i\infty)$  відображається у всю уявну вісь.

Знайдемо тепер образ променя  $(0; -\infty)$  дійсної осі. В формулах (1) покладаємо  $\varphi = \pi$ , а  $0 < r < \infty$ , тоді  $u = -\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)$ ,  $v = 0$ . При цьому точка  $z = -\infty$  ( $r = \infty$ ) відобразиться у точку  $w = -\infty$ , точка  $z = -1$  ( $r = 1$ ) у точку  $w = -1$ , точка  $z = 0$  ( $r = 0$ ) у точку  $w = -\infty$ . Отже промінь  $(0; -\infty)$



мал. 43



мал. 48

дійсної осі відобразиться у промінь дійсної осі  $(-1; -\infty)$ , який обходиться двічі.

Таким чином, задана область відображається у ліву півплощину з розрізом по променю  $(-1; \infty)$  (мал.43).

$$\begin{aligned}
 & 2) \begin{cases} \operatorname{Im} z > 0, \\ |z| < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Im} z > 0, \\ |z| > 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \operatorname{Im} z < 0, \\ |z| < 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \operatorname{Im} z < 0, \\ |z| > 1; \end{cases} \\
 & 6) \begin{cases} |z| > 1, \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} |z| < 1, \\ 0 < \arg z < 2\pi; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} |z| > 1, \\ 0 < \arg z < 2\pi; \end{cases} \\
 & 9) \operatorname{Im} z > 0; \quad 10) \operatorname{Im} z < 0; \quad 11) \begin{cases} |z| > 2, \\ 0 < \arg z \leq 2\pi; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} |z| < \frac{1}{2}, \\ 0 < \arg z < 2\pi; \end{cases} \\
 & 13) \operatorname{Im} z > |\operatorname{Re} z|; \quad 14) \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0, \\ \operatorname{Im} z > 0; \end{cases} \quad 15) \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0, \\ \operatorname{Im} z < 0; \end{cases} \quad 16) \begin{cases} \operatorname{Im} z = 0, \\ \operatorname{Re} z > 0; \end{cases} \\
 & 17) \begin{cases} \operatorname{Im} z = 0, \\ \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Завдання 58.** Відобразити за допомогою функції  $w = \frac{1}{z} + z + 1$  такі області:

$$\begin{aligned}
 & 1) \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ \operatorname{Im} z > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \operatorname{Re} z < 0, \\ \operatorname{Im} z > 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \operatorname{Re} z < 0, \\ \operatorname{Im} z < 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} |z| < 1, \\ \operatorname{Re} z < 0; \end{cases} \\
 & 5) \begin{cases} |z| > 1, \\ \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Завдання 59.** Знайти відображення області  $\begin{cases} |z| > 1 \\ 0 < \arg z < 2\pi \end{cases}$  з розрізом по відрізку  $(-2; -1)$  дійсної осі у зовнішність одиничного круга  $|w| > 1$ .

## § 11. Відображення тригонометричними та гіперболічними функціями

Враховуючи формули (1) та (2) §3, відображення тригонометричними та гіперболічними функціями можна подати як суперпозицію функцій, розглянутих в §5-§ 10 наступним чином:

$$w = \cos z: \quad \zeta = iz, \quad t = e^\zeta, \quad w = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

$$w = \sin z: \quad \zeta = iz, \quad t = e^\zeta, \quad \tau = -it, \quad w = \frac{1}{2} \left( \tau + \frac{1}{\tau} \right)$$

$$w = \operatorname{tg} z: \quad \zeta = 2iz, \quad t = e^\zeta, \quad w = \frac{t-1}{i(t+1)}$$

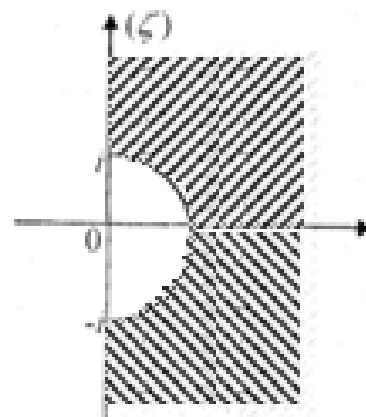
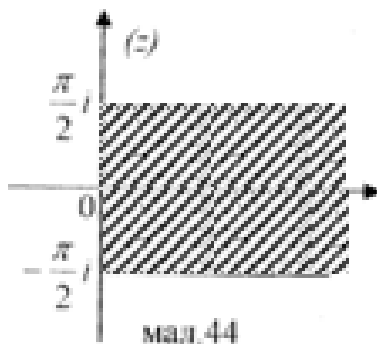
$$w = \operatorname{ch} z: \quad \zeta = e^z, \quad w = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

$$w = \operatorname{sh} z: \quad \zeta = e^z, \quad t = -i\zeta, \quad \tau = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \quad w = i\tau$$

$$w = \operatorname{th} z: \quad \zeta = 2z, \quad t = e^\zeta, \quad w = \frac{t-1}{t+1}$$

**Завдання 60.** Знайти образ області при відображенні функцією  $w = f(z)$

$$1) D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, & w = \operatorname{sh} z. \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$



**Розв'язання.** Щоб відобразити задану область (мал.44) за допомогою

гіперболічного синуса, треба виконати послідовно наступні відображення:

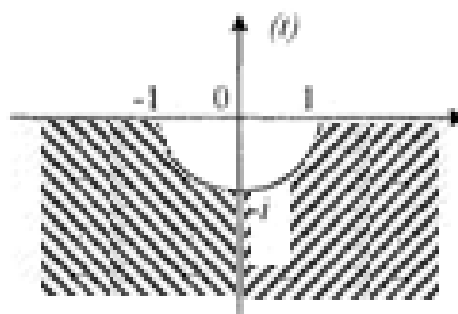
а)  $\zeta = e^z$ ; б)  $t = -i\zeta$ ;

в)  $\tau = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ ; г)  $w = i\tau$ .

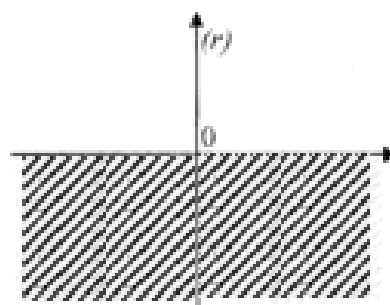
Відображення а) переводить задану

область  $D$  у область  $\begin{cases} e^0 < |\zeta| < e^\infty \\ -\frac{\pi}{2} < \arg \zeta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$  (мал.45).

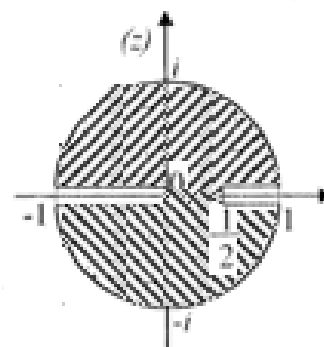
Відображення б) – це поворот на кут  $\frac{\pi}{2}$  за годинниковою стрілкою (мал.46). Функція Жуковського (відображення в)) відображає промені  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  дійсної осі самі в себе, а півколо, що проходить через точки  $-1; -i$  та  $1$  в відрізок  $[-1; i]$  дійсної осі. Отже, область, зображена на мал.46 відобразиться у нижню півплощину (мал.47). Відображення г) – це поворот на кут  $\frac{\pi}{2}$  проти годинникової стрілки (мал.48).



мал.46



мал.47



мал.49

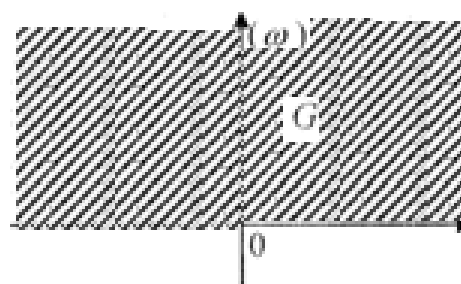
2)  $D: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \quad w = \sin z$ ;

3)  $D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad w = \cos z$ ;

4)  $D: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad w = \cos z$ ;

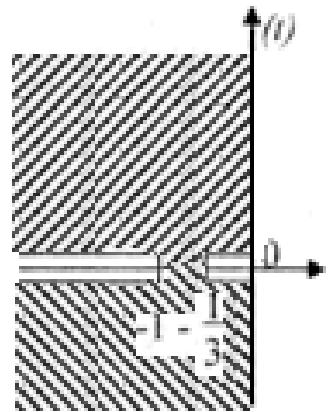
5)  $D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \ln 2, \end{cases} \quad w = \sin z$ ;

6)  $D: \begin{cases} -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad w = \sin z$ ;

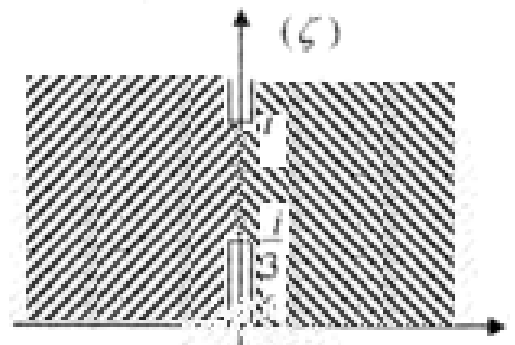


мал.50

- 7) D:  $\begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi, \end{cases} \quad w = chz;$
- 8) D:  $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad w = \sin z;$
- 9) D:  $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{3}{2}\pi, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad w = \sin z;$
- 10) D:  $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi, \\ \operatorname{Re} z < 0, \end{cases} \quad w = shz;$
- 11) D:  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \quad w = shz;$
- 12) D:  $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad w = tgz;$
- 13) D:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad w = tgz;$
- 14) D:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Re} z > 0, \end{cases} \quad w = thz;$
- 15) D:  $\begin{cases} 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \\ \operatorname{Re} z < 0, \end{cases} \quad w = thz;$
- 16) D:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Re} z < 0, \end{cases} \quad w = thz;$
- 17) D:  $\begin{cases} \operatorname{Re} z < 0, \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad w = chz.$



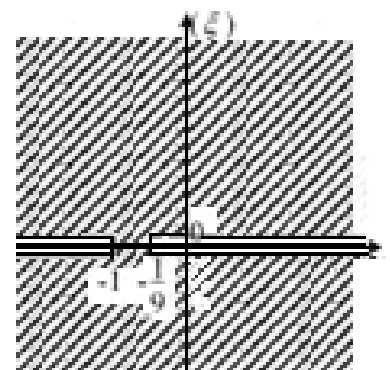
МАЛ. 51



МАЛ. 52

Завдання 61. Знайти функцію, яка конформно відображає D: внутрішність одиничного кола  $|z| = 1$  з розрізами по відрізках  $[-1; 0]$  та  $[\frac{1}{2}; 1]$  (мал.49) на G: верхню півплощину (мал.50).

