

Присяжнюк І.М.

Аналітична геометрія
ПЕРЕМІЩЕННЯ ПЛОЩИНИ

Рівне 2026

Література

1. Боровик В. Н., Зайченко І. В., Мурач М. М., Яковець В. П. Геометричні перетворення площини : навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-тів вищ. пед. навч. закл. Суми : Університетська книга, 2003. 503 с.
2. Корніль Т. Л., Голотайстрова Г. О., Гардер С. Є. Вища математика у прикладах і задачах : навч.-метод. посібник : у 2-х ч. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія на площині. Харків : Мадрид, 2020. 80 с.
3. Тимченко Г. М., Одинцова О. В., Мазур О. С., Кириллова Н. О. Стислий курс вищої математики : навч. посібник. Ч. 1. Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри. 2-ге вид., перероб. та доп. Київ : Кондор, 2022. 188 с.
4. Сердюк І. В., Ахісєр О. Б., Дунаєвська О. І. та ін. Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Аналітична геометрія : навч.-метод. посібник. Харків : НТМТ, 2022. 160 с.
5. Морохович В. С. Вища математика. Алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2025.
6. Католик І. М., Гайдаш А. М. Збірка розрахунково-графічних завдань з вищої математики. Харків : Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 2023.
7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2015.

УДК УДК 514.122(076.5)

Аналітична геометрія: Переміщення площини. Навчально-методичний посібник. Рівненський державний гуманітарний університет / укладач І.М. Присяжнюк. 2026. 60 с.

Укладач:

Присяжнюк І.М. – к. т. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Рецензенти:

Генсіцька-Антонюк Н. О. – к. п. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання РДГУ.

Петрівський Я. Б. – д. т. н., професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ.

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання (протокол № __ від _____ р.)

Затверджено навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № __ від «__» «_____» 20__ р.)

Доведіть, що трикутник MNF – правильний.

22. Нехай AB і CD дві такі хорди концентричних кіл W і W_1 з центром O , що $\angle AOB = \angle COD = \alpha$. Доведіть, що $AC = BD$.

осі симетрії трапеції.

15) Побудувати рівнобедрений трикутник, якщо відомо, що вершина його прямого кута знаходиться в даній точці O , а дві інші лежать: одна на даному колі, інша на даній прямій.

16) Два мотоциклісти рухаються двома прямолінійними дорогами між якими розташований населений пункт. Обидва вони повинні зупинитися на своєму шляху так, щоб кожний з них побачив другого в населеному пункті під одним і тим самим кутом α . Визначити місце зупинки кожного з мотоциклістів.

17. На сторонах AB і BC ромба $ABCD$, у якого $\angle BAD = 60^\circ$ позначені відповідно точки M і N так, що $AM = BN$. Доведіть, що трикутник MDN правильний.

18. Доведіть, що пряма, яка проходить через центр симетрії паралелограма, ділить його на дві рівновеликі частини.

19. Через центр квадрата проведені дві взаємно перпендикулярні прямі. Довести, що їх відрізки, розташовані в середині квадрата, рівні.

20. Дві прямі, що проходять через центр правильного трикутника, утворюють між собою кут, величина якого рівна 60° . Доведіть, що відрізки цих прямих, які знаходяться в середині трикутника, рівні.

21. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ точка M – середина діагоналі AC , N – середина сторони DE .

Вступ	4
1. Загальні відомості про перетворення площини	8
§ 1. Поняття перетворення площини	8
§ 2. Група перетворень площини	9
2. Загальна теорія переміщень площини	12
§ 1. Переміщення площини і його властивості	12
§ 2. Аналітичне вираження переміщення	15
§ 3. Класифікація переміщень площини	18
3.1. Паралельне перенесення площини	18
3.2. Осьова симетрія	19
3.3. Поворот.....	21
3.4. Ковзна симетрія	23
§ 4. Розклад переміщень в добутки осьових симетрій.....	25
§ 5. Підгрупи групи переміщень	28
3. Застосування переміщень до розв'язування геометричних задач	31
§ 1. Приклади розв'язування задач	31
§ 2. Задачі для самостійного розв'язування	52
4. Література	60

Вступ

У природі, техніці та науці ми постійно зустрічаємося з явищами, у процесі яких ті чи інші об'єкти змінюють свою форму, розміри або положення у просторі. Так, дерево згинається під дією вітру, металевий предмет розширюється при нагріванні, маятник здійснює коливання. В усіх цих випадках маємо справу зі зміною певного об'єкта.

Поняття перетворення має важливе значення і в математиці. У геометрії, вивчаючи перетворення деякої фігури, розглядають вихідну фігуру (F) та фігуру (F'), у яку переходить дана фігура (F) у результаті певного перетворення. Такий підхід дає можливість досліджувати не лише окремі геометричні фігури, а й загальні властивості та закономірності, які зберігаються або змінюються під час перетворень.

