МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра математики та методики її навчання

Тимчук М.В.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Диференціальне числення функції однієї змінної

Рівне 2026

УДК 517.2:378.147.31(042.4)

Математичний аналіз: Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчально-методичний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач М. В. Тимчук. 2026. 103 с.

Укладач:
Тимчук М. В. – старший викладач кафедри математики та методики її навчання.

Рецензенти:
Генсіцька-Антонюк Н. О. – к. п. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Петрівський Я. Б. – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 7 від 26 травня 2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 5 від «27» «травня» 2026 р.)

ЗМІСТ

Лекція №1. Поняття множини. Множина дійсних чисел. Функція. Класи функцій

План

1. Вступ.

2. Поняття множини. Числові множини та їх властивості. Аксіома Архімеда. Принцип Кантора.

3. Модуль дійсного числа та його властивості.

4. Точкові множини.

5. Межі числових множин. Точна верхня та точна нижня межі.

6. Поняття функції дійсної змінної. Способи задання функції. Складена функція.

7. Елементарні функції.

8. Обернена функція.

9. Окремі класи функцій (властивості функцій).

10. Геометричні перетворення графіків функцій.

Короткий конспект лекції

1. Вступ.

Слово «математика» походить від грецького «mathema», що означає «наука, знання». Кожна наука вивчає певні сторони матеріального світу. Але, не зважаючи на відмінність цих величин, всі вони мають одну спільну властивість – їх можна виміряти, прийнявши за одиницю вимірювання довільну величину тієї самої природи. Відношення даної величини до одиниці вимірювання дає нам абстрактне число. Предметом вивчення математики є числа.

Математика виникла і розвивається з практичних потреб людини – вимірювання площ, об’ємів, відлік часу, з механіки.

Особливого розвитку математика набула в XVII-XVIII ст., який пов'язаний з розвитком капіталізму. Поворотним пунктом у математиці стала декартова *змінна* величина. Завдяки цьому в математику увійшов рух, через що негайно необхідними стали диференціальне та інтегральне числення (основоположники – Ньютон і Лейбніц).

Поділ математики на елементарну і вищу умовний: до XVII-XVIII ст. – елементарна, після – вища.

Одним із фундаментальних розділів вищої математики є математичний аналіз. *Предметом* вивчення математичного аналізу є *функція*. Основним методом є *метод границь – граничний перехід*.

2. Поняття множини. Числові множини та їх властивості. Аксіома Архімеда. Принцип Кантора.

Математичні поняття можна поділити на первісні (не означувані) і похідні від них. Множину відносять до первісних понять, означення їй не дають. Означення – це речення розповідного стилю, у якому розкривається суть нового поняття через уже відомі поняття.

Під множиною розуміють сукупність об’єктів довільної природи, об’єднаних за спільною ознакою.

Об’єкти, з яких складається множина, називають її *елементами*.

Множини в математиці позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, …, їх елементи – маленькими: a, b, c, …

Множину можна задати, перелічивши її елементи через кому у фігурних дужках:

$$A = \{a, b, c, z\}$$

(множина A складається із чотирьох елементів a, b, c і z)

Те, що елемент a належить множині A, записують так: $a \in A$ (читають «a належить A»).

Множини, які містять скінченну кількість елементів, називають *скінченними*; усі інші – *нескінченними*. Кількість елементів скінченної множини називають її *потужністю* і позначають $\overline{\overline{A}} = 4$ (потужність множини A дорівнює чотирьом).

Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою*, і позначається Ø. Наприклад, порожньою є множина розв'язків рівняння

$$x^2+2=0.$$

Для скорочення записів при роботі з множинами застосовують спеціальні символи – *квантори*:

$\forall$ – квантор загальності (читається «для всіх, для кожного, для будь-якого»);

$\exists$ – квантор існування (читається «існує»).

Означення: множина *B* називається *підмножиною* множини *A*, якщо кожен елемент множини *B* належить множині *A*.

На письмі цей факт записують так: $B \subset A$ («*B* підмножина *A*», «*B* міститься в *A*») або $A \supset B$ («*B* – підмножина *A*», «*A* містить в собі *B*»).

Числові множини та їх властивості

В математиці, найчастіше, мають справу з множинами, елементами яких є числа. Такі множини називають *числовими*.

Найважливішими числовими множинами є наступні:

1) N – множина натуральних чисел (виникли в результаті лічби);

$$N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$$

2) Z – множина цілих чисел (натуральні, протилежні до них і число 0);

$$Z=\{\dots,-n,\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots,n,\dots\}$$

3) Q – множина раціональних чисел

$\left\{\dfrac{p}{q}\right\}$, де $p \in Z,\ q \in N.$

Між вказаними множинами має місце співвідношення: $N \subset Z \subset Q$.

Зауважимо, що кожному натуральному, цілому, раціональному числу на числовій прямій відповідає точка.

Властивості множини *Q*:

- впорядкованість:

$\forall r_1, r_2 \in Q \Rightarrow r_1 < r_2$ або $r_1 = r_2$ або $r_1 > r_2$ (для будь-яких раціональних чисел r_1, r_2 має місце одне із співвідношень $r_1 < r_2$ або $r_1 = r_2$ або $r_1 > r_2$);

- щільність в собі:

$\forall r_1, r_2 \in Q : r_1 < r_2 \; \exists r \in Q : r_1 < r < r_2$ (які б не були раціональні числа r_1, r_2, знайдеться таке раціональне число *r*, що лежить між r_1 і r_2).

Легко бачити, що не кожній точці на числовій прямій відповідає раціональне число (наприклад, $\sqrt{2}$). Таким чином, крім раціональних, на числовій прямій є ще є нераціональні числа. Їх називають *ірраціональними*.

4) Раціональні та ірраціональні числа разом утворюють *множину дійсних чисел R*.

Очевидно, що $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Властивості множини *R*:

- впорядкованість:

$\forall \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha < \beta$ або $\alpha = \beta$ або $\alpha > \beta$;

- щільність:

$\forall \alpha, \beta \in R : \alpha < \beta \; \exists \gamma \in R : \alpha < \gamma < \beta$;

- неперервність.

Розкриємо суть властивості неперервності.

Нехай $a, b \in R.$

Означення: *відрізком (сегментом) [a,b]* називається множина усіх точок числової прямої, що лежать між *a* і *b*, включаючи і їх самі:

$$[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}.$$

Розглянемо нескінченну систему вкладених один в одного відрізків:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Принцип вкладених відрізків (Кантора): для будь-якої системи вкладених відрізків існує хоча б одна точка, яка належить кожному із відрізків даної системи.

Цю властивість множини дійсних чисел називають *неперервністю за Кантором*.

Аксіома Архімеда. Яке б не було число a, знайдеться таке натуральне число n, що більше за a:

$$\forall a \in R\ \exists n \in N : n > a.$$

Означення: множина елементів, які задовольняють властивості впорядкованості, щільності, неперервності, аксіому Архімеда, властивості операцій додавання та множення елементів, а також властивість дистрибутивності множення відносно додавання називається *множиною дійсних чисел*.

3. Модуль дійсного числа та його властивості.

Означення: *абсолютною величиною (модулем)* дійсного числа a називають дійсне число $|a|$, що задовольняє умовам:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \ge 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад,

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, & \text{якщо } 2 - x \ge 0; \\ -(2 - x), & \text{якщо } 2 - x < 0. \end{cases}$$

$$|\sin 2x| = \begin{cases} \sin 2x, & \text{якщо } \sin 2x \ge 0; \\ -\sin 2x, & \text{якщо } \sin 2x < 0. \end{cases}$$

Властивості модуля

1) $|a| \le b\ (b \ge 0) \Leftrightarrow -b \le a \le b;$

2) $|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b, \\ a < -b; \end{array} \right.$

3) $\sqrt{a^2} = |a|;$

4) $|a+b| \le |a| + |b|;$

5) $|a-b| \ge |a| - |b|;$

6) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$

7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}.\ b \ne 0;$

8) $|a^n| = |a|^n, n \in N.$

4. Точкові множини.

До точкових множин відносять відрізок, інтервал, піввідрізок, півінтервал та окіл деякої точки.

$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – *інтервал;*

$[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ – *піввідрізок;*

$(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ – *півінтервал.*

Означення: множину точок x таких, що для деякого дійсного додатного числа ε (епсилон) $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ називають ε*-околом* точки *a* і позначають $O(a, \varepsilon)$.

$O^*(a, \varepsilon)$ позначають *виколотий окіл* (без точки *a*).

Оскільки між точками числової прямої та множиною *R* дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність (кожній точці числової прямої відповідає дійсне число, і навпаки, кожному дійсному числу відповідає точка числової прямої), то терміни «дійсне число» і «точка числової прямої» вважають синонімами. Таким чином усі розглянуті вище числові множини в той же час є і точковими множинами, і навпаки.

5. Межі числових множин. Точна верхня та точна нижня межі.

Нехай дано деяку множину $X = \{x\}, \ \ x \in R.$

Означення: множина X називається *обмеженою зверху*, якщо існує таке число *M*, що для всіх *x* з множини X виконується нерівність $x \leq M$. Число *M* при цьому називається *верхньою межею* множини *X*.

Наприклад,

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ обмежена зверху (наприклад, числом 1);

множина від'ємних чисел обмежена зверху (наприклад, нулем);

множина *N* не обмежена зверху.

Означення: множина X називається *обмеженою знизу*, якщо існує таке число *m*, що для всіх *x* з множини X виконується нерівність $x \geq m$. Число *m* при цьому називається *нижньою межею* множини *X*.

Знизу обмежені, наприклад, множина *N*, множина додатних чисел та ін. (чим?).

Означення: множина X називається *обмеженою*, якщо вона обмежена знизу і зверху.

Означення (рівносильне): множина *X* називається *обмеженою*, якщо існує таке число *K>0*, що для всіх *x* з множини *X* виконується нерівність $|x| \leq K$.

Очевидно, якщо множина обмежена зверху (знизу), то вона має нескінченну кількість верхніх (нижніх) меж.

Означення: найменша з верхніх меж множини X називається *точною верхньою межею (гранню)* множини і позначається $\sup X$ або $\sup\{x\}$.

Нехай $\beta = \sup X$.

Властивості точної верхньої грані:

1) $\forall x \in X : x \leq \beta;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in X : x' > \beta - \varepsilon$

(для будь-якого як завгодно малого наперед заданого додатного числа ε в множині X знайдеться таке число x' , що $x' > \beta - \varepsilon$).

Означення: найбільша з нижніх меж множини X називається *точною нижньою межею (гранню)* множини і позначається $\inf X$ або $\inf\{x\}$.

Нехай $\alpha = \inf X$.

Властивості точної нижньої грані:

1) $\forall x \in X : x \geq \alpha;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in X : x' < \alpha + \varepsilon$

(для будь-якого як завгодно малого наперед заданого додатного числа ε в множині X знайдеться таке число x' , що $x' < \alpha + \varepsilon$).

Теорема 1. Усяка непорожня обмежена зверху множина має точну верхню межу.

Теорема 2. Усяка непорожня обмежена знизу множина має точну нижню межу.

6. Поняття функції дійсної змінної. Способи задання функції. Складена функція.

Нехай дано множини $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, де $x, y \in R$.

Означення: *функцією* дійсної змінної називають *закон*, або правило, за яким *кожному* числу $x \in X$ ставиться у відповідність *єдине* число $y \in Y$.

Те, що *y* є функцією від *x*, записують так: $y = f(x)$.

Множину X при цьому називають *областю* (множиною) *визначення* функції, множину Y називають *множиною значень* функції.

x – незалежна змінна (аргумЕнт), *y* – залежна змінна (функція).

Способи задання функції

1) Аналітичний (за допомогою формули):

$y = \sin x, \;\; y = x^2.$

2) Табличний (за допомогою таблиці):

x	-3	0	0,2	1	3	7	10
y	14	6	-0,4	3	9,2	0	-7

3) Словесний (описовий):

а) y – ціла частина від x;

б) y дорівнює 1, якщо x – раціональне і y дорівнює 0, якщо x – ірраціональне;

в) y=1, якщо x>0, y=0, якщо x=0 і y=-1, якщо x<0.

4) Графічний (за допомогою графіка).

Означення: графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини з координатами $(x, f(x))$.

Зауважимо, що не будь-яка лінія в системі координат на площині задає функцію $y = f(x)$.

Складена функція

Нехай дано функцію $u = g(x),\ x \in X,\ u \in U$ і нехай на множині U задано функцію $y = f(u)$. Тоді функцію $y = f(g(x)), x \in X$ називають *композицією* функцій *f* і *g* або *складеною функцією* і позначають $f \circ g$. Причому, діють функціями у зворотньому порядку, тобто спочатку *g*, а потім – *f*.

Наприклад, $y = \sin x^2$. Тут $u = x^2, y = \sin u$.

7. Елементарні функції.

Із школи відомо найпростіші (основні елементарні) функції:

а) $y = c,$ де $c = const$ - стала;

б) $y = x^\alpha,\ \alpha \in R$ – степенева;

в) $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ – показникова;

г) $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ – логарифмічна;

д) тригонометричні: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$;

е) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = arctgx,$ $y = arcctgx$.

Означення: функції, які виражаються одним аналітичним виразом через основні елементарні функції за допомогою операцій додавання, віднімання, множення (піднесення до степеня з натуральним показником), ділення та композиції називаються *елементарними*.

В залежності від операцій, які зображують елементарні функції, їх поділяють на:

- цілі раціональні функції (многочлени)

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{, де } a_i \in R,\ n \in N;$$

- дровобі раціональні (дробово-раціональні, алгебраїчні дроби)

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0};$$

- ірраціональні функції.

Названі вище 3 типи функцій називають ще *явними алгебраїчними*.

Крім явних алгебраїчних, є також і *неявні алгебраїчні функції* (ті, які задаються рівняннями, нерозв'язними відносно у):

$$p_n(x) y^n + p_{n-1}(x) y^{n-1} + \ldots + p_1(x) y + p_0(x) = 0,$$ де $n \in N,\ p_i(x)$ – цілі раціональні функції.

Явні та неявні алгебраїчні функції називають алгебраїчними функціями. Усі інші функції називаються *неалгебраїчними*, або *трансцендентними*.

8. Обернена функція.

Нехай дано функцію $y = f(x), x \in X$ і $Y = \{y\}$ – її множина значень. Тоді якщо кожному $y \in Y$ за певним законом f^{-1} ставиться у відповідність єдине $x \in X$, то функцію f^{-1} називають *оберненою* до f, і позначають $x = f^{-1}(y)$.

Виявляється, що не для усякої функції існує обернена. Функцію, яка має обернену, називають *оборотною*.

Помічаємо, що область визначення оберненої функції збігається з множиною значень прямої, і навпаки.

Приклад. Знайти обернену функцію до

1) $y = 2x - 1,\ \ x \in R$.

Обернену функцію можна знайти, якщо виразити *x* через *y* і поміняти *x* та *y* місцями:

$$y = 2x - 1;$$
$$2x = y + 1;$$
$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2};$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ – функція, обернена до $y = 2x - 1$ на $x \in R$.

Якщо побудувати графіки обох цих функцій в одній системі координат, то можна помітити, що вони симетричні відносно прямої $y = x$. Виявляється, цей факт має місце і у довільному випадку:

графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

2) $y = x^2,\ \ x \in R$.

Як бачимо, $x = \pm\sqrt{y}$, звідки $y = \pm\sqrt{x}$, а це не є функціональна відповідність (кожному *x* відповідає два різні значення *y*).

Таким чином, при $x \in R$ оберненої до даної функції не існує.

Однак, для $y = x^2,\ \ x \in (-\infty; 0]$ оберненою функцією буде $y = -\sqrt{x}$, а для $y = x^2,\ \ x \in [0; +\infty)$ оберненою буде $y = \sqrt{x}$.

Для того, щоб знайти множину значень функції, слід знайти область визначення оберненої до неї функції.

9. Окремі класи функцій (властивості функцій).

1) Парні (непарні)

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *парною*, якщо:

а) для будь-якого *x* з області визначення знайдеться –*x*, яке теж належить області визначення

$\forall x \in X \ \exists(-x) \in X$

(область визначення симетрична відносно 0);

б) $\forall x \in X \ \ f(-x) = f(x)$.

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *непарною*, якщо:

а) $\forall x \in X \ \exists(-x) \in X$;

б) $\forall x \in X \ \ f(-x) = -f(x)$.

Інакше функцію називають *ні парною, ні непарною* (функцією *довільного положення*).

Графік парної функції симетричний відносно осі Оу.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

2) Обмежені

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *обмеженою* на множині *X*, якщо існує таке додатне число *K*, що для будь-якого *x* із області визначення має місце нерівність $|f(x)| \le K$

$$\exists K > 0 : \forall x \in X \ \ |f(x)| \le K.$$

Зауважимо, що, по аналогії з множинами, можна дати означення функцій, обмежених зверху, знизу (зробіть це самостійно).

3) Монотонні

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *зростаючою (неспадною)* на множині Х, якщо $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *спадною (незростаючою)* на множині *X*, якщо $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

4) Періодичні

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *періодичною* на *X*, якщо $\exists T > 0 : \forall x \in X \Rightarrow f(x+T) = f(x)$.

При цьому число *T* називають *періодом* функції. Найменший з періодів функції називають її *мінімальним (найменшим додатнім) періодом*.

10. Геометричні перетворення графіків функцій.

Важливою задачею є побудова графіка довільної функції. Взагалі кажучи, для побудови графіка попередньо слід виконати дослідження властивостей функції. Однак, у окремих випадках, графіки елементарних функцій можна отримати, виконуючи геометричні перетворення над графіком відповідної основної елементарної функції. Розглянемо найважливіші з них.

Розглянемо функцію $y = Af(ax+b)+c, x \in X$, де A,a,b,c – деякі числа. Якщо відомо графік функції $y = f(x)$, то графік даної функції можна отримати, виконавши над ним наступні геометричні перетворення:

1) будуємо графік $y = f(x)$;

2) $y = f(ax)$ – деформація графіка 1) вздовж осі *Ox* (якщо $|a| > 1$, то маємо стиск, якщо $|a| < 1$, то розтяг);

3) $y = f(a(x + \frac{b}{a}))$ – отримується з 2) шляхом його переміщення

вздовж осі *Ox* на $\left|\frac{b}{a}\right|$ одиниць (вліво, якщо $\frac{b}{a} > 0$, вправо, якщо $\frac{b}{a} < 0$);

4) $y = Af(ax+b)$ – одержується з 3) шляхом його деформації уздовж осі *Oy* (якщо $|A| > 1$, то розтяг, якщо $|A| < 1$, то стиск);

5) $y = Af(ax+b)+c$ – отримується з 4) шляхом його переміщення вздовж осі *Oy* на $|c|$ одиниць (вгору, якщо $c > 0$, вниз, якщо $c < 0$).

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Предмет і метод математичного аналізу.

2. Множини та дії над ними, їх властивості. Символіка.

3. Множина дійсних чисел, її властивості та геометричне зображення.

4. Модуль дійсного числа, його властивості. Проміжки.

5. Аксіома Архімеда. Принцип Кантора. Неперервність множини дійсних чисел.

6. Обмежені та необмежені множини. Межі числових множин.

7. Загальне поняття функції. Графіки функцій. Способи задання функцій.

8. Окремі класи функцій (обмежені, необмежені, парні, непарні, монотонні, періодичні). Обернена функція. Елементарні функції та їх класифікація.

9. Побудуйте графіки основних елементарних функцій. Назвіть їх основні властивості.

10. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$.

Лекція №2. Числова послідовність та її границя

План

1. Означення числової послідовності. Приклади.
2. Границя числової послідовності.
3. Властивості збіжних послідовностей.
4. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Їх властивості.
5. Основні теореми про границі числових послідовностей.
6. Границя монотонної послідовності. Число е.
7. Підпослідовність. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.

Короткий конспект лекції

1. Означення числової послідовності. Приклади.

В лекції №1 введено поняття функції дійсного аргументу:

$$y = f(x), x \in X \subset R.$$

А що матимемо, коли задати функцію на множині натуральних чисел *N*?

$$y = f(n), n \in N:$$

n	1	2	3	4	…	*n*	…
y	*f*(1)	*f*(2)	*f*(3)	*f*(4)	…	*f*(*n*)	…

Означення: якщо кожному натуральному числу n, взятим у порядку зростання, поставлено у відповідність дійсне число x_n, то кажуть, що задано *числову послідовність*, і позначають

$\{x_n\}$ або $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$

$x_1, x_2, ...$ – члени послідовності, x_n – загальний член.

Способи задання послідовностей:

1) за допомогою загального члена (формули):

$$x_n = \frac{n}{n+1};$$

2) рекурентний (наступний член послідовності виражається через попередній):

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = x_n + 2.$$

3) словесний:

4, 1, 4, 2, 4, 3, …

-1, 1, -1, 1, -1, 1, …

4) графічний (оскільки дійсне число – це точка на числовій прямій, то числову послідовність можна задавати як послідовність точок числової прямої).

Приклади числових послідовностей:

1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ... \to 1$;

2) $2, 4, 6, 8, ..., 2n, ... \to \infty$;

3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n+1}, ...$ – не прямує ні до чого;

4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ..., \frac{1}{n^2}, ... \to 0$.

Означення: послідовність $\{x_n\}$ називають *зростаючою* (монотонно зростаючою), якщо $\forall n \in N \Rightarrow x_n < x_{n+1}$.

Розрізняють також *неспадні, спадні* та *незростаючі* послідовності (означте їх самостійно).

Означення: послідовність $\{x_n\}$ називають *обмеженою*, якщо $\exists K > 0 : \forall n \in N \Rightarrow |x_n| < K.$ Інакше послідовність називається *необмеженою*.

Як бачимо з означення, усі члени обмеженої послідовності можна заключити у відрізок скінченної довжини.

2. Границя числової послідовності.

Вище ми бачили, що члени числової послідовності можуть прямувати до скінченного числа, до нескінченності, а можуть ні до чого не прямувати.

Означення: число *a* називають *границею* числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число *N*, що для всіх *n* більших за *N* виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon.$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Геометрично остання нерівність означає

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon ,$$

що, починаючи з деякого номера *N*, усі члени послідовності потрапляють в ε -окіл точки *a*.

Послідовність, що має скінченну границю, називається *збіжною*. Послідовність, границя якої дорівнює нескінченності, або не існує, називається *розбіжною*.

3. Властивості збіжних послідовностей.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $a > p$ $(a < q)$, то і члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера, будуть відповідно більшими за *p* (меншими за q).

Доведення (доведемо випадок $a > p$).

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, звідки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Виберемо ε таким, щоб $p < a - \varepsilon < a$ (це можна зробити внаслідок властивості щільності множини *R*).

Тоді маємо: $p < a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, звідки $x_n > p$, що і слід було довести.

Випадок $a < q$ доводиться аналогічно. ■

Наслідок з теореми 1: члени послідовності, яка має границю, починаючи з деякого номера, мають знак цієї границі.

Теорема 2. Збіжна послідовність – обмежена.

Доведення.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа *a*. Доведемо, що вона обмежена, тобто, що $\exists K > 0 : \forall n \in N \Rightarrow |x_n| < K.$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, звідки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тобто, починаючи з члена x_{N+1}, послідовність обмежена. А поза інтервалом $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ можуть лежати лише деякі з перших *N* членів. Оскільки таких членів скінченна кількість, то завжди можна підібрати таке *K*, щоб нерівність $|x_n| < K$ виконувалася і для перших *N* членів послідовності (в ролі *K* можна вибрати, наприклад, найбільше за модулем серед чисел $x_1, x_2, ..., x_N, |a| + \varepsilon$).■

Теорема 3. Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Доведення.

Припустимо, міркуючи від супротивного, що $\{x_n\}$ має принаймні 2 різні границі:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$ і нехай, для визначеності, $a < b.$

Згідно властивості щільності множини R

$\forall a, b \in R \; \exists r \in R : a < r < b.$

Тоді, на основі Теореми 1, з того, що $a < r$ слідує, що, починаючи з деякого номера N_1, $x_n < r$. Аналогічно, з того, що $b > r$ слідує, що, починаючи з деякого номера N_2, $x_n > r$. Тоді для усіх членів послідовності, починаючи з номера $N = \max\{N_1, N_2\}$, виконуються обидві нерівності одночасно.

Отримане протиріччя ($r < x_n < r$) означає, що наше припущення невірне. А, отже, вірним є протилежне твердження. ■

Теорема 4 (про граничний перехід під знаком рівності і нерівності). Якщо члени двох збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ при всіх *n* задовольняють нерівність $x_n \leq y_n$, то така ж нерівність має місце і для їх границь:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

Доведення (методом від супротивного).

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Припустимо, що $a > b.$ Тоді, згідно властивості щільності множини *R*, $\forall a, b \in R\ \exists r \in R : b < r < a.$

Тоді, згідно Теореми 1, маємо, що, починаючи з деякого номера $x_n > r$, $y_n < r$, звідки $x_n > y_n$, що суперечить умові теореми. ■

Зауважимо, що із строгої нерівності між членами послідовностей $x_n < y_n$, взагалі кажучи, не випливає строга нерівність між їх границями, а тільки, як і раніше, нестрога: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

Теорема 5 (про границю проміжної послідовності). Якщо члени послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ при всіх *n* задовольняють нерівності $x_n \le z_n \le y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доведення.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, звідки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Аналогічно

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, звідки $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.

Враховуючи, що $x_n \le z_n \le y_n$, маємо:

$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$, тобто $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$, що і означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

Теорема (*критерій Коші* збіжності числової послідовності). Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : \forall n, m \in N : n > N_0, m > N_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

4. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності (величини). Їх властивості.

Означення 1: послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Означення 2 (рівносильне): послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$

Нескінченно малі позначають $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots$

Означення: послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

З означення границі послідовності ($|x_n - a| < \varepsilon$) і нескінченно малої ($|\alpha_n| < \varepsilon$) випливає зв'язок між послідовністю, її границею і нескінченно малою:

$x_n - a = \alpha_n$, звідки $x_n = a + \alpha_n$.

Отже, якщо послідовність подається у вигляді сталої і нескінченно малої, то ця стала і буде границею даної послідовності:

$$x_n = a + \alpha_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Нескінченно велику величину можна розглядати як обернену до нескінченно малої, і навпаки. Тобто, якщо $c = const,\ \alpha_n \to 0$, то $\dfrac{c}{\alpha_n} \to \infty$ $\left(\dfrac{c}{0} = \infty\right)$. А якщо $\beta_n \to \infty$, то $\dfrac{c}{\beta_n} \to 0$ $\left(\dfrac{c}{\infty} = 0\right)$, звідки $0 \cdot \infty = c$ – довільне число.

Надалі кажучи, наприклад, про суму послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ матимемо на увазі послідовність $\{x_n + y_n\}$, членами якої є: $x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...$

Теорема 1. Сума скінченної кількості нескінченно малих також є нескінченно мала.

Доведення (проведемо для випадку двох н.м.).

Нехай дано нескінченно малі α_n і β_n. Задамося довільним $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно означення н.м.:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо вибрати $N = \max\{N_1, N_2\}$, то при всіх $n > N$ обидві рівності виконуватимуться одночасно, так що

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто величина $\alpha_n + \beta_n$ теж є нескінченно малою. ■

Теорема 2. Добуток нескінченно малої α_n на обмежену x_n є нескінченно мала.

Доведення.

Оскільки x_n – обмежена, то $\exists K > 0 : \forall n \in N \Rightarrow |x_n| < K.$ Тоді по заданому $\frac{\varepsilon}{K} > 0$ для нескінченно малої α_n знайдеться такий номер *N*, що при всіх $n > N$ буде $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Тоді для тих же значень *n*, очевидно,

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon. \blacksquare$$

5. Основні теореми про границі числових послідовностей.

Нехай дано дві збіжні послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, які мають границями числа *a* і *b* відповідно. Тоді мають місце теореми:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}. \quad (b \neq 0)$

Щоб довести дані теореми, використовують той факт, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n - a = \alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n - b = \beta_n$ і теореми 1 та 2 із попереднього пункту.

Доведемо, наприклад, 2). Для цього достатньо показати, що $x_n y_n - ab$ – н.м. Маємо

$$x_n y_n - ab = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$$ – н.м. згідно теорем 1 і 2. ■

Ці теореми можна застосовувати лише до збіжних послідовностей. У інших випадках приходимо до невизначених виразів (невизначеностей) виду

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}.$$

Їх слід розкривати.

6. Границя монотонної послідовності. Число e.

Теорема (про границю монотонної послідовності). Усяка монотонно зростаюча (спадна) обмежена зверху (знизу) послідовність має скінченну границю.

Доведення (проведемо для монотонно зростаючої).

Нехай $\{x_n\}$ – монотонно зростає і обмежена зверху. Тоді вона має точну верхню межу: $\sup\{x_n\} = a$. Покажемо, що *a* і буде границею $\{x_n\}$.

Оскільки *a* – точна верхня межа, то

1) $\forall n \in N \Rightarrow x_n < a$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : x_N > a - \varepsilon$.

Так як $\{x_n\}$ – монотонно зростаюча, то $\forall n > N \Rightarrow x_n < x_N$. В той же час $x_N > a - \varepsilon$. Тоді $x_n > a - \varepsilon$, звідки $0 \le a - x_n < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. А це і означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. ■

Зокрема, можна показати, що монотонно зростаючою і обмеженою зверху є послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Тоді, згідно доведеної теореми, вона також є збіжною.

Границю цієї послідовності прийнято позначати *e* (Ейлер):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e – ірраціональне число, основа натурального логарифма.

$$e = 2{,}718182818459040...$$

Якщо у границю замість *n* безпосередньо підставити нескінченність, то отримаємо ще один тип невизначеності - 1^∞.

Теорема (про вкладені проміжки). Нехай дано монотонно зростаючу послідовність $\{x_n\}$ і монотонно спадну $\{y_n\}$, причому $\forall n \in N \Rightarrow x_n < y_n$. Тоді якщо їх різниця прямує до нуля, то обидві послідовності мають спільну скінченну границю:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Доведення.

Так як $\{y_n\}$ – монотонно спадна, то при всіх n маємо, що $y_n < y_1$. В силу умови теореми $\forall n \in N \Rightarrow x_n < y_n$, тому з цих двох нерівностей випливає, що $\forall n \in N \Rightarrow x_n < y_1$.

Отримали, що $\{x_n\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху (числом y_1). Згідно попередньої теореми, така послідовність збіжна:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Аналогічні міркування мають місце і для спадної послідовності $\{y_n\}$, так що

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c'.$$

Але згідно теореми про границю різниці збіжних послідовностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = c - c' = 0,$$

звідки $c = c'$, що й слід було довести. ■

Якщо розглянути систему вкладених проміжків

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то в ролі зростаючої послідовності $\{x_n\}$ можна вибрати послідовність лівих кінців $\{a_n\}$, а в ролі спадної $\{y_n\}$ – послідовність правих $\{b_n\}$. Тоді, якщо довжини цих проміжків прямують до 0 із зростанням *n*, то на основі попередньої теореми можна стверджувати, що кінці проміжків (з різних сторін) прямують до однієї й тієї ж границі *c*.

7. Підпослідовність. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.

Нехай дано послідовність $\{x_n\}$. Наприклад, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Розглянемо довільну послідовність $\{x_{n_k}\}$, складену з членів даної послідовності, взятих у порядку зростання номерів:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

Наприклад, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$

Таку послідовність $\{x_{n_k}\}$ називають *підпослідовністю* даної послідовності $\{x_n\}$:

$$\{x_{n_k}\}:\; x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

Теорема (Больцано-Вейєрштрасса). З усякої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення.

Нехай дано послідовність $\{x_n\}$, яка обмежена. Виділимо з неї збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$.

Оскільки $\{x_n\}$ – обмежена, то усі її члени можна заключити у відрізок скінченної довжини, наприклад, $[a,b]$.

Поділимо відрізок $[a,b]$ навпіл і виберемо ту з половин, у якій міститься нескінченна кількість членів послідовності $\{x_n\}$ (якщо в обох, то виберемо довільну з них). Позначимо вибрану половину $[a_1,b_1]$. Проведемо з відрізком $[a_1,b_1]$ ті ж операції, що і з $[a,b]$ - отримаємо $[a_2,b_2]$. Продовживши цей процес необмежено, на *k*-му кроці отримаємо відрізок $[a_k,b_k]$, який містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$ і т.д.

Таким чином, побудували систему вкладених відрізків

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots \supset [a_k,b_k] \supset \dots,$$

причому довжина *k*-го відрізка $\dfrac{b-a}{2^k}$ прямує до 0 при $k \to \infty$.

Застосовуючи теорему про вкладені проміжки з пункту 6, робимо висновок, що послідовності лівих і правих кінців прямують до спільної границі *c*.

Тепер шукану підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ можна виділити наступним чином: в якості x_{n_1} виберемо довільний елемент послідовності $\{x_n\}$, що належить $[a_1, b_1]$, в якості x_{n_2} виберемо довільний елемент послідовності $\{x_n\}$, що належить $[a_2, b_2]$, …, в якості x_{n_k} виберемо довільний елемент послідовності $\{x_n\}$, що належить $[a_k, b_k]$ і т.д..

Тоді, оскільки $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ і $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, то згідно з теоремою про границю проміжної послідовності, маємо, що і $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, що і слід було довести. ■

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Поняття числової послідовності. Границя числової послідовності.

2. Властивості збіжних числових послідовностей. Критерій Коші.

3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності, їх властивості. Теореми про нескінченно малі.

4. Теорема про границі суми, добутку і частки послідовностей. Граничний перехід в нерівностях.

5. Границя монотонної послідовності. Число “*e*”. Теорема про вкладені проміжки.

6. Підпослідовність. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.

Лекція №3. Границя функції

План

1. Означення границі за Коші та за Гейне.

2. Перша визначна границя.

3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Класифікація нескінченно малих.

4. Основні теореми про границі функцій.

5. Односторонні границі. Границя функції на нескінченності.

6. Друга визначна границя.

Короткий конспект лекції

1. Означення границі за Коші та за Гейне.

Нехай дано $y = f(x), x \in X, x_0 \in X.$ Зауважимо, що функція в точці x_0 може бути і невизначеною.

Означення (на «мові» $\varepsilon - \delta$, за Коші): число *A* називається *границею* функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ $(x \neq x_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке число $\delta > 0$, що для всіх *x* із області визначення *X* таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Цей факт записують так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Таким чином

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрично це означає, що як тільки аргумент потрапляє в δ-окіл точки x_0, то графік функції $f(x)$ не виходить за межі смуги між прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$.

Означення (на «мові послідовностей», за Гейне): число *A* називають *границею* функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (в точці x_0), якщо із збіжності будь-якої послідовності аргументів $\{x_n\}$ до x_0 випливає збіжність відповідної послідовності значень функції $\{f(x_n)\}$ до числа *A*:

$$\{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A.$$

Означення за Гейне використовують, коли слід довести, що границі не існує. Для цього достатньо підібрати дві послідовності аргументів, збіжних до x_0, так, щоб відповідні послідовності значень функції збігалися до різних чисел (або розбігалися).

2. Перша визначна границя.

Рівність $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ називають *першою визначною* (важливою, чудовою, відомою) *границею*.

Доведемо її, користуючись означенням границі за Коші, тобто покажемо, що

$$\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 \ \ |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Нехай спочатку $x > 0$. Тоді для невеликих $\sin x > 0$ і $\sin x < x < tgx$, звідки $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$. Тоді

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1;$$

$$-\cos x > -\frac{\sin x}{x} > -1;$$

$$1-\cos x > 1-\frac{\sin x}{x} > 0;$$

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x.$$

Оскільки $1-\frac{\sin x}{x} > 0$, то $1-\frac{\sin x}{x} = \left|1-\frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|$. Таким чином, маємо

$$0 < \left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < 1-\cos x. \tag{1}$$

Врахувавши, що $\sin x < x$, отримаємо

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2.$$

Тоді (1) перетворимо до виду

$$0 < \left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \frac{1}{2}x^2.$$

Тепер очевидно, що δ можна вибрати рівним $\sqrt{2\varepsilon}.$ Адже тоді з того, що $|x-0| < \delta = \sqrt{2\varepsilon}$ випливатиме нерівність $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon$.

Те, що δ вдалося знайти, і означає, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай тепер $x<0$. Тоді $-x>0$ і, згідно з вище доведеним $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x}=1$. Але $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. ■

3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Класифікація нескінченно малих.

Означення: функція $y=f(x), x\in X, x_0\in X$ називається *нескінченно малою* в околі точки x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, тобто якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon.$$

Нескінченно малі функції позначають $\alpha(x),\beta(x),...$

Означення: функція $y=f(x)$ називається *нескінченно великою (необмеженою)* в околі точки x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, тобто якщо

$$\forall M,\varepsilon>0\ |x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|>M.$$

З теорем про нескінченно малі послідовності випливає, що сума і добуток n нескінченно малих функцій є нескінченно мала; добуток нескінченно малої функції на обмежену в околі точки x_0 функцію теж є нескінченно мала. А от щодо відношення двох нескінченно малих, то тут можуть бути різні випадки. Залежно від цього і здійснюють класифікацію нескінченно малих.

1) Якщо границя відношення двох нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ дорівнює відмінному від нуля скінченному числу: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими *одного порядку*.

2) Зокрема, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними* нескінченно малими, і позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Наприклад, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ (чому?).

3) Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *вищого порядку*, ніж $\beta(x)$.

4) $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *k*-го порядку по відношенню до $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)$ і $\beta^k(x)$ є нескінченно малими одного порядку.

Аналогічна класифікація дається нескінченно великим функціям.

Зауваження: під знаком границі еквівалентні нескінченно малі можна заміняти одна одною.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих (при $x \to 0$)

$\alpha(x)$	$\beta(x)$
$\sin x$	x
tgx	x
$\arcsin x$	x
$arctgx$	x
$a^x - 1$	$x \ln a$
$\ln(1+x)$	x
$\sqrt{1+x} - 1$	$\frac{1}{2}x$

$(1+x)^p - 1$	px
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2}$

4. Основні теореми про границі функцій.

Для функцій, що мають в точці скінченні границі, мають місце ті ж властивості, що й для збіжних послідовностей (розглядалися у пункті 3 лекції №2; спробуйте перефразувати їх самостійно). Крім того, справедливі також теореми про границю суми, добутку і частки.

Нехай дано функції $f(x), \varphi(x), x \in X, x_0 \in X$, що мають в точці x_0 скінченні границі:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B.$$

Тоді мають місце теореми:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \right) = A \cdot B$;

зокрема, $\lim\limits_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, де $c = const$

(той факт, що границя сталої дорівнює самій сталій, легко довести, наприклад, скориставшись означенням границі за Коші);

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

Ці теореми доводяться, як і аналогічні для послідовностей, використовуючи той факт, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B \Leftrightarrow \varphi(x) = B + \beta(x)$, де $\alpha(x), \beta(x)$ – нескінченно малі.

Доведемо, наприклад, теорему 3). Для доведення достатньо показати, що $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}-\dfrac{A}{B}$ є нескінченно мала. Справді,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{(A+\alpha(x))B-A(B+\beta(x))}{B(B+\beta(x))}=$$

$$=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\left(AB+\alpha(x)B-AB-A\beta(x)\right)=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\left(\alpha(x)B-A\beta(\right.$$

Другий множник є нескінченно малою, оскільки добуток нескінченно малої функції на обмежену є нескінченно мала, і різниця двох нескінченно малих є нескінченно мала. А в силу того, що $B\neq 0$, то знаменник першого множника не прямує до нуля, отже, перший множник є величина обмежена. Тоді увесь добуток є нескінченно малою як добуток обмеженої на нескінченно малу. ■

В залежності від границь функцій (скінченних або нескінченних) отримують невизначеності різних типів: $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty$. До них не можна застосовувати теореми про границі. Їх потрібно розкривати.

Вирази виду $f(x)^{\varphi(x)}$ називаються степенево-показниковими. При знаходженні границь таких виразів $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ виникають нові типи невизначеностей: $0^0,\infty^o,1^\infty$. Ці невизначеності зводяться до попередніх, якщо їх символічно про логарифмувати:

$$\ln 0^0=0\ln 0=0\cdot(-\infty);$$

$$\ln\infty^o=0\ln\infty=0\cdot\infty;$$

$$\ln 1^\infty=\infty\cdot\ln 1=\infty\cdot 0.$$

5. Односторонні границі. Границя функції на нескінченності.

Означення: число *A* називається *лівосторонньою границею* функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке число $\delta > 0$, що для всіх *x* із лівостороннього околу точки x_0 виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означення: число *A* називається *правосторонньою границею* функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке число $\delta > 0$, що для всіх *x* із правостороннього околу точки x_0 виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ліво- і правосторонню границі в точці разом називають односторонніми границями функції.

Має місце зв'язок між існуванням односторонніх границь та границі функції в точці:

якщо в точці x_0 існують ліво- і правостороння границі функції $y = f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = A$, то в цій точці функція $y = f(x)$ має границю, яка теж дорівнює *A*.

Означення: число *A* називається границею функції $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке $K > 0$, що для всіх *x*, більших за K, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K > 0 : \forall x > K \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Графічно це означає, що $\forall x > K$ графік функції $f(x)$ лежатиме в смузі між прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$.

Аналогічне означення дається для границі функції при $x \to -\infty$ (дайте його самостійно).

6. Друга визначна границя.

У лекції №2 було введено число *e* як границю монотонної послідовності, а саме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Очевидно, що матиме місце рівність

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \tag{2}$$

Далі встановимо більш загальний результат:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{3}$$

(3) називають *другою визначною границею*.

Для доведення достатньо показати, що в точці 0 існують односторонні границі і вони дорівнюють *e*. Зробимо це на «мові послідовностей».

Нехай *x* пробігає будь-яку послідовність $\{x_k\}$ додатніх значень, збіжну до 0. Таким чином, можна вважати, що $0 < x_k < 1$.

Поклавши, $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$, матимемо

$$n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \tag{4}$$

звідки

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \le \frac{1}{n_k};$$

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + x_k \le 1 + \frac{1}{n_k}. \tag{5}$$

Піднесемо (5) до відповідних степенів (4):

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} \tag{6}$$

та перейдемо в нерівності (6) до границі при $x \to 0$(при цьому $n_k \to \infty$). Маємо:

$$\lim_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \lim_{n_k \to \infty}\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}} = \frac{\lim\limits_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\lim\limits_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

$$\lim_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \lim_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = \lim_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \lim_{n_k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) =$$

$$= e \cdot 1 = e.$$

Отже, в силу теореми про границю проміжної змінної, буде

$$\lim_{x_k \to 0}(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e.$$

Нехай тепер *x* пробігає будь-яку послідовність $\{x_k\}$ від’ємних значень, збіжну до 0, тобто $-1 < x_k < 0$.

Покладемо $x_k = -y_k$. Тоді вже $0 < y_k < 1$ і $y_k \to 0$. Матимемо

$$\lim_{x_k \to 0}(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{y_k \to 0}(1 - y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \lim_{y_k \to 0}\left(\frac{1}{1 - y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \lim_{y_k \to 0}\left(\frac{1 - y_k + y_k}{1 - y_k}\right)^{\frac{1 - y_k + y_k}{y_k}} = \lim_{y_k \to 0}\left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{\frac{1 - y_k}{y_k}} \cdot \left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right) = e \cdot 1 = e. \blacksquare$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Різні означення границі функції в точці.

2. Доведіть першу визначну границю.

3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Класифікація нескінченно малих.

4. Теорема про границі суми, добутку і частки функцій. Типи невизначеностей.

5. Односторонні границі, їх зв'язок з границею функції в точці. Границя функції на нескінченності.

6. Доведіть другу визначну границю.

Лекція №4. Неперервність функції однієї змінної. Властивості неперервних на відрізку функцій

План

1. Різні означення неперервності.

2. Неперервність суми, добутку та частки функцій. Неперервність складеної функції.

3. Границі, пов’язані із неперервністю.

4. Точки розриву функції. Їх класифікація.

5. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

6. Коливання функції. Поняття про рівномірну неперервність.

Короткий конспект лекції

1. Різні означення неперервності.

Нехай дано функцію $y = f(x), x \in X, x_0 \in X$. Зауважимо, що функція в точці x_0 обов'язково повинна бути визначеною (тобто $\exists f(x_0)$).

Означення 1: функція $y = f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо границя функції в т. x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Перефразуємо це означення, скориставшись поняттям односторонніх границь.

Означення 2: функція $y = f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо лівостороння границя функції в т. x_0 дорівнює правосторонній і дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0).$$

Якщо використати означення границі за Коші і за Гейне, то отримаємо ще два означення неперервності.

Означення 3 (на «мові» $\varepsilon - \delta$): функція $y = f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Означення 4 (на «мові послідовностей»): функція $y = f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо із збіжності будь-якої послідовності аргументів

$\{x_n\}$ до x_0 випливає збіжність відповідної послідовності значень функції $\{f(x_n)\}$ до $f(x_0)$:

$$\{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x_0).$$

Означення 4 (на «мові приростів»): функція $y = f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0.$$

Приклад. Довести, що функція $y = x^2$ неперервна у довільній точці $x_0 \in R$.

Скористаємось означенням неперервності на «мові приростів». Надамо x_0 скінченного приросту Δx і знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Нехай тепер $\Delta x \to 0$. Тоді і $\Delta y \to 0$. Отримали неперервність на «мові приростів».

Означення: функція $y = f(x)$ називається неперервною на множині *X*, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Має місце наступна теорема.

Теорема. Якщо множина значень монотонно зростаючої (спадної) функції $y = f(x)$, яких вона набуває при $x \in X$, міститься в деякому проміжку Y і заповнює його суцільно, то функція $f(x)$ є неперервною на *X*.

2. Неперервність суми, добутку та частки функцій. Неперервність складеної функції.

Нехай дано функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, $x \in X$, які неперервні в точці $x_0 \in X$, тобто

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ і } \exists \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Тоді має місце теорема.

Теорема. Сума, добуток і частка неперервних в т. x_0 функцій є функція неперервна.

Доведення теореми ґрунтується на відповідних теоремах про границі суми, добутку та частки двох функцій.

Доведемо, наприклад, теорему про неперервність частки. Будемо вимагати, щоб $\varphi(x_0) \neq 0$. Знайдемо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

А це і означає неперервність функції $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точці x_0.

Неперервність складеної функції

Нехай дано функції $u = \varphi(x), x \in X$ та $y = f(u), u \in U$, причому значення функції $\varphi(x)$ не виходять за межі множини U при $x \in X$.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ – неперервна в точці $x_0 \in X$, а функція $y = f(u)$ – неперервна у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0) \in U$, то і складена функція $y = f(\varphi(x)), x \in X$ буде неперервною в точці x_0.

Доведення.

Задамося $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $y = f(u)$ – неперервна у точці u_0, то по заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\sigma > 0$, що $|u - u_0| < \sigma \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$.

З іншого боку, в силу неперервності $u = \varphi(x)$ в точці x_0, по заданому $\sigma > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \sigma$. Таким чином, отримали, що

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |u - u_0| < \sigma \Rightarrow |f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

а це і означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$, що, в свою чергу, означає неперервність складеної функції. ■

Таким чином, під знаком неперервної функції можна здійснювати граничний перехід:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

3. *Границі, пов'язані із неперервністю.*

1) $\left(\dfrac{0}{0}\right) \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$.

Доведення.

Позначимо $a^\alpha - 1 = \beta$. Тоді при $\alpha \to 0$, очевидно, $\beta \to 0$. Маємо

$a^\alpha = 1 + \beta \Rightarrow \alpha = \log_a(1 + \beta)$.

Тоді

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\beta}\log_a(1+\beta)} = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\log_a(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{\beta\to 0}1}{\lim\limits_{\beta\to 0}\log_a(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}=\frac{1}{\log_a \lim\limits_{\beta\to 0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

1a) $\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$.

2) $\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\log_a \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=$

$=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

2a) $\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$.

3) $\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu$.

Доведення.

Замінимо $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$. Звідси $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$.

Прологарифмуємо останню рівність:

$$\log_a(1+\alpha)^{\mu}=\log_a(1+\beta),$$

звідки

$$\mu\log_a(1+\alpha)=\log_a(1+\beta);$$

$$\frac{\mu\log_a(1+\alpha)}{\log_a(1+\beta)}=1.$$

Тоді

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\mu\log_a(1+\alpha)}{\log_a(1+\beta)}\right)=\mu\cdot\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\frac{\frac{1}{\alpha}\log_a(1+\alpha)}{\frac{1}{\beta}\log_a(1+\beta)}=$$

$$=\mu\cdot\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\frac{\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\log_a(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}=\mu\cdot\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\lim\limits_{\beta\to 0}\log_a(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}=\mu\cdot\frac{\log_a\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\log_a\lim\limits_{\beta\to 0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}=$$

$$=\mu\cdot\frac{\log_a e}{\log_a e}=\mu.$$

4. Точки розриву функції. Їх класифікація.

Згідно означення 2, функція $y=f(x)$ називається неперервною в т. x_0, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі, вони рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці:

$$\exists\lim_{x\to x_{0-}}f(x)=\exists\lim_{x\to x_{0+}}f(x)=\exists f(x_0).$$

Якщо ж хоч одна із цих умов не виконується, то $f(x)$ називають *розривною* в точці x_0, а точку x_0 називають *точкою розриву* функції.

Класифікація точок розриву

1) Якщо в точці x_0 існують скінченні односторонні границі функції $f(x)$, але $\lim\limits_{x\to x_{0-}}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_{0+}}f(x)$, то $f(x)$ в точці x_0 має скінченний розрив (розрив I роду), а саму точку x_0 називають *точкою розриву I роду* (точкою скінченного розриву).

При цьому $\omega = \left| \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) - \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) \right|$ називають стрибком функції в точці x_0.

Можливі й інші випадки розриву I роду.

Наприклад, якщо в точці x_0 існують скінченні односторонні границі функції $f(x)$, вони рівні між собою, але $f(x)$ в точці x_0 – розривна. Якщо у цьому випадку функція невизначена в точці x_0, то x_0 називають точкою *усувного розриву* (розрив можна усунути, довизначивши функцію в точці).

Наприклад, нехай $y = \frac{\sin x}{x}, \; x_0 = 0$. Тоді

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

в той час, як у точці $x_0 = 0$ $f(x)$ – невизначена.

Таким чином, $x_0 = 0$ – точка усувного розриву.

Функцію $f(x)$ в можна довизначити (зробити неперервною) так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0; \\ 1, x = 0. \end{cases}$$

2) Якщо в точці x_0 хоч одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності або не існує, то кажуть, що $f(x)$ в точці x_0 має нескінченний розрив (розрив II роду), а саму точку x_0 називають *точкою розриву II роду* (точкою нескінченного розриву).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{1}{x-2}$.

«Підозрілою» на розрив тут є точка $x_0=2$ (у ній знаменник перетворюється в 0). Знайдемо односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x\to 2_-}\frac{1}{x-2}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty .$$

Таким чином, $x_0=2$ є точкою розриву II роду.

5. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано функцію $y=f(x)$, яка є неперервною на ньому.

(Цей факт надалі записуватимемо так: $f(x)\in C_{[a;b]}$ – $f(x)$ належить до класу неперервних на $[a;b]$ функцій)

Справедливі наступні теореми (властивості функцій, неперервних на відрізку).

Теорема (перша теорема Больцано-Коші). Якщо $f(x)\in C_{[a;b]}$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка *c* відрізка $[a;b]$, в якій $f(x)$ перетворюється в нуль:

$$\exists c\in(a;b):\ f(c)=0.$$

Доведення.

Нехай (для визначеності) $f(a)<0,\quad f(b)>0$.

При доведенні використаємо принцип вкладених відрізків та теорему про вкладені проміжки (лекція №2).

Поділимо $[a;b]$ навпіл точкою b_1 і знайдемо $f(b_1)$. Якщо $f(b_1)=0$, то $c=b_1$ і теорему доведено.

Якщо $f(b_1)\neq 0$, то можливі два випадки. Нехай, наприклад, $f(b_1)>0$.

Тоді перепозначимо $a_1=a$ і розглянемо відрізок $[a_1;b_1]$ (на його кінцях $f(x)$ набуває значень різних знаків). Поділимо його навпіл точкою a_2. Якщо $f(a_2)=0$, то $c=a_2$ і теорему доведено.

Якщо ж $f(a_2)\neq 0$, то нехай $f(a_2)<0$. П

Позначимо $b_2=b_1$ і розглянемо відрізок $[a_2;b_2]$, на кінцях якого $f(x)$ набуває значень різних знаків.

Поділимо $[a_2;b_2]$ точкою a_3 навпіл і т.д.

Продовживши цей процес необмежено, одержимо систему вкладених відрізків

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset...\supset[a_n;b_n]\supset...,$$

причому довжина *n*-го відрізка $d_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Згідно принципу вкладених відрізків, побудована система міститиме принаймні одну точку, що належить кожному з відрізків системи. Позначимо цю точку c і покажемо, що $f(c)=0$.

Для послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ лівих і правих кінців виконуються умови теореми про вкладені проміжки ($\uparrow\{a_n\}<\{b_n\}\downarrow$ і $b_n-a_n\to 0$ при $n\to\infty$). Тоді такі послідовності мають спільну границю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Згідно побудови, всі $f(a_n) < 0$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c) \le 0.$$

Аналогічно:

$$f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c) \ge 0.$$

Отримали, що одночасно $f(c) \le 0$ і $f(c) \ge 0$. Таке можливо лише тоді, коли $f(c) = 0$. ■

Доведену теорему ще також називають *теоремою про нуль функції* і застосовують при наближеному розв'язуванні рівнянь.

Теорема (друга теорема Больцано-Коші). Якщо $f(x) \in C_{[a;b]}$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) \ne f(b)$, то яким би не було число C таке, що $f(a) < C < f(b)$, знайдеться принаймні одна внутрішня точка c відрізка $[a;b]$, в якій $f(c) = C$:

Доведення.

Введемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - C$.

Тоді $\varphi(x)$ задовольняє усі вимоги першої теореми Больцано-Коші. Справді:

$\varphi(x) = f(x) - C$ – неперервна на $[a;b]$ як різниця двох неперервних функцій;

$$\varphi(a) = f(a) - C < 0;$$

$$\varphi(b) = f(b) - C > 0.$$

Тому $\exists c \in (a;b): \varphi(c) = f(c) - C = 0$, звідки $f(c) = C$. ■

Цю теорему ще називають *теоремою про проміжне значення* функції.

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ – неперервна на проміжку *X*, то її значення, що вона приймає при $x \in X$, суцільно заповнюють деякий проміжок.

Теорема (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на ньому, тобто

$$\exists m, M : m \le f(x) \le M.$$

Доведення (проведемо для випадку обмеженості зверху).

Припустимо, міркуючи від супротивного, що $f(x)$ на $[a;b]$ необмежена, тобто,

$$\forall n \in N \ \exists x_0 \in [a;b]: f(x_0) > n.$$

Тоді, за теоремою Больцано-Вейєрштрасса із будь-якої обмеженої на $[a;b]$ послідовності $\{x_n\}$ можна виділити збіжну до x_0 підпослідовність $\{x_{n_k}\}$.

В силу неперервності $f(x)$ в точці x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_{n_k})\}$ повинна збігатися до скінченного числа $f(x_0)$. А у нас, за припущенням, $f(x_0) \to \infty$.

Отримане протиріччя і доводить теорему. ■

Теорема (ІІ теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона набуває на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень.

Доведення (проведемо для найбільшого значення).

Очевидно, що якщо $f(x)$ – монотонна на $[a;b]$, то свого найбільшого і найменшого значень вона набуває на кінцях відрізка.

Нехай $f(x)$ не є монотонною.

Позначимо: $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ (згідно попередньої теореми це число буде скінченним, бо функція обмежена).

Припустимо, міркуючи від супротивного, що точна верхня межа не досягається, тобто $\forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x) < M$.

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Оскільки $f(x) < M$, то $M - f(x) > 0$, а, отже, $\varphi(x)$ – неперервна на $[a;b]$. Тому, згідно І теореми Вейєрштрасса, вона буде на $[a;b]$ обмеженою зверху, тобто $\exists \mu : \varphi(x) < \mu$, причому $\mu > 0$ (бо $M - f(x) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$). Маємо:

$$\frac{1}{M - f(x)} < \mu \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{\mu}.$$

Очевидно, що $M - \dfrac{1}{\mu} < M$, і остання нерівність суперечить тому, що M – точна верхня грань. ■

6. Коливання функції. Поняття про рівномірну неперервність.

Нехай дано функцію $f(x), x \in X$ і m та M – точна нижня та точна верхня грані множини значень функції. Тоді різницю $\omega = M - m$ називають коливанням функції на множині *X*.

Якщо $x', x'' \in X$, то $\omega = \sup\{|f(x') - f(x'')|\}$.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна в точці $x_0 \in X$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Виникає питання: чи можна по заданому ε знайти таке δ, яке годилося б для будь-яких $x', x'' \in X$?

Означення: функція $f(x)$ називається рівномірно неперервною на проміжку *X*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема (Кантора). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона рівномірно неперервна на ньому.

Наслідок з теореми Кантора: якщо $f(x) \in C_{[a;b]}$, то по заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо $[a;b]$ розбити на частини з довжиною, меншою за δ, то коливання функції на кожному з них будуть меншими за ε.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ – визначена, монотонна в строгому розумінні і неперервна на деякому проміжку *X*, то на відповідному проміжку *Y* існує обернена до неї функція, яка буде також неперервною і відповідно монотонною.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Неперервність функції в точці (різні означення). Неперервність суми, добутку та частки функцій.

2. Граничний перехід під знаком неперервної функції. Неперервність складеної функції.

3. Одностороння неперервність. Точки розриву та їх класифікація.

4. Обмеженість, найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку (перша та друга теореми Вейєрштраса).

5. Теорема про нуль та проміжне значення неперервної функції на відрізку (перша і друга теореми Больцано-Коші).

6. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора. Теорема про існування та неперервність оберненої функції.

Лекція №5. Похідна та диференціал функції. Правила диференціювання

План

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.

2. Означення похідної. Її геометричний і фізичний зміст.

3. Похідні основних елементарних функцій. Похідна складеної і оберненої функцій. Похідна функції, заданої параметрично. Похідна неявної функції. Правила диференціювання.

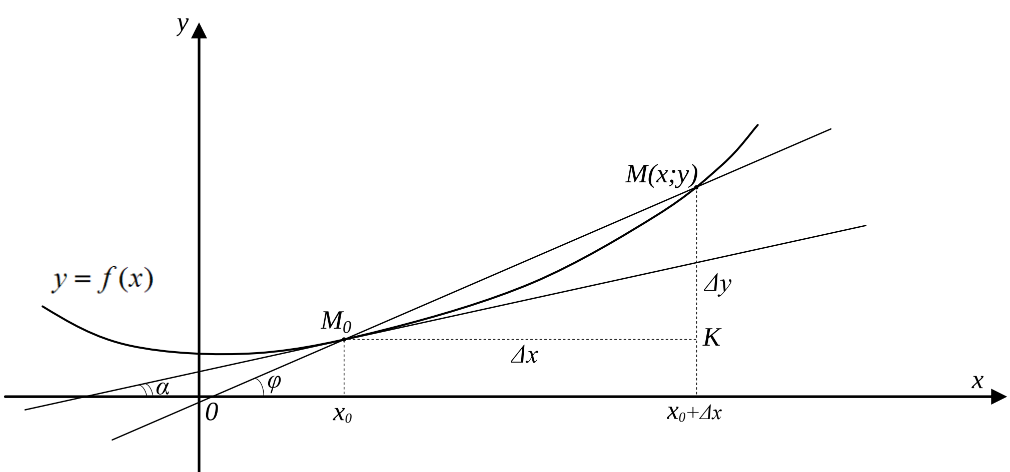
4. Диференціал функції. Диференційованість.

Короткий конспект лекції

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.

І. Задача про проведення дотичної до кривої в даній точці.

Нехай дано криву $y = f(x)$ і у точці $M_0(x_0, y_0)$, що належить цій кривій, слід провести (знайти рівняння) дотичну до кривої.



Означення: дотичною до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називають граничне положення січної M_0M (де *M* – довільна точка кривої) при умові, що $M \to M_0$, залишаючись на кривій.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (як відомо з аналітичної геометрії) має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{, де } k = tg\alpha \ \ (\alpha \neq \frac{\pi}{2}).$$

Згідно означення дотичної, кутовий коефіцієнт дотичної k_∂ буде дорівнювати границі кутового коефіцієнта січної k_c при $M \to M_0$:

$$k_\partial = \lim_{M \to M_0} k_c .$$

Тоді маємо

$$k_\partial = \lim_{M \to M_0} k_c = \lim_{M \to M_0} tg\varphi = \lim_{M \to M_0} \frac{MK}{M_0K} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Або

$$k_\partial = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

II. Задача про миттєву швидкість.

Тіло рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$. Знайдемо швидкість тіла в даний момент часу (миттєву швидкість).

Зафіксуємо деякий момент часу t_0. Через деякий час Δt тіло пройде шлях $S(t_0 + \Delta t)$.

Середньою швидкістю v_c руху за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ називають відношення приросту шляху до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Чим менший проміжок часу Δt, тим точніше середня швидкість відображає швидкість руху тіла у даний момент часу. Тому природно покласти

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Існують і інші задачі, що приводять до відшукання границь такого типу (про густину неоднорідного стержня, про швидкість хімічної реакції та інші).

2. Означення похідної. Її геометричний і фізичний зміст.

Нехай дано функцію $y = f(x)$, $x \in X$ і нехай $x_0 \in X$.

1) Надамо x_0 деякого приросту Δx так, щоб $x_0 + \Delta x \in X$.

2) Знайдемо відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3) Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Означення: границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що останній прямує до нуля, називають похідною функції $f(x)$ у точці x_0, і позначають

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Використовують також позначення $y'(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}, \dfrac{dy(x_0)}{dx}$.

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

Функцію, що має похідну в даній точці, називають *диференційованою* в цій точці.

Якщо функція має похідну в кожній точці проміжку, то кажуть, що вона диференційована на проміжку, і позначають: $y', f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, y'_x$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ в даній точці x_0 – це кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в даній точці.

Виходячи з цього, рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 записують у виді:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормаллю до кривої в даній точці називають пряму, що проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної у цій точці.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механічний зміст похідної: похідна від пройденого шляху по часу – це швидкість в даний момент часу.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий процес, то її похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу.

3. Похідні основних елементарних функцій. Похідна складеної і оберненої функцій. Похідна функції, заданої параметрично. Похідна неявної функції. Правила диференціювання.

Знайдемо похідні основних елементарних функцій.

1) $y = c = const$. $\quad y' = 0.$

Доведення.

Надамо x приросту Δx. Знайдемо $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

2) $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$. $\qquad y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Доведення.

Надамо x приросту Δx. Знайдемо $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{\alpha} -$

$- x^{\alpha}$.

Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha - 1}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha - 1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

(Тут ми скористалися однією із границь, пов’язаних з неперервністю, що розглядалися у лекції №4, а саме: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{(1 + \alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu$. В нашому випадку $\alpha = \dfrac{\Delta x}{x}$, $\mu = \alpha$).

3) $y = a^{x}$. $\qquad y' = a^{x} \ln a$.

Доведення.

$x + \Delta x$;

$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^{x}$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

(Тут ми скористалися однією із границь, пов'язаних з неперервністю, що розглядалися у лекції №4, а саме: $\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a$. В нашому випадку $\alpha = \Delta x$).

4) $y = \log_a x$. $\qquad y' = \frac{1}{x \ln a}$.

$y = \ln x$. $\qquad y' = \frac{1}{x}$.

5) $y = \sin x$. $\qquad y' = \cos x.$

$x + \Delta x$;

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos \lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Тут ми використали відому формулу тригонометрії «різницю синусів»: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$. Наступна похідна доводиться аналогічним чином (зробіть це самостійно).

6) $y=\cos x.$ $\qquad y'=-\sin x.$

7) $y=tgx.$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

8) $y=ctgx.$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9) $y=\arcsin x.$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10) $y=\arccos x.$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11) $y=arctg\ x.$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

12) $y=arcctg\ x.$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

Похідні 4) та 7)-12) доведемо пізніше іншими способами (не за означенням похідної).

Похідна складеної функції

Нехай дано функцію $u=\varphi(x), x\in X$ і функцію $y=f(u), u\in U$.

Теорема. Якщо $u=\varphi(x)$ має похідну в точці *x*, а $y=f(u)$ має похідну у відповідній точці *u*, то і складена функція $y=f(\varphi(x))$ має похідну в точці *x*, і вона шукається наступним чином:

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x = f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(Похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції, помноженій на похідну внутрішньої).

Цей самий факт ще записують у виді $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ або $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Наприклад,

1) якщо $y = tg^5 x$, то

$$y' = \left((tgx)^5\right)' = 5tg^4 x \cdot (tgx)' = 5tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\sin^4 x}{\cos^6 x};$$

2) якщо $y = tgx^5$, то

$$y' = \left(tgx^5\right)' = \frac{1}{\cos^2 x^5} \cdot \left(x^5\right)' = \frac{5x^4}{\cos^2 x^5};$$

3) якщо $y = \sqrt{\ln x}$, то

$$y' = \left(\sqrt{\ln x}\right)' = \left((\ln x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Похідна оберненої функції

Нехай задано функцію $y = f(x), x \in X$, $\exists f'(x) \neq 0$ та існує обернена до неї $x = f^{-1}(y)$.

Тоді похідна оберненої функції шукається як

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Наприклад,

4) $y = \log_a x$.

Оберненою до неї є $x = a^y$. Скориставшись формулою для знаходження похідної від оберненої функції, матимемо

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

9) $y = \arcsin x$.

Оберненою до неї є $x = \sin y$. Тоді

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функцію *y* від *x* можна задавати не лише явно, у виді $y = f(x)$, а й, наприклад, за допомогою параметра.

Розглянемо деяку змінну (параметр) *t*, яка змінюється в межах від α до β. Нехай на відрізку $[\alpha; \beta]$ задано функції $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$.

Якщо на відрізку $[\alpha; \beta]$ існує обернена функція $t = \varphi^{-1}(x)$, то на ньому також існуватиме функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, яку і називають параметрично заданою за допомогою функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Якщо у такому випадку існує $\varphi'(t) \neq 0$, то існує похідна $y'(x)$, яка знаходиться за формулою

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Справді, за правилом знаходження похідної від складеної функції та враховуючи спосіб знаходження похідної від оберненої функції, маємо:

$$y'(x) = \left(\psi(\varphi^{-1}(x))\right)' = \psi'(t)\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Похідна неявної функції

Функцію y від x можна задавати також і *неявно*, а саме як розв'язок рівняння

$$F(x, y) = 0.$$

Кажуть, що рівняння $F(x, y) = 0$ на множині X задає функцію y від x, якщо кожному $x \in X$ відповідає єдине y таке, що пара (x, y) є розв'язком цього рівняння.

В такому випадку, щоб знайти похідну $y'(x)$, потрібно:

1) знайти похідну по x від обох частин рівняння $F(x, y) = 0$, дивлячись на y як на функцію від x;

2) виразити $y'(x)$ із отриманого рівняння.

Правила диференціювання

Нехай дано функції $u(x)$ та $v(x)$, які диференційовані в точці x. Тоді диференційованими в точці x будуть також їх алгебраїчна сума, добуток та частка (при $v(x) \neq 0$), причому:

Теорема 1. Похідна суми дорівнює сумі похідних:

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x).$$

Теорема 2. Похідна добутку дорівнює похідній першого множника, помноженій на другий, плюс перший множник, помножений на похідну другого:

$$\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv'.$$

Зокрема, якщо одна із функцій – стала, то маємо

$$\left(C\cdot v\right)'=Cv'$$

(сталий множник можна виносити за знак похідної).

Теорема 3. Похідна частки дорівнює

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (v\neq 0)$$

Доведемо, наприклад, теорему 3 (скориставшись означенням похідної):

Надамо x приросту Δx. При цьому функції u та v теж набудуть деяких приростів Δu та Δv.

Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Тоді похідна

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(v+\Delta v)}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Користуючись теоремою 3, зокрема можна довести табличні похідні

7) $y=tgx$.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

7) $y = ctgx$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' == \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. Диференціал функції. Диференційованість.

Нехай дано функцію $y = f(x), x \in X$ і нехай ця функція є неперервною в точці $x_0 \in X$. Як відомо, приріст функції

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна, то нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Важливу роль в прирості відіграє головна його частина. Виникає питання: чи існує для Δy така лінійна відносно Δx нескінченно мала величина, що різниця між ними (тобто між Δy і цією н.м.) буде нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δx, тобто чи можна Δy подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + O(\Delta x),$$

де $A = const,\ O(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δx?

Означення: функція $y = f(x), x \in X$ називається *диференційованою* в точці $x_0 \in X$, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + O(\Delta x). \quad (1)$$

(Рівність (1) називають *умовою диференційованості*)

Означення: головна лінійна відносно Δx частина приросту функції називається її *диференціалом* і позначається $dy(x_0)$.

Отже, $dy = A\Delta x.$

Зв'язок між диференціалом і похідною

Теорема (критерій диференційованості). Для того, щоб функція $y = f(x)$ в точці x_0 була диференційованою, необхідно і достатньо, щоб для неї в цій точці існувала скінченна похідна. При цьому

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x).$$

Доведення.

<u>Необхідність</u>. Дано: $y = f(x)$ – диференційована в точці x_0. Довести: $\exists f'(x_0)$.

Оскільки $y = f(x)$ – диференційована в точці x_0, то має місце умова диференційованості

$$\Delta y = A\Delta x + O(\Delta x). \tag{1}$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

та перейдемо в отриманій рівності до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right).$$

Границя правої частини існує і дорівнює *A* ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, оскільки $O(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δx). Тоді існуватиме і границя лівої частини (і ця границя за означенням є похідною в точці x_0).

Таким чином, ми довели, що $\exists f'(x_0) = A$ (причому *A* в умові диференційованості є скінченним числом). Отже, необхідність доведено.

На основі цього доведення умову диференційованості (1) можна переписати у новій формі:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x). \tag{2}$$

<u>Достатність</u>. Дано: $\exists f'(x_0)$ – скінченне число. Довести: $y = f(x)$ – диференційована в точці x_0.

Те, що $\exists f'(x_0)$ означає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$ Скориставшись зв’язком між функцією, її границею та нескінченно малою, матимемо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Звідси

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

$\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$, тому $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δx (тобто $O(\Delta x)$). Отримали умову диференційованості (роль *A* грає $f'(x_0)$). ■

Вище ми встановили, що диференціал функції $dy = A\Delta x.$ Доводячи попередню теорему, також було з’ясовано, що $A = f'(x_0)$. Таким чином, диференціал функції в точці *x*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Надалі приріст незалежної змінної Δx будемо позначати dx. Тоді диференціал

$$dy = f'(x)dx.$$

Тепер на основі таблиці похідних основних елементарних функцій можемо легко записати таблицю диференціалів.

Справедливими також будуть аналогічні теореми про диференціал суми, добутку та частки функцій:

1) $d(f(x) \pm g(x)) = d(f(x)) \pm d(g(x) = f'(x)dx \pm g'(x)dx;$

2) $d(f(x) \cdot g(x)) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x)) = f'(x)g(x)dx +$

$+ f(x)g'(x)dx;$

3) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)} =$

$$= \frac{f'(x)g(x)dx - f(x)g'(x)dx}{g^2(x)}.$$

Інваріантність форми диференціала

Нехай $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ такі, що існує складена функція $y = f(\varphi(x))$ і нехай існують похідні u'_x та y'_u.

Тоді існує похідна складеної функції $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Знайдемо тепер dy для $y = f(u)$:

$dy = f'(u)du.$

Для складеної функції $y = f(\varphi(x))$

$$dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx = y'_u du\,.$$

Бачимо, що в обох випадках dy має одну і ту ж форму. Цю властивість і називають властивістю *інваріантності форми*.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Нехай дано $y = f(x), x \in X$, яка диференційована в точці $x_0 \in X$. Тоді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x),$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x).$$

Якщо Δx – досить мале, то $O(\Delta x)$ – також досить мале. Тому при малих Δx приріст функції наближено дорівнює її диференціалу:

$$\Delta y \approx dy,$$

звідки

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3)$$

Формулу (3) і використовують для наближених обчислень.

Зв'язок між диференційованістю та неперервністю

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ – диференційована в точці x_0, то вона неперервна у цій точці.

Доведення

Оскільки $f(x)$ – диференційована в точці x_0, то має місце умова диференційованості:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x).$$

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді, очевидно, права частина прямує до нуля. А, значить, і ліва частина теж прямує до нуля.

Отримали неперервність на мові приростів: $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. ■

Слід зауважити, що обернене твердження не завжди справедливе, тобто із неперервності не завжди випливає диференційованість.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.

2. Означення похідної, її геометричний та механічний зміст. Рівняння дотичної і нормалі до кривої.

3. Диференційовані функції. Неперервність диференційованої функції. Диференціал функції та його зв'язок з похідною, геометричний зміст.

4. Похідна суми, добутку та частки функцій.

5. Диференціювання складеної функції. Інваріантність форми диференціала.

6. Похідна оберненої функції. Похідна неявно заданої функції. Похідна параметрично заданої функції. Логарифмічне диференціювання.

7. Похідні основних елементарних функцій.

8. Параметричне задання функцій та їх диференціювання.

Лекція №6. Похідні та диференціали вищих порядків. Основні теореми диференціального числення

План

1. Означення похідної та диференціала вищих порядків. Формула Лейбніца.

2. Теорема Ферма.

3. Теорема Ролля.

4. Теорема Лагранжа.

5. Теорема Коші.

Короткий конспект лекції

1. Означення похідної та диференціала вищих порядків. Формула Лейбніца.

Нехай дано функцію $y = f(x),\ x \in X$ і нехай існує $f'(x)$, яку надалі називатимемо першою похідною (похідною першого порядку).

Якщо існує похідна від першої похідної, то її називають другою похідною (похідною другого порядку) і позначають

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Означення: похідну від похідної (n-1)-го порядку називають *похідною n-го порядку* (n-ною похідною)

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Також використовують позначення $y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf}{dx^n}$.

Приклад. $y = \sin x$. Знайти $y^{(n)}$.

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \left(y'\right)' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = \left(y''\right)' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(4)} = \left(y'''\right)' = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

…

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Зауважимо, що можна також шукати похідні вищих порядків для функцій, заданих параметрично та неявно.

Зокрема, якщо функцію задано параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \text{де} \quad t\in[\alpha;\beta],$$

то її першу похідну (як ми встановили в лекції №5) шукають як

$$y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Формулу для другої похідної можна отримати, виконавши наступні перетворення:

$$y''(x)=\left(y'(x)\right)'_x=\frac{d}{dx}\left(y'(x)\right)=\frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t}.$$

Наприклад, знайдемо другу похідну $y''(x)$ функції $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^3. \end{cases}$

Скористаємося формулою

$$y''(x)=\frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t}.$$

Знайдемо спочатку $y'(x)$ за формулою $y'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t=\left(\ln t\right)'=\frac{1}{t};$$

$$y'_t = \left(t^3\right)' = 3t^2;$$

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3.$$

Тоді

$$y''(x) = \frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(3t^3\right)'}{\frac{1}{t}} = 9t^2 \cdot t = 9t^3.$$

Диференціали вищих порядків

Нехай дано функцію $y = f(x)$, $x \in X$, яка диференційована на проміжку *X*. Тоді існує її диференціал $dy = f'(x)dx$, який надалі називатимемо її *першим диференціалом* (диференціалом першого порядку).

Означення: диференціалом n-го порядку (n-ним диференціалом) називається диференціал від диференціала (n-1)-го порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right).$$

Розглянемо два випадки.

1) Нехай *x* – незалежна змінна. Тоді

$$dy = f'(x)dx;$$

$$d^2y = d(dy) = \left(f'(x)dx\right)' dx = \left(f''(x)dx + f'(x)\cdot\left(dx\right)'\right)dx =$$

$$= \left(f''(x)dx + 0\right)dx = f''(x)dx^2.$$

Аналогічно

$$d^3y = f'''(x)dx^3;$$

…

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

2) Нехай тепер x теж є функцією, тобто $x = \varphi(t)$. Тоді

$$dy = f'(x)dx;$$

$$d^2 y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)dx \cdot dx + f'(x)d^2 x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x.$$

Як бачимо, у випадку залежної змінної, форма диференціалів вищих порядків змінюється. Так, навіть другий диференціал не володіє властивістю інваріантності форми (а диференціали вищих порядків – і поготів).

Формула Лейбніца

Формула Лейбніца вказує спосіб знаходження n-ної похідної від добутку двох функцій.

Нехай $y = u(x)v(x)$. Тоді

$$y' = u'v + uv';$$

$$y'' = (u'v + uv')' = (u'v)' + (uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' =$$

$$= u''v + 2u'v' + uv''.$$

Аналогічно доводиться, що

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$

…

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}, \tag{1}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість комбінацій з n по k.

(1) і є формулою Лейбніца.

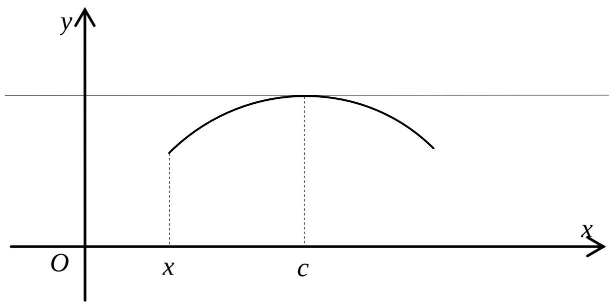
2. Теорема Ферма.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ – визначена на деякому проміжку *X*, в деякій внутрішній точці *c* цього проміжку набуває свого найбільшого (чи найменшого) значень і у цій точці існує похідна, то ця похідна необхідно дорівнює нулю:

$$f'(c) = 0.$$

Доведення.

Нехай, наприклад, $c \in X$ – точка, у якій $f(x)$ набуває свого найбільшого значення.



Розглянемо випадки.

1) Нехай $x < c$. Тоді $f(x) \le f(c)$ і

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0. \qquad (2)$$

2) Нехай $x > c$. Тоді $f(x) \le f(c)$ і

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0. \qquad (3)$$

З (2) і (3) очевидно слідує, що $f'(c) = 0.$ ■

Випадок, коли у точці *c* $f(x)$ набуває свого найменшого значення доводиться аналогічно.

Геометрично теорема Ферма означає, що в точці $x = c$ існує дотична до графіка функції, яка паралельна осі *Ox*.

3. Теорема Ролля.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$

1) визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційована в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізка набуває рівних значень: $f(a) = f(b)$.

Тоді між *a* і *b* існує принаймні одна точка *c*, в якій похідна дорівнює нулю:

$$f'(c) = 0.$$

Доведення.

За II теоремою Вейєрштрасса $f(x)$ на $[a;b]$ набуває свого найбільшого і найменшого значень. Позначимо їх *M* і *m* відповідно.

Якщо $M = m$, то $f(x) = m = const$. Тоді $\forall c \in [a;b] \Rightarrow f'(c) = m' = 0$ і теорему доведено.

Інакше $m < M$. Нехай найбільшого значення $f(x)$ набуває в точці $c_1 \in (a;b)$, а найменшого – в точці $c_2 \in (a;b)$. Тоді, на підставі теореми Ферма, $f'(c_1) = 0$ і $f'(c_2) = 0$.■

4. Теорема Лагранжа.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$

1) визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційована в інтервалі $(a;b)$.

Тоді між *a* і *b* знайдеться така точка *c*, що виконуватиметься рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Доведення.

Якщо $f(a)=f(b)$, то маємо теорему Ролля і $\exists c\in(a;b)\Rightarrow f'(c)=0$.

Нехай $f(a)\neq f(b)$. Введемо в розгляд допоміжну функцію:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

$F(x)$ задовольняє усім умовам теореми Ролля. Справді,

1) $F(x)$ неперервна як композиція неперервних функцій;

2) існує $F'(x)=f'(x)-0-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3) $F(a)=F(b)=0$.

Отже, знайдеться така точка $c\in(a;b)$, що $F'(c)=0$. Тоді

$$f'(c)-0-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

звідки

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\blacksquare$$

Теорему Лагранжа називають ще теоремою про скінченні прирости.

Формулу Лагранжа використовують у виді

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Ця теорема (і формула) має місце для будь-якого відрізка $\left[x;x+\Delta x\right]\subset\left[a;b\right]$. Тоді формула Лагранжа набуде виду

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x$$

або

$$\Delta y=f'(c)\Delta x.$$

Тут $x<c<x+\Delta x$. Інакше кажучи, $c=x+\theta\Delta x$, де $0<\theta<1$.

Тоді формула Лагранжа перепишеться у вигляді

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

5. Теорема Коші.

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – визначені і неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані в інтервалі $(a;b)$ і $\varphi'(x)\neq 0$, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться така точка *c*, що виконуватиметься рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення.

Введемо в розгляд допоміжну функцію:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left(\varphi(x)-\varphi(a)\right).$$

$F(x)$ задовольняє усім умовам теореми Ролля. Справді,

1) $F(x)$ неперервна як композиція неперервних функцій;

2) існує $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$;

3) $F(a)=F(b)=0$.

Отже, знайдеться така точка $c\in(a;b)$, що $F'(c)=0$. Тоді

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0,$$

звідки

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.\blacksquare$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Похідні та диференціали вищих порядків. Друга похідна параметрично заданої функції.
2. Неінваріантність форми диференціалів вищих порядків.
3. Теореми Ферма і Ролля, їх геометричний зміст.
4. Теорема Лагранжа, її геометричний зміст.
5. Теорема Коші.

Лекція №7. Формула Тейлора. Правила Лопіталя

План

1. Формули Тейлора та Маклорена для многочлена.
2. Формули Тейлора та Маклорена для довільної функції.
3. Формули Маклорена для деяких функцій.
4. Логарифмічне диференціювання.
5. Правила Лопіталя.

Короткий конспект лекції

1. Формули Тейлора та Маклорена для многочлена.

Нехай дано деякий многочлен *n*-го степеня відносно *x*:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

і потрібно розкласти цей многочлен за степенями $x - x_0$, де x_0 – деяка точка, тобто $P_n(x)$ слід подати у вигляді

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n. \qquad (1)$$

Знайдемо

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1};$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + ... + (n-1)nA_n(x - x_0)^{n-2};$$

$$\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)nA_n.$$

Щоб визначити коефіцієнти $A_0, A_1, ..., A_n$, підставимо в усі попередні рівності x_0 замість x. Отримаємо:

$$A_0 = P_n(x_0),$$

$$A_1 = P_n'(x_0),$$

$$A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!},$$

$$\ldots$$

$$A_0 = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Підставивши знайдені значення в (1), матимемо:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (2)$$

(2) і є *формулою Тейлора* для многочлена.

Якщо $x_0 = 0$, то (2) набуває вигляду

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3)$$

(3) називають *формулою Маклорена* для многочлена. Таким чином, формула Маклорена – це формула Тейлора, записана в околі точки 0.

2. Формули Тейлора та Маклорена для довільної функції.

Нехай тепер дано $y = f(x)$, $x \in X$ і в точці $x_0 \in X$ існують похідні цієї функції до *n*-го порядку та існує *(n+1)*-ша похідна в околі точки x_0.

Тоді многочлен Тейлора для цієї функції матиме вигляд

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Таким чином,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

звідки

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Залишковий член $R_n(x)$ може бути записаний у різній формі: Коші, Пеано та ін.. Ми, найчастіше, використовуватимемо залишковий член у формі Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Отже, довільну функцію, що задовольняє вказаним вище умовам можна подати у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (4)$$

де $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

(4) називають *формулою Тейлора* для довільної функції.

При $x_0 = 0$ в (4) отримаємо

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (5)$$

де $0 < \theta < 1.$

(5) – *формула Малорена* для довільної функції.

3. Формули Маклорена для деяких функцій.

1) $f(x) = e^x.$

Знайдемо $f(0) = e^0 = 1$ та похідні до *n*-го порядку включно в точці 0:

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x, \qquad f'(0) = e^0 = 1,$$

$$f''(x) = \left(e^x\right)' = e^x, \qquad f''(0) = e^0 = 1,$$

…

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1.$$

Тоді залишковий член у формі Лагранжа для e^x матиме вигляд

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Підставивши отримані значення у (5), отримаємо формулу Маклорена для функції e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2) $f(x) = \sin x.$

Знайдемо $f(0) = \sin 0 = 0$ та похідні до *n*-го порядку включно в точці 0:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 1), \qquad f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2), \qquad f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3),$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4), \qquad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0,$$

…

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot n), \qquad f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Тоді залишковий член у формі Лагранжа для $\sin x$ матиме вигляд

$$R_n(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{\pi n}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Підставивши отримані значення у (5), отримаємо формулу Маклорена для функції $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \frac{\pi n}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

3) $f(x) = \cos x.$

Формулу Тейлора для функції $\cos x$ можна отримати точно так само, як і для $\sin x$.

Однак можна вчинити простіше. Запишемо формулу Тейлора для синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n.$$

Знайдемо тепер похідну лівої і правої частин:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \overline{R_n}.$$

4) $f(x) = \ln(1+x).$

Знайдемо $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$ та похідні до *n*-го порядку включно в точці 0:

$$f'(x) = \left(\ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \qquad f^{(4)}(0) = -2\cdot 3,$$

…

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Тоді залишковий член у формі Лагранжа для $\ln(1+x)$ матиме вигляд

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}.$$

Підставивши отримані значення у (5), отримаємо формулу Маклорена для функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}.$$

4. Логарифмічне диференціювання.

Нехай потрібно знайти похідну від степенево-показникової функції :

$$y = u^{v}, \tag{6}$$

де $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ і існують $f'(x)$ та $\varphi'(x)$.

Тоді зручно чинити так: логарифмуємо обидві частини (6)

$$\ln y = \ln u^{v};$$

$$\ln y = v \ln u$$

і диференціюємо ліву і праву частини по х

$$(\ln y)' = (v \ln u)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

звідки

$$y' = y\left(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right)$$

або

$$y' = u^{v}\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right).$$

5. Правила Лопіталя.

Правила Лопіталя – це теореми, які демонструють можливість застосування похідної для відшукання границь.

Теорема (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови:

1) $x \in (a;b]$ – вони визначені на півінтервалі і $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$;

2) $\exists f'(x), \varphi'(x)$ – вони диференційовані на $(a;b]$ і $\varphi'(x) \neq 0$;

3) існує скінченна границя відношення похідних: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.$

Тоді існує скінченна границя відношення самих функцій, яка теж дорівнює *A*:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$, тобто

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{7}$$

(7) – перше правило Лопіталя.

Доведення.

Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ – диференційовані на $(a;b]$, то вони неперервні на ньому. Довизначимо їх так, щоб вони були неперервними на $[a;b]$, а саме покладемо

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \varphi(a)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Отже, для них має місце теорема Коші про середнє значення на відрізку $[a;x]\subset[a;b]$. Маємо:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\ \text{ де } a<c<x.$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Перейшовши до границі при $x\to a$ (при цьому $c\to a$), отримуємо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=A. \blacksquare$$

Наприклад,

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1;$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Теорема (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови:

1) $x\in(a;b]$ – вони визначені на півінтервалі і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$;

2) $\exists f'(x),\varphi'(x)$ – вони диференційовані на $(a;b]$ і $\varphi'(x)\neq 0$;

3) існує скінченна границя відношення похідних: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.$

Тоді існує скінченна границя відношення самих функцій, яка теж дорівнює *A*:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$, тобто

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

(8) – друге правило Лопіталя.

Доведення.

Із пункту 3) умови теореми маємо:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon,$$

тобто

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}<A+\varepsilon. \tag{9}$$

Нехай тепер x_0 і x – довільні точки інтервалу $(a;a+\delta)$. Тоді на відрізку $[x_0;x]\subset(a;a+\delta)$ для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ має місце теорема Коші:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \text{ де } x_0<c<x.$$

Враховуючи (9), маємо:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}<A+\varepsilon$$

або

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)\left(1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right)}{\varphi(x)\left(1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)}<A+\varepsilon.$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $x\to a$, отримаємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A. \blacksquare$$

Зауважимо, що доведені теореми мають місце і при $x\to\infty$.

Наприклад,

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{0,01x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{\left(e^{0,01x}\right)'}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{0,01e^{0,01x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{\left(0,01e^{0,01x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(0,01)^2e^{0,01x}}=0.$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Формула Тейлора для многочлена.
2. Формула Тейлора для довільної функції.
3. Розкриття невизначеності виду “0/0”. Перше правило Лопіталя.
4. Розкриття невизначеності виду “∞/∞ ”. Друге правило Лопіталя.
5. Розкриття невизначеностей виду “0·∞”, “∞-∞”, “0^0”, “1^∞”, “∞·0”. Логарифмічне диференціювання.

Лекція №8. Екстремум функції

План

1. Умови сталості, зростання та спадання функції.

2. Точки екстремуму функції. Необхідна умова існування екстремуму в точці.

3. Достатні умови екстремуму. Перше правило дослідження на екстремум.

4. Друге правило дослідження на екстремум.

5. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку.

Короткий конспект лекції

1. Умови сталості, зростання та спадання функції.

Нехай дано функцію $y = f(x), x \in X$, яка диференційована на множині *X*.

Тоді на будь-якому відрізку $[x_1; x_2] \subset X$ до неї можна застосувати теорему Лагранжа про середнє значення: $\exists c \in (x_1; x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Розглянемо випадки:

1) нехай на $[x_1; x_2]$ функція $f(x) = C$ – стала. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = C - C = 0$ і, оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то рівність (1) матиме місце лише тоді, коли $f'(c) = 0$. Отримали умову сталості функції.

2) Нехай на $[x_1; x_2]$ функція $f(x)$ монотонно зростає. Тоді $f(x_2) - f(x_1) > 0$ і, оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то рівність (1) матиме місце лише тоді, коли і $f'(c) > 0$. Отримали умову зростання.

3) Нехай на $[x_1; x_2]$ функція $f(x)$ монотонно спадає. Тоді $f(x_2) - f(x_1) < 0$ і, оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то рівність (1) матиме місце

лише тоді, коли і $f'(c)<0$. Отримали умову спадання.

Як наслідок, можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема. Якщо функція $y=f(x), x\in X$ у деякій внутрішній точці $x_0\in X$ має похідну $f'(x_0)$ і ця похідна $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$), то функція в цій точці зростає (спадає).

2. Точки екстремуму функції. Необхідна умова існування екстремуму в точці.

Нехай дано функцію $y=f(x), x\in X, x_0\in X$, яка визначена в точці x_0.

Означення: точка x_0 називається *точкою максимуму* функції $f(x)$, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, тобто якщо

$$\exists\delta>0:\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\Rightarrow f(x)<f(x_0).$$

Означення: точка x_0 називається *точкою мінімуму* функції $f(x)$, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$, тобто якщо

$$\exists\delta>0:\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\Rightarrow f(x)>f(x_0).$$

Точки мінімуму і максимуму разом називають *точками екстремуму* функції (екстремальними точками), а значення функції в цих точках – *екстремумами* функції.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $y=f(x), x\in X$ у внутрішній точці $x_0\in X$ має екстремум і в цій точці існує похідна, то вона необхідно дорівнює нулю:

$$f'(x_0)=0.$$

Доведення (проведемо методом від супротивного).