**Розв'язання.** Дробово-лінійною функцією  $t = \frac{z-1}{z+1}$  область D відображаємо на область, що зображена на мал. 51.



МАЛ. 53

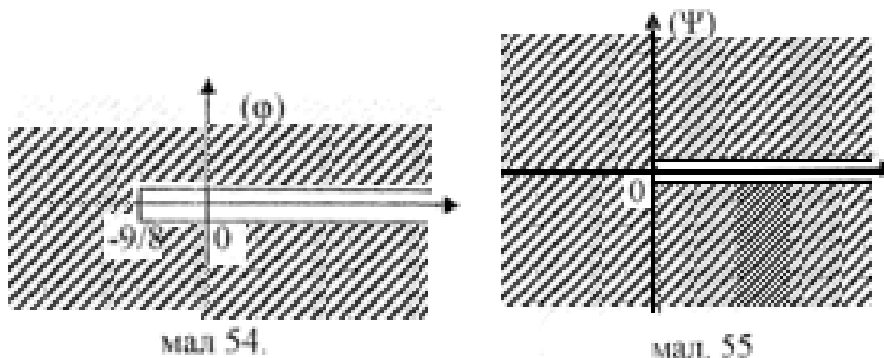
Виконаємо поворот цієї області на кут  $\frac{\pi}{2}$  за

годинниковою стрілкою  $\zeta = te^{-i\frac{\pi}{2}} = -it$  (мал.52).

Застосуємо до області, що зображена на мал. 52. Степеневу функцію  $\xi = \zeta^2$  (мал.53).

Функція  $\varphi = \frac{-1}{\xi+1}$  відображає площину з розрізами  $(-\infty; -1); (-\frac{1}{9}; +\infty)$  у площину з розрізом від  $-\frac{9}{8}$  до нескінченності по дійсній осі (мал.54).

Застосувавши до області, що зображена на (мал.54) лінійну функцію  $\psi = \varphi + \frac{9}{8}$  (мал. 55) та степеневу  $w = \sqrt{\psi}$  одержимо верхню півплощину (мал.50).



Отже функція:

$$\begin{aligned}
 w &= \sqrt{\psi} = \sqrt{\varphi + \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{-1}{\xi+1} + \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{-1}{\zeta^2+1} + \frac{9}{8}} = \\
 &= \sqrt{\frac{-1}{(-it)^2+1} + \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{-1}{-t^2+1} + \frac{9}{8}} = \sqrt{1 - \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{9}{8}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2z^2+5z-2}{8z}}.
 \end{aligned}$$

**Завдання 62.** Знайти функції, які виконують відображення області  $D$  на область  $G$ .

- 1)  $D: \begin{cases} 0 < \text{Im } z < \pi, \\ \text{Re } z > 0, \end{cases} \quad G: 0 < \text{Im } w < \pi;$
- 2)  $D: \begin{cases} 0 < \text{Im } z < 1, \\ \text{Re } z < 0, \end{cases} \quad G: -1 < \text{Im } w < 1;$
- 3)  $D: \begin{cases} |z| > 1, \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, \end{cases} \quad G: \begin{cases} |w| < 1 \\ 0 < \arg w < \pi \end{cases};$

$$4) D: \begin{cases} |z| < 1, \\ 0 < \arg z < 2\pi, \end{cases} \quad G: |w| < 1;$$

$$5) D: \operatorname{Im} z > 0 \text{ з розрізом по уявній осі від точки } i \text{ до } \infty, G: |w| > 1;$$

$$6) D: \begin{cases} |z| > 1, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad G: 0 < \arg w < \frac{\pi}{2};$$

$$7) D: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \text{ з розрізом } \begin{cases} \operatorname{Im} z = \pi \\ -\infty < \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}; G: 0 < \operatorname{Im} z < \pi;$$

$$8) D: |z| < 1 \text{ з розрізами по відрізках } (-1; -\frac{1}{2}] \text{ та } (\frac{1}{2}; 1) G: \operatorname{Im} w > 0;$$

$$9) D: \operatorname{Im} z > 0 \text{ з розрізом } \begin{cases} |z| = 1 \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}; G: 0 < \operatorname{Im} w < \pi;$$

$$10) D: \begin{cases} |z| < 1, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad G: \operatorname{Im} w > 0;$$

$$11) D: \begin{cases} |z-1| < 1, \\ |z+i| < 1, \end{cases} \quad G: \operatorname{Re} w > 0;$$

$$12) D: \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ |z-1| > 1, \end{cases} \quad G: \operatorname{Im} w > 0;$$

$$13) D: \begin{cases} |z-1| > 1, \\ |z-2| < 4, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad G: \operatorname{Im} w > 0;$$

$$14) D: \begin{cases} |z-1| > 1, \\ |z+1| > 1, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases} \quad G: \begin{cases} w > 1 \\ \operatorname{Re} w > 0 \end{cases};$$

$$15) D: \begin{cases} |z-2| > 2, \\ |z-4| < 4, \end{cases} \quad G: 0 < \operatorname{Im} w < \pi;$$

$$16) D: \text{площина з розрізом по відрізку } [-1; 1] G: \text{смуга } 0 < \operatorname{Im} w < 1;$$

$$17) D: \text{смуга } -\pi < \operatorname{Re} z < \pi \text{ з розрізом по променю } [0; +i\infty), G: \operatorname{Im} w > 0;$$

$$18) D: |z| > 1 \text{ з розрізами по } [-2; -1] \text{ та } [1; 2], G: |w| < 1.$$

$$19) D: \operatorname{Im} z > 0 \text{ з розрізом по променю } [2i; +i\infty), G: \operatorname{Im} w > 0.$$

## § 12. Інтегрування функції комплексної змінної.

Нехай  $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неперервна функція в області  $D$  комплексної площини і  $\gamma$  – довільна кусково-гладка крива, що лежить в цій області, тоді існує  $\int_{\gamma} f(z)dz$ , обчислення якого зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів: другого роду:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} U(x, y)dx - V(x, y)dy + i \int_{\gamma} v(x, y)dx + U(x, y)dy$$

Якщо рівняння кривої у записати у вигляді  $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) то

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt, \text{ де } z'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t).$$

У випадку, коли  $\gamma$  – дуга кола  $|z - a| = \rho$ , орієнтованого додатньо, тоді  $z = a + \rho e^{it}$ ,  $dz = i\rho e^{it} dt$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) і інтеграл обчислюється за формулою  $\int_{\gamma} f(z)dz = i\rho \int_{\alpha}^{\beta} f(a + \rho e^{it})e^{it} dt$ .

Із властивостей криволінійних інтегралів другого роду випливають наступні властивості інтегралів від функцій комплексної змінної.

1.  $\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))dz = a \int_{\gamma} f(z)dz + b \int_{\gamma} g(z)dz$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ .

2.  $\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma^{-1}} f(z)dz$ , де  $\gamma^{-1}$  протилежно орієнтована дуга до  $\gamma$ .

3.  $\int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ , де дуги  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  складають

дугу  $\gamma_1\gamma_2$ .

**Завдання 63.** Обчислити  $\int_{\gamma} f(z)dz$ . Якщо:

1)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$  де контур  $\gamma$  складається з ліній

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = 1 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} |z| = 2 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ -2 \leq \operatorname{Re} z \leq -1 \end{array} \right\} \quad \text{що}$$

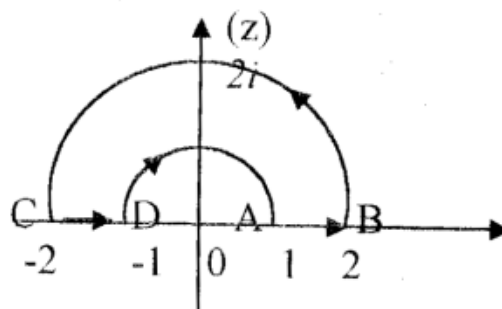
обходяться в напрямку, вказаному на мал.56.

**Розв'язання.** За властивостями інтегралів від функції комплексної змінної маємо :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz + \int_{DA} f(z) dz$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів. На відрізку  $AB$  маємо  $z = x$ ;  $dz = dx$ ,

$$z = x, |z| = x, 1 < x < 2, \text{ тому } \int_{AB} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_1^2 \frac{x}{x} dx = \int_1^2 dx = x \Big|_1^2 = 1.$$



мал.56.

На відрізку  $CD$ :  $z = x$ ,  $dz = dx$ ,  $\bar{z} = x/|z| = -x$ ;  $-2 < x < -1$ , отже

$$\int_{CD} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{-x} dx = - \int_{-2}^{-1} dx = -x \Big|_{-2}^{-1} = 1 - 2 = -1$$

На дузі  $BC$ :  $z = 2e^{i\varphi}$ ,  $\bar{z} = 2e^{-i\varphi}$ ,  $|z| = 2$ ,  $dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < \pi$ .

Тоді маємо  $\int_{BC} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_0^{\pi} \frac{2e^{-i\varphi}}{2} 2ie^{i\varphi} d\varphi = 2i \int_0^{\pi} d\varphi = 2i\varphi \Big|_0^{\pi} = 2\pi i$ .

На дузі  $DA$ :  $z = e^{i\varphi}$ ,  $\bar{z} = e^{-i\varphi}$ ,  $|z| = 1$ ,  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ ,  $\varphi$  змінюється від  $\pi$  до  $0$ .

Отже  $\int_{DA} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{-i\varphi}}{1} ie^{i\varphi} d\varphi = i \int_{\pi}^0 d\varphi = i\varphi \Big|_{\pi}^0 = -i\pi$ .

Таким чином  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = 1 - 1 + 2\pi i - \pi i = \pi i$ .

2)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $\gamma$ : відрізок прямої, що сполучає початок координат з точкою  $z = 3 + 2i$ .

3)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $\gamma$ : півколо  $|z|=1$ ,  $0 < \arg z < \pi$  від точки  $z = 1$  до точки  $z = -1$ .

4)  $f(z) = \bar{z}$ ;  $\gamma$ : коло  $|z| = 3$  в додатному напрямку.

5)  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ ;  $\gamma$ : відрізок прямої, що сполучає початок координат з точкою  $z = 1 + i$ .

6)  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ ;  $\gamma$ : дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $z = 0$  до точки  $z = 1 + i$ .

7)  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ ;  $\gamma$ : дуга кривої  $y = \sqrt{x}$  від точки  $z = 0$  до точки  $z = 1 + i$ .

8)  $f(z) = z^3$ ;  $\gamma$ : відрізок прямої, що сполучає початок координат з точкою  $z = 2 + 4i$ .

9)  $f(z) = z^3$ ;  $\gamma$ : дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $z = 0$  до точки  $z = 2 + 4i$ .

10)  $f(z) = z^3$ ;  $\gamma$ : дуга кривої  $y = 2\sqrt{2x}$  від точки  $z = 0$  до точки  $z = 2 + 4i$ .

11)  $f(z) = \operatorname{Re} z$ ;  $\gamma$ : півколо  $|z| = 2$ ,  $\operatorname{Im} z < 0$  початок кривої в точці  $z = -2$ .

12)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ;  $\gamma$ : коло  $|z| = 1$ .

13)  $f(z) = \frac{1}{|z|}$ ;  $\gamma$ : півколо  $|z| = 2$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

14)  $f(z) = z$ ;  $\gamma$ : крива  $y = \sin x$ ,  $0 < x < \pi$  початок кривої в точці  $z = \pi$ .

15)  $f(z) = z$ ;  $\gamma$ : квадрат з вершинами  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 1 + i$ ,  $z_4 = i$ .

16)  $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2$ ;  $\gamma$ : квадрат з вершинами  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = 1$ ,  $z_4 = i$ .

17)  $f(z) = z \cdot \bar{z}$ ;  $\gamma$ : контур, що складається з півкола  $\begin{cases} |z| = 1 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{cases}$  і  
відрізка  $\begin{cases} -1 \leq z \leq 1 \\ y = 0 \end{cases}$ .

18)  $f(z) = i \arg z - 1$ ;  $\gamma$ : дуга параболи  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

19)  $f(z) = i \arg z - 1$ ;  $\gamma$ : відрізок прямої  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .

20)  $f(z) = (z - a)^n$   $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\gamma$ : півколо  $|z - a| = R$ ,  $0 \leq \arg(z - a) \leq \pi$ ,  
початок кривої в точці  $z = a + R$ .

21)  $f(z) = (z - a)^n$   $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\gamma$ : коло  $|z - a| = R$ .

22)  $f(z) = (z - a)^n$   $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\gamma$ : квадрат з вершинами в точках  $z_1 = a + R + i(a + R)$ ,  
 $z_2 = a - R + i(a + R)$ ,  $z_3 = a - R + i(a - R)$ ,  $z_4 = a + R + i(a - R)$ .

23)  $f(z) = |z| \cdot \bar{z}$ ;  $\gamma$ : коло  $|z - 2i| = 1$ .

### § 13. Інтегральна теорема Коші.

Нехай функція  $f(z)$  диференційовна в однозв'язній області  $D$ . Тоді інтеграл від  $f(z)$  по довільній замкненій кривій  $\gamma$ , що лежить в області  $D$ ,  
 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . дорівнює нулю:

**Завдання 64.** Визначити, чи можна застосувати інтегральну теорему Коші до інтеграла по замкненому контуру  $\gamma$  від функції  $f(z)$

$$1) f(z) = \frac{1}{z^2 - 9}; \quad \gamma: |z - 1| = 1.$$

Розв'язання, Для того, щоб до інтеграла від функції  $f(z)$  по замкненому контуру  $\gamma$  можна було застосувати інтегральну теорему Коші, треба, щоб ця функція була аналітична в області, обмеженій контуром  $\gamma$ .

Так як функція  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 9}$  неаналітична в точках  $z = \pm 3$ , а ці точки не належать області  $|z - 1| < 1$ , то теорему Коші можна застосувати

$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^2-9} = 0.$$

$$2) f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}; \quad \gamma: |z| = \frac{1}{2};$$

$$3) f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}; \quad \gamma: \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4};$$

$$4) f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - 4}; \quad \gamma: |z - 1| = 2;$$

$$5) f(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 4}; \quad \gamma: |z - 2| = 2;$$

$$6) f(z) = \frac{z}{z^2 - 4}; \quad \gamma: |z| = 3;$$

$$7) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 3i}; \quad \gamma: |z| = 1;$$

$$8) f(z) = \frac{z^2 - 3}{z - 3i}; \quad \gamma: |z - 3i| = 1;$$

$$9) f(z) = \frac{z^2 + 2}{z - 3i}; \quad \gamma: |z - i| = 1;$$

$$10) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 3i}; \quad \gamma: |z - 2i| = 2;$$

$$11) f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}; \gamma: |z-1|=2;$$

$$12) f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}; \gamma: |z+2|=1;$$

$$13) f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}; \gamma: |z| = \frac{1}{2};$$

Функція  $F(z)$ , диференційовна в однозв'язній області  $D$  називається первісною функції  $f(z)$ , якщо для всіх точок  $z$  з цієї області  $F'(z) = f(z)$ . Якщо функція  $f(z)$  диференційована в однозв'язній області  $D$ , то вона має в цій області первісну. Будь-яка первісна функції  $f(z)$  в області  $D$  може бути записана у вигляді:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C \quad (1)$$

Якщо  $F(z)$  первісна функції  $f(z)$ , то мають місце наступні формули:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = F(z_1) - F(z_0) - \text{формула Ньютона-Лейбніца}$$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) g(\zeta) d\zeta = f(\zeta) g(\zeta) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta - \text{формула інтегрування}$$

частинами.

**Завдання 65.** Знайти первісні функцій:

$$1) f(z) = \sin 2z.$$

Розв'язання. Так як  $F'(z) = \left(-\frac{1}{2} \cos 2z + c\right)' = \sin 2z$ , то функція

$$F(z) = -\frac{1}{2} \cos 2z + c \in \text{первісною для функції } f(z) = \sin 2z.$$

$$2) z^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1;$$

$$3) e^{kz};$$

$$4) \sin kz;$$

$$5) \cos kz;$$

$$6) \operatorname{ch} kz;$$

$$7) \operatorname{sh} kz;$$

$$8) \cos^2 z;$$

$$9) \sin^2 z;$$

$$10) \operatorname{ch}^2 z;$$

$$11) \operatorname{sh}^2 z;$$

$$12) z \cos 2z;$$

- 13)  $z \sin^2 3z$ ;  
 14)  $ze^{2z}$ ;  
 15)  $z \operatorname{sh} z$ ;  
 16)  $e^{2z} \cos 3z$ ;  
 17)  $e^{2z} \sin 3z$ .

**Завдання 66.** Обчислити інтеграли:

1)  $\int_0^{1-i} ze^z \operatorname{sh} z dz$ .

**Розв'язання.** Для того, щоб обчислити даний інтеграл подамо функцію  $\operatorname{sh} z$  через показникову  $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ , тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1-i} ze^z \operatorname{sh} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{1-i} ze^z (e^z - e^{-z}) dz = \frac{1}{2} \int_0^{1-i} z(e^{2z} - 1) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1-i} ze^{2z} dz - \frac{1}{2} \int_0^{1-i} z dz \end{aligned}$$

До першого інтеграла в останній рівності застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-i} e^{2z} dz &= \left| \begin{array}{l} u=z, du=dz \\ dv=e^{2z} dz, v=\frac{1}{2}e^{2z} \end{array} \right| = \frac{1}{2} ze^{2z} \Big|_0^{1-i} - \frac{1}{2} \int_0^{1-i} dz = \frac{1}{2}(1-i)e^{2(1-i)} - \frac{1}{4}e^{2z} \Big|_0^{1-i} = \\ &= \frac{1}{2}(1-i)e^{2(1-i)} - \frac{1}{4}e^{2(1-i)} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{2(1-i)}(2(1-i)-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{2(1-i)}(1-2i) + \frac{1}{4}. \\ \int_0^{1-i} z dz &= \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-i} = \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(1-2i-1) = -i. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^{1-i} ze^z \operatorname{sh} z dz &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4}e^{2(1-i)}(1-2i) + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2}(-i) = \\ &= \frac{1}{8}e^{2(1-i)}(1-2i) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{8} \left( e^{2(1-i)}(1-2i) + 1 + 4i \right) \end{aligned}$$

2)  $\int_0^{1+i} (z^3 - 2iz) dz$ ;

3)  $\int_0^{1+i} (z+1) \cos 2z dz$ ;

- 4)  $\int_0^{1+i} e^z \operatorname{ch} z dz$  ;
- 5)  $\int_0^i e^z \operatorname{sh} z dz$  ;
- 6)  $\int_0^{\ln 2} z^2 e^z dz$  ;
- 7)  $\int_0^i \cos^2 z dz$  ;
- 8)  $\int_0^{2i} z \operatorname{sh} z dz$  ;
- 9)  $\int_i^1 (z+1)e^{2z} dz$  ;
- 10)  $\int_{-i}^i z \cos 2z dz$  ;
- 11)  $\int_{-1}^i (z+1)^2 \operatorname{ch} z dz$  .

#### **§ 14. Інтегральна формула Коші.**

Нехай функція  $f(z)$  диференційовна в однозв'язній області  $D$  і нехай проста замкнена крива  $\gamma$  лежить в області  $D$  та орієнтована додатно. Тоді для довільної точки  $z_0$ , яка лежить всередині кривої  $\gamma$ , справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Ця формула називається формулою Коші,

**Завдання 67.** Обчислити інтеграли, використовуючи інтегральну формулу Коші:

1)  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(3-z)}$ , де контур  $\gamma$  - коло

а)  $|z| = 1$ , б)  $|z - 3| = 1$ , в)  $|z| = 6$ .

**Розв'язання:** а) Так як в області, обмеженій кругом  $|z| = 1$  функція  $\frac{\operatorname{ch} z}{z-3}$  диференційовна, то за інтегральною формулою Коші

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{z} dz = 2\pi i \frac{\operatorname{ch} z}{z} \Big|_{z=0} = \frac{2}{3}\pi$$

б) В області, обмеженій кругом  $|z - 3| = 1$  диференційовною є функція  $\frac{\operatorname{ch} z}{z}$ , тому  $\int_{|z-3|=1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(z-3)} = - \int_{|z-3|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{z-3} dz = -2\pi i \frac{\operatorname{ch} z}{z} \Big|_{z=3} = -\frac{2\pi \operatorname{ch} 3}{3} i$

в) Функція  $\frac{\operatorname{ch} z}{z(z-3)}$  в області  $|z| = 6$  недиференційовна в двох точках  $z = 0$ , та  $z = 3$ . Обчислення інтеграла від цієї функції за допомогою інтегральної формули Коші можна виконати двома способами.

1. Подамо дріб  $\frac{1}{z(z-3)}$  у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{1}{z(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{3-z} = \frac{A(3-z)+Bz}{z(3-z)}, \quad \text{звідки} \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}. \quad \text{Тоді}$$

$$\int_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-3)} dz = \int_{|z|=6} \operatorname{ch} z \left( \frac{1}{3z} + \frac{1}{3(3-z)} \right) dz = \frac{1}{3} \int_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch} z}{z} dz + \frac{1}{3} \int_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch} z}{3-z} dz = \frac{2\pi i}{3} \operatorname{ch} z \Big|_{z=0} - \frac{2\pi i}{3} \operatorname{ch} z \Big|_{z=3} = \frac{2\pi i}{3} - \frac{2\pi i}{3} \operatorname{ch} 3 = \frac{2\pi i}{3} (1 - \operatorname{ch} 3)$$

2. Розіб'ємо область  $|z| < 6$  довільною гладкою кривою на дві частини, так щоб точки  $z_1 = 0$  та  $z_2 = 3$  попали в різні частини мал. 57.

Тоді

$$\int_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-3)} dz = \int_{z_1} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-3)} dz + \int_{z_2} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-3)} dz = \frac{2\pi i}{3} - \frac{2\pi \operatorname{ch} 3}{3} i = \frac{2}{3}\pi i (1 - \operatorname{ch} 3).$$

2)  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(2-z)}$ ;

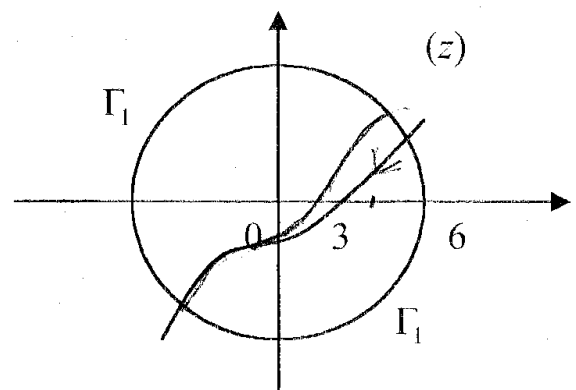
3)  $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z(2-z)}$ ;

4)  $\int_{|z-2\pi|=2} \frac{ze^{2z}}{z-2\pi i} dz$ ;

5)  $\int_{|z|=3} \frac{(z-i)\cos^2 z}{z^2+4} dz$ ;

6)  $\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z-1)(z+i)}$ ;

7)  $\int_{|z+i|=1} \frac{z dz}{z^4-1}$ ;



мал. 57

Якщо функція  $f(z)$  диференційовна в області  $D$ , то вона нескінченно

диференційовна в цій області і має місце формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D, \quad (1)$$

де  $\gamma$  - межа круга,  $|\zeta - z| \leq \rho$  який лежить в області  $D$ .

**Завдання 68.** За допомогою формули (1) обчислити наступні інтеграли:

$$1) \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^5} dz.$$

**Розв'язання.** У формулі (1) в даному випадку  $n = 4$ ,  $f(\zeta) = \cos \zeta$  (функція  $f(\zeta) = \cos \zeta$  диференційовна у всій області  $|z| < 2$ ), тому

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^5} dz &= \frac{2\pi i}{4!} (\cos z)^{IV} |_{z=i} = \frac{\pi i}{12} (-\sin z)^{''''} |_{z=i} = \frac{\pi i}{12} (-\cos z)^{''} |_{z=i} = \\ &= \frac{\pi i}{12} (\sin z)' |_{z=i} = \frac{\pi i}{12} \cos z |_{z=i} = \frac{\pi i}{12} \cos i = \frac{\pi i}{12} \operatorname{ch} 1 \end{aligned}$$

$$2) \int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2i)^2} dz;$$

$$3) \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z(1-z)^3} dz;$$

$$4) \int_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{z^2(z-i)^3};$$

$$5) \int_{|z+2i|=3} \frac{\cos z}{z(z+1)^2} dz;$$

$$6) \int_{|z-i|=2} \frac{e^{2z}}{(z-i)^{50}} dz;$$

$$7) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2 \operatorname{ch} z}{(1-z)^4} dz;$$

$$8) \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz;$$

$$9) \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2} dz;$$

$$10) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)};$$

$$11) \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)^{10}} dz;$$

$$12) \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-1)^5} dz;$$

$$13) \int_{|z|=3} \frac{e^z \sin z}{(z-i)^3} dz.$$

### **§ 15. Ряд Тейлора.**

Нехай  $f(z)$  – аналітична функція в області  $D$  і точка  $z_0 \in D$ . Тоді в крузі  $|z - z_0| < R$ , де  $R$  - відстань точки  $z_0$  до межі області  $D$ ,  $f(z)$  можна подати у вигляді суми степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

$$\text{де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R'} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad 0 < R' < R.$$

Якщо функція  $f(z)$  в крузі  $|z - z_0| < R$  подається у вигляді суми степеневого ряду  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ , то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора функції  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Функція  $f(z)$ , яка визначена в околі точки  $z = z_0$  і розкладається в ряд (1), збіжний в крузі  $|z - z_0| < \rho$ , називається регулярною в точці  $z = z_0$ .

Безпосереднім обчисленням похідних від елементарних функцій в точці  $z_0 = 0$  можна одержати збіжні на всій комплексній площині ряди Тейлора цих функцій.

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \\
\sin z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}; \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \\
\operatorname{sh} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}; \\
\operatorname{ch} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Використовуючи формулу суми спадної геометричної прогресії, можна розвинути в степеневий ряд, збіжний в крузі  $|z| < 1$ , функції  $\frac{1}{1-z}$  та  $\frac{1}{1+z}$ .