Ідеї геометричних перетворень мають давню історію. Поняття рівності, симетрії, відображення та переміщення фігур використовувалися ще в класичній геометрії. Важливим етапом розвитку геометрії стало виникнення координатного методу, пов'язаного насамперед із працями Рене Декарта та П'єра Ферма у XVII столітті. Завдяки координатному підходу геометричні об'єкти та їх взаємозв'язки отримали аналітичний опис. Це створило можливість для дослідження геометричних перетворень за допомогою координат, рівнянь, векторів та інших алгебраїчних засобів.

8) Дано $\triangle ABC$ і точку H перетину його висот. Довести, що точки симетричні H відносно сторін цього трикутника, лежать на колі даного трикутника.
9) Довести, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней кожної точки основи від бічних сторін є сталою величиною.

10) В ромбі $ABCD$ гострий кут 60° . На сторонах AB і BC взято точки M і N так, що $AM=BN$. Довести, що трикутник MNB – рівносторонній.

11) На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ побудовані трикутники AED і CKB , причому $\triangle AED = \triangle KCB$. Точка O – точка перетину діагоналей паралелограма. Вершина E лежить по іншу сторону від прямої AD , ніж точка O . Вершина K лежить по іншу сторону від прямої BC , ніж точка O .

Довести, що точки K, O, E лежать на одній прямій.

12) На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ побудовані рівносторонні трикутники AED і BKC . Точка O – точка перетину діагоналей. Точка O і E лежать по різні сторони від прямої AD . Довести, що точка O є серединою відрізка KE .

13) Довести, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

14) На бічних сторонах рівнобічної трапеції $ABCD$ побудовані квадрати $ABKL$ і $CDEF$. Точки S і K лежать по різні сторони від прямої AB . Точки A і E лежать по різні сторони від прямої CD . Довести, що:
а) прями KF і LE паралельні; б) $AC=BD$, $KE=LF$, $AF=DK$; в) точка перетину прямих LA і DE лежить на

$$l:x=0;$$

4. прямої $10x + 7y = 0$ при повороті навколо початку координат на кут $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

4) Доведіть, що перетворення $f \in \text{рух}$, якщо:

$$1. f: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{7}}{3}x + \frac{2}{3}y + 1, \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{7}}{3}y \end{cases}$$

$$2. f: \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 110, \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - 110 \end{cases}$$

$$3. f: \begin{cases} x' = -2x + 3, \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$$

5) Записати формули перетворення $f: T_{\vec{a}} \circ R_M^\alpha$, і знайти його інваріантні точки, якщо:

$$1. \vec{a} = (2, 1), \alpha = \frac{\pi}{3}, M(1, 1);$$

$$2. \vec{a} = (7, 10), \alpha = \frac{\pi}{6}, M(-2, 1);$$

$$3. \vec{a} = (1, -3), \alpha = \frac{\pi}{4}, M(3, -6).$$

6) Довести, що трапеція, в якій діагоналі рівні є рівнобічною.

7) Довести, що якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений.

У подальшому теорія геометричних перетворень стала важливою складовою сучасної геометрії. Особливого значення набуло вивчення властивостей, які залишаються незмінними під час певних перетворень. Зокрема, для переміщень площини такими властивостями є збереження відстаней, довжин відрізків і величин кутів. Дослідження перетворень сприяло встановленню тісного зв'язку між геометрією та алгеброю.

У цьому посібнику розглядаються перетворення площини, зокрема такі перетворення, які зберігають розміри і форму геометричних фігур, — переміщення, або рухи. Разом із перетворенням площини здійснюється перетворення всіх фігур, що лежать у ній. При цьому будемо припускати, що площа перетворюється сама в себе. Отже, кожна фігура, яка знаходиться в даній площині, у результаті переміщення переходить у фігуру, що також належить цій площині.

Переміщення площини є одним із важливих понять геометрії, оскільки воно дає змогу розглядати геометричні фігури з точки зору їх руху та взаємного перетворення при збереженні основних метричних характеристик. До основних видів переміщень, які розглядаються в посібнику, належать паралельне перенесення, поворот, осова симетрія, центральна симетрія та ковзна симетрія.

Особливе значення під час вивчення переміщень має

поєднання геометричного та аналітичного підходів. Геометрично переміщення можна розглядати як рух фігури на площині, а аналітично — описувати за допомогою координат, векторів, рівнянь і матриць. Такий підхід сприяє формуванню вміння переходити від геометричного образу до його математичної моделі та використовувати різні способи дослідження одного й того самого об'єкта.

Теорія переміщень має не лише теоретичне, а й практичне значення. Геометричