Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання
Факультет математики та інформатики

Вибрані питання тригонометрії в шкільному курсі математики

Навчальний посібник для здобувачів спеціальності А4 Середня освіта (Математика)

Рівне 2026

УДК 514.11:373.5.016(075.8)
В 41

Вибрані питання тригонометрії в шкільному курсі математики. Навчальний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач Н. О. Генсіцька-Антонюк. 2026. 112 с.

Укладач:
Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання.

Рецензенти:
Гоменюк Г. В. - кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Павелків О. М. - кандидат педагогічних наук, доцент, професор кафедри математики та методики її навчання.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № 5/а від 28.04.2026 р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 4 від 29.04 2026 р.)

Затверджено та рекомендовано до друку Вченою радою РДГУ (протокол № 6 від «28» «травня» 2026 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Тригонометрія традиційно вважається одним із найскладніших для сприйняття розділів шкільної математики. Для майбутнього вчителя опанування цією темою означає не лише вміння вправно розв'язувати складні завдання тригонометрії, а й здатність вибудувати чітку, логічну та цікаву траєкторію навчання для своїх учнів.

Навчальний посібник «Вибрані питання тригонометрії в шкільному курсі математики» створений як методичний та змістовний місток між фундаментальною університетською підготовкою та практичною роботою в закладах середньої освіти.

Мета посібника полягає у забезпеченні якісної фахової підготовки майбутнього вчителя математики через поглиблення знань про фундаментальні поняття тригонометрії, властивості тригонометричних функцій, обґрунтування класичних та нестандартних методів розв'язування тригонометричних рівнянь, систем і нерівностей.

Основні акценти посібника:

1) Концептуальна цілісність: ми розглядаємо тригонометрію не як набір ізольованих формул, а як єдину систему, що базується на властивостях функцій та геометричних перетвореннях.
2) Методичний аналіз складних тем: особливу увагу приділено «підводним каменям» шкільної програми: введенню поняття радіана, переходу від тригонометрії трикутника до тригонометричних функцій числового аргументу, а також методиці розв'язування рівнянь із параметрами.
3) Прикладний аспект: посібник містить добірку задач практичного змісту, які демонструють учням, навіщо потрібна тригонометрія в реальному світі.
4) Диференціація та підготовка до олімпіад: матеріал містить завдання підвищеної складності.

Кожен розділ посібника побудований за принципом «Теорія — Метод — Практика — Методика».

1. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ОБЕРНЕНІ ДО НИХ

1.1. Тригонометричні функції та їх властивості

Припустимо, що в прямокутній системі координат одиничний вектор OP_α показує додатний напрямок осі x. Нехай кут $P_0OP_\alpha = \alpha$, координати точки $P_\alpha(x; y)$ (див. рис. 1.1.) (Нелін проф. рівень, 2018).

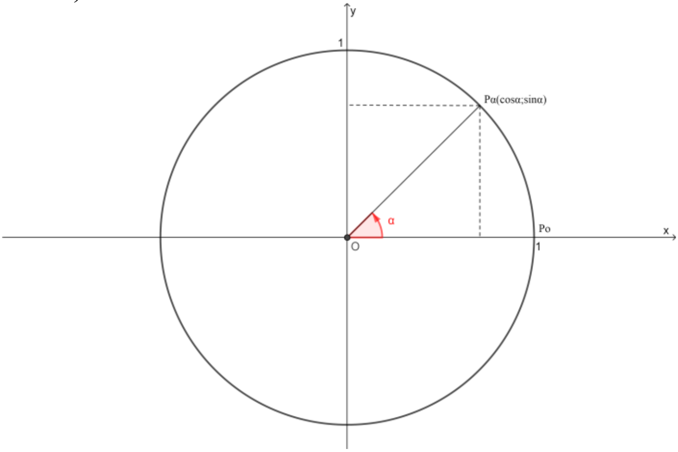


Рис. 1.1. Одиничне коло з одиничним радіусом

Синусом кута α називають ординату точки P_α: $sin\alpha = y$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

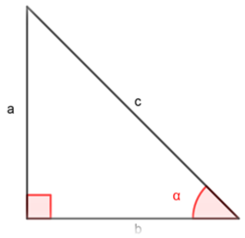
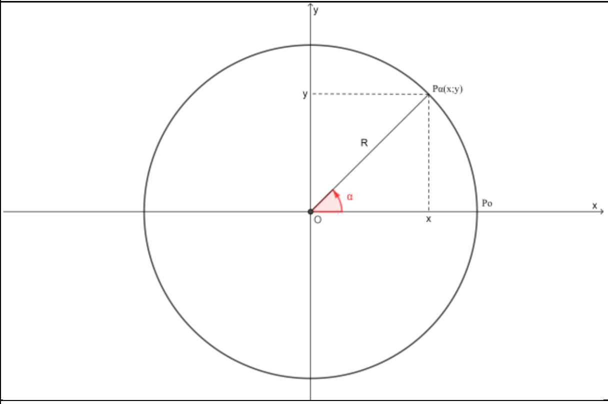
Косинусом кута α називають абсцису точки P_α: $cos\alpha = x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Тангенсом кута α називають відношення ординати кінця одиничного радіуса до його абсциси: $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Котангенсом кута α називають відношення абсциси кінця одиничного радіуса до його ординати: $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Означення тригонометричних функцій ми можемо ще подати через прямокутний трикутник або коло довільного радіуса *R* .

Таблиця 1. Означення тригометричних функцій

Через прямокутний трикутник	Через коло довільного радіуса *R*
	
$cos\alpha = \frac{b}{c}$, $sin\alpha = \frac{a}{c}$, $tg\alpha = \frac{a}{b}$, $ctg\alpha = \frac{b}{a}$.	$cos\alpha = \frac{x}{R}, sin\alpha = \frac{y}{R}$, $tg\alpha = \frac{y}{x}, ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

(Нелін проф. рівень, 2018)

Функція синус (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$$y = \sin(x)$$

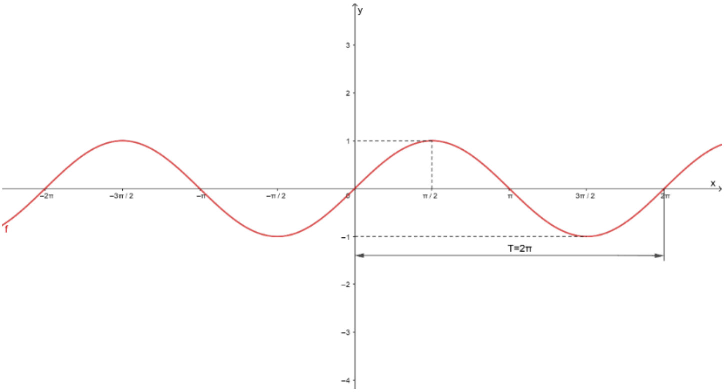


Рис. 1.2. Графік функції $y = \sin(x)$

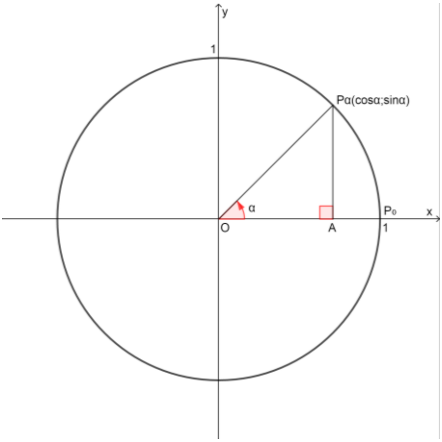


Рис. 1.3. Означення функції синус через одиничне коло

$sinx = AP_\alpha$ (ордината точки одиничного кола), AP_α – лінія синуса
(див. рис. 1.3).

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1; 1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\sin(-x) = -sinx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно початку координат (див. рис. 1.2.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π: $\sin(x + 2\pi k) = sinx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$sinx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.

$sinx > 0$ (додатна) для всіх $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

$sinx < 0$ (від'ємна) для всіх $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.4.):

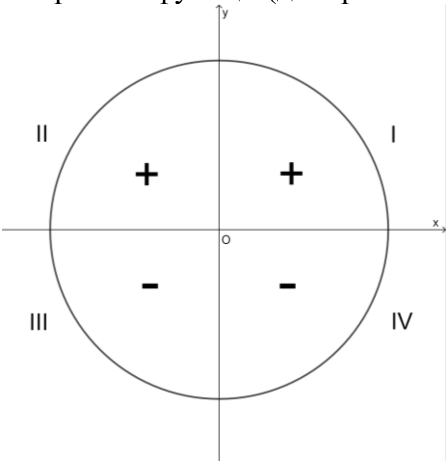


Рис. 1.4. Знаки функції синус

Функція зростає від -1 до 1 на проміжках:

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Функція спадає від -1 до 1 на проміжках:

$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках:

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Перша важлива границя та її наслідки: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$

Функція косинус (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$$y = \cos(x)$$

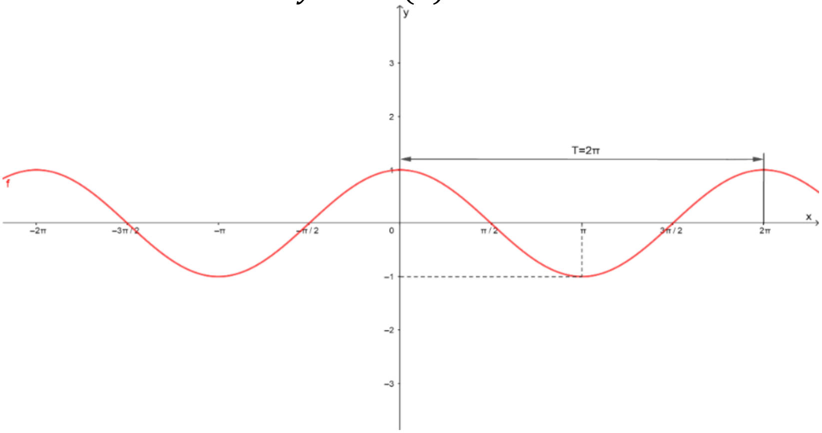


Рис. 1.5. Графік функції $y = \cos(x)$

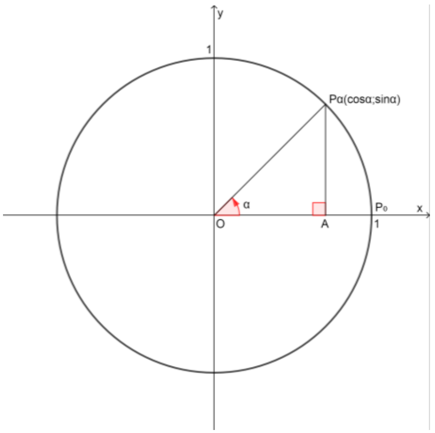


Рис. 1.6. Означення функції косинус через одиничне коло

$cosx = OA$ (абсциса точки одиничного кола), OA – лінія косинуса
(див. рис. 1.6.).

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1;1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\cos(-x) = cosx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно осі OY (див .рис. 1.5.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π: $\cos(x+2\pi k) = cosx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right), k \in Z.$

З віссю OY: $(0;1)$.

Проміжки знакосталості:

$cosx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z.$

$cosx > 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2}+\pi k, 2\pi k)$, $k \in Z.$

$cosx < 0$ для всіх $x \in (,\pi+2\pi k, 2\,\pi+2\pi k)$, $k \in Z.$

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.7.):

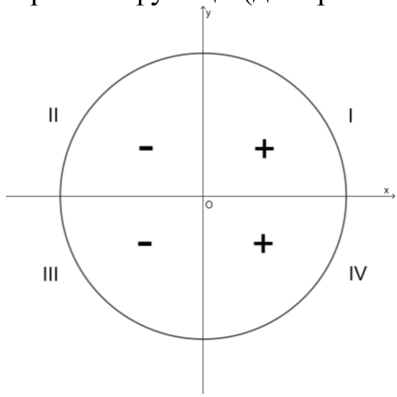


Рис. 1.7. Знаки функції косинус

Функція зростає від -1 до 1 на проміжках:

$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z.$

Функція спадає від -1 до 1 на проміжках:

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$

Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках:

$x = 2\pi k, k \in Z.$

Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках:

$x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Функція тангенс (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$y = \mathrm{tg}(x)$

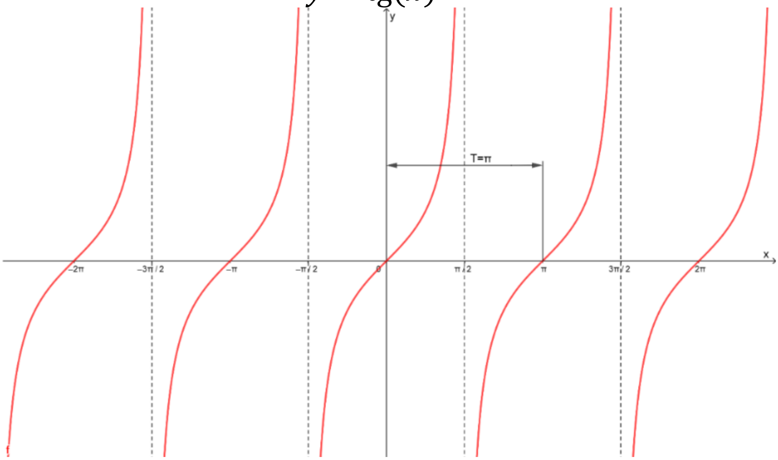


Рис. 1.8. Графік функції $y = \mathrm{tg}(x)$

Означення: $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$.

Область визначення функції – множина R всіх дійсних чисел, крім

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто тангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\mathrm{tg}(-x) = -tgx$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.8.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом π: $\mathrm{tg}(x+\pi k) = tgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$tgx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.

$tgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.

$tgx < 0$ для всіх $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.9.):

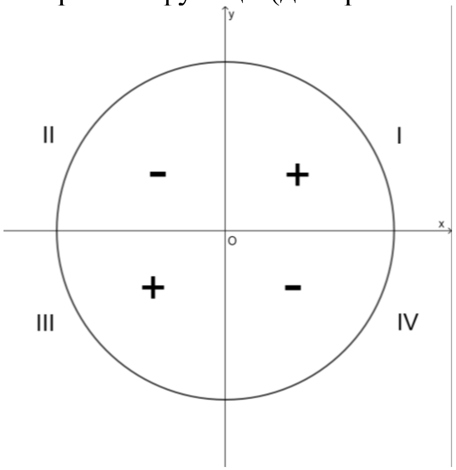


Рис. 1.9. Знаки функції тангенс

Функція зростає на проміжках:

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Вертикальна асимптота $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Функція котангенс (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$$y = c\mathrm{tg}(x)$$

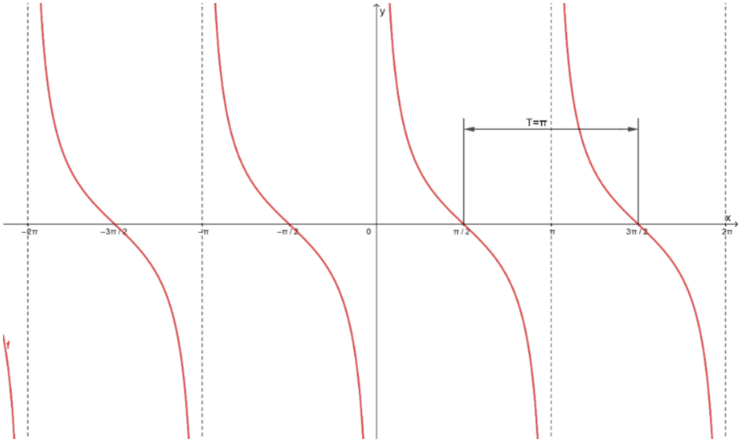


Рис. 1.10. Графік функції $y = c\text{tg}(x)$

Означення: $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

Область визначення функції – множина всіх дійсних чисел, крім
$x = \pi k, k \in Z$.

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто котангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\text{tg}(-x) = -tgx$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.10.).

Функція періодична з найменшим додатним періодом π: $c\text{tg}(x + \pi k) = ctgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$.

З віссю OY: (0; 0).

Проміжки знакосталості:

$ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$ctgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.

$ctgx < 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції (див. рис. 1.11.):

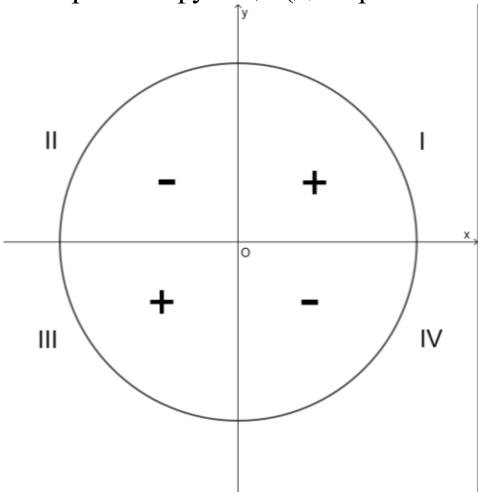


Рис. 1.11. Знаки функції котангенс

Функція зростає на проміжках: $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Вертикальна асимптота $x = \pi k, k \in Z$.

Тригонометричні функції — це не просто абстрактні формули, а мова, якою описуються будь-які періодичні або циклічні процеси у природі та техніці.

Розглянемо основні сфери, де тригонометрія є незамінним інструментом:

1. Фізика: Коливання та хвилі

Будь-який процес, що повторюється в часі, описується за допомогою синуса або косинуса.

- Гармонічні коливання: Рух маятника, вібрація струни гітари або коливання пружини описуються рівнянням $x(t) = A\cos(wt + \varphi_0)$
- Звукові хвилі: Звук — це коливання тиску повітря. Чистий тон — це синусоїда. Зміна частоти (w) змінює висоту звуку, а зміна амплітуди (A) — його гучність.

- Змінний струм: Електрична напруга в наших розетках змінюється за законом синуса. Це основа всієї сучасної електроенергетики.

2. Астрономія та навігація

Тригонометрія народилася з потреби вимірювати відстані до зірок та орієнтуватися в морі.