Припустимо, що x_0 – екстремальна точка, похідна у цій точці існує, але $f'(x_0) \neq 0.$

Нехай, спочатку, $f'(x_0) > 0.$ Тоді, згідно пункту 1 лекції, функція $f(x)$ в цій точці зростає. А, отже, (в силу неперервності) вона зростає і у деякому ліво- та правосторонньому околі цієї точки. Іншими словами, точка x_0 не є екстремальною точкою. Прийшли до протиріччя.

Нехай тепер $f'(x_0) < 0.$ Аналогічними міркуваннями встановлюємо, що і у цьому випадку x_0 не є екстремальною точкою. ■

Точки, у яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Проте не в кожній стаціонарній точці маємо екстремум (адже теорема дає лише необхідну умову, але не достатню).

Екстремум також слід шукати в точках, у яких похідна не існую.

Стаціонарні точки та точки, у яких похідна не існує, називають *критичними точками* функції.

3. Достатні умови екстремуму. Перше правило дослідження на екстремум.

Нехай x_0 – критична точка функції $y = f(x)$, яка в цій точці неперервна. Нехай також існує такий окіл $O(x_0, \delta)$, в якому існує $f'(x)$ (за винятком, можливо, самої точки x_0). Тоді має місце теорема.

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо при переході x через точку x_0 перша похідна змінює знак, то в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум. Причому, якщо $f'(x)$ змінює знак з «+» на «-», то маємо максимум, а якщо з «-» на «+», то мінімум. Якщо ж при переході через x_0

перша похідна не змінює знак, то точка x_0 не є екстремальною.

Доведення.

Нехай у лівосторонньому околі точки x_0 $f'(x) > 0$, а у правосторонньому $f'(x) < 0$. Тоді в лівосторонньому околі функція зростає, а у правосторонньому – спадає. В обох випадках $f(x) < f(x_0)$. Згідно означення, x_0 – точка максимуму.

Для інших випадків міркування аналогічні. ■

Перше правило дослідження функції на екстремум

Щоб дослідити функцію $y = f(x)$ на екстремум, потрібно:

1) знайти критичні точки функції (точки, у яких перша похідна дорівнює нулю або не існує) та нанести їх на область визначення;

2) дослідити зміну знака першої похідної при переході *x* через кожну з критичних точок: якщо при цьому похідна змінює знак з «+» на «-» (з «-» на «+»), то відповідна точка є точкою максимуму (мінімуму) функції.

На практиці дослідження проводять за допомогою таблиці:

x	**(a;x₁)**	**x₁**	**(x₁;x₂)**	**x₂**	**(x₂;x₃)**	**x₃**	**(x₃;x₄)**	**…**	**(xₙ;b)**
y'	+	*0*	–	*?*	–	*0*	+		+
y	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↘	$f(x_3)$	↗		↗
		т. max		*екстремуму немає*		*т. min*			

Тут x_i – критичні точки.

4. Друге правило дослідження на екстремум.

Нехай дано функцію $y = f(x), x \in X$, $x_0 \in X$ – її стаціонарна точка і нехай існують $f^{(n)}(x_0)$ та $f^{(n+1)}(c)$, де $c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$.

Тоді для цієї функції можна записати формулу Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

звідки

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Пригадавши означення точки максимуму та точки мінімуму, робимо висновок, що екстремум існуватиме, якщо в околі точки x_0 різниця зліва зберігатиме знак (якщо $f(x) - f(x_0) < 0$, то матимемо максимум; якщо $f(x) - f(x_0) > 0$, то – мінімум).

Нехай перша із відмінних від нуля похідних в точці x_0 буде парного порядку, тобто $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ і $(n+1)$ – парне число. Тоді при ній буде множник $(x - x_0)$ в парному степені:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Таким чином, знак різниці $f(x) - f(x_0)$ зберігатиметься, і буде таким же, як і знак $f^{(n+1)}(c)$.

Якщо ж перша із відмінних від нуля похідних в точці x_0 буде непарного порядку, то знак різниці $f(x) - f(x_0)$ не зберігатиметься.

Друге правило дослідження функції на екстремум

Якщо у стаціонарній точці x_0 перша з відмінних від нуля похідних є похідною парного порядку, то x_0 є екстремальною точкою, а саме:

точкою максимуму, якщо ця похідна менша нуля;

точкою мінімуму, якщо ця похідна більша нуля.

Якщо ж у стаціонарній точці x_0 перша з відмінних від нуля похідних є похідною непарного порядку, то x_0 не є екстремальною точкою.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x^4$.

Знайдемо, спочатку, стаціонарні точки функції:

$$y' = \left(x^4\right)' = 4x^3.$$

$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ – стаціонарна точка.

Знайдемо першу із відмінних від нуля похідних у цій точці:

$$y''(x) = \left(4x^3\right)' = 12x^2, \qquad y''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0.$$

$$y'''(x) = \left(12x^2\right)' = 24x, \qquad y'''(0) = 0.$$

$$y^{(4)}(x) = \left(24x\right)' = 24, \qquad y^{(4)}(0) = 24 > 0.$$

Оскільки перша з відмінних від нуля похідних в точці 0 має парний порядок (4), то точка $x = 0$ є точкою екстремуму, і, так як $y^{(4)}(0) > 0$, то в точці $x = 0$ буде мінімум і

$$y_{\min} = y(0) = 0^4 = 0.$$

5. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку.

Нехай дано функцію $y = f(x) \in C_{[a;b]}$.

Згідно другої теореми Вейєрштрасса $f(x)$ набуває на $[a;b]$ свого найбільшого і найменшого значень.

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку, потрібно:

1) знайти критичні точки функції та вибрати ті з них, які належать даному відрізку;

2) обчислити значення функції у вибраних точках та на кінцях відрізку і порівняти їх.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{2-x}{x^2}$ на відрізку $[3;6]$.

1) Знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \left(\frac{2-x}{x^2}\right)' = \frac{(2-x)'x^2 - (2-x)\cdot\left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x(2-x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x - 2(2-x)}{x^3} = \frac{-x - 4 + 2x}{x^3} = \frac{x-4}{x^3};$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x^3} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$ – стаціонарна точка.

Крім того, y' не існує при $x = 0$. Тому критичними точками будуть $x = 0$ і $x = 4.$ Відрізку $[3;6]$ належить лише точка $x = 4.$

2) Знайдемо значення функції у вибраній точці та на кінцях відрізка:

$$y(4) = \frac{2-4}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8},$$

$$y(3) = \frac{2-3}{3^2} = -\frac{1}{9},$$

$$y(6)=\frac{2-6}{6^2}=-\frac{1}{9}.$$

Порівнявши їх, робимо висновок, що

$$y_{найм.}=y(4)=-\frac{1}{8}, \quad y_{найб.}=y(3)=y(6)=-\frac{1}{9}.$$

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Умови сталості, зростання та спадання функцій.
2. Максимум і мінімум функції в точці. Необхідні умови екстремуму.
3. Достатні умови екстремуму.
4. Сформулюйте перше правило дослідження функції на екстремум.
5. Сформулюйте друге правило дослідження функції на екстремум.
6. Як знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку?

Лекція №9. Опуклість і вгнутість кривої. Асимптоти графіка функції

План

1. Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину.
2. Спосіб знаходження інтервалів вгнутості та опуклості.
3. Асимптоти кривих.
4. Загальна схема дослідження функції.

Короткий конспект лекції

1. Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину.

Нехай криву на площині задано як графік функції $y=f(x), x\in X$ і існує $f'(x)$. Якщо $f(x)$ і $f'(x)$ – неперервні, то криву (і саму функцію $f(x)$) називають *гладкою*.

Означення: крива $y=f(x)$ називається *вгнутою (опуклою)* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для будь-якого x з цього околу $(x \neq x_0)$ всі точки кривої знаходяться над (під) дотичною до цієї кривої в точці M_0.

Означення: точка $M_0(x_0, y_0)$ називається *точкою перегину* кривої (графіка функції), якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх *x* із лівостороннього околу крива опукла (вгнута), а для всіх *x* із правостороннього околу крива вгнута (опукла).

Якщо крива вгнута (опукла) в кожній точці проміжку, то вона вгнута (опукла) на усьому проміжку.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Якщо криву задано як графік функції $y = f(x), x \in X, x_0 \in X$ і існує δ-окіл точки x_0 такий, що функція $f(x)$ при кожному *x* з околу має похідні до другого порядку включно і $f''(x)$ – неперервна, то якщо $f''(x_0) > 0$, то крива в точці x_0 вгнута, а якщо $f''(x_0) < 0$, то – опукла.

2. Спосіб знаходження інтервалів вгнутості та опуклості.

Виходячи з попередніх означень та теореми, можна сформулювати наступне правило дослідження функції на опуклість (вгнутість).

1) Знайти другу похідну функції, прирівняти її до нуля і, розв’язавши утворене рівняння, знайти точки, «підозрілі» на перегин. Вибрати ті з них, які належать області визначення.

2) Дослідити зміну знака другої похідної при переході через вибрані точки. Якщо при цьому y'' змінює знак, то x_0 є точкою перегину графіка функції; якщо ж y'' не змінює знак, то – ні.

3) Причому, якщо y'' на деякому проміжку зберігає знак «+», то крива на цьому проміжку є вгнутою; якщо ж y'' зберігає знак «-», то – опуклою.

На практиці дослідження проводять за допомогою таблиці:

x	$(a;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;x_3)$	x_3	$(x_3;x_4)$	…	$(x_n;b)$
y''	+	0	–	0	–	0	+		+
y	$\cup$	$f(x_1)$	$\cap$	$f(x_2)$	$\cap$	$f(x_3)$	$\cup$		$\cup$
		т. пер.		*перегину немає*		*т. пер.*			

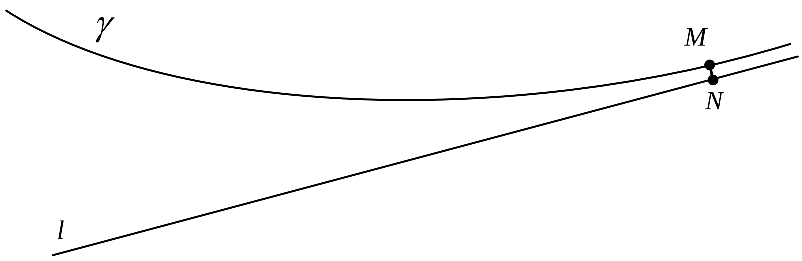
Тут x_i – нулі другої похідної.

3. Асимптоти кривих.

Нехай криву γ задано як графік функції $y = f(x), x \in X$.

Означення: пряма *l* називається *асимптотою* кривої γ, якщо відстань від точки $M \in \gamma$ до прямої *l* прямує до нуля, коли $M \to \infty$, тобто

$$\lim_{M \to \infty} MN = 0.$$



Асимптоти бувають вертикальні і похилі (горизонтальні).

Якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x).$

Похилі асимптоти шукають у виді $y = kx + b.$ Знайдемо *k* і *b*.

За означенням асимптоти

$$\lim_{M \to \infty} MN = \lim_{x \to \infty} \frac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0,$$

звідки

$$\lim_{x\to\infty}\left|kx - f(x) + b\right| = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(k - \frac{f(x)}{x} + \frac{b}{x} \right)\right) = 0,$$

звідки

$$\lim_{x\to\infty}\left(k - \frac{f(x)}{x} + \frac{b}{x} \right) = 0,$$

або

$$k - \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} + 0 = 0,$$

звідки

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Враховуючи це, з умови (1) знаходимо

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx \right).$$

Зауважимо, що якщо $k = 0$, то $y = b$ – вертикальна асимптота.

Якщо хоч одна з границь дорівнює нескінченності або не існує, то похилих асимптот немає.

4. Загальна схема дослідження функції.

1) Знайдіть область визначення функції.

2) Дослідіть функцію на неперервність. З’ясуйте характер точок розриву і знайдіть рівняння вертикальних асимптот (якщо вони є).

3) Дослідіть функцію на парність.

4) Дослідіть функцію на періодичність.

5) Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремуму.

6) Дослідіть графік функції на опуклість та вгнутість, знайдіть точки перегину.

7) Знайдіть рівняння похилих асимптот.

8) Дослідіть поведінку функції на кінцях області визначення:

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

9) Знайдіть точки перетину графіка з осями координат.

10) На основі проведених досліджень побудуйте графік.

Запитання та завдання для самостійного контролю

1. Опуклість і вгнутість кривої.
2. Точки перегину. Необхідні достатні умови їх існування.
3. Асимптоти кривої.
4. Наведіть загальну схему дослідження функції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шкіль М.І. Курс математичного аналізу / М.І. Шкіль. – Ч. 1. – К. : Вища школа, 2005.

2. Свердан П. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей. – К. : Знання, 2008.

3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу / М.О. Давидов. – Ч. 1. – К. : Вища школа, 1990.

4. Ляшко І.І. Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – Ч. 1. – К. : Рідна школа, 1992.

5. Александрович І.М. Збірник задач та вправ з математичного аналізу / І.М. Александрович. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2021.

6. Sterling M.J. Pre-Calculus All-in-One For Dummies. – Wiley, 2023.

7. Рудавський Ю.К. Збірник задач з математичного аналізу / Ю.К. Рудавський. – Л. : Видавництво Львівської політехніки, 2008.

8. Strang G. Calculus / G. Strang. – MIT : Wellesley-Cambridge Press, 1991.