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{3}$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \tag{4}$$

**Завдання 69.** Використовуючи формули (3) та (4) розкласти в степеневий ряд в околі  $z_0$  вказані функції і знайти радіус збіжності цього ряду.

$$1) \frac{z+1}{z^2-5z+6}, \quad z_0 = 1.$$

**Розв'язання.** Подамо дану функцію у вигляді суми простих дробів

$$\frac{z+1}{z^2-5z+6} = \frac{-3}{z-2} + \frac{4}{z-3}.$$

Кожний з цих дробів розкладемо в ряд згідно із формулою (3)

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -(1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (z-1)^n + \dots).$$

Одержаний ряд збігається в крузі  $|z-1| < 1$ .

Ряд

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2-(z-1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \dots + \frac{(z-1)^n}{2^n} + \dots \right)$$

збігається в крузі  $|z-1| < 2$ .

Отже, задана в умові функція розкладається в степеневий ряд  $\frac{z+1}{z^2-5z+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{2^n}\right) (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) (z-1)^n$  який збігається в крузі  $|z-1| < 1$ , радіус збіжності ряду  $R = 1$ .

$$2) \frac{1}{2z-1}; \quad z_0 = 0;$$

$$3) \frac{1}{2z^2-1}; \quad z_0 = 0;$$

$$4) \frac{z^2}{3z+2}; \quad z_0 = 0;$$

$$5) \frac{z^2}{(z+1)^2}; \quad z_0 = 1;$$

$$6) \frac{1}{2z+3}; \quad z_0 = 1;$$

$$7) \frac{z}{z-2}; \quad z_0 = 0;$$

$$8) \frac{1}{2z^2-1}; \quad z_0 = 1;$$

$$9) \frac{z}{3z^2+4}; \quad z_0 = 0;$$

$$10) \frac{1}{z}; \quad z_0 = 2;$$

$$11) \frac{z}{z-1}; \quad z_0 = 2;$$

$$12) \frac{z}{z^2-4z+8}; \quad z_0 = 2;$$

$$13) \frac{z-i}{z+i}; \quad z_0 = i;$$

$$14) \frac{z}{z^4-4z^2+3}; \quad z_0 = 0;$$

$$15) \frac{2z-5}{z^2-5z+6}; \quad z_0 = 1;$$

$$16) \frac{1}{(1+z)^3}; \quad z_0 = 0.$$

**Завдання 70.** Використовуючи відомі розклади функцій (2) в степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ , розкласти задані функції в околі точки  $z_0$  вказати область збіжності, одержаного ряду:

$$1) \operatorname{sh} z \cos z; \quad z_0 = 0.$$

**Розв'язання.** Для розкладу функцій  $\operatorname{sh} z \cos z$  в степеневий ряд скористаємося поданням їх через показникову функцію за допомогою формул (1) та (2) з § 3.

Тоді

$$\operatorname{sh} z \cos z = \frac{1}{4}(e^z - e^{-z})(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{4}(e^{(1+i)z} - e^{-(1+i)z} + e^{(1-i)z} - e^{-(1-i)z})$$

Згідно з формулами (2) знаходимо

$$e^{(1+i)z} = 1 + (1+i)z + \frac{(1+i)^2}{2!}z^2 + \dots + \frac{(1+i)^n}{n!}z^n + \dots,$$

$$e^{-(1+i)z} = 1 - (1+i)z + \frac{(1+i)^2}{2!}z^2 - \dots + (-1)^n \frac{(1+i)^n}{n!}z^n + \dots,$$

$$e^{(1-i)z} = 1 + (1-i)z + \frac{(1-i)^2}{2!}z^2 + \dots + \frac{(1-i)^n}{n!}z^n + \dots,$$

$$e^{-(1-i)z} = 1 - (1-i)z + \frac{(1-i)^2}{2!}z^2 - \dots + (-1)^n \frac{(1-i)^n}{n!}z^n + \dots$$

Звідки

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z \cos z &= \frac{1}{4} \left( 2(1+i)z + \frac{2(1+i)^3}{3!}z^3 + \dots + \frac{2(1+i)^{2k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1} + \dots + \right. \\ &+ 2(1-i)z + \frac{2(1-i)^3}{3!}z^3 + \dots + \left. \frac{2(1-i)^{2k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1} + \dots \right) = \frac{1}{2} (z(1+i+1-i) + \\ &+ \frac{((1+i)^3 + (1-i)^3)}{3!}z^3 + \dots + \frac{((1+i)^{2k-1} + (1-i)^{2k-1})z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots) \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ , одержимо

$$\begin{aligned}
shz \cos z &= \frac{1}{2} \left( 2z + \frac{\sqrt{2^3}}{3!} (e^{\frac{3\pi}{4}i} + e^{-\frac{3\pi}{4}i}) z^3 + \dots + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{2^{2k-1}}}{(2k-1)!} (e^{\frac{\pi(2k-1)i}{4}} + e^{-\frac{\pi(2k-1)i}{4}}) z^{2k-1} + \dots \left. \right) = \frac{1}{2} \left( 2z + \frac{\sqrt{2^3}}{3!} \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{4} z^3 + \dots + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{2^{2k-1}}}{(2k-1)!} 2 \cos \frac{\pi(2k-1)}{4} z^{2k-1} + \dots \left. \right) = z + \frac{\sqrt{2^3}}{3!} \cos \frac{3\pi}{4} z^3 + \dots + \\
&+ \frac{\sqrt{2^{2k-1}}}{(2k-1)!} \cos \frac{\pi(2k-1)}{4} z^{2k-1} + \dots = \left( z + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3!} \cos \frac{3\pi}{4} z^3 + \dots + \right. \\
&+ \left. \frac{2^{\frac{2k-1}{2}}}{(2k-1)!} \cos \frac{\pi(2k-1)}{4} z^{2k-1} + \dots \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{2k-1}{2}}}{(2k-1)!} \cos \frac{\pi(2k-1)}{4} z^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Так як функція  $ch z$   $sh z$  аналітична на всій комплексній площині, то область збіжності одержаного ряду  $|z| < \infty$ .

- 2)  $sh(z+1)$ ;  $z_0 = -1$ ;
- 3)  $ch z sh z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 4)  $sh 2z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 5)  $ch \frac{z}{2}$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 6)  $\sin^2 z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 7)  $\cos^2 z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 8)  $e^{z+3}$ ;  $z_0 = 1$ ;
- 9)  $(2-z)e^{2z}$ ;  $z_0 = 2$ ;
- 10)  $e^z \sin z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 11)  $\sin^2 \frac{i(z-1)}{3}$ ;  $z_0 = 1$ ;
- 12)  $e^z \cos z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 13)  $e^z sh z$ ;  $z_0 = 0$ ;
- 14)  $e^z ch z$ ;  $z_0 = 0$ .

## § 16. Ряд Лорана.

Функція  $f(z)$ , аналітична в кільці  $r < |z - z_0| < R$ , розкладається в цьому кільці в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

Цей розклад єдиний, а коефіцієнти  $C_n$  визначаються за формулою:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

де  $\gamma_\rho$  – коло  $|z - z_0| < \rho$ ,  $r < \rho < R$ .

Якщо  $f(z)$  – однозначна аналітична функція в області  $|z| > R$ , то в цій області вона подається рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n \quad (2)$$

Ряд (1) можна подати у вигляді суми таких двох рядів:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n;$$

При цьому перший доданок в правій частині називається головною частиною ряду Лорана, а другий - правильною частиною.

Аналогічно можна подати ряд (2):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n;$$

Тут перший доданок в правій частині рівності називається правильною частиною, а другий - головною частиною ряду Лорана.

**Завдання 71.** Знайти області збіжності рядів Лорана:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3i)^n}{2^n (z+i)^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+i)^n}{(3i)^n}.$$

**Розв'язання.** Правильна частина даного ряду – ряд  $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+i)^n}{(3i)^n}$ .

Радіус збіжності його знаходимо за формулою  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$

Маємо  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$ , тобто областю збіжності правильної частини є круг  $|z + i| < 3$ .

Головна частина заданого ряду  $-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3i)^n}{2^n (z+i)^n}$ , заміною  $\xi = \frac{1}{z+i}$  перетворюється у степеневий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3i)^n \xi^n}{2^n}$ , який збігається в крузі  $|\xi| < \frac{2}{3}$ . Тому головна частина ряду збігається в області  $|z + i| > \frac{3}{2}$ .

Отже даний ряд Лорана збігається в кільці  $\frac{3}{2} < |z + i| < 3$ .

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n - 1}{3z^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3 \cdot 2^{n+1}};$$

$$5) 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$6) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^4}{3^n + 1};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (z+i)^{-n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}};$$

$$9) -\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n;$$

$$11) \frac{1}{z-2} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^n}{5^n} (z-2)^n.$$

**Завдання 72.** Розвинути функцію  $f(z)$  в ряд Лорана в околі точки  $z_0$  і вказати область, в якій цей розклад має місце.

$$1) f(z) = \frac{z}{(z+i)(z-2)}, \quad \text{а) } z_0 = -i, \text{ б) } z_0 = 2, \text{ в) } z_0 = \infty.$$

Розв'язання. а) Розвинемо задану функцію в околі точки  $z_0 = -i$ , тобто за степенями  $z + i$ . Для цього подамо її наступним чином:

$$\frac{z}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{z-2+2}{z-2} = \frac{1}{z+i} \left(1 + \frac{2}{z-2}\right).$$

Розвинемо дріб  $\frac{2}{z-2}$  в степеневий ряд за степенями  $z + i$ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-2} &= \frac{2}{(z+i)-(i+2)} = \frac{-2}{2+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+i}{2+i}} = \\ &= \frac{-2}{2+i} \left( 1 + \frac{z+i}{2+i} + \frac{(z+i)^2}{(2+i)^2} + \dots + \frac{(z+i)^n}{(2+i)^n} + \dots \right) = \\ &= -\left( \frac{2}{2+i} + \frac{2(z+i)}{(2+i)^2} + \frac{2(z+i)^2}{(2+i)^3} + \dots + \frac{2(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+i)(z-2)} &= \frac{1}{z+i} \left( 1 + \frac{-2}{2+i} + \frac{2(z+i)}{(2+i)^2} + \dots \right) + \\ &= \frac{2(z+i)^2}{(2+i)^3} - \dots - \frac{2(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}} - \dots = \frac{1+2i}{5} \cdot \frac{1}{z+i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{n-1}}{(2+i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Область збіжності ряду  $0 < |z+i| < \sqrt{5}$ .

б) Розвинемо задану функцію в степеневий ряд в околі точки  $z_0 = 2$ , тобто за степенями  $(z-2)$

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+i)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} \frac{z+i-i}{z+i} = \frac{1}{z-2} \left( 1 - \frac{i}{z+i} \right); \quad \frac{i}{z+i} = i \left( \frac{1}{z-2+2+i} \right) = \frac{i}{2+i} \frac{1}{1+\frac{z-2}{2+i}} = \\ &= \frac{i}{2+i} \left( 1 - \frac{z-2}{2+i} + \frac{(z-2)^2}{(2+i)^2} - \dots + (-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2+i)^n} + \dots \right) = \frac{i}{2+i} - \frac{i(z-2)}{(2+i)^2} + \frac{i(z-2)^2}{(2+i)^3} - \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{i(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}} + \dots \\ \frac{z}{(z+i)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} \left( 1 - \frac{i}{2+i} + \frac{i(z-2)}{(2+i)^2} - \frac{i(z-2)^2}{(2+i)^3} + \dots + (-1)^n \frac{i(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z-2} \left( 1 - \frac{i}{2+i} \right) + \frac{i}{(2+i)^2} \frac{i(z-2)}{(2+i)^2} - \dots + (-1)^n \frac{i(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}} + \dots = \frac{2(2+i)}{5(z-2)} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^{n-1}}{(2+i)^{n+1}} \end{aligned}$$

Область збіжності даного ряду  $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ .

3. Розвинемо задану функцію в околі нескінченно віддаленої точки. Для цього подамо її наступним чином

$$\frac{z}{(z+i)(z-2)} = z \left( \frac{-2+i}{5(z+i)} + \frac{2-i}{5(z-2)} \right) = \frac{(2-i)z}{5} \left( \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+i} \right)$$

Розкладемо тепер дроби  $\frac{1}{z-2}$  та  $\frac{1}{z+i}$  в ряд Лорана в околі точки  $z = \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots + \frac{2^n}{z^{n+1}} + \dots \\ \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} - \dots + (-1)^n \frac{i^n}{z^n} + \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{i}{z^2} + \frac{i^2}{z^3} - \dots + (-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+i)(z-2)} &= \frac{(2-i)}{5} z \left( \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots + \frac{2^n}{z^{n+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{i^2}{z^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{i^n}{z^{n+1}} + \dots = \frac{2-i}{5} \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots - 1 + \frac{i}{z} - \frac{i^2}{z^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{i^n}{z^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{2-i}{5} \left( \frac{1}{z} (2+i) + \frac{1}{z^2} (2^2 - i^2) + \dots + \frac{1}{z^n} (2^n + (-1)^{n+1} i^n) + \dots \right) = \\ &= \frac{2-i}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1} i^n}{z^n} \end{aligned}$$

Для знаходження області збіжності даного ряду виконаємо заміну  $\frac{1}{z} = \zeta$ . Тоді, оскільки, областю збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + (-1)^{n+1} i^n) \zeta^n$  буде  $|\zeta| < \frac{1}{2}$ , то область збіжності заданого ряду  $|z| > 2$ .

- 2)  $f(z) = \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = \infty;$
- 3)  $f(z) = \frac{3}{3z-4}, \quad z_0 = \infty;$
- 4)  $f(z) = \frac{1}{z(2-3z)}, \quad z_0 = 0;$
- 5)  $f(z) = \frac{1}{z(2-3z)}, \quad z_0 = \frac{2}{3};$
- 6)  $f(z) = \frac{1}{z(2-3z)}, \quad z_0 = \infty;$
- 7)  $f(z) = \frac{z^3}{z^2 - z - 2}, \quad z_0 = -1;$
- 8)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}, \quad z_0 = 2i;$
- 9)  $f(z) = \frac{1}{z+3}, \quad z_0 = 0;$
- 10)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}, \quad z_0 = 0;$
- 11)  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2}, \quad z_0 = -2.$

**Завдання 73.** Використовуючи відомі розклади елементарних функцій в степеневий ряд, розкласти функцію  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  в ряд Лорана:

- 1)  $(z+1)^2 \cos \frac{z}{z+1}, \quad z_0 = -1.$

**Розв'язання.**

Розкладемо в ряд Лорана спочатку функцію  $\cos \frac{z}{z+1}$ . Для цього дріб  $\frac{z}{z+1}$

запишемо у вигляді  $1 - \frac{1}{z+1}$  тоді

$$\cos \frac{z}{z+1} = \cos \left( 1 - \frac{1}{z+1} \right) = \cos 1 \cos \frac{1}{z+1} + \sin 1 \sin \frac{1}{z+1}.$$

Так як

$$\cos \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}},$$

$$\sin \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z+1} &= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} = \\ &= \cos 1 + \frac{\sin 1}{z+1} - \frac{\cos 1}{2!(z+1)^2} - \frac{\sin 1}{3!(z+1)^3} + \dots + \\ &(-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!(z+1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Отже, розклад заданої функції в степеневий ряд має вигляд:

$$\begin{aligned} (z+1)^2 \cos \frac{z}{z+1} &= (z+1)^2 \cos 1 + (z+1) \sin 1 - \frac{\cos 1}{2!} - \frac{\sin 1}{3!(z+1)} + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!(z+1)^{2n-2}} + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n+1)!(z+1)^{2n-1}} + \dots \end{aligned}$$

- 2)  $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ ,  $z_0 = 0$ ;
- 3)  $f(z) = \cos \frac{z}{z-2}$ ,  $z_0 = 2$ ;
- 4)  $f(z) = \sin \frac{z}{z-i}$ ,  $z_0 = i$ ;
- 5)  $f(z) = z^2 \sin \pi \left( \frac{z+1}{z} \right)$ ,  $z_0 = 0$ ;
- 6)  $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ ,  $z_0 = 2$ ;
- 7)  $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$ ,  $z_0 = \infty$ ;
- 8)  $f(z) = \frac{1 + \cos^2 z}{z^6}$ ,  $z_0 = \infty$ ;
- 9)  $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^4}$ ,  $z_0 = 0$ ;
- 10)  $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z-1}}$ ,  $z_0 = 1$ ;
- 11)  $f(z) = z^3 \cos \left( \frac{z-1}{z} \right) \pi$ ,  $z_0 = 0$ .

**Завдання 74.** Знайти головну і правильну частини ряду Лорана функції  $f(z)$  розвиненої в околі точки  $z_0$ :

$$1) z^3 e^{\frac{1}{z-1}}, \quad z_0 = 1.$$

**Розв'язання.**

Розвинемо функції  $z^3$  та  $e^{\frac{1}{z-1}}$  в ряд Лорана за степенями  $(z-1)$ :

$$z^3 = (z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1;$$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \dots$$

Тоді

$$z^3 e^{\frac{1}{z-1}} = ((z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1) \left( 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \dots \right) =$$

$$= (z-1)^3 + 4(z-1)^2 + (z-1) \left( 3 + 3 + \frac{1}{2} \right) + 1 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z-1} \left( 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} \right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(z-1)^n} \left( \frac{1}{n!} + \frac{3}{(n+1)!} + \frac{3}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} \right) + \dots = (z-1)^3 + 4(z-1)^2 + \frac{13}{2}(z-1) + \frac{17}{3} + \frac{73}{24z-1} +$$

$$+ \dots + \frac{n^3 + 9n^2 + 29n + 34}{(n+3)(z-1)^n} + \dots$$

Отже правильна частина ряду Лорана функції  $z^3 e^{\frac{1}{z-1}}$  дорівнює  $(z-1)^3 + 4(z-1)^2 + \frac{13}{2}(z-1) + \frac{17}{3}$ .

Головна частина цього ряду  $-\frac{73}{24z-1} + \frac{17}{15(z-1)^2} + \dots + \frac{n^3 + 9n^2 + 29n + 34}{(n+3)(z-1)^n}$

### § 17. Ізольовані особливі точки

Нехай функція  $f(z)$  регулярна в кільці  $0 < |z - z_0| < \rho$ , але не регулярна в точці  $z_0$  ( $z_0 \neq \infty$ ). Тоді точка  $z_0$  називається ізольованою особливою точкою однозначного характеру для функції  $f(z)$ .

Нескінченно віддалена точка називається ізольованою особливою точкою однозначного характеру для функції  $f(z)$ , якщо функція  $f(z)$  регулярна в області  $\rho < |z| < \infty$ .

В залежності від поведінки функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  розрізняють наступні три типи особливих точок.

Ізольована особлива точка  $z_0$  однозначного характеру  $f(z)$  називається:

а) усувною особливою точкою, якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  існує і скінченний;

б) полюсом, якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ;

в) істотно особливою точкою, якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не існує.

Зв'язок між розкладом функції  $f(z)$  в ряд Лорана в околі точки  $z = z_0$  та характером особливості цієї точки встановлюється наступними теоремами:

**Теорема 1.** Для того, щоб ізольована особлива точка  $z_0$  була усувною особливою точкою функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана в околі точки  $z_0$  була тотожно рівною нулю.

**Теорема 2.** Для того, щоб ізольована особлива точка  $z = z_0$  була полюсом для функції  $f(z)$  і, необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана для функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  містила лише скінченне число членів.

**Теорема 3.** Для того, щоб ізольована особлива точка  $z = z_0$  була істотно особливою точкою для функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана в околі точки  $z_0$  містила нескінченну кількість членів.

**Завдання 75.** довести, що точка  $z_0$  є усувною особливою точкою функції  $f(z)$ :

1)  $f(z) = z \operatorname{ctg} z, \quad z_0 = 0.$

**Розв'язання:**

Знайдемо границю даної функції при  $z \rightarrow 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z \operatorname{ctg} z = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z \cos z}{\sin z}.$$

Границя існує і скінченна, тому точка  $z_0 = 0$  є усувною особливою точкою функції  $f(z) = z \operatorname{ctg} z$ .

2)  $f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi;$

3)  $f(z) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad z_0 = 0;$

4)  $f(z) = \cos \frac{1}{z} - \sin \frac{2 - \pi z}{2z}, \quad z_0 = \infty;$

5)  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z - \sin z}{z^3}, \quad z_0 = 0;$

6)  $f(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{z} - \operatorname{ctg} z \right), \quad z_0 = 0;$

- 7)  $f(z) = \frac{1 - \cos \frac{1}{z^2}}{\sin \frac{1}{z^2}}, \quad z_0 = \infty;$
- 8)  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0;$
- 9)  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{e^{z-1} - 1}, \quad z_0 = 1$
- 10)  $f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}, \quad z_0 = \infty.$

**Завдання 76.** Знайти полюси функції  $f(z)$ , і встановити порядок цих полюсів:

$$1) f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - z - 2)^2};$$

**Розв'язання:** Знайдемо нулі знаменника і визначимо їх порядок.

$z^2 - z - 2 = 0$  при  $z_1 = -1, z_2 = 2$ . Порядок цих нулів другий. Так як при  $z_1 = -1$  та  $z_2 = 2$  чисельник не дорівнює  $i$ , то це є полюси заданої функції другого порядку.

- 2)  $f(z) = \frac{1}{2 - \cos z}$ ; 3)  $f(z) = z^3 - 1$ ; 4)  $f(z) = \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{\sin^2(z-1)}$ ;
- 5)  $f(z) = \frac{z}{(z^3 + 1)^2}$ ; 6)  $f(z) = \frac{z}{1 + e^z}$ ; 7)  $f(z) = \frac{z^4}{(z+1)^2}$ ;
- 8)  $f(z) = \frac{z}{z^3 - z^2 - 8z + 12}$ ; 9)  $f(z) = \frac{z^6}{e^{z-2} - 1}$ ;
- 10)  $f(z) = \frac{1 + \cos z}{1 - \cos z^2}$ ; 11)  $f(z) = \frac{z}{\sin \frac{1}{z}}$ ; 12)  $f(z) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{\sin^2(z-1)}$ .

**Завдання 77.** Довести, що точка  $z_0$  є істотно особливою точкою функції  $f(z)$ .

$$1) f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

**Розв'язання:** Розвинемо дану функцію в ряд Лорана в околі точки  $z_0 = 0$ :

$$z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) =$$

$$= z^4 + z^3 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-4}} + \dots$$

Головна частина цього ряду  $\frac{1}{5!z} + \frac{1}{6!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-4}}$  містить скінчену кількість членів, отже точка  $z_0 = 0$  є істотно особливою точкою функції  $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ .

2)  $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1;$

3)  $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \infty;$

4)  $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \infty;$

5)  $f(z) = \sin z + e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = \infty;$

6)  $f(z) = e^z, \quad z_0 = \infty;$

7)  $f(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z-1}}, \quad z_0 = 1;$

8)  $f(z) = z \cos \frac{\pi z}{z+1}, \quad z_0 = -1;$

9)  $f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}, \quad z_0 = \infty;$

10)  $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = \infty;$

11)  $f(z) = \operatorname{ch} \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0;$

12)  $f(z) = \sin \frac{1}{z-3}, \quad z_0 = 3.$

**Завдання 78.** Знайти ізольовані особливі точки аналітичної функції і з'ясувати їх характер:

1)  $\frac{1}{z^2+4}$

**Розв'язання:** Ізольованими особливими точками даної функції є точки  $z_1 = 2i, z_2 = -2i$ . Так як це нулі знаменники першого порядку і чисельник в цих точках не дорівнює нулю, то точки  $z_1 = 2i$  і  $z_2 = -2i$  є простими полюсами функції  $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ .

- 2)  $\frac{z+1}{z-z^2}$ ; 3)  $\frac{1+2z^2}{z+z^3}$ ; 4)  $\frac{z^3}{(1-z)^2}$ ; 5)  $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$ ;  
 6)  $\frac{\sin z}{z}$ ; 7)  $\frac{e^z-1}{z}$ ; 8)  $ze^{-z}$ ; 9)  $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ;  
 10)  $\frac{1-\cos z}{z^3}$ ; 11)  $\frac{1-\cos z^2}{z^3}$ ; 12)  $\frac{1+z}{e^z}$ ; 13)  $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ ;  
 14)  $\frac{e^z}{1+z^2}$ ; 15)  $e^{\frac{1}{z-1}}$ ; 16)  $\sin \frac{z}{z-1}$ ; 17)  $\cos \frac{z}{2-z}$ ;  
 18)  $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ ; 19)  $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$ ; 20)  $\frac{1-e^z}{1+e^z}$ ; 21)  $\frac{1}{\cos \frac{1}{z-2}}$ ;  
 22)  $z \operatorname{sh} \frac{1}{z}$ ; 23)  $\frac{\sin z}{z(z^2-1)}$ ; 24)  $z^2 \cos \frac{1}{z}$ ; 25)  $z(e^{\frac{1}{z}}-1)$ .

### § 18. Лишки.

Коефіцієнт  $C_{-1}$  в розкладі в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad 0 < |z - z_0| < R$$

однозначної аналітичної функції  $f(z)$  в околі скінченної ізольованої особливої точки  $z_0$  називається лишком цієї функції відносно точки  $z_0$  і позначається  $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ . Лишок через інтеграл подається формулою

$$C_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z) dz,$$

де  $C_\rho$  – коло  $|z - z_0| = \rho$ ,  $0 < \rho < R$ .

Лишок в усуній точці дорівнює нулю.

Якщо точка  $z = z_0$  є простим полюсом функції  $f(z)$ , то лишок в цій точці обчислюється за формулою:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z)). \quad (1)$$

Якщо точка  $z = z_0$  полюс порядку  $m$  функції  $f(z)$ , то лишок в ній обчислюється за формулою:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - a)^m f(z)). \quad (2)$$

Лишком функції  $f(z)$  в точці  $z = \infty$  (позначається  $\text{res}_{z=\infty} f(z)$ ) називається число  $-C_{-1}$ , де  $C_{-1}$  – коефіцієнт при  $\frac{1}{z}$  ряду Лорана для функції  $f(z)$  в околі нескінченно віддаленої точки.

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^{-1}} f(z) dz,$$

де  $C_\rho^{-1}$  – коло  $|z| = \rho$ , орієнтоване за годинниковою стрілкою.

Якщо функція  $f(z)$  аналітична в нескінченно віддаленій точці, то

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

де під символом  $f(\infty)$  розуміють  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

При обчисленні лишків доцільно використовувати наступне твердження.

Нехай функція  $f(z)$  регулярна у всій розширенній комплексній площині, за виключенням скінченного числа особливих точок. Тоді сума всіх лишків функції  $f(z)$ , включаючи лишок в точці  $z = \infty$ , дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \text{res}_{z=z_k} f(z) + \text{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (3)$$

**Завдання 79.** Знайти лишки функції  $f(z)$  в її скінченних ізольованих особливих точках:

$$1) f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}.$$

**Розв'язання:** Особливими точками даної функції є точки  $z = 0$  та  $z = 1$ .

Точка  $z = 0$  – простий полюс. За формулою (1) маємо

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( (z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = 1. \end{aligned}$$

Точка  $z = 1$  полюс другого порядку, тому за формулою (2) маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{z(z-1)^2} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left( (z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z^{-1})' = \lim_{z \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{z^2} \right)' = 1. \end{aligned}$$

Тже,  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)^2} = 1$  та  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{z(z-1)^2} = -1$ .

2)  $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+i)}$ ;

3)  $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ ;

4)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ ;

5)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)^2}$ ;

6)  $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2(1-z)}$ ;

7)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)^2}$ ;

8)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$ ;

9)  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ;

10)  $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$ ;

11)  $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z(i-z)}$ ;

12)  $f(z) = \cos \frac{z}{z-1}$ .

**Завдання 80.** Обчислити лишки функції  $f(z)$  в усіх особливих точках і в точці  $z = \infty$ .

1)  $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2}$ .

**Розв'язання:** Особливими точками функції є  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = \infty$ . За формулою

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-i} \frac{\sin z}{1+z^2} &= \lim_{z \rightarrow -i} \left( (z+i) \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\sin z}{z-i} = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{\sin i}{2i} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Лишок в нескінченно віддаленій точці знайдемо із співвідношення (3)

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\sin z}{1+z^2} = 0 - \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 1 \right) = -\operatorname{sh} 1.$$

$$2) \quad f(z) = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{z}}{z+1};$$

$$3) \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z)};$$

$$4) \quad f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2+4};$$

$$5) \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2-4};$$

$$6) \quad f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^4};$$

$$7) \quad f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2};$$

$$8) \quad f(z) = \frac{z-1}{z^{10}(z+2)};$$

$$9) \quad f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^5 z^4};$$

$$10) \quad f(z) = \frac{1}{z - \sin z};$$

$$11) \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{z}}{z^2-9};$$

$$12) \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^2};$$

$$13) \quad f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} + 1}{z^2-1}.$$

## § 19. Обчислення інтегралів по замкненому контуру.

### 1. Обчислення інтегралів по замкненому контуру.

Базується на основній теоремі лишків: нехай функція  $f(z)$  регулярна в однозв'язній області  $D$ , за виключенням скінченного числа особливих точок  $z_1, z_2, \dots, z_n$  і нехай  $\gamma$  – проста замкнена крива, яка лежить в області  $D$  та містить всередині себе точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , тоді:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

де крива  $\gamma$  орієнтована додатно.

**Завдання 81.** Обчислити інтеграли:

1)  $\int_{|z|=1} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) dz.$

**Розв'язання.** Особливою точкою даної функції є точка  $z = 0$ , яка нежить всередині кола  $|z|=1$ . Тому

$$\int_{|z|=1} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right).$$

Для обчислення лишку в точці  $z = 0$ , розвинемо підінтегральну функцію в околі цієї точки в ряд Лорана.

$$\begin{aligned} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) &= z \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots - 1 \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \end{aligned}$$
$$\operatorname{res}_{z=0} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Звідси

Отже,  $\int_{|z|=1} z \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$

2)  $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z dz}{z^2 + 1}$ ; 3)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}$ ; 4)  $\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z-1)^2(z+2)}$ ; 5)  $\int_{|z|=2} \frac{z dz}{z^4 + 1}$ ;

6)  $\int_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dz$ ; 7)  $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$ ; 8)  $\int_{|z|=2} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz$ ; 9)  $\int_{|z|=1} \cos \frac{1}{z} e^{\frac{2}{z}} dz$ ;

10)  $\int_{|z|=1} \frac{\sin \frac{2}{z}}{\frac{1}{z}} dz$ ; 11)  $\int_{|z|=2} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^5}$ ; 12)  $\int_{|z|=3} \frac{z e^z}{z^3 - 3z + 2} dz$ ;

$$\begin{aligned}
& 13) \int_{|z|=1} \frac{\sin 3z}{(2z-1)(3z+1)^2} dz; \quad 14) \int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sh} z dz}{1 - \sin \pi z}; \quad 15) \int_{|z-1|=1} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-1} dz; \\
& 16) \int_{|z|=3} \frac{z^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z}}{(iz-2)^2(z^2+4)} dz; \quad 17) \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}; \\
& 18) \int_{|z|=4} \frac{\cos \frac{\pi}{4z} dz}{(z-1)(z+3)^2}; \quad 19) \int_{|z-1-i|=2} \frac{\sin\left(\frac{1}{z} + \frac{\pi}{4}\right)}{1-z} dz; \quad 20) \int_{|z|=1} e^{\frac{z+1}{z}} dz; \\
& 21) \int_{|z|=1} z \sin \frac{\pi}{z^2} dz.
\end{aligned}$$

## 2. Обчислення визначених інтегралів.

Інтеграли виду  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ , де  $R(\cos \varphi; \sin \varphi)$  – раціональна функція від  $\cos \varphi$  та  $\sin \varphi$  зводяться до інтегралів по замкненому контуру.

$$\text{Нехай } z = e^{i\varphi}, \text{ тоді } \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \cos \varphi = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), d\varphi = -i \frac{dz}{z}.$$

При зміні  $\varphi$  від 0 до  $2\pi$  змінна пробігає коло  $|z|=1$  в додатному напрямку і  $I = \int_{|z|=1} R_1 |z| dz$ , де  $R_1 |z| = \frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$  – раціональна функція від  $z$

За теоремою про лишки  $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R_1(z)$ , де  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – всі полюси раціональної функції  $R_1(z)$ , що лежать в крузі  $|z| < 1$ .

**Завдання 82.** Обчислити інтеграли.

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \sin \varphi + a^2}.$$

$$\text{Розв'язання: Введемо заміну } \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), d\varphi = -i \frac{dz}{z}$$

Тоді

$$i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( 1 - 2a \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) + a^2 \right)} = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{aiz^2 + (a^2 + 1)z - ai}.$$

Знайдемо особливі точки підінтегральної функції з рівняння

$$D = (a^2 + 1)^2 - 4ai(-ai) = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2,$$

$$z_1 = \frac{-(a^2 + 1) - |a^2 - 1|}{2ai},$$

$$z_2 = \frac{-(a^2 + 1) + |a^2 - 1|}{2ai}.$$

Так як  $|a| < 1$ , то  $z_1 = ai$ ,  $z_2 = \frac{1}{a}i$ .

В середину кола  $|z| = 1$  попадає лише одна точка  $z_1 = ai$ , тому

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{aiz^2 + (a^2 + 1)z - ai} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{aiz^2 + (a^2 + 1)z - ai}.$$

Точка  $z_1 = ai$  – простий полюс, а тому

$$\operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{aiz^2 + (a^2 + 1)z - ai} = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{1}{ai(z - ai) \left( z - \frac{1}{ai} \right)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Отже, 
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \sin \varphi + a^2} = -i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{(1 - a^2)}.$$

### 3. Невласні інтеграли від раціональних функцій

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \quad (2)$$

В припущенні, що інтеграл збіжний, його можна обчислити за допомогою формули

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R(z)$$

$I_{m-k} > 0$

(тут лишки беруться у всіх особливих точках функції  $R$ ., які лежать у верхній півплощині).

**Завдання 83.** Обчислити інтеграли:

1) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 - x^2)^4}.$$

**Розв'язання:**

Функція  $R(z) = \frac{1}{(1 - z^2)^4}$  має дві особливі точки  $z_1 = -i$ , та  $z_2 = i$ , які є

полюсами четвертого порядку. У верхній півплощині лежить лише одна з них

$z_2 = i$ , тому за формулою (1) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^4} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1-z^2)^4}.$$

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1-z^2)^4} =$$

$$\frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow i} \left( (z-i)^4 \frac{1}{(z-i)^4 (z+i)^4} \right)' = \frac{1}{3!} \left( (z+i)^{-4} \right)' \Big|_{z=i} = -\frac{5i}{32}$$

Отже  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^4} = 2\pi i \left( -\frac{5i}{32} \right) = \frac{5\pi}{16}.$

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ ; 3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ ; 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+1}{(1+x^2)^2} dx$ ; 5)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{1+x^4}$ ;  
 6)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ ; 7)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ ; 8)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ ; 9)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$ ;  
 10)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$ ; 11)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{i+x^2}$ ; 12)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$ .

#### 4. Невласний інтеграл виду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} R(x) dx \quad (3)$$

Припускаючи, що інтеграл (3) збігається, його можна обчислити за формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_m > 0 \\ z=z_k}} \operatorname{res}(R(z) e^{iaz}).$$

Якщо функція  $R(x)$  дійсна при дійсних  $x$  та  $a > 0$ , то відокремлюючи в останній формулі дійсну та уявну частину, одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} R(z) e^{iaz}, \quad \operatorname{Im} z_k > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} R(z) e^{iaz}, \quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

**Завдання 83.** Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad 3) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} dx; \\ 4) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x dx}{x^2-2x+5}; \quad 5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx; \\ 7) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x dx}{x^2+2x+2}; \quad 8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+4} dx; \quad 9) \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{(x^2+1)^2}; \\ 10) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^4} dx; \quad 11) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}; \quad 12) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin 2x dx}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

## Література

1. Гольдберг А.А., Шеремета М.М. та інші. Комплексний аналіз. Львів, Афіша, 2008.
2. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В. та інші. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Ч. 2. Київ, Вища школа, 2003.
3. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М. та інші. Вища математика. Спеціальні розділи. 2-ге видання. Київ, Либідь, 2003.
4. Задерей П.В. Теорія функцій комплексної змінної. Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. 354 с.
5. Константинов В.В. ТФКЗ: теорія і практика. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 2021.
6. Слюсарчук П.В. Комплексний аналіз : Навчальний посібник. Ужгород, 2022.
7. Горайнов В.В. Комплексний аналіз. Суми, 2020.
8. Скасків О.Б. Комплексний аналіз. Львів, ЛНУ ім. Івана Франка, 2018. 230 с.
9. Zakeri S. A Course in Complex Analysis. Princeton University Press, 2021. 448 p.
10. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford University Press, 2023. 623 p.
11. Жильцов О.Б. Практикум з вищої математики / О.Б. Жильцов, Г.М. Торбін. Київ, МАУП, 2022. 286 с.
12. Алексєєва І.В. Теорія функції комплексної змінної: практикум. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 2020. 115 с.
13. Єжов С.М. Теорія функції комплексної змінної : Навчальний посібник. Київ, 2022.
14. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г.М. Кривошесва, Л.В. Обухова, О.Г. Серета, Н.О. Головка. Київ, Кондор, 2006. 608 с.