- Тріангуляція: Знаючи відстань між двома точками на землі та кути на об'єкт (наприклад, вершину гори або корабель у морі), можна точно обчислити відстань до нього.
- Рух небесних тіл: Тригонометричні функції дозволяють розраховувати час сходу і заходу сонця, тривалість світлового дня та фази місяця.

3. Техніка та архітектура

- Будівництво: Розрахунок навантажень на похилі дахи, мости та ферми неможливий без синусів і косинусів, які допомагають розкласти вектори сил на складові.
- Механіка: Робота двигуна внутрішнього згоряння (перетворення обертального руху колінчастого вала у зворотно-поступальний рух поршня) описується тригонометричними залежностями.

4. Географія та океанографія

- Припливи та відпливи: Рівень води в океані змінюється періодично. Математичні моделі припливів базуються на сумі декількох синусоїд, що дозволяє портам точно знати, коли велике судно зможе зайти в гавань.
- Картографія: Оскільки Земля кругла, а карти пласкі, для перенесення координат з кулястої поверхні на площину (картографічні проєкції) використовується складна тригонометрія.

5. Сучасні цифрові технології

- Обробка зображень та звуку: Формати JPEG та MP3 працюють на основі «дискретного косинусного перетворення». Зображення розкладається на тисячі тригонометричних функцій, що дозволяє стиснути дані, видаливши ті частоти, які людське око або вухо не помічає.

- GPS-навігація: Ваш смартфон визначає місце розташування, розв’язуючи тригонометричні рівняння, де невідомими є відстані до супутників.Прикладна задача: Прикладна задача: Прогнозування припливів

У порту міста Гамбург рівень води змінюється залежно від часу доби. Глибина води h (у метрах) через t годин після півночі описується функцією:

$$h(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-4)\right) + 10$$

Визначити:

1. Яка максимальна та мінімальна глибина води в порту? (Аналіз амплітуди та зміщення).
2. Який період припливів? (Розрахунок циклу).
3. Чи зможе судно з осадкою 8 метрів зайти в порт о 10:00 ранку? (Обчислення значення функції в точці).

Розв’язання

1. Аналіз амплітуди та середнього рівня:

Середнє значення глибини становить 10 м (вертикальне зміщення). Амплітуда коливань —3 м.

$h_{\max} = 10 + 3 = 13$(м), $h_{min} = 10 - 3 = 7$(м)

2. Знайдемо період (Т):

Коефіцієнт $k = \frac{\pi}{6}$, $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ годин.

Це означає, що повний цикл припливу та відпливу повторюється кожні 12 годин.

3. Перевірка для судна (о 10:00, тобто $t = 10$): $h(10) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(10-4)\right) + 10 = 10$ (м).

Відповідь: Так, судно з осадкою 8 метрів спокійно зайде в порт, оскільки глибина буде 10 метрів.

Чому ця задача корисна для шкільного курсу?

1. Візуалізація: Ви можете запропонувати учням побудувати цей графік у GeoGebra, змінюючи параметри (наприклад, що буде, якщо амплітуда зросте через шторм).

2. Міжпредметні зв'язки: Географія + Математика.
3. Підготовка до олімпіад: Можна ускладнити задачу, запитавши: *«Протягом якого часу протягом доби глибина води становить не менше 11,5 метрів?»* (розв'язування тригонометричної нерівності).

1.2. Обернені тригонометричні функції та їх властивості

Арксинусом числа α називають кут або число з відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$y = arcsinx$ – функція, обернена до $y = sinx$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Запис $b = arcsina$ означає, що $b \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $sinb = a.$

Зауважимо, що у деяких випадках не можна назвати точного значення $arcsina$. Наприклад, $arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, але для $arcsin\frac{1}{5}$ можемо знайти тільки наближене значення.

Властивості функції:

1) область визначення $[-1; 1]$;
2) область значень $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
3) функція непарна, бо $[-1; 1]$ – симетрична відносно 0; $\arcsin(-x) = -arcsinx.$

Отже, графік $y = arcsinx$ симетричний відносно початку координат;

4) функція не є періодичною;
5) координати точок перетину графіка функції з осями координат: з віссю ОХ: $(0; 0)$, з віссю ОУ: $(0; 0)$;
6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на відрізку $[-1; 1]$;
7) проміжки знакосталості:
$arcsinx > 0$ при $x \in (0; 1]$, $arcsinx < 0$ при $x \in [-1; 0)$;
8) найбільше значення – $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, найменше – $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.12.):

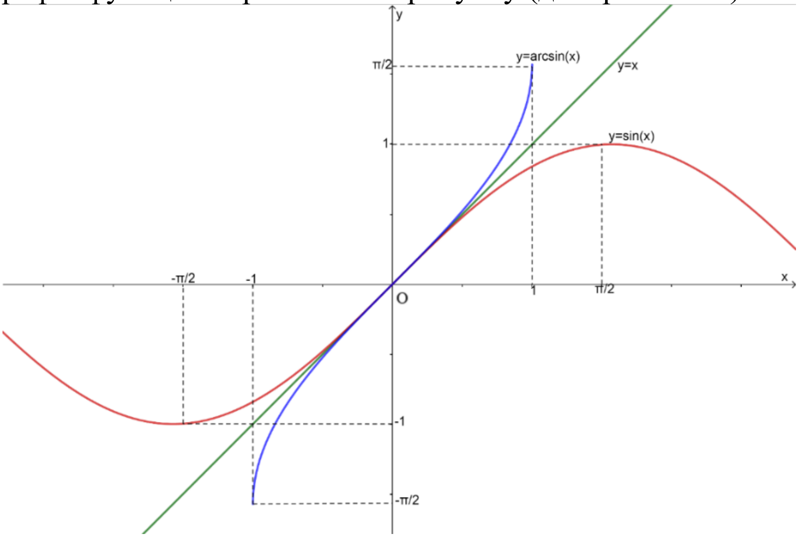


Рис. 1.12. Графік функції арксинус

Звернемо увагу на рівності:

$\arcsin(sinx) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$\sin(arcsinx) = x, -1 \leq x \leq 1$.

Арккосинусом числа α називають кут або число з відрізку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018).

$y = arccosx$ – функція, обернена до $y = cosx$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Запис $b = arccosa$ означає, що $b \in [0; \pi]$; $cosb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $[-1; 1]$;
2) область значень $[0; \pi]$;
3) функція не є ні парною, ні непарною;
4) функція не є періодичною;
5) координати точок перетину графіка функції з осями координат: з віссю ОХ: $(1; 0)$; з віссю ОУ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

6) функція спадає від π до 0 на відрізку $[-1; 1]$;

7) проміжки знакосталості: $arccosx > 0$ на всій області визначення;

8) найбільше значення – π, якщо $x = -1$, найменше – 0, якщо $x = 1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції $y = arccosx$ зображений на рисунку (див. рис. 1.13.):

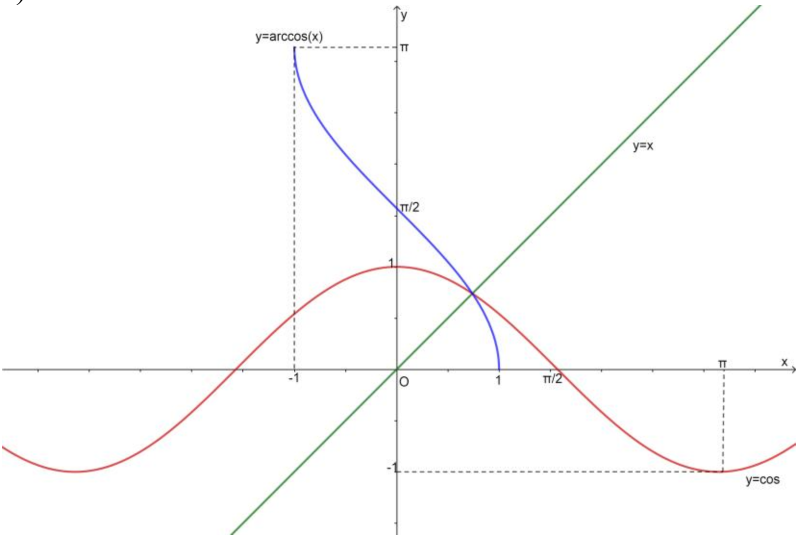


Рис. 1.13. Графік функції арккосинус

Звернемо увагу на рівності:

$\arccos(cosx) = x, 0 \leq x \leq \pi,$

$\cos(arccosx) = x, -1 \leq x \leq 1.$

Зауважимо: $y = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Арктангенсом числа α називають кут або число з відрізку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$y = arctgx$ – функція, обернена до $y = tgx$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Запис $b = arctga$ означає, що $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);\ tgb = a.$

Властивості функції:

1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;

2) область значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) функція непарна, симетрична відносно 0; $\mathrm{arctg}(-x) = -arctgx.$

Отже, графік симетричний відносно початку координат;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: $(0; 0)$,

З віссю ОУ: $(0; 0)$;

6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) проміжки знакосталості:

$arctgx > 0$ при $x > 0$,

$arctgx < 0$ при $x < 0$;

8) функція не набуває найбільшого і найменшого значень;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.14.):

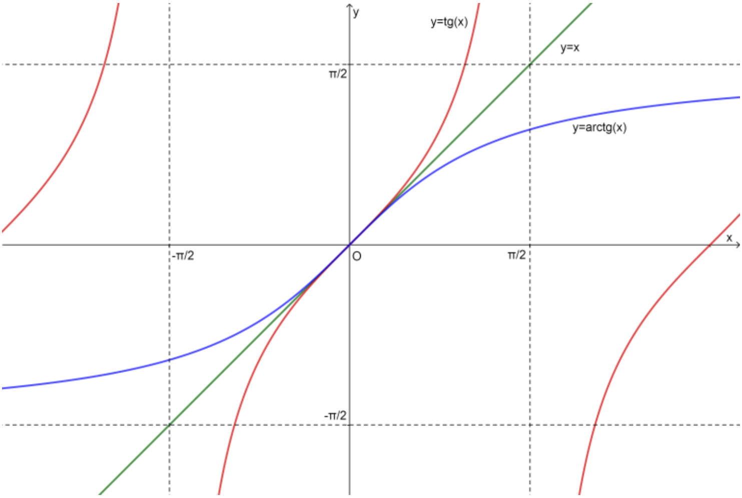


Рис. 1.14. Графік функції арктангенса

Звернемо увагу на рівності:

$\operatorname{arctg}(tgx) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$\operatorname{tg}(arctgx) = x, x \in (-\infty; +\infty)$,

$arctg(-x) = -arctgx$.

Арккотангенсом числа α називають кут або число з відрізку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює α (Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

$y = arcctgx$ – функція, обернена до $y = ctgx$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Запис $b = arcctga$ означає, що $b \in (0; \pi)$; $ctgb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;
2) область значень $(0; \pi)$;
3) функція не є ні парною, ні непарною;
4) функція не є періодичною;
5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: немає;

З віссю ОУ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

6) функція спадає від π до 0 на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) додатна на всій області визначення;

8) функція не набуває найбільшого і найменшого значень.;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку (див. рис. 1.15.):

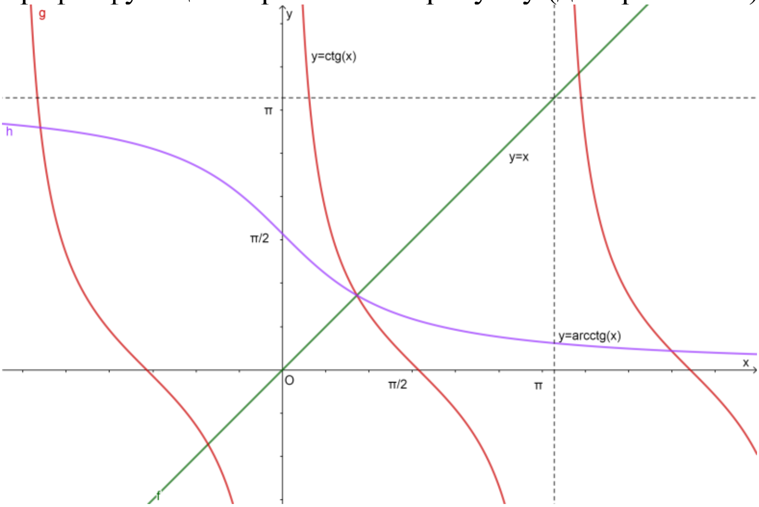


Рис. 1.15. Графік функції арккотангенса

Звернемо увагу на рівності:

$\operatorname{arcctg}(ctgx) = x, 0 \leq x \leq \pi,$

$\operatorname{ctg}(arcctgx) = x, -\infty \leq x \leq \infty.$

Зауважимо: $y = \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x\,, -\infty \leq x \leq \infty.$

1.3.Практичні завдання до пунктів 1.1–1.2. Властивості тригонометричних функцій та обернених до них. Побудова графіків методом геометричних перетворень

Завдання для аудиторного (непарні номери) та самостійного (парні номери) виконання

1. Знайти основний період функції

1.1 $y = \sin^2 2x$

1.2 $y = \cos^2 \frac{x}{2}$

1.3 $y = \sin(0{,}5\pi x)$
1.4 $y = \mathrm{tg}(2\pi x)$
1.5 $y = \frac{1}{2}\cos\frac{5x}{2}$
1.6 $y = 4\sin 2x$
1.7 $y = 2\,\mathrm{tg}\frac{3x}{2}$
1.8 $y = 3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{5}$
1.9 $y = \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x$
1.10 $y = \cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x$
1.11 $y = \cos^4 x - \sin^4 x$
1.12 $y = \sin^3 x\cos x + \sin x\cos^3 x$
1.13 $y = \sin\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{4}$
1.14 $y = \cos\frac{3x}{4} - \sin\frac{2x}{3}$
1.15 $y = 2\cos 2x + 3\sin\frac{3x}{2} - 3\sin 3x$
1.16 $y = \sin\frac{x}{3} + 2\cos\frac{5x}{2} + 3\sin 2x + 2$
1.17 $f(x) = \sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}$
1.18 $f(x) = \sin 2x\cos 3x - 4\cos^2 x$
1.19 $y = \sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{7x}{2}$
1.20 $y = \sin\frac{9x}{2}\cdot\sin\frac{15x}{2}$
1.21 $y = \left|\sin\frac{\pi x}{4}\right|$
1.22 $y = \mathrm{tg}^2\, 2\pi x$
1.23 $y = \cos x - 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{4}$
1.24 $y = \sin x + 2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$

2. Знайти область значень функції (Знайти найбільше і найменше значення функції)

2.1 $y = 3\sin x$
2.2 $y = 4 + \cos x$
2.3 $y = 2 - \sin x$
2.4 $y = 6 - 2\cos x$

2.5 $y = \sin^2 x$

2.6 $y = 2\cos^2 x - 3$

2.7 $y = 5 + \sin^2 x$

2.8 $y = 7 - 3\sin x$

2.9 $y = \frac{1}{1+\sin x}$

2.10 $y = \frac{1}{\cos x - 2}$

2.11 $y = \frac{1}{2+\sin x}$

2.12 $y = \frac{2}{4\sin x - 3}$

2.13 $y = \frac{1}{2-\cos 2x}$

2.14 $y = 2|\sin x| - 1$

2.15 $y = 2 + 3|\cos x|$

2.16 $y = \sin x + \cos x$

2.17 $y = \sin 2x - \cos 2x$

2.18 $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$

2.19 $y = \arccos x + 1$

2.20 $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$

2.21 $y = \sqrt{-\mathrm{arccosx}}$

2.22 $y = \frac{1}{\mathrm{arcsinx}}$

2.23 $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$

2.24 $f(x) = 4 - \arccos 3\,x$

3. Побудувати графік функції методом геометричних перетворень

3.1 $y = -1{,}5\sin 2x$

3.2 $y = -2\cos 2x$

3.3 $y = 2\sin x - 1$

3.4 $y = -2\cos x + 1$

3.5 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

3.6 $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

3.7 $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

3.8 $y = -\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

3.9 $y = \arcsin(1 - 2x)$

3.10 $y = \operatorname{arctg}(3x + 1)$

3.11 $y = 2\sin|x - 1|$

3.12 $y = 3\cos\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$

3.13 $y = \operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

3.14 $y = \operatorname{ctg}|1 - x|$

3.15 $y = \operatorname{tg}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) y = \left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

3.16 $y = -\cos(x + \pi + 1)$

3.17 $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} + x + \pi\right)$

3.18 $y = \arcsin|x - 1|$

3.19 $y = \arccos|2x + 1|$

3.20 $y = \arccos(|x| + 1)$

3.21 $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$

3.22 $y = \sin(\arcsin x)$

3.23 $y = \cos(\mathrm{arccosx})$

3.24 $y = \cos(\arcsin x)$

4. Побудувати функцію за допомогою математичних програмних засобів (на свій вибір) і за графіком вказати властивості функції

4.1 $f(x) = \cos(\pi \sin(x))$

4.2 $y = \frac{\sin 2x + \cos x}{tgx - \sqrt{3}}$

5. Розв’язати прикладні задачі керуючись тим, що у тригонометричній функції виду $y = A\sin\big(B(x - C)\big) + D$ (або з косинусом) кожен коефіцієнт відповідає за конкретну трансформацію графіка. У прикладних задачах, які ми розглянемо, вони мають фізичний зміст.

Розберемо їх по черзі:

1. Коефіцієнт A — амплітуда, відповідає за розтягнення або стиснення графіка по вертикалі (вдовж осі $0y$). Математично – це відстань від середньої лінії до найбільшого або найменшого значення функції. У житті у задачі з колесом — це радіус колеса, у звукових хвилях — це гучність.

2. Коефіцієнт B — частотний множник. Він впливає на період функції (розтягнення або стиснення по горизонталі, вздовж осі $0x$). Математично він пов'язаний з періодом T формулою $T = \frac{2\pi}{B}$. У житті – це швидкість обертання або частота циклів (наприклад, як часто повторюються припливи).

3. Коефіцієнт C — фазовий зсув (горизонтальний зсув). Він відповідає за перенесення графіка ліворуч або праворуч. Якщо у нас $(x - C)$, то графік совується на C одиниць праворуч. Якщо $(x + C)$ — ліворуч. У житті – це «час затримки». Наприклад, якщо приплив почався не рівно о 24:00, а на годину пізніше, ми використовуємо C, щоб підкоригувати графік під реальний час.

4. Коефіцієнт D— вертикальний зсув (середня лінія). Він відповідає за підняття або опускання всього графіка. Математично - це нова «вісь», навколо якої відбуваються коливання. Рівняння середньої лінії: $y = D$. У житті – це базовий рівень. У задачі про колесо — це висота центру над землею. У задачі про порт — це середній рівень води.

5.1 Задача «Оглядове колесо». Ви сідаєте в кабінку оглядового колеса в нижній точці (на висоті 2 метри від землі). Колесо має діаметр 40 метрів і робить один повний оберт за 8 хвилин. Складіть функцію $h(t)$, яка описує залежність висоти кабінки над землею від часу t (у хвилинах). На якій висоті ви будете через 6 хвилин після початку руху?

5.2 Задача «Морський порт». У морському порту глибина води y (у метрах) змінюється залежно від часу t (у годинах від півночі) за законом гармонічних коливань. Опівночі $(t = 0)$

спостерігається «середній» рівень води, і він починає зростати. Максимальна глибина під час припливу становить 12 метрів. Мінімальна глибина під час відпливу становить 4 метри. Час між двома припливами (період) дорівнює 12 годинам.

1. Знайдіть амплітуду, середню лінію та напишіть формулу залежності $y(t)$.
2. Якою буде глибина води о 9-й годині ранку?

1.4. Основні тригонометричні тотожності

Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж кута.

Нехай α – будь-який кут, утворений при повороті радіус-вектора $\vec{r} = \{x; y\}$, тоді $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ (1).

Підносячи до квадрата рівності (1) і їх додавши, отримаємо: $sin^2x + cos^2x = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$(2). Оскільки $x^2 + y^2 = r^2,$ то $sin^2x + cos^2x = 1$ (3).

Так як $tg\alpha = \frac{y}{x}$, то $tg\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ (4). Аналогічно $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ (5).

Помножимо тотожність (4) на (5): $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 1$ або $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$ (6).

Якщо поділити рівність (3) спочатку на cos^2x, а потім на sin^2x, то отримаємо такі рівності:

$\frac{sin^2x}{cos^2x} + 1 = \frac{1}{cos^2x} \;\Rightarrow\; tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}$ (9) та

$1 + \frac{cos^2x}{sin^2x} = \frac{1}{sin^2x} \;\Rightarrow\; 1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2x}$ (10) [8].

Зведення тригонометричних функцій від'ємного аргументу (кута) до функцій додатного аргументу

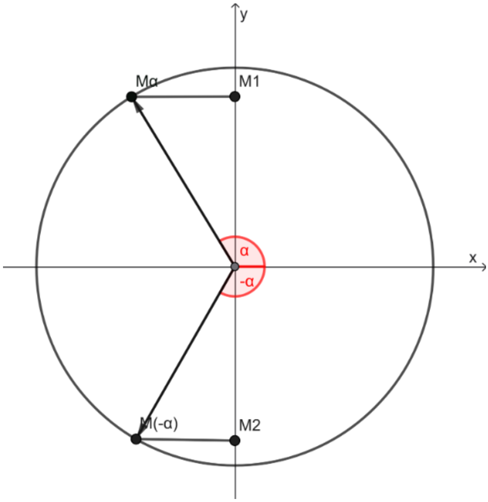


Рис. 1.15.

Нехай вектор $\overrightarrow{OM_\alpha}$ утворює з віссю ОХ кут α; вектор $\overrightarrow{OM_{-\alpha}}$ – кут $(-\alpha)$. Тоді $\sin\alpha = OM_1; \sin(-\alpha) = OM_2$. За модулем (абсолютною величиною) проекції OM_1 та OM_2 рівні між собою, тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Точки M_α та $M_{-\alpha}$ симетричні відносно ОХ, тому проекції векторів $\overrightarrow{OM_\alpha}$ і $\overrightarrow{OM_{-\alpha}}$ на вісь ОХ співпадають, тому $cos(-\alpha) = cos\alpha$. Тоді

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha, \qquad ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{cos\alpha}{-sin\alpha} = -ctg.$$

Парність та періодичність тригонометричних функцій

Функція називається ***парною***, якщо виконується рівність: $f(-x) = f(x)$ для всіх x з області її визначення. Функція називається ***непарною***, якщо виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$ для всіх x з області її визначення.

Оскільки $\cos(-x) = cosx$, то функція $cosx$ є парною функцією, а $sinx$, tgx, $ctgx$ – непарними функціями, тому що $\sin(-x) = -sinx$, $tg(-x) = -\ tgx$, $ctg(-x) = -ctgx$.

Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності $f(x-T) = F(x) = f(x+T)$. Отже, найменше додатне число, додавання (віднімання) до аргументу функції не змінює її значення, називається ***періодом функції*** (T – період функції).

Всі тригонометричні функції періодичні. Період синуса, косинуса дорівнює 2π, період тангенса, котангенса - π. Отже, $\sin(x \pm 2\pi) = sinx$, $\cos(x \pm 2\pi) = cosx$, $tg(x \pm \pi) = tgx$, $ctg(x \pm \pi) = ctgx$.

Теорема 1. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функцій f, причому $T_1 + T_2$ є також періодом функції f.

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$: $f(x) = f(x+T_1) = f\big((x+T_1)+T_2\big) = f(x+(T_1+T_2))$; $f(x) = f(x-T_1) = f\big((x-T_1)-T_2\big) = f(x-(T_1+T_2))$. Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x+(T_1+T_2)) = f(x) = f(x-(T_1+T_2)).$$

Отже, $T_1 + T_2$ є періодом функції f.

Теорема 2. Якщо число Т є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx+b)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx+b)$:

$$f(kx+b) = f\big((kx+b)+T\big) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right);$$

$$f(kx+b) = f\big((kx+b)-T\big) = f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right)$$

Звідси для будь-якого $x \in D(y)$, де $y = f(kx+b)$ виконується:

$$f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right) = f(kx+b) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{|k|}$ є періодом функції $y = f(kx+b)$.

Формули зведення

Формули зведення – це формули, за допомогою яких значення тригонометричних функцій будь-якого аргументу можна подати через відповідні значення тригонометричних функцій гострого кута.

Кут, який закінчується у II чверті, можна подати як $90° + \alpha$ або $180° - \alpha$, відповідно у III чверті як $180° + \alpha$ або $270° - \alpha$, у IV чверті - $270° + \alpha$ або $360° - \alpha$.

Загальні правила для формул зведення:

1. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(180° \pm \alpha)$, $(360° \pm \alpha)$ або в радіанній мірі $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, не змінюється. Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті.

2. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(90° \pm \alpha)$, $(270° \pm \alpha)$ або в радіанній мірі $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, змінюється на кофункцію (синус на косинус і навпаки, тангенс на котангенс і навпаки). Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті [16].

Таблиця формул зведення

Таблиця 2

x	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$sinx$	$-sinx$	$sinx$	$sinx$	$-sinx$	$cosx$	$cosx$	$-cosx$	$-cosx$
$cosx$	$-cosx$	$-cosx$	$cosx$	$cosx$	$-sinx$	$sinx$	$sinx$	$-sinx$
tgx	tgx	$-tgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$ctgx$
$ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx	$-tgx$	tgx

Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Теореми додавання

Виведемо формули косинуса суми і косинуса різниці. Розглянемо одиничне коло.

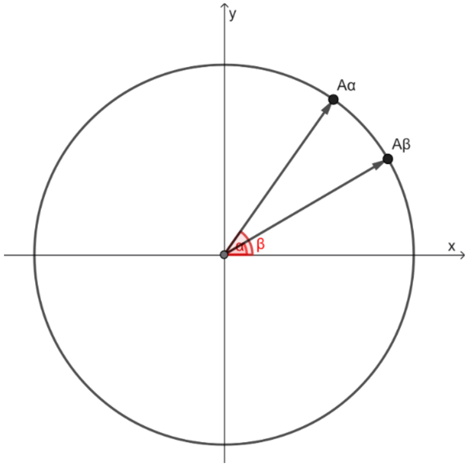


Рис.1.16

Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ утворюють кути α і β з додатним напрямком осі абсцис. Кут між векторами $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ дорівнює $\alpha - \beta$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів: $\overrightarrow{OA_\alpha} \cdot \overrightarrow{OA_\beta} = \left|\overrightarrow{OA_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, оскільки $\left|\overrightarrow{OA_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OA_\beta}\right| = 1$. Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ мають координати $\overrightarrow{OA_\alpha}(cos\alpha; sin\alpha)$ і $\overrightarrow{OA_\beta}(cos\beta;\ sin\beta)$. Тоді $\overrightarrow{OA_\alpha} \cdot \overrightarrow{OA_\beta} = \ cos\alpha cos\beta + \ sin\alpha sin\beta$.

Таким чином, $\cos(\alpha - \beta) = \ cos\alpha cos\beta + \ sin\alpha sin\beta$.

Подамо суму $\alpha + \beta$ як $\alpha - (-\beta)$ і отримаємо:

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = cos\alpha \cos(-\beta) + sin\alpha \sin(-\beta) = \ cos\alpha cos\beta - \ sin\alpha sin\beta.$$

Таким чином, $\cos(\alpha + \beta) = \ cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$.

Виведемо формули синуса суми і синуса різниці.

$$sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos\beta+sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sin\beta$$
$$=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta.$$

Таким чином, $\sin(\alpha+\beta)= sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$.

$sin(\alpha-\beta)=sin(\alpha+(-\beta))=sin\alpha\cos(-\beta)+cos\alpha\sin(-\beta)=$ $sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$.

Таким чином, $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$.

Виведемо формули для тангенса і котангенса суми і різниці.

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $cos\alpha cos\beta$, отримаємо: $tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}+\frac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\frac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}-\frac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$. Тангенс різниці $tg(\alpha-\beta)=\frac{\frac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}-\frac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\frac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta}+\frac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$.

Отже, $tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$.

$ctg(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta}{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $sin\alpha sin\beta$ і отримаємо: $ctg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{cos\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta}-\frac{sin\alpha sin\beta}{sin\alpha sin\beta}}{\frac{sin\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta}+\frac{cos\alpha sin\beta}{sin\alpha sin\beta}}=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$. Котангенс різниці $ctg(\alpha-\beta)=\frac{\frac{cos\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta}+\frac{sin\alpha sin\beta}{sin\alpha sin\beta}}{\frac{sin\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta}-\frac{cos\alpha sin\beta}{sin\alpha sin\beta}}=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$.

Отже, $ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$.

Тригонометричні функції подвійного, потрійного і половинного аргументу

Для виведення формул подвійного аргументу скористаємось формулами додавання.

Якщо $\alpha = \beta$, то $\sin(\alpha + \alpha) = sin2\alpha = sin\alpha cos\alpha + cos\alpha sin\alpha = 2\ sin\alpha cos\alpha$,

$$\cos(\alpha + \alpha) = cos2\alpha = cos\alpha cos\alpha - sin\alpha sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$
$$= cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha) = cos^2\alpha - 1 + cos^2\alpha$$
$$= 2cos^2\alpha - 1 = 1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha.$$

Виведемо формулу тангенса подвійного кута $tg2\alpha = \frac{sin2\alpha}{cos2\alpha} = \frac{2\ sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $cos^2\alpha$, отримаємо:

$$tg2\alpha = \frac{\frac{2\ sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha}}{\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} - \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Виведемо формулу котангенса подвійного кута. $ctg2\alpha = \frac{cos2\alpha}{sin2\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\ sin\alpha cos\alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $sin^2\alpha$, отримаємо:

$$ctg2\alpha = \frac{\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} - \frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}}{\frac{2\ sin\alpha cos\alpha}{sin^2\alpha}} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Для виведення формул потрійного аргументу скористаємось формулами додавання, подвійного аргументу і врахувавши, що $\beta = 2\alpha$, маємо:

$\sin(\alpha + 2\alpha) = sin3\alpha = sin\alpha cos2\alpha + cos\alpha sin2\alpha = sin\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + cos\alpha 2\ sin\alpha cos\alpha = sin\alpha cos^2\alpha - sin^3\alpha + 2sin\alpha cos^2\alpha = sin\alpha(1 - sin^2\alpha) - sin^3\alpha + 2sin\alpha(1 - sin^2\alpha) = sin\alpha - sin^3\alpha - sin^3\alpha + 2sin\alpha - 2sin^3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$.

Отже, $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$.

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = cos3\alpha = cos\alpha cos2\alpha - sin\alpha sin2\alpha$$
$$= cos\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) - sin\alpha 2\ sin\alpha cos\alpha$$
$$= cos^3\alpha - cos\alpha sin^2\alpha - 2sin^2\alpha cos\alpha$$
$$= cos^3\alpha - cos\alpha(1 - cos^2\alpha) - 2cos\alpha(1 - cos^2\alpha)$$
$$= cos^3\alpha - cos\alpha + cos^3\alpha - 2cos\alpha + 2cos^3\alpha$$
$$= 4cos^3\alpha - 3cos\alpha.$$

Отже, $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$.

Аналогічно доводимо формули потрійного кута для тангенса і котангенса. Таким чином, $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$, $ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha}$.

Для виведення формул половинного аргументу скористаємося формулами: $1 = cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}$ та $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$. Додамо ліві і праві частини цих рівностей: $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$ або $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2} \Rightarrow cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$.

Знайшовши різницю тотожностей $1 = cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}$ та $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$ отримаємо: $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ або $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2} \Rightarrow sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$.

Поділивши тотожність $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ на тотожність $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$ отримаємо $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} \Rightarrow$

$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$. Для тангенса половинного кута можна скористатися і іншими, більш зручними формулами:

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$ або $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$.

Поділимо тотожність $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$ на тотожність $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$, отримаємо: $ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha} \Rightarrow ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}}$.

Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток і навпаки

За теоремами додавання $\sin(\gamma + \varphi) = sin\gamma cos\varphi + cos\gamma sin\varphi$ і $\sin(\gamma - \varphi) = sin\gamma cos\varphi - cos\gamma sin\varphi$. Додамо ці рівності і отримаємо: $\sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varphi) = sin\gamma cos\varphi + cos\gamma sin\varphi + sin\gamma cos\varphi - cos\gamma sin\varphi = 2sin\gamma cos\varphi$.

Нехай $\gamma + \varphi = \alpha,\ \gamma - \varphi = \beta$. Розв’яжемо систему цих двох рівнянь:

$\begin{cases}\gamma + \varphi = \alpha \\ \gamma - \varphi = \beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$. Врахувавши результати цієї системи, маємо:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Віднявши рівності $\sin(\gamma+\varphi) = \sin\gamma\cos\varphi + \cos\gamma\sin\varphi$ і $\sin(\gamma-\varphi) = \sin\gamma\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi$ і врахувавши $\begin{cases}\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, отримаємо: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

За теоремами додавання $\cos(\gamma+\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi$ і
$\cos(\gamma-\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi$. Додавши ці рівності, маємо:

$\cos(\gamma+\varphi) + \cos(\gamma-\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi = 2\cos\gamma\cos\varphi$. Врахувавши, що $\begin{cases}\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, маємо: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Віднявши рівності $\cos(\gamma+\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi$ та $\cos(\gamma-\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi$ і врахувавши, що $\begin{cases}\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, маємо $\cos(\gamma+\varphi) - \cos(\gamma-\varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi - (\cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi) = -2\sin\gamma\sin\varphi$.

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким же чином і доводимо рівності $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ та $ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Формули $\sin(\gamma+\varphi) + \sin(\gamma-\varphi) = 2\sin\gamma\cos\varphi$,

$$cos(\gamma+\varphi)+cos(\gamma-\varphi)=2cos\gamma cos\varphi,$$

$cos(\gamma+\varphi)-cos(\gamma-\varphi)=-2sin\gamma sin\varphi$ можна прочитати зліва направо і навпаки. Якщо ці рівності поділити на 2 і переписати справа наліво, то отримаємо:

$$cos\alpha cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$sin\alpha sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$sin\alpha cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$ [16].

Формули перетворення синуса і косинуса аргументу через тангенс половинного аргументу (універсальна заміна)

$$sin\alpha=2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, $sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

$$cos\alpha=cos^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, $cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Якщо поділити рівність $sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ на рівність $cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, отримаємо: $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Поділивши $cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ на $sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, або врахувавши, що $tg\alpha ctg\alpha = 1$ отримаємо: $ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$ (Клочко, 2007).

Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$$sin(arcsinx) = x, \qquad \cos(arccosx) = x, x \in [0; \pi];$$

$$tg(arctgx) = x, \qquad ctg(arcctgx) = x, x \in R.$$

$$arcsin(sinx) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad arccos(cosx) = x, x \in [0; \pi];$$

$$arctg(tgx) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad arcctg(ctgx) = x, x \in [0; \pi].$$

$$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, x \in [-1; 1],$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}, x \in R.$$

$$arcsin(-x) = -arcsinx, \qquad arccos(-x) = \pi - arccosx, \quad x \in [-1; 1];$$

$$arctg(-x) = -arctgx, \qquad arcctg(-x) = \pi - arcctgx, \qquad x \in R.$$

$$arcsinx = arccos\sqrt{1-x^2} = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arcctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0; 1).$$

$$arccosx = arcsin\sqrt{1-x^2} = arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0; 1).$$

$$arctgx = arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arcctg\frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$arcctgx = arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arctg\frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$sin(arccosx) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1; 1];$$

$$sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad \cos(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ , \ \ x \in \ R.$$

$$cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2}, \ \ x \in \ [-1;1];$$

$$\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad x \in \ R.$$

$$tg(arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ , x \in (-1;1);\ tg(arccosx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$x \in [-1;0) \cup (0;1);$$

$$tg(arcctgx) = ctg(arctgx) = \frac{1}{x}\ , \qquad x \neq 0\ .$$

$$ctg(arccosx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ , x \in (-1;1);$$

$ctg(arcsinx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1;0) \cup (0;1)$ (Ясінський, 2025).

1.5.Практичні завдання до пункту 1.4. Спрощення тригонометричних виразів. Доведення тригонометричних тотожностей

Завдання для аудиторного (непарні номери) та самостійного (парні номери) виконання

Завдання 1. Спростити вирази:

1.1 $(1 + tg^2\alpha)\, cos^2\, \alpha + (1 + ctg^2\alpha)\, sin^2\, \alpha,$

1.2 $2\, sin^2\, \alpha + 2\, cos^2\, \alpha + tg^2\alpha ctg^2\alpha.$

1.3 $\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}(cos\, \alpha - cos\, 3\alpha)}{sin\, \alpha + 2\, sin\, 2\alpha + 3\, sin\, \alpha},$

1.4 $\frac{(sin\, \alpha + sin\, 3\alpha)(cos\, \alpha - cos\, 3\alpha)}{1 - cos\, 4\alpha}.$

1.5 $\frac{cos\, 6\alpha}{cos\, 2\alpha} - \frac{sin\, 6\alpha}{sin\, 2\alpha} + 2,$

1.6 $\frac{sin\, 9\alpha}{sin\, 3\alpha} - \frac{cos\, 9\alpha}{cos\, 3\alpha} - 2.$

1.7 $\frac{sin\, 2\alpha}{1 + cos\, 2\alpha} \cdot \frac{cos\, \alpha}{1 + cos\, \alpha},$

1.8 $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

1.9 $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}+2$,

1.10 $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}-2$.

1.11 $\frac{tg2\alpha tg\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}$,

1.12 $\frac{tg\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}$.

1.13 $\frac{2\sin^2 2\alpha-1}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}$,

1.14 $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

1.15 $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$,

1.16 $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-1$.

1.17 $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$,

1.18 $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}$.

Завдання 2. Спростити та обчислити

2.1 $\frac{1}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{12}$;

2.2 $\frac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}+\frac{1}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$, , якщо $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

2.3 $\frac{1}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}-\frac{1}{\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}$, якщо $\alpha=-15°$;

2.4 $\frac{1}{\sin\alpha-\sin 3\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha-\sin 5\alpha}$, якщо $\alpha=-15°$.

2.5 $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot(\cos\alpha+\cos 5\alpha)-2$, якщо $\alpha=15°$;

2.6 $\frac{1}{tg3\alpha+tg\alpha}-\frac{1}{tg5\alpha-tg\alpha}$, якщо $\alpha=15°$;

2.7 $\frac{1}{tg3\alpha-tg\alpha}+\frac{1}{tg3\alpha-tg5\alpha}$, якщо $\alpha=5°$.

Завдання 3. Довести тотожність

3.1 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=tg\alpha-tg\beta$,

3.2 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=ctg\alpha+ctg\beta$.

3.3 $\frac{1}{1-tg^2\alpha}-\frac{1}{1-ctg^2\alpha}=\frac{1}{cos\,2\alpha}$,

3.4 $\frac{1}{1+tg^2\alpha}-\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=cos\,2\,\alpha$.

3.5 $\frac{ctg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha-tg\beta}=\frac{cos(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)}$,

3.6 $\frac{tg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha}=sin^2\,\alpha$,

3.7 $\frac{ctg\alpha}{ctg\alpha+ctg\alpha}=cos^2\,\alpha$.

3.8 $1-tg^2\alpha=\frac{cos\,2\alpha}{cos^2\,\alpha}$.

3.9 $\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

3.10 $\frac{sin\,3\alpha}{sin\,\alpha}-\frac{cos\,3\alpha}{cos\,\alpha}=2$.

3.11 $\frac{cos\,\alpha-cos\,3\alpha}{sin\,\alpha+sin\,3\alpha}=tg\alpha$.

3.12 $\frac{sin\,\alpha+sin\,2\alpha+sin\,3\alpha}{cos\,\alpha+cos\,2\alpha+cos\,3\alpha}=tg2\alpha$.

3.13 $\frac{sin\,3\alpha}{sin\,\alpha}+\frac{cos\,3\alpha}{cos\,\alpha}=2\,cos\,2\,\alpha$.

3.14 $\left(\frac{sin\,4\alpha}{sin\,\alpha}-\frac{cos\,4\alpha}{cos\,\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{sin\,3\alpha}+\frac{1}{sin\,\alpha}\right)=4ctg\alpha$,

3.15 $\frac{sin\,3\alpha+sin\,\alpha}{cos\,3\alpha+cos\,\alpha}+\frac{sin\,4\alpha}{1+cos\,4\alpha}$.

3.16 $\left(\frac{1}{sin\,2\alpha}-\frac{1}{sin\,6\alpha}\right)\cdot\frac{cos\,7\alpha-cos\,5\alpha}{sin^2\,2\alpha-cos^2\,2\alpha}=4\,sin\,\alpha$.

3.17 $\left(\frac{1}{cos\,\alpha}+\frac{1}{cos\,3\alpha}\right)\cdot\frac{1}{sin\,\alpha+sin\,5\alpha}=\frac{2}{sin\,6\alpha}$.

3.18 $\frac{sin\,2\alpha}{sin\,\alpha+sin\,3\alpha}\cdot\frac{sin\,3\alpha}{cos\,2\alpha-cos\,4\alpha}=\frac{1}{2\,sin\,2\alpha}$.

3.19 $\frac{sin\,2\alpha}{sin\,3\alpha-sin\,\alpha}-\frac{1-cos\,2\alpha}{cos\,\alpha-cos\,3\alpha}=\frac{2\,sin\,\alpha}{sin\,4\alpha}$.

3.20 $\frac{2\,cos^2\,\alpha-1}{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}+\frac{sin\,3\alpha-sin\,\alpha}{cos\,3\alpha+cos\,\alpha}=\frac{1}{sin\,2\alpha}$.

3.21 $\frac{1}{cos\,\alpha}+\frac{1}{cos\,3\alpha}-\frac{2\,sin\,2\alpha}{sin\,3\alpha}=\frac{4\,sin\,\alpha}{sin\,6\alpha}$.

3.22 $\frac{1-cos\,2\alpha-cos\,6\alpha+cos\,8\alpha}{cos\,4\alpha-cos\,\alpha\,cos\,3\alpha}=4\,cos\,4\,\alpha$.

3.23 $2\,sin^2\,\alpha\,cos^2\,\alpha+cos^4\,\alpha+sin^4\,\alpha=1$.

3.24 $\frac{(sin\frac{\alpha}{2}+cos\frac{\alpha}{2})^2}{sin\,\alpha+1}=1$.

Завдання 4. Обчислити

4.1 $sin(60° - \alpha)$, якщо $sin\,\alpha = 0{,}5; 90° < \alpha < 180°$

4.2 $cos(30° + \alpha)$, якщо $cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; 180° < \alpha < 270°$

4.3 $cos(\alpha + \beta)$, якщо $sin\,\alpha = -0{,}8, cos\,\beta = 0{,}6;$
$180° < \alpha < 270°, 270° < \beta < 360°$

4.4 $cos(\alpha - \beta)$, якщо $sin\,\alpha = -0{,}6, cos\,\beta = 0{,}6;$
$180° < \alpha < 270°, 270° < \beta < 360°$

4.5 $sin(\alpha + \beta)$, якщо $sin\,\alpha = \frac{3}{5}, cos\,\beta = -\frac{12}{13};$
$90° < \alpha < 180°, 180° < \beta < 270°$

4.6 $sin(\alpha - \beta)$, якщо $sin\,\alpha = \frac{4}{5}, cos\,\beta = -\frac{5}{13};$
$270° < \alpha < 360°, 90° < \beta < 180°$

4.7 $sin(\alpha - \beta)$, якщо $cos\,\alpha = 0{,}6, cos\,\beta = 0{,}8;$
$270° < \alpha < 360°, 0° < \beta < 90°$

4.8 $cos(\alpha + \beta)$, якщо $sin\,\alpha = 0{,}6, sin\,\beta = 0{,}8;$
$90° < \alpha < 180°, 0° < \beta < 90°$

4.9 $sin\left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha\right) \cdot sin\left(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha\right) - cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha\right) \cdot cos\left(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha\right)$,

4.10 $-sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3\alpha\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + 3\alpha\right) + sin\left(\frac{\pi}{3} + 3\alpha\right) \cdot cos\left(\frac{5\pi}{6} + 3\alpha\right)$.

4.11 $sin\,2\,\alpha$, якщо $sin\,\alpha = -0{,}6; 180° < \alpha < 270°$,

4.12 $sin\,2\,\alpha$, якщо $sin\,\alpha = -0{,}8; 270° < \alpha < 360°$.

4.13 $cos\,2\,\alpha$, якщо $sin\,\alpha = -0{,}8; 180° < \alpha < 270°$,

4.14 $cos\,2\,\alpha$, якщо $sin\,\alpha = 0{,}6; 270° < \alpha < 360°$.

4.15 $\frac{sin^2\alpha - 3\,cos^2\alpha}{2\,sin^2\alpha + cos^2\alpha}$, якщо $tg\alpha = 3$,

4.16 $sin^4\alpha - cos^4\alpha$, якщо $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

1.6.Доведення тригонометричних нерівностей

Доведення справедливості тригонометричних нерівностей, що зв’язують значення тригонометричних функцій на всій числовій осі або на деякому її проміжку, звичайно ґрунтується на дослідженні властивостей функцій: монотонності, обмеженості, тощо. Крім того при доведенні справедливостей тригонометричних нерівностей використовуються алгебраїчні нерівності, що встановлюють зв'язок між середнім геометричним і середнім арифметичним двох або декількох додатних чисел.

Типова помилка, яку роблять при доведенні нерівностей, полягає в тому, що нерівність перетворюють і приходять до очевидної, після чого роблять висновок про істинність вихідної нерівності.

Це логічна помилка: з того, що отримана правильна нерівність, зовсім не обов'язково випливає, що вихідна нерівність істинна.

Логічно правильно проводити міркування в зворотному порядку. Необхідно взяти деяку очевидну нерівність і провести над нею такі перетворення, які призведуть до тієї нерівності, яку вимагають довести. Залишається головне питання: з якої нерівності треба виходити і як її перетворювати, щоб прийти до шуканої нерівності?

Для відповіді на нього треба провести пошук доведення, тобто перетворення запропонованої нерівності, яке приводить нас до очевидної, а потім взяти цю нерівність і довести її у зворотному порядку.

Але частіше роблять дещо інакше. Якщо в процесі пошуку доведення до очевидного ми кожен раз замінювали нерівність на рівносильну, підкреслюючи це, то остання нерівність рівносильна вихідній, а тому з її справедливості відразу випливає справедливість вихідної нерівності і зворотній хід доведення непотрібний (Гайштут, 1997).

Приклад 1.1. Довести нерівність $\sin 32^{\circ} < \operatorname{tg} 30^{\circ}$ без обчислюваних засобів.

Розв'язання

Перетворимо дану нерівність: $\sin 32^{\circ} < \operatorname{tg} 30^{\circ} \Leftrightarrow \sin 32^{\circ} < \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin^2 32^{\circ} < \frac{1}{3}$. Скористаємось формулами пониження степеня:

$\frac{1-\cos 64^\circ}{2} < \frac{1}{3}$, $\cos 64^\circ > \frac{1}{3}$, $\cos^2 64^\circ > \frac{1}{9}$, $\frac{1+\cos 128^\circ}{2} > \frac{1}{9}$, $\frac{1-sin\,38^\circ}{2} > \frac{1}{9}$, $sin\,38^\circ < \frac{7}{9}$. З огляду на ланцюжок нерівностей $\sin 38^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{9}$ дана нерівність справедлива.

Приклад 1.2. Довести нерівність

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} \le \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x}, \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Розв’язання

Оцінимо ліву частину даної нерівності. Нехай $A = \sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} > 0$. Тоді

$A^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\cos x - \cos^2 x} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} + \cos x - \cos^2 x - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} - (-\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{4})} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} - (\cos x - \frac{1}{2})^2} \le \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, звідси випливає, що $A \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Оцінимо праву частину даної нерівності, використовуючи нерівність Коші, що встановлює зв'язок між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел:

$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x} \ge 2\sqrt{\frac{2}{3}\sin x \cdot \frac{1}{2\sin x}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Таким чином, вихідна нерівність нерівність правильна.

Приклад 1.3. ABC – гострокутний трикутник. Довести, що числа $a\sin A$, $b\sin B$, $c\sin C$ – сторони деякого трикутника.

Розв’язання

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що з величин $a\sin A$, $b\sin B$, $c\sin C$ найбільшою є $c\sin C$. Доведемо тепер, що $a\sin A + b\sin B > c\sin C$.

Використовуючи теорему синусів $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, отримаємо

$2R\sin^2 A + 2R\sin^2 B > 2R\sin^2 C \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B > \sin^2 C \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B > \sin^2(A+B)$. Скористаємось формулами пониження степеня $\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} > \frac{1-\cos 2(A+B)}{2}$,

$$1 + \cos 2(A+B) > \cos 2A + \cos 2B,$$

$$2\cos^2(A+B) > 2\cos(A+B)\cos(A-B) \Leftrightarrow \cos^2(A+B) > \cos(A+B)\cos(A-B).$$

Остання нерівність для гострокутного трикутника ABC справедлива, оскільки

$\cos(A+B) < 0$, $\cos(A-B) > 0$ (оскільки $0° < C < 90°$, $90° < A+B < 180°$) (Гайштут, 1997).

2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

2.1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції.

Розв’язати тригонометричне рівняння – означає знайти множину значень невідомого, що задовольняють його (Нелін проф. рівень, 2018).

Найпростіші тригонометричні рівняння (Нелін проф. рівень, 2018).

Рівняння виду $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a,$ де x – невідома величина, a – довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Рівняння $\sin x = a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

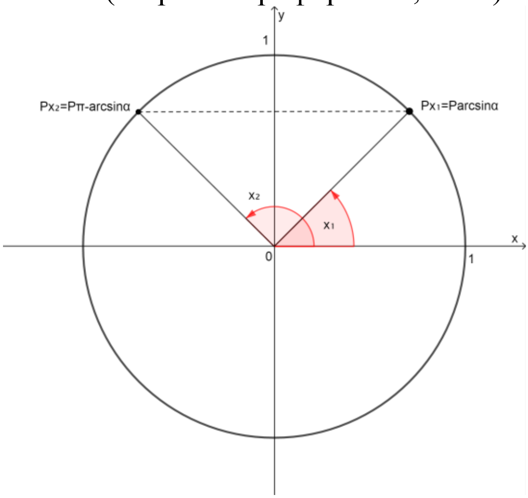


Рис. 2.1. Рівняння $sinx = a$ на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \sin x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z; \\ x_2 = \pi - arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z. \end{cases}$

Ці формули можна об’єднати в одну: $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z.$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|sinx| \leq 1$.
Окремі випадки
Якщо $a = -1$, $sinx = -1$.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a = 0$, $sinx = 0$.

$$x = k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a = 1$, $sinx = 1$.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Зауваження:

1) $\arcsin(-\alpha) = -arcsin\alpha$.

2) Якщо $0 < \alpha < 1$,то рівняння $sinx = -\alpha$ має таку множину розв'язків:

$x = (-1)^{k+1}\arcsin(-a) + \pi k, k\epsilon Z$.

Рівняння $cosx = a$ (Бурда, 2018).

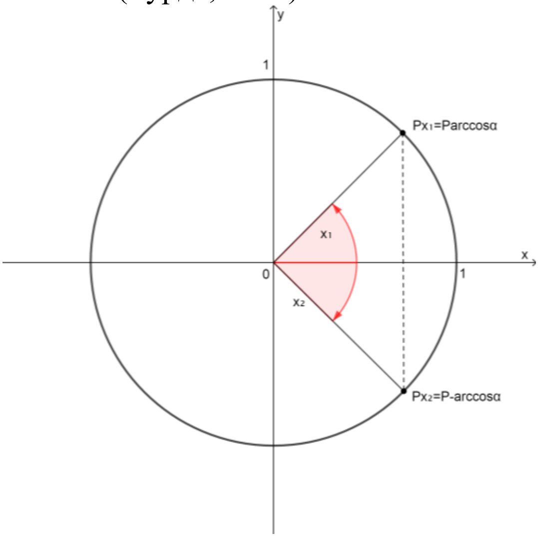


Рис. 2.2. Рівняння $cosx = a$. на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \cos x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z; \\ x_2 = -arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z. \end{cases}$

Ці формули можна об’єднати в одну: $x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв’язків немає, бо $|cosx| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a= -1$, $cosx = -1$.

$$x = \pi + 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a= 0$, $cosx = 0$.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a= 1$, $cosx = 1$.

$$x = 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Зауваження: $\arccos(-\alpha) = \pi - arccos\alpha$.

Рівняння $tgx = a$ і $ctgx = a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

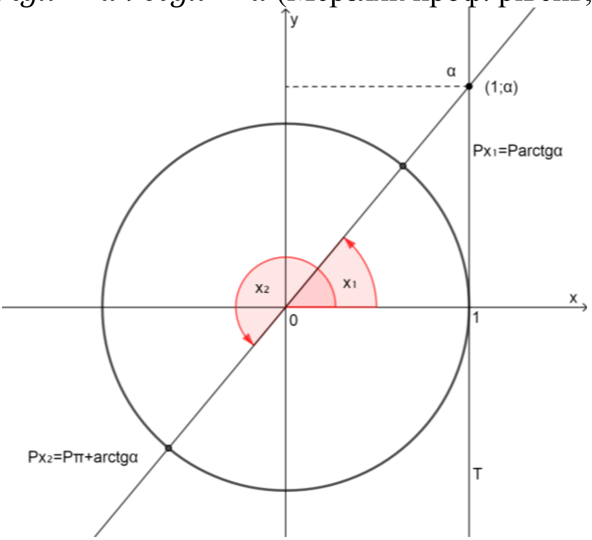


Рис. 2.3. Рівняння $tgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут α такий, що $tg\, x = a$. Це кут $\alpha = arctga$. Враховуючи періодичність функції $y = tg\, x$, одержуємо формулу коренів рівняння $tg\, x = a$: $x = arctga + \pi k, k\epsilon Z$.

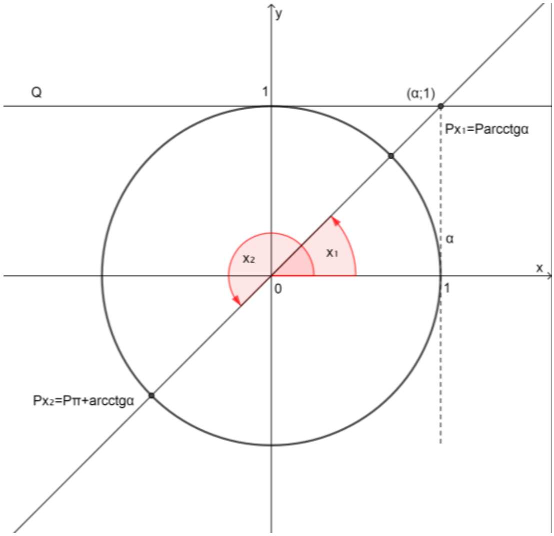


Рис. 2.4. Рівняння $ctgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(0;\pi)$ існує тільки один кут a такий, що $ctgx = a$. Це кут $\alpha = arcctga$. Враховуючи періодичність функції $y = ctgx$, одержуємо формулу коренів рівняння $ctg\,x = a$: $x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z$.

Окремі випадки

Якщо $tgx = 0$, то $x = \pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Зауваження:

1) $arctg(-\alpha) = -arctg\alpha$,

2) $arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha$.

2.2. Методи та способи розв'язування тригонометричних рівнянь

I. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Приклад 2.1. $sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in Z$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z; \frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Приклад 2.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; 3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; 3x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Приклад 2.3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою коренів рівняння $sina = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z; t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 2.4. $sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень,2018).

Розв’язання.

$$sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z;$$

$$x = \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z; x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1}+6k}, k \in Z$.

Приклад 2.5. $\sqrt{3}cosx + sinx = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$sin\frac{\pi}{3}cosx + cos\frac{\pi}{3}sinx = 1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.6. $cos4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Використовуючи формулу $x = \pm\arccos(b) + 2\pi n, n \in Z$, можемо записати:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;\ x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Приклад 2.7. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;\ x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.8. $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Отримаємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \arccos 0 + \pi n, n \in Z.$$

Тоді:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; 7x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n, n \in Z;$$

$$7x = \pm\frac{7\pi}{10} + \pi n, n \in Z; x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z$.

Приклад 2.9. $cos\pi x^2$ =1 (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\pi x^2 = 2\pi n, n \in Z;\ x^2 = 2n, n \in Z.$$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in N \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Приклад 2.10. $tg\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = arctg(-\sqrt{3}) + nk, k \in Z; \frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + nk, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z$.

Приклад 2.11. $ctg(\frac{2\pi}{3} - x) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$$ctg\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1; x - \frac{2\pi}{3} = arcctg1 + nk, k; \in$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + nk, k \in Z; x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z$.

Приклад 2.12. $tg2x = 5$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$2x = atctg5 + \pi k, k \in Z; x = 0{,}5arctg5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Відповідь. $0{,}5arctg5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Приклад 2.13. $ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою $x = arcctga + \pi k, k \epsilon Z$. маємо:

$$x = arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k \epsilon Z; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z$.

II. Спосіб розкладання на множники

Приклад 2.14. $sin2x - cosx = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin2x - cosx = 0; 2sinx \cdot cosx - cosx = 0; cosx(2sinx - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ sinx = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.15. $cos^2 2x - cos2x = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$cos^2 2x - cos2x = 0; cos2x \cdot (cos2x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos2x = 0, \\ cos2x = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $\pi k, k \in Z$.

Приклад 2.16. $tg^3 x = tgx$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$.

$$tg^3 x = tgx; tg^3 x - tgx = 0; tgx(tg^2 x - 1) = 0; tgx(tgx - 1)(tgx + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{c} tgx = 0, \\ tgx = 1, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z; \end{array}\right.$$

Об'єднавши множини розв'язки другого і третього рівнянь сукупності, остаточно отримаємо розв'язки вихідного рівняння:

$$x_1 = \pi n, n \in Z;\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z.$$

Відповідь. $\pi n, n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z$.

III. Спосіб розв'язання однорідних рівнянь

Приклад 2.17. $sinx - cosx = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx - 1 = 0; tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.18. $3sin^2x + sinx \cdot cosx - 2cos^2x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Значення x, при яких $cosx = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $cosx = 0$, то мала б виконуватись рівність $3sin^2x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $cos^2x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 24 = 25;\ \sqrt{D} = 5; a_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3};\ a_2 = \frac{-1+5}{6} = -1.$$

Повернемось до заміни:

1) $tgx = \frac{2}{3}; x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Відповідь. 1) $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.19. $sin^3x = cosx$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Помножимо праву час тину на рівняння на тригонометричну одиницю
$sin^2x + cos^2x$, отримаємо:

$$sin^3x = cosx \cdot (sin^2x + cos^2x); sin^3x = cosx \cdot sin^2x + cos^3x;$$
$$sin^3x - cosx \cdot sin^2x - cos^3x = 0.$$

Дістали однорідне рівняння третього степеня, відносно $sinx$ і $cosx$. У випадку $cosx = 0$, розв'язків, очевидно, немає.

Поділивши обидві частини останнього на $cos^3x \neq 0$, отримаємо:

$$tg^3x - tg^2x - 1 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді маємо:

$$y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи штучний спосіб:

$$y^3 - y^2 + y^3 - 1 = 0; y^2(y - 1) + (y - 1) \cdot (y^2 + y + 1) = 0;$$
$$(y - 1) \cdot (2y^2 + y + 1) = 0; y - 1 = 0; y = 1;$$

або

$$2y^2 + y + 1 = 0;$$
$$Д = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Отже, $2y^2 + y + 1 > 0$ для будь-якого $y \in R$. Рівняння дійсних коренів немає.

Повернемося до заміни:

$$tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.20. $7sin^2x - 8sinxcosx - 15cos^2x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Якщо $cosx = 0$, то з даного рівняння випливає, що $sinx = 0$. Але $cosx$ і $sinx$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $sin^2x + cos^2x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $cosx \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на cos^2x, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7sin^2x}{cos^2x} - \frac{8sinxcosx}{cos^2x} - \frac{15cos^2x}{cos^2x} = 0; 7tg^2x - 8tgx - 15 = 0.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = \frac{15}{7}. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -arctg\frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь.

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -arctg\frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

IV. Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

Приклад 2.21. $cos^2x - 5cosx = 6$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

$$cos^2x - 5cosx - 6 = 0.$$

Нехай $cosx = t$, де $|t| \leq 1$, тоді маємо:

$$t^2 - 5t - 6 = 0; t_1 = -1, t_2 = 6.$$

Корінь $t_2 = 6$ не задовольняє умову $|t| \leq 1$.

Повернемося до заміни:

$$cosx = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.22. $tgx - 2ctgx + 1 = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

$$tgx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} + 1 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$a - \frac{2}{a} + 1 = 0;\ \frac{a^2 + a - 2}{a} = 0; \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = 1, \end{array} \right. \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

1) $tgx = -2; x = -arctg2 + \pi n, n \in Z;$
2) $tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Відповідь.1) $x = -arctg2 + \pi n, n \in Z;$

2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.23. $2sin^2x + cos4x - 2 = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Можна записати: $1 - cos2x + 2cos^2 2x - 1 - 2 = 0.$

Звідси $2cos^2 2x - cos2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $cos2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши його, отримаємо:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $cos2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm\frac{1}{2} arccos\frac{1 - \sqrt{17}}{4} \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{1}{2} arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4} \pi n, n \in Z.$

Приклад 2.24. $sinx - 3cos2x = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $cos2x = 1 - 2sin^2x$, перетворимо дане рівняння:

$sinx - 3(1 - 2sin^2x) - 2 = 0; 6sin^2x + sinx - 5 = 0.$

Нехай $sinx = t$. Отримаємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0.$

Звідси $t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}.$

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} sinx = -1, \\ sinx = \dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо:

$$\left[\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n arcsin\dfrac{5}{6} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=(-1)^n arcsin\frac{5}{6}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$

V. Перетворення рівняння за допомогою тригонометричних формул

1. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад 2.25. $\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

$$\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1;$$

$$2sin\frac{15° + x + 45° - x}{2} \cdot cos\frac{15° + x - 45° + x}{2} = 1;$$

$$2sin30° \cdot \cos(x - 15°) = 1; 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15°) = 1; \cos(x - 15°) = 1;$$

$$x - 15° = 360° \cdot n, n \in Z; x = 15° + 360° \cdot n, n \in Z.$$

Відповідь. $15° + 360° \cdot n, n \in Z$.

Приклад 2.26. $sin7x - sinx = cos4x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin7x - sinx = cos4x; 2sin\frac{7x - x}{2} \cdot cos\frac{7x + x}{2} = cos4x;$$

$$2sin3x \cdot cos4x - cos4x = 0; cos4x(2sin3x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos4x = 0, \\ sin3x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z, \\ 3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, k\in Z. \end{array}\right.$

2. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад 2.27. $cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}; \frac{1 + cos3x}{2} = \frac{1}{4}; 1 + cos3x = \frac{1}{2}; cos3x = -\frac{1}{2};$$

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z; 3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

Приклад 2.28. $0{,}5(cos5x + cos7x) - cos^2 2x + sin^2 3x = 0$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

$$0{,}5(cos5x + cos7x) - cos^2 2x + sin^2 3x = 0;$$

$$0{,}5(cos5x + cos7x) - \frac{1 + cos4x}{2} + \frac{1 - cos6x}{2} = 0;$$

$$2cos6x \cdot cosx - cos4x - cos6x = 0; 2cos6x \cdot cosx - 2cos5x \cdot \cos(-x) = 0;$$

$$2cos6x \cdot cosx - 2cos5x \cdot \cos\ x = 0; 2\cos(cos6x - cos5x) = 0;$$

$$-4cosx \cdot sin\frac{11x}{2} \cdot sin\frac{x}{2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{c} cosx = 0, \\ sin\frac{11x}{2} = 0, \\ sin\frac{x}{2} = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{11x}{2} = \pi k, \\ \frac{x}{2} = \pi m; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z, \\ x = 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки корені третього рівняння сукупності містяться серед коренів другого рівняння, то остаточним розв'язком даного рівняння будуть групи коренів:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;\ x_2 = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;\ \frac{2\pi k}{11}, k \in Z.$

3. Рівняння, що розв'язуються за допомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Приклад 2.29. $sin4x = sin3x$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} 4x + 3x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ 4x - 3x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 7x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z, \\ x=2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

Приклад 2.30. $tg3x \cdot tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $tg3x$.

Це можливо, бо з умови слідує, що $tg3x \neq 0$.

Отже,

$$tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{tg3x};\ tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = ctg3x; tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) (*)$$

На основі умови рівності тангенсів двох кутів, отримаємо:

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi k, k \in Z; 8x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z.$$

При кожному значенні x з цієї множини розв'язків кожна з частин рівняння $(*)$ існує.

Відповідь. $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z.$

4. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад 2.31. $sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0; -(cos6x \cdot cosx - sin6x \cdot sinx) = 0;$$

$$-cos7x = 0; 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z.$

Приклад 2.32. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$sin\frac{\pi}{4} \cdot cosx + cos\frac{\pi}{4} \cdot sinx + cosx \cdot cos\frac{\pi}{4} + sinx \cdot sin\frac{\pi}{4} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot cosx + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot sinx + cosx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + sinx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$2cosx + 2sinx = 0; cosx + sinx = 0.$$

Маємо однорідне рівняння І степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx + 1 = 0; tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

5. Рівняння, що розв'язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад 2.33. $sin2x \cdot sin6x = sin3x \cdot sin5x$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(cos4x - cos8x) = \frac{1}{2}(cos2x - cos8x); cos4x - cos8x = cos2x - cos8x;$$

$$cos4x - cos2x = 0; -2 \cdot sin3xsinx \cdot= 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} sin3x = 0, \\ sinx = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3x = \pi n, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки множина розв'язків другого рівняння сукупності включається в множину розв'язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.34. $8sin5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = 1$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

$$sin5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = \frac{1}{8}; sin5x \cdot \frac{1}{2}(cos10x - cos\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{8};$$

$$sin5x \cdot (cos10x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}; 2sin5x \cdot cos10x + sin5x = \frac{1}{2};$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (sin15x - sin5x) + sin5x = \frac{1}{2}; sin15x = \frac{1}{2};$$

$$15x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z$.

VI. Введення допоміжного кута

Приклад 2.35. $\sqrt{3}sinx - cosx = 1$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, a^2 + b^2 = 4, c^2 = 1, a^2 + b^2 > c^2.$$

Отже, рівняння має розв'язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ за дужки і отримаємо:

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx-\frac{1}{2}cosx\right)=1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}sinx-\frac{1}{2}cosx=\frac{1}{2}.$$

Використаємо заміну $\frac{\sqrt{3}}{2}=cos\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}=sin\frac{\pi}{6}$.

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$sinx\cdot cos\frac{\pi}{6}-cosx\cdot sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$x-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z;x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$.

VII. Метод раціоналізації

Приклад 2.34. $5sinx-cosx=5$ (Смоляков, 2004).

Розв’язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях x. Здійснюючи заміну за допомогою формул 81, 82, отримаємо рівняння:

$$5\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=5;$$

яке визначено при $x\neq\pi(2n+1),n\in Z$, тобто при переході від $sinx$ і $cosx$ до $tg\frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x=\pi(2n+1),n\in Z$.

Нехай $tg\frac{x}{2}=t$, тоді отримаємо рівняння:

$$5\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=5;10t-1+t^2=5+5t^2;4t^2-10t+6=0;$$

$$2t^2-5t+3=0;\ t_1=1,t_2=\frac{3}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{aligned}&tg\frac{x}{2}=1,\\&tg\frac{x}{2}=\frac{3}{2};\end{aligned}\right.\ \left[\begin{aligned}&\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\&\frac{x}{2}=arctg\frac{3}{2}+\pi k;\end{aligned}\right.\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in Z,\\&x=2arctg\frac{3}{2}+2\pi k,k\in Z.\end{aligned}\right.$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n+1)$,
$n \in Z$.

Так як 2π – період $sinx$ і $cosx$, то достатьо перевірити значення $x = \pi$:

$$5sin\pi - cos\pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n+1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

VIII. Зведення до однорідного відносно $sinx$ та $cosx$ (sin^2x та cos^2x).

Приклад 2.35. $4sin^2x - sin2x = 3$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

$$4sin^2x - 2sinxcosx = 3(cos^2x + sin^2x), sin^2x - 2sinxcosx - 3cos^2x = 0.$$

Так як $cosx = 0$, то поділивши обидві частини рівняння на cos^2x, отримаємо

$$tg^2x - 2tgx - 3 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді

$$y^2 - 2y - 3 = 0, y_1 = 3, y_2 = -1.$$

Повернемося до заміни:

$$tgx = 3, x = arctg3 + \pi n, n \in Z,$$

$$tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg3 + \pi n, n \in Z, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

IX. Піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Приклад 2.36. $sinx - cosx = 0$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(sinx - cosx)^2 = 0, sin^2x - 2sinxcosx + cos^2x = 0,$$

$$1 - sin2x = 0, sin2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

X. Метод заміни змінних

Приклад 2.37. $sinx - 2sinx \cdot cosx = 1 - cosx$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sinx + cosx - 2sinx \cdot cosx - 1 = 0.$$

Нехай $sinx + cosx = t$, де $|t| \le \sqrt{2}$, тоді

$$2sinx \cdot cosx = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0;\ t^2 - t = 0; t^2(t-1) = 0; t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 0, \\ sinx + cosx = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x + \frac{\pi}{4} = \pi n, nZ \in, \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.38. $sin^4 2x + cos^4 2x = sin2x \cdot cos2x$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin^4 2x + cos^4 2x = sin2x \cdot cos2x;$$

$$(sin^2 2x + cos^2 2x)^2 - 2sin^2 2x \cdot cos^2 2x = sin2x \cdot cos2x.$$

Нехай $sin2x \cdot cos2x = t$, Зрозуміло, що $|t| \le \frac{1}{2}$.

Отримаємо:

$$1 - 2t^2 = t;\ 2t^2 + t - 1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9;\ \sqrt{Д} = 3, t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2};\ t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Корінь $t_2 = -1$ не задовольняє умову $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Отже, повернемося до заміни:

$$sin2x \cdot cos2x = \frac{1}{2}; sin4x = 1; 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

XI. Методи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь

1. Дробово-раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад 2.39. $\frac{sin^4 x - 1}{cos^4 x} = 1$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $cosx \neq 0; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$sin^4 x - 1 = cos^4 x; sin^4 x - cos^4 x = 1; (sin^2 x - cos^2 x)(sin^2 x + cos^2 x) = 1;$$
$$-(cos^2 x - sin^2 x) = 1; cos2x = -1; 2x = \pi + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Оскільки множина розв'язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

2. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад 2.40. $4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0; arctg(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$x^2-3x-3=1; x^2-3x-4=0; x_1=-1;\ x_2=4.$

Відповідь. $-1;4.$

Приклад 2.41. $arcsin4x+\arcsin(1-4x)=\frac{\pi}{3}$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1-4x))=\sin\left(\frac{\pi}{3}-arcsin4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1-4x=sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos(arsin4x)-cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin(arcsin4x);$$

$$1-4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-16x^2}-\frac{1}{2}\cdot4x; 2-4x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-16x^2};$$

$$4-16x+16x^2=3-48x^2; 64x^2-16x+1=0;\ (8x-1)^2=0; x=0{,}125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x=0{,}125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. 0,125

3. Розв'язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад 2.42. $cos3x+cos\frac{5x}{2}=2$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

Оскільки $|cos3x|\le1$ і $\left|cos\frac{5x}{2}\right|\le1$, то

$$\left|cos3x+cos\frac{5x}{2}\right|\le2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}cos3x=1,\\ cos\frac{5x}{2}=1;\end{cases}\begin{cases}3x=2\pi n,\\ \frac{5x}{2}=2\pi k;\end{cases}\begin{cases}x=\frac{2\pi n}{3}, n\in Z,\\ x=\frac{4\pi k}{5}, k\in Z.\end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3}=\frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$;

$$5\pi n = 6\pi k; 5n = 6k.$$

Маємо: $n = 6m; k = 5m, m \in Z$.

Отже, $x = 4\pi m, m \in Z$.

Відповідь. $4\pi m, m \in Z$.

Приклад 2.43. $sin^n x + cos^n x = 1, n \in Z$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то рівняння зводиться до вигляду $sinx + cosx = 1$ (IX тип)

Якщо $n = 2$ маємо тотожність $sin^2 x + cos^2 x = 1$, де x – будь-яке дійсне число.

При $n \geq 3$, якщо $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$, маємо

$$\begin{cases} sin^n x < sin^2 x, \\ cos^n x < cos^2 x, \end{cases}$$

бо показникова функція з основою, меншою за одиницю, спадна. Додавши почлено отримані нерівності, знайдемо, що:

$sin^n x + cos^n x < 1, n \geq 3$, при всіх x, для яких $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$.Таким чином:

a) Якщо n – непарне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = 1, \end{cases}$

з яких відповідно отримаємо розв'язки даного рівняння $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ або $x = 2\pi n, n \in Z$.

b) Якщо n – парне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = \pm 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = \pm 1, \end{cases}$

з яких отримуємо розв'язки даного рівняння у вигляді $x = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$.

4. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами

Приклад 2.44. $cos3x = m \cdot cosx$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу 20, отримаємо:

$$4cos^3x - 3cosx - mcosx = 0; cosx \cdot (4cos^2x - 3 - m) = 0;$$

$$cosx = 0 \text{ або } 4cos^2x - 3 - m = 0.$$

1) $cosx = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

2) $4cos^2x - 3 - m = 0; 4 \cdot \frac{1+cos2x}{2} - 3 - m = 0;$

$$2 + 2cos2x - 3 - m = 0; 2cos2x = m + 1; cos2x = \frac{m+1}{2}.$$

$2x = \pm arccos\frac{m+1}{2} + 2\pi n, n \in Z,$ якщо $-1 \le \frac{m+1}{2} \le 1;$

$x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \le \frac{m+1}{2} \le 1.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$ $\pm\frac{1}{2}arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \le \frac{m+1}{2} \le 1.$

Приклад 2.45. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння
$sin^6x + cos^6x = a$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язати.

Здійснюючи перетворення виразу, що стоїть у лівій частині рівняння:

$$sin^6x + cos^6x = (sin^2x + cos^2x)^3 - 3sin^2x \cdot cos^2x(sin^2x + cos^2x) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}sin^2 2x = 1 - \frac{3(1 - cos4x)}{8} = \frac{5 + 3cos4x}{8}.$$

Отже, $\frac{5+3cos4x}{8} = a;$

$$3cos4x = 8a - 5;$$

$$cos4x = \frac{8a-5}{3}.$$

Це рівняння має розв'язки:

$$x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

якщо $-1 \le \frac{8a-5}{3} \le 1$, тобто $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

При інших значеннях параметра a розв'язки немає

Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$, то розв'язків немає;

якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

XII. Розв'язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Приклад 2.46. $sinx = 1 - x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = sinx$ і $y = 1 - x$ (див. рис. 2.5.).

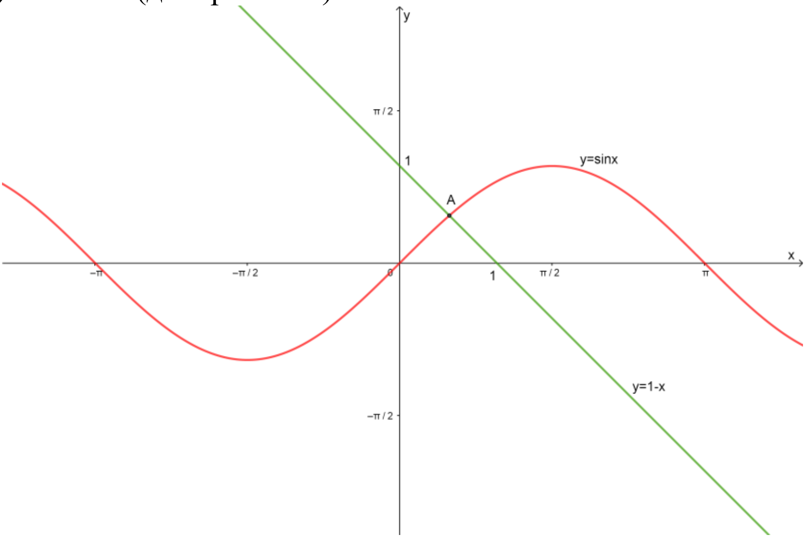


Рис. 2.5. Графіки функцій $y = sinx$ і $y = 1 - x$

Ці графіки перетинаються в одній точці A. Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0{,}5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0{,}5 \rightarrow sinx \approx 0{,}4794, 1 - 5 = 0{,}5$. Отже, $sinx < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $sinx = 1 - x$ буде більший ніж 0,5.

Перевіримо значення $x = 0{,}6$. Маємо: $sinx \approx 0{,}5446, 1 - x = 0{,}4$.

Отже, $sinx > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь x_0 повинен бути менший, ніж 0,6.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0{,}5; 0{,}6]$. Тому з точністю до $0{,}1$:

$x_0 \approx 0{,}5$ (з недостачею), $x_0 \approx 0{,}6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0{,}5$

XIII. Зведення рівняння до рівносильної системи

Приклад 2.47. $\frac{2sin^2x+3sinx}{1-cosx} = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2sin^2x + 3sinx = 0, \\ 1 - cosx \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2sinx(sinx + 1{,}5) = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = -1{,}5, \end{array}\right. \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} sinx = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками системи (див. рис. 2.6.). Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$.

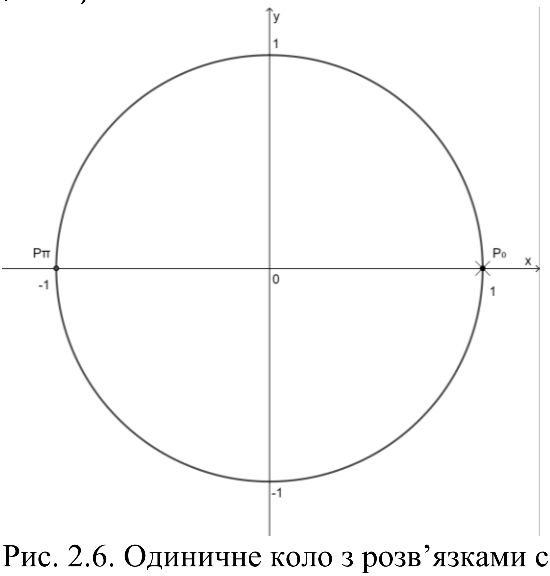


Рис. 2.6. Одиничне коло з розв'язками системи

Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.
Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

2.3. Практичні завдання до пунктів 2.1-2.2. Розв’язування тригонометричних рівнянь та обернених до них

Завдання для аудиторного (непарні номери) та самостійного (парні номери) виконання

Розв’язати рівняння:

1. $sin^2x + 4\,cosx = 2{,}75.$
2. $0{,}5\,sin\,2\,x + cos^2\,x = 0$
3. $tgx + 3ctgx = 4.$
4. $4\,sin^2\,x + 4\,sin\,x - 3 = 0$
5. $1 + cosx - 2cos\frac{x}{2} = 0.$
6. $\sqrt{1 + cos\,x} = sin\,x$
7. $sin2x - sinx = 0.$
8. $sin\,2\,x + tgx = 0$
9. $cos^2x - 2cosxsinx = 0.$
10. $2\,sin^2\,x - \sqrt{3}\,sin\,2\,x = 0$
11. $tgx(sinx - 1) = 0.$
12. $1 - cos\,x - 2\,sin\frac{x}{2} =$
13. $2sin^2x - 5sinx + 2 = 0.$
14. $3 - 3\,cos\,x = 2\,sin^2\,x$
15. $\cos(arc\cos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$
16. $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$
17. $(1 + cos\,4\,x)\,sin\,2\,x = cos^2\,2\,x$
18. $cos^2x + cos^22x + cos^23x = \frac{3}{2}.$
19. $5\,sin^2\,x + 4\,sin(\frac{\pi}{2} + x) = 4$
20. $cos2xsin4x = cosxsin5x.$
21. $tgx + tg3x = tg4x$
22. $3sinx + 4cosx = 5.$
23. $\frac{2\,sin^2\,x + 3\,sin\,x}{1 - cos\,x} = 0$

24. $8cosx + 15sinx = 17.$

25. $sin^4 x + cos^4 x = \frac{5}{8}$

26. $sinx - cosx = 2x - \frac{1}{2}.$

27. $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 + 4x + 6$

2.4. Системи тригонометричних рівнянь

Приклад 2.48. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ sin\,x + sin\,y = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Скористаємось формулою перетворення суми тригонометричних функцій у добуток, отримаємо:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ 2sin\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

Врахувавши, що $x + y = \frac{\pi}{3}$, маємо:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ 2sin\frac{\pi}{6} \cdot cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ x - y = 4\pi k, \qquad k\epsilon Z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k \end{cases}, \quad k\epsilon Z.$$

Відповідь: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi k),\ \ k\epsilon Z.$

Приклад 2.49. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Врахувавши, що $x - y = \frac{\pi}{6}$, маємо:

$$\frac{1}{2}(\sin(y - x) + \sin(y + x)) = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin(-\frac{\pi}{6}) + \sin(y + x)\right) = \frac{1}{4}$$

$\sin(y + x) = 1;\ y + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k\epsilon Z.$

Отже, система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ y + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k\epsilon Z. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}, \quad k\epsilon Z.$

Відповідь: $(\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi k),\ \ k\epsilon Z.$

Приклад 2.50. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Перетворимо друге рівняння до вигляду $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} =$
1. Оскільки $x + y = \frac{\pi}{4}$, то маємо: $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Перетворимо добуток у суму, отримаємо:

$$\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos(x-y)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y) = \sqrt{2}; \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$x - y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k\epsilon Z$. Перепишемо дане рівняння у вигляді системи з двох сукупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{c} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{c} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y = -\pi k \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{c} x = \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} - \pi k \end{array}\right. \end{cases}, \ k\epsilon Z.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\pi k\right), (\pi k;\ \frac{\pi}{4} - \pi k)\ \ k\epsilon Z.$

Приклад 2.51. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25 \\ \cos x \sin y = 0{,}75 \end{cases}$.

Розв'язання.

Додамо і віднімемо рівняння системи і отримаємо:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0{,}5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -0{,}5 \end{cases};$$

Для того, щоб не втратити розв'язки використаємо два параметри , n і k.

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z \\ x-y=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x-y=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x-y=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\pi(k+n) \\ y=\frac{\pi}{3}+\pi(k-n) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n) \\ y=\frac{2\pi}{3}+\pi(k-n) \end{array}\right. \end{cases},$$

$$n\epsilon Z, k\epsilon Z.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x-y=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x-y=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \end{cases}, \quad n\epsilon Z, k\epsilon Z.$$

Бачимо, що розв'язки отриманої сукупності є підмножиною множини розв'язків вихідної системи. Так, наприклад, пара $\left(\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком системи рівнянь, проте не є розв'язком отриманої сукупності.

Відповідь: $(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-n))$, $(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(k-n))$, $n\epsilon Z, k\epsilon Z$ (Мерзляк, 2010).

Приклад 2.52 Знайти всі значення параметра а, при кожному з яких система рівнянь

$\begin{cases} \sin x\cos 2y=a^2+1 \\ \cos x\sin 2y=a \end{cases}$ має розв'язки. Знайти ці розв'язки (Ясінський,).

Розв'язання.

Якщо $a \neq 0$, то перше рівняння системи не має розв'язків, оскільки $a^2 + 1 > 1, a\sin x \cos 2y \leq 1$. Знайдемо розв'язки системи, якщо $a = 0$.

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1 \\ \cos x \sin 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \cos 2y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \sin x \cos 2y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ (-1)^k \cos 2y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi k}{2} \\ (-1)^k \sin x = 1 \end{cases} \end{array} \right., \quad k \epsilon Z.$$

Рівняння $\cos 2y = (-1)^k$ має розв'язки $2y = \pi n + 2\pi l, y = \frac{\pi n}{2} + \pi l \;\; n\epsilon Z, l\epsilon Z$.

Рівняння $\sin x = (-1)^k$ має розв'язки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi m, k\epsilon Z, m\epsilon Z$.

Розв'язки обох систем рівнянь збігаються.

Відповідь: $a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, y = \frac{\pi n}{2} + \pi l, n\epsilon Z, l\epsilon Z$.

Приклад 2.53 Вилучити α і β з системи рівностей

$$\begin{cases} m\cos^2\alpha + n\cos^2\beta = 1 \\ m\sin\alpha = n\sin\beta \\ m\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha + n\,\mathrm{ctg}\,2\beta = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Загальний метод вилучення параметрів із системи двох рівнянь полягає в тому, що розвязують одне з даних рівнянь відносно параметра (якщо це можливо) і знайдене для нього значення підставляють в друге з даних рівнянь. Але застосування деяких штучних прийомів дає іноді можоивість отримати результат набагато простіше.

При вилучення параметрів з даної системи рівнянь ми отримуємо необхідні (але не достатні) умови сумісної даної системи, тому цілком допустимими є такі перетворення, що можуть дати стронні корені (наприклад, піднесення обох частин рівняння до квадрату).

Запишемо рівняння системи у вигляді

$$\begin{cases} m(1-\sin^2\alpha)+n(1-\sin^2\beta)=1 \\ m^2\sin^2\alpha=n^2\sin^2\beta \\ m\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+n\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m\sin^2\alpha+n\sin^2\beta=m+n-1 \\ m^2\sin^2\alpha-n^2\sin^2\beta=0 \\ \dfrac{m(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}+\dfrac{n(1-\sin^2\beta)}{\sin^2\beta}=1 \end{cases}.$$ Виключивши з перших рівнянь системи спочатку $\sin^2\alpha$, а потім $\sin^2\beta$, отримаємо:

$n(m+n)\sin^2\beta=m(m+n-1)$,

$m(m+n)\sin^2\alpha=n(m+n-1)$, звідки $\sin^2\beta=\frac{m(m+n-1)}{n(m+n)}$ і $\sin^2\alpha=\frac{n(m+n-1)}{m(m+n)}$. Підставляючи у третє рівняння, отримаємо: $(m^2-n^2)^2=-mn$.

Відповідь: $(m^2-n^2)^2=-mn$.

2.5. Практичні завдання до пункту 2.4. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь та змішаних рівнянь

Завдання для аудиторного (непарні номери) та самостійного (парні номери) виконання

1. Розв'язати систему рівнянь:

1.1 $\begin{cases} sin\,x+sin\,y=1 \\ x+y=\pi \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} cos\,x+cos\,y=1 \\ x+y=2\pi \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} cos\,x\,cos\,y=0{,}75 \\ sin\,x\,sin\,y=0{,}25 \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} sin\,x\,cos\,y = 0{,}75 \\ sin\,y\,cos\,x = 0{,}25 \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y = \frac{1}{2} \\ sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y = 1 \end{cases}$

1.6 $\begin{cases} sin\,x\,sin\,y - cos\,x\,cos\,y = -1 \\ sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y = \frac{1}{2} \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 4y + \sqrt{3}\cos x = -0{,}5 \\ 28y + 4\sqrt{3}\cos x = 1 \end{cases}$

1.8 $\begin{cases} 2\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 3{,}5 \\ 7\sin x + \sqrt{3}y = 10 \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x - \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} y - x = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

1.11 $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2} \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25 \\ x + y = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

1.1. Найпростіші тригонометричні нерівності

Рівності, які містять зміну під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними.

Наприклад, $\cos x \leq \frac{1}{3}; 5sin^2x + 3\cos x > 6$ тощо.

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a, \cos x <> a, tg\ x <> a, ctg <> a$.

1. Нерівності $sinx > a; sinx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

$$sinx > a$$

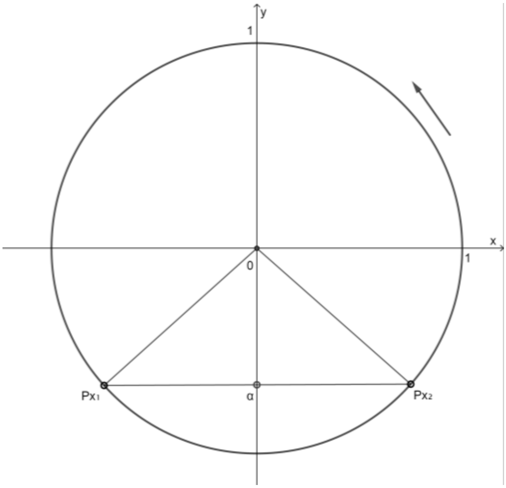


Рис. 3.1. Нерівність $sinx > a$ на одиничному колі

$x_1 = arcsina, x_2 = \pi - arcsina, x_1 < x_2$.

Якщо $a < -1$, то $x \in R$. Якщо $-1 \leq a < 1$, то $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$. Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

$$sinx < a$$

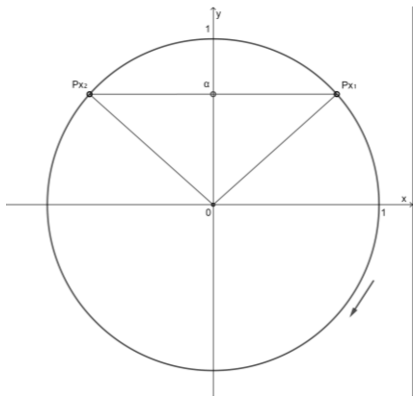


Рис. 3.2. Нерівність $sinx < a$ на одиничному колі

$x_1 = arcsina, x_2 = -\pi - arcsina, x_1 > x_2$.

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a \geq 1$, то $x \in R$.

2. Нерівності $cosx < a$; $cosx > a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

$cosx < a$

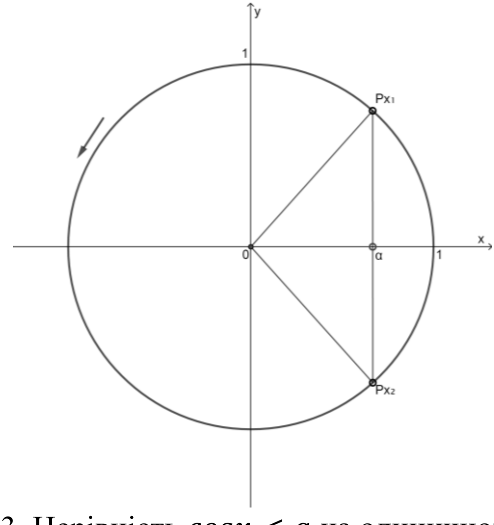


Рис. 3.3. Нерівність $cosx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arccosa, x_2 = 2\pi - arccosa, x_1 < x_2.$$

Якщо $a \leq -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то $arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a > 1$, то $x \in R$.

$$cosx > a$$

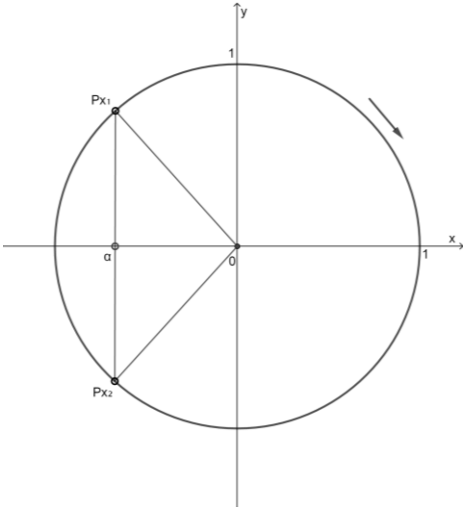


Рис. 3.4. Нерівність $cosx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcscosa, x_2 = -arccosa, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-arccosa + 2\pi n < x < arcscosa + 2\pi n, n \in Z$. Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

3. Нерівність $tgx > a; tgx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

$$tgx > a$$

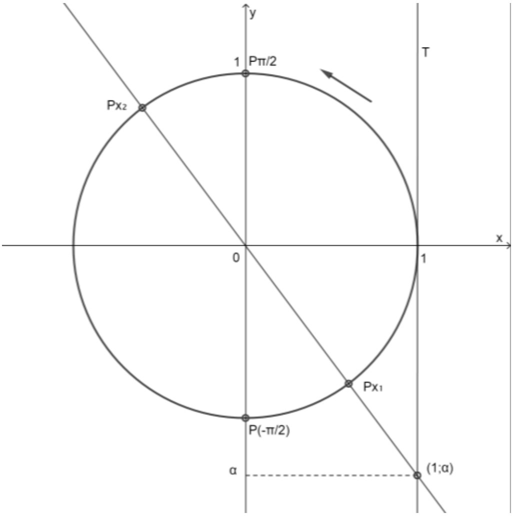


Рис. 3.5. Нерівність $tgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Множина розв’язків: $arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

$$tgx < a$$

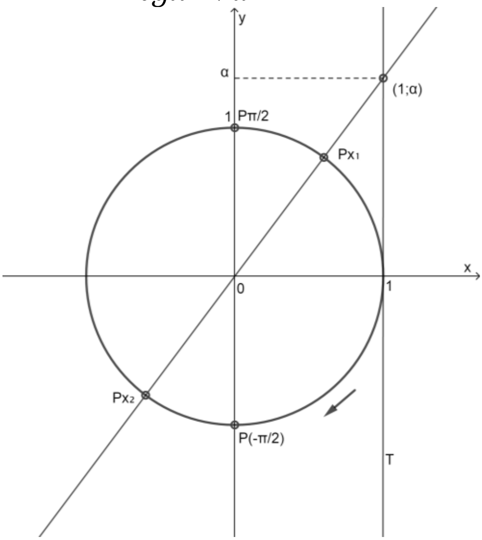


Рис. 3.6. Нерівність $tgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in Z.$

4. Нерівність $ctgx > a$; $ctgx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

$$ctgx < a$$

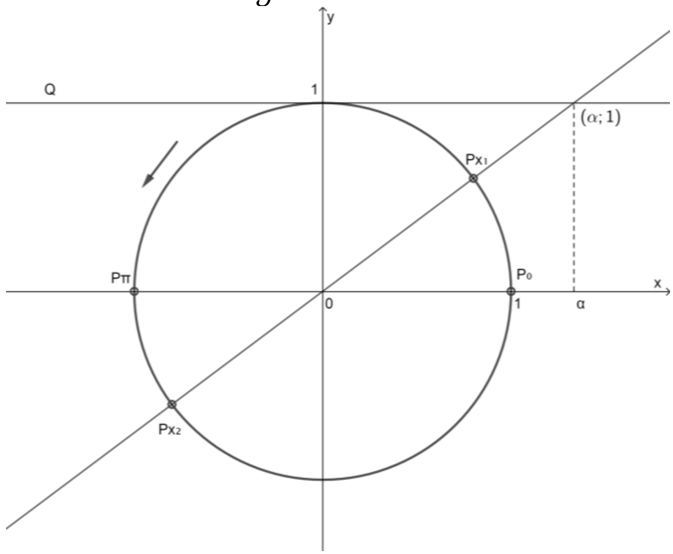


Рис. 3.7. Нерівність $ctgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 < \pi.$$

Множина розв'язків: $arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z.$

$$ctgx > a$$

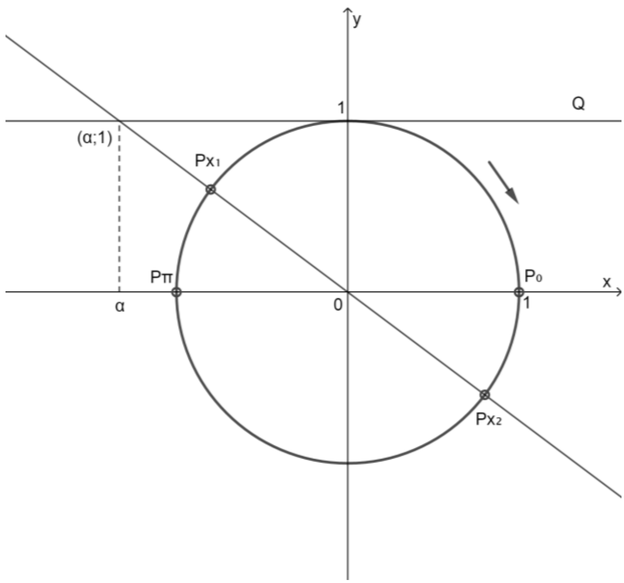


Рис. 3.8. Нерівність $ctgx > a$ на одиничному колі

$x_1 = arcctga, x_1 > 0.$

Множина розв'язків: $\pi n < x < arcctga + \pi n, n \in Z.$

3.2. Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

I. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Приклад 3.1. $sinx < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| \leq 1$, отже розвязок нерівності існує.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$або $\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{\sqrt{2}}{3}$, другої дуги – меншу (рис. 3.9.).

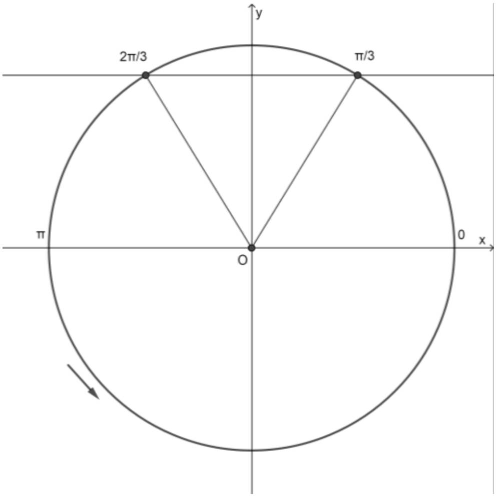


Рис. 3.9. Одиничне коло з прямою $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$

Приклад 3.2. $cosx \geq \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-arccos\frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу (рис. 3.10.).

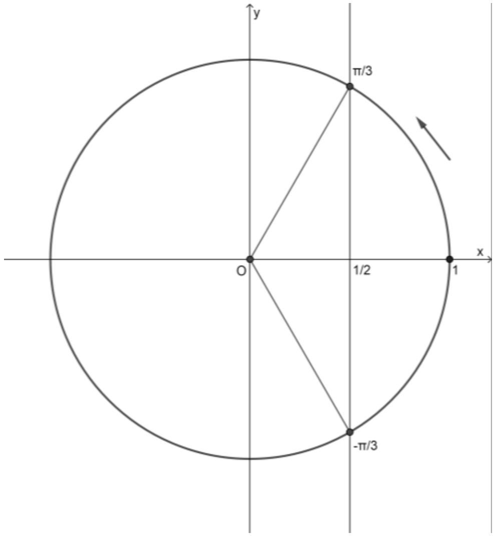


Рис. 3.10. Одиничне коло з прямою $x = \frac{1}{2}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$

Приклад 3.3. $tgx \geq 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Враховуючи, що функція $y = tgx$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z,$$

отримаємо:

$$arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

II. Використання рівносильних перетворень, зокрема зведення до алгебраїчної нерівності за схемою:1) до одного аргумента; 2) до однієї функції; 3) заміна змінної

Приклад 3.4. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз, 2018).

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис. 3.11.)

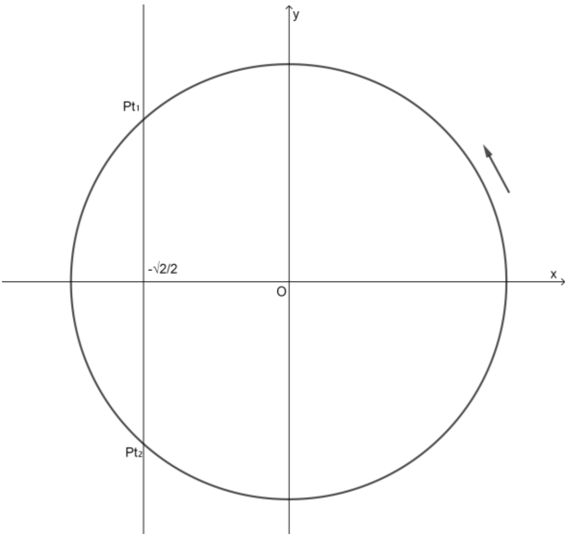


Рис. 3.11. Одиничне коло з множиною точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

Запишемо умову, за якої точка t належить дузі $P_1 P_2$:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\leq t\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z.$$

Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\leq 2x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z$.

$$-\frac{3\pi}{8}+\pi k\leq x\leq\frac{3\pi}{8}+\pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8}+\pi k;\ \frac{3\pi}{8}+\pi k\right], k\epsilon Z$.

Приклад 3.5. Розв’язати нерівність $\frac{1}{2}<sin\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Уведемо нову змінну $t=\frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2}<\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис. 3.12.).

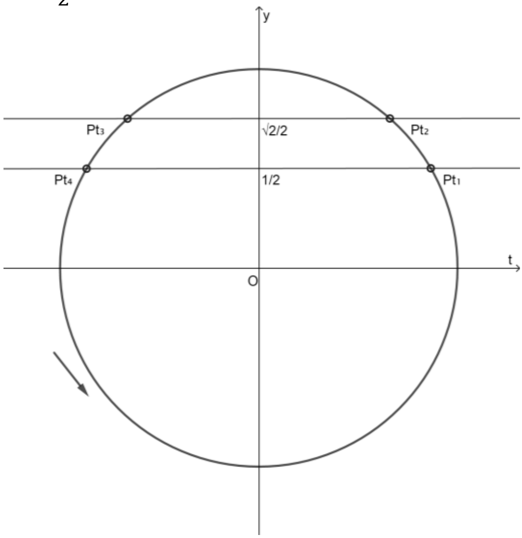


Рис. 3.12. Одиничне коло з множиною точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення t_1, t_2, t_3, t_4. здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1<t_2$, $t_3<t_4$.

$$t_1 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};\ t_3 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - arcsin\ \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно X: $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z.$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k\epsilon Z.$

III. За допомогою тригонометричного кола

Приклад 3.6. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис. 3.13.).

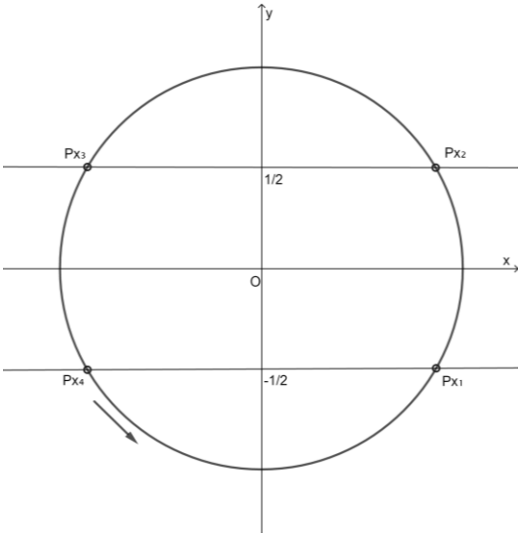


Рис. 3.13. Одиничне коло з множиною точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$

Знайдемо значення x_1, x_2, x_3, x_4, виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$, $x_1 = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;
$x_3 = \pi - arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$; $x_4 = \pi + arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k\epsilon Z$.

IV. Використання методу інтервалів

Приклад 3.7. Розв'язати нерівність $sin2xcos4x > 0$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання

1. ОДЗ: $x \in (-\infty: +\infty)$.

2. Нулі функції $f(x) = sin2xcos4x$.

Розв'яжемо рівняння $sin2xcos4x = 0$

$$sin2x = 0, 2x = \pi k, k \in Z, x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$$

$$cos4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

3. Знаходимо точки розриву: функція неперервна на всій числові осі.

4. Знаходимо період нерівності, який дорівнює періоду функції $f(x)$

$$T = \text{НСК}(T_1; T_2), \text{де } T_1 = \pi, T_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $T = \pi$.

5. Визначаємо, які з коренів рівняння $sin2xcos4x = 0$ заходиться на відрізку довжини в період π.

Якщо $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, то на відрізку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = 0$ (при $k = 0$),
$x = \frac{\pi}{2}$ (при $k = 1$), $x = \pi$ (при $k = 2$).

Якщо $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$, то на відрізку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = \frac{\pi}{8}$ (при $n = 0$),
$x = \frac{3\pi}{8}$ (при $n = 1$), $x = \frac{5\pi}{8}$ (при $n = 2$), $x = \frac{7\pi}{8}$ (при $n = 3$).

6. Позначаємо нулі функції $f(x)$ на відрізку $[0; \pi)$ і визначаємо знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків (див. рис. 3.14.).

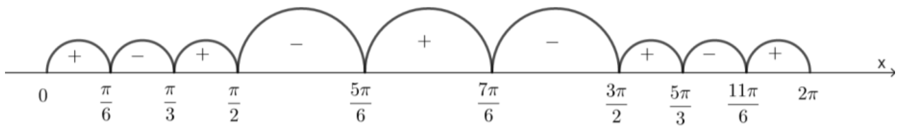


Рис. 3.14. Нулі функції на числовому проміжку.

7. У відповідь записуємо відповідь як об'єднання проміжків, на яких функція $f(x)$ набуває додатних значень, враховуючи період функції

$$x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right), k \in Z.$$

Відповідь. $\left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right), k \in Z$.

Приклад 3.7. Розв'язати нерівність

$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}(x^2 - 11x + 10) \le 0.$

Нерівність рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \\ \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0 \\ (x^2 - 11x + 10) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z \\ \begin{cases} x \epsilon (2\pi k;\ \pi + 2\pi k), k \in Z \\ x \epsilon [1; 10] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z \\ x \epsilon [1; \pi) \cup (2\pi; 3\pi). \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \epsilon [1; \pi) \cup (2\pi; 3\pi) \cup \{x = 2\pi n, n \in Z\}$.

Приклад 3.7 Розв'язати нерівність

$\sin x \cos x + 7\sin^2 x - 6 \ge 0$

Розв'язання

Дану нерівність можна звести до однорідної:

$$\sin x \cos x + 7\sin^2 x - 6(\sin^2 x + cos^2 x) \ge 0$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки: $\sin^2 x + \sin x \cos x - 6cos^2 x \ge 0$.

Якщо $\cos x = 0$, то нерівність $\sin^2 x \ge 0$ завжди правильна, таким чином поділимо нерівність на $cos^2 x \ge 0$ і отримаємо:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 \ge 0$$

Зведемо дану нерівність до алгебраїчної, замінивши $\operatorname{tg} x = t$, отримаємо:

$t^2 + t - 6 \ge 0$. За теоремою Вієта розкладемо ліву частину нерівності на множники:

$(t + 3)(t - 2) \ge 0$. Розв'язавши методом інтервалів, отримаємо: $t \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Тож $\operatorname{tg} x \le -3$ або $\operatorname{tg} x \ge 2$.

Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей (див. вище) дало змогу отримати сукупність нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} 2+\pi n \leq x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z \\ -\dfrac{\pi}{2}+\pi k<x \leq-\operatorname{arctg} 3+\pi k, k \in Z . \end{array}\right.$$

Доповнимо ці розв'язки розв'язками рівняння $\cos x=0$, де $x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z$.

Отже, $x \in[\operatorname{arctg} 2+\pi n ; \pi-\operatorname{arctg} 3+\pi n], n \in Z$.

Відповідь: $x \in[\operatorname{arctg} 2+\pi n ; \pi-\operatorname{arctg} 3+\pi n], n \in Z$.

Розв'язування нерівностей з оберненими тригонометричними функціями.

Приклад 3.8 Розв'язати нерівність $3 \arccos x-2 \arcsin x>\frac{2\pi}{3}$.

Розв'язання

ОДЗ: $x \in[-1 ; 1]$. Оскільки $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, то маємо $3\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)-2 \arcsin x>\frac{2 \pi}{3}$, звідки $\arcsin x<\frac{\pi}{6}$. За означенням $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, маємо $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x<\frac{\pi}{6}$. Врахувавши зростання синуса на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}\right)$, дістанемо $-1 \leq x<\frac{1}{2}$.

Відповідь: $x \in\left[-1 ; \frac{1}{2}\right)$.

Приклад 3.9 Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$\cos ^2 x+2 a \sin x-2 a<a^2-2$ справджується при всіх дійсних значеннях x.

Розв'язання

Нехай $\sin x= t, t \in[-1 ; 1]$, після введення заміни дістанемо та $\cos ^2 x=1-\sin ^2 x$ дістанемо рівносильну систему:

$$\left\{\begin{array}{c} t^2-2 a t+a^2+2 a-3>0 \\ t \in[-1 ; 1] . \end{array}\right.$$

Функція $f(t) = t^2 - 2\,a\mathrm{t} + a^2 + 2a - 3$ набуває додатніх значень на проміжку $[-1; 1]$ у таких випадках $(D = (2a)^2 - 4(a^2 + 2a - 3) = 4(a^2 - a^2 - 2a + 3) = 2(3 - 2a))$.

1. $D < 0 \Leftrightarrow 2(3 - 2a) < 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.
2. $\begin{cases} D \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ -\frac{B}{2A} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{3}{2} \\ a^2 - 2 > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon(\sqrt{2};\ \frac{3}{2}]$.
3. $\begin{cases} D \geq 0 \\ f(-1) > 0 \\ -\frac{B}{2A} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{3}{2} \\ a^2 + 4a - 2 > 0 \\ a < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a\epsilon\left(-\infty;\ -2 - \sqrt{6}\right)$.

Відповідь: $a\epsilon\left(-\infty;\ -2 - \sqrt{6}\right) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$ (Ясінський, 2005).

3.3. Методи розв'язування систем тригонометричних нерівностей

Приклад 3.10. Знайти найбільше від'ємне значення x, для якого виконується система нерівностей $\begin{cases} 2\sin x \geq 1 \\ 2cosx \leq -1 \end{cases}$, $\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ cosx \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Для візуалізації розв'язання даної системи тригонометричних нерівностей зручно скористатися одиничним тригонометричним колом. Для цього розв'язки двох нерівностей будуємо на одному колі і накладання розв'язків будуть розв'язками системи нерівностей.

Розв'язками першої нерівності, як видно з рис. 3.15 є проміжок $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$, а другої - $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + \right.$

$\left.2\pi n\right], n \in Z$. Таким чином системою нерівностей буде перетин розв'язків: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

Для знаходження найбільшого від'ємного значення підставимо у праву межу розв'язку $n = -1$, отримаємо $x = \frac{-7\pi}{6}$.

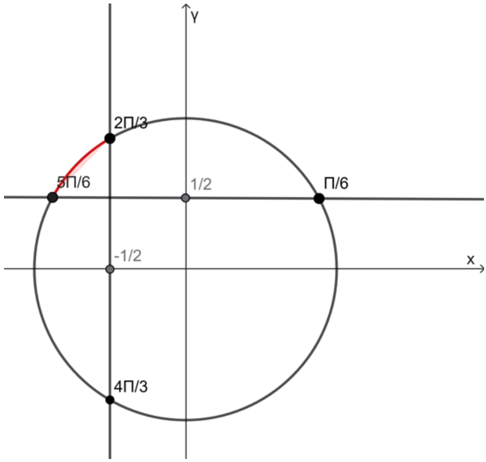


Рис.3.15

Відповідь: $x = \frac{-7\pi}{6}$.

Приклад.3.11 Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} 6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x > 2 \\ 2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 9\cos^2 x > 0 \end{cases}$$

Зведемо першу нерівність до однорідної та отримаємо:

$$\begin{cases} 4\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x > 0 \\ 2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 9\cos^2 x > 0 \end{cases}$$

Поділимо першу і другу нерівність на $0 \le \cos^2 x \le 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 9 > 0 \\ 4\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 3 > 0 \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язки кожної нерівності:

$\begin{cases}(\operatorname{tg} x - 1)\left(\operatorname{tg} x + \frac{3}{4}\right) > 0 \\ \operatorname{tg} x \in R\end{cases}$. Скористаємось методом інтервалів для знаходження розв'язків першої нерівності:

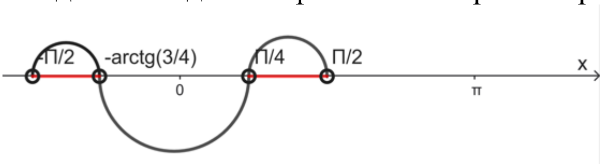


Рис.3.16

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z \\ x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}, n \in Z \end{cases}$$

Отже, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x \le \frac{5}{8} \\ \cos^4 2x + 6\cos^2 2x \le \frac{25}{18} \end{cases}$$

Виділимо квадрат суми двочлена у лівій частині першої нерівності, а другу нерівність розважимо заміною.

1. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \le \frac{5}{8}$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x \le \frac{5}{8} - 1$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x \le -\frac{3}{8}$$

$$\sin^2 2x \ge \frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\cos 4x}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\cos 4x \leq -\frac{1}{2}$$

2. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x \leq \frac{25}{18}$

$$\cos^2 2x = t, 0 \leq t \leq 1$$

$$t^2 + 6t - \frac{25}{16} \leq 0$$

$$\begin{cases} \left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t+\frac{25}{4}\right) \leq 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2 2x \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1+\cos 4x}{2} \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos 4x \leq 1$$

Отже, система рівнянь звелася до системи найпростіших нерівностей $\begin{cases} \cos 4x \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \cos 4x \leq 1 \end{cases}$. Звідси $x \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right\}$.

Відповідь: $x \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right\}$.

3.3.Практичні завдання до пунктів 3.1-3.2. Тригонометричні нерівності та методи їх візуалізації

Завдання для аудиторного (непарні номери) та самостійного (парні номери) виконання.

1. $sin\frac{1}{2}x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $2\cos\frac{1}{2}x > -\sqrt{3}$;
3. $-3tg2x \geq \sqrt{3}$;
4. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) > 1$;
5. $ctg\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{x}{2}\right) \leq \sqrt{3}$;
6. $tg\left(\pi + \frac{x}{3}\right) + 1 \geq 0$;
7. $2\cos(30° - 3x) \leq -\sqrt{3}$;
8. $2\sin(45° - 3x) \leq \sqrt{2}$;
9. $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \leq -1$;
10. $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} \geq 0{,}5$;
11. $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x \leq \frac{1}{2}$;
12. $\sin 2x \sin x - \cos 2x \cos x \leq \frac{1}{2}$;
13. $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \geq tg\frac{3}{4}\pi$;
14. $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leq tg\frac{2}{3}\pi$;
15. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) < \frac{1}{4}$;
16. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) > \frac{3}{4}$;
17. $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$;
18. $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$;
19. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
20. $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
21. $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq 1$;
22. $(a-1)sin^2x + 2(a-2)sinx + a + 3 < 0$;
23. $cosx \leq 2 - a^2$;
24. $arcsinx < a$;
25. $arcctgx < a$.

4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

4.1. Контрольна робота №1. Властивості тригонометричних функцій та обернених тригонометричних функцій. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Виконати шість завдань контрольної роботи, де кожен номер у кожному завданні відповідає номеру варіанту.

1. Знайти основний період функції.
   1. $y = \sin\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2}$;
   2. $y = \cos\frac{3x}{4} - \sin\frac{2x}{4}$;
   3. $y = 2\cos 2x + 3\sin\frac{3x}{2} - 3\sin 3x$;
   4. $y = \sin\frac{x}{3} + 2\cos\frac{5x}{2} + 3\sin 2x + 2$;
   5. $y = \sin\frac{4x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}$;
   6. $y = \sin 2x \cos 3x - 4\cos^2 x$;
   7. $y = \sin\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{7x}{2}$;
   8. $y = \sin\frac{9x}{4} \cdot \sin\frac{15x}{2}$;
   9. $y = \left|\sin\frac{\pi x}{4}\right|$;
   10. $y = \mathrm{tg}^2\, 2\pi x$.
2. Побудувати графік функції методом геометричних перетворень графіків функцій: $y = \cos x$, $y = \sin x$,
   $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.
   1. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - 1$;
   2. $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$;
   3. $y = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)$;
   4. $y = -\,\mathrm{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

5. $y = \arcsin(1 - 2x)$;
6. $y = 3\sin|x - 1|$;
7. $y = \frac{1}{2}\cos\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$;
8. $y = \operatorname{tg}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right)$;
9. $y = \arccos|x + 1| - 1$;
10. $y = \left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

3. Знайти найбільше значення функції.

1. $y = \sqrt{6}\sin x + \sqrt{3}\cos x$
2. $y = 3\sin 2x - 4\cos 2x + 5$
3. $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$
4. $y = 4\cos^2 3x + \sqrt{5}\sin 6x$
5. $y = 2^{3\sin x - 4\cos x - 3}$
6. $y = (0{,}25)^{\sqrt{6}\cos 5x + \sqrt{3}\sin 5x - 3}$
7. $y = 4\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} + 3$
8. $y = \sin 2x + 2\cos^2 x$
9. $y = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{3}\right)$
10. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

4. Обчислити без таблиць та калькулятора.

1. $\operatorname{tg} 15^0 \cdot \operatorname{tg} 30^0 \cdot \operatorname{tg} 45^0 \cdot \operatorname{tg} 60^0 \cdot \operatorname{tg} 75^0$;
2. $\cos\frac{\pi}{33} \cdot \cos\frac{2\pi}{33} \cdot \cos\frac{4\pi}{33} \cdot \cos\frac{8\pi}{33} \cdot \cos\frac{16\pi}{33}$;
3. $\sin 15^0 \cos 75^0 + \cos 15^0 \cdot \sin 75^0$;
4. $2\cos^2 45^0 + 6\sin^2 45^0$;
5. $\cos 75^0$;
6. $15\sin 165^0 \cos 15^0$;
7. $3\sqrt{a}\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;
8. $2\left(\cos\frac{16\pi}{3} - \sin\frac{29\pi}{6}\right)$;
9. $\cos\frac{\pi}{12}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}\right) + 4$;
10. $\operatorname{tg} 435^0 + \operatorname{tg} 375^0$.

5. Знайти значення виразу.

1. $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$;
2. $\sin^2\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$;
3. $\sin\alpha+\cos\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=0{,}91$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
4. $\cos\alpha-\sin\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=-0{,}21$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$;
5. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{8}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$;
6. $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$, $\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$;
7. $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$;
8. $\sin 4\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}2\alpha=-2$;
9. $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
10. $5\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha=0{,}96$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

6. Спростіть вираз.

1. $\frac{3+4\cos\alpha+\cos 2\alpha}{3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha}$;
2. $\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}$;
3. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;
4. $\sin^4 3\alpha+\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha\cdot\cos^2 3\alpha$;
5. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$;
6. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
7. $\cos^2(45^0+\alpha)-\cos^2(30^0-\alpha)+\sin 15^0\sin(75^0-2\alpha)$;
8. $\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$;
9. $\frac{2\sin 4\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$;
10. $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

4.2. Контрольна робота № 2. Методи розв’язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем

Виконати три завдання контрольної роботи, де кожен номер у кожному завданні відповідає номеру варіанту.

1. Розв’язати рівняння.

1) А. $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

Б. $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2=0$;

В. $4\sin 3x+3\cos 3x=5{,}2$;

Г. $6\arcsin x-\pi=0$.

2) А. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$;

Б. $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;

В. $\sin^2 2x-\frac{1}{4}=\cos 2x\cos 6x$;

Г. $\cos(arccos(4x-9))=x^2-5x+5$.

3) А. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$;

Б. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=-2$;

В. $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$;

Г. $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{2}$.

4) А. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-1=0$;

Б. $\cos 2x+8\sin x=3$;

В. $4\sin^2 2x+7\cos 2x-2\sin^2 x=6$;

Г. $\sin(\arcsin(x+2))=x+2$.

5) А. $1-2\sin^2\frac{x}{2}=-1$;

Б. $\cos x+\sin\frac{x}{2}=0$;

В. $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin 2x=0$;

Г. $\arccos(3x+2)=\arccos(5x+3)$.

6) А. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

Б. $\cos\frac{2x}{3}-5\cos\frac{x}{3}-2=0$;

В. $3\sin x+5\cos x=-3$;

Г. $\arccos(3x-16)=\arccos(x^2-26)$.

7) А. $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$;

Б. $\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x+3$;

В. $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;

Г. $\arcsin(3x-2) = \arcsin(-x+2)$.

8) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Б. $sin\, 3\, x = 2\, cos(\frac{\pi}{2} - x)$;

В. $\frac{sin\, x - sin\, 3x}{1 - cos\, x} = 0$;

Г. –$\arccos(3x+2) = -\frac{\pi}{6}$.

9) А.$\sin(-8x) = \frac{2}{9}$;

Б. $2\,\mathrm{tg}^2\, x + 4\cos^2 x = 7$;

В. $cos\, 6\, x + 2\, cos\, 2\, x = 0$;

Г. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}(4-3x)) = 2$.

10) А. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;

Б.$\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{ctg}\, x = 3$;

В. $3\sin x - 8\cos x = 3$;

Г. $\mathrm{arcctg}(5-8x) = \frac{2\pi}{3}$.

2. Розв’язати нерівність.

1) А. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$;

Б. $\arccos(2x-1) > \frac{\pi}{3}$.

2) А. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \sqrt{3}$;

Б. $\arcsin(x-2) > \frac{\pi}{6}$.

3) А. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$;

Б. $\arcsin(5-3x) < -\frac{\pi}{3}$.

4) А.$\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{5}{8}$;

Б. $\arccos(4x-1) > \frac{3\pi}{4}$.

5) А. $\sin x > \cos x$;

Б. $\arccos(4-7x) < \frac{5\pi}{6}$.

6) А. $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$;

Б. $\arcsin(2-3x) < \frac{\pi}{4}$.

7) А. $4\cos x \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$;

Б. $\arcsin(3x-2) > \arcsin(5x-3)$.

8) А. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{4}$;

Б. $\arccos(2x-1) < \arccos\frac{1}{x}$.

9) А. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$;

Б. $\arcsin(x^2-x) > \arcsin(3x-4)$.

10) А. $\arccos(1-2x) < \arccos\frac{1}{x-1}$;

Б. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 \geq 0$.

3. Розв'язати систему рівнянь

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x - 2\sin y = 0 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x - y = \frac{5}{3}\pi \\ \cos 2x + \sin y = 2 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x + g = \frac{5}{2}\pi \\ \cos 2x + \sin y = 2 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x \sin y = 0{,}25 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5 \\ \cos x \sin y = 0{,}5 \end{cases}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.
4. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія): підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
5. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Тригонометрія. Довідник-задачник. Київ: Магістр, 1997. 256 с.
6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти від 23.11.2011. (в редакції постанови Кабінету Міністрів України від 26.02.2020 № 143). Вид. офіц. Київ, 2011. 50 с.
7. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 1997. 304 с.
8. Збірник задач з математики з розв’язками / Геворкян Ю. Л. та ін. Харків: Прапор, 1999. 448 с.
9. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.
10. Істер О. С., Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ: Генеза, 2018. 384 с.: іл.
11. Капіносов А. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА. Профільний рівень і рівень стандарту. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 480 с.

12. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів: Частина друга. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. 224 с.

13. Конет І. М. Тригонометрія: теорія і практика: посібник : Кам'янець-Подільський держ. ун-т. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. 243 с.

14. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2012. 412 с.: іл.

15. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.

16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

17. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.

18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі. Київ: Генеза, 2008. 352 с.

19. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.

20. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.

21. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки

України від 4.12. 2019. №1513. URL: https:// https://testportal.gov.ua/progmath/ (дата звернення: 16.11.2026)

22. Резуненко В. О., Ярмак В. О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Харків: Основа, 2011. 94 с.

23. Слєпкань З. І Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

24. Смоляков А. Н., Севрюков П. Ф. Прийоми розв‘язання тригонометричних рівнянь. Математика в школі. 2004. № 1. С. 24-26.

25. Токарева А. Тригонометричні нерівності. Математика. Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р.

26. Ясінський В. В. Метематика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський; за ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 372 с. (Серія «На допомогу абітурієнту)

ДОДАТОК

Таблиця 2

Геометричні перетворення графіків функцій

Щоб побудувати графік функції	Потрібно
$y = f(x \pm a)$	Зсунути $f(x)$ на a одиниць вздовж осі *Ox* праворуч при $a < 0$ або ліворуч при $a > 0$.
$y = f(x) \pm\ a$	Зсунути $f(x)$ на a одиниць вздовж осі *Oy* вгору при $a > 0$.або вниз при $a < 0$
$y = f(kx)$	Стиснути $f(x)$ у k разів вздовж осі *Ox* до осі *Oy*, якщо $k > 1$ або розтягнути у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$
$y = kf(x)$	Розтягнути $f(x)$ у k разів вздовж осі *Oy* до осі *Ox*, якщо $k > 1$ або стиснути у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.
$y = f(-x)$	Симетрія $f(x)$ відносно осі *Oy*
$y = -f(x)$	Симетрія $f(x)$ відносно осі *Ox*
$y = \lvert f(x) \rvert$	Частину графіка $f(x)$ де $y > 0$ залишити без змін, а ту частину графіка $f(x)$, де $y < 0$ симетрично відобразити відносно *Ox*.
$y = f(\lvert x \rvert)$	Частину графіка $f(x)$, де $x < 0$ відкинути, а ту частину графіка $f(x)$, де $x > 0$ залишити і симетрично відобразити відносно *Oy*.

УДК 514.11:373.5.016(075.8)
В 41

Укладач:
Генсіцька-Антонюк Н. О. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання.

Адреса РДГУ і видавництва:
33028, м. Рівне, вул. С. Бандери 12,
тел. (0362)22-31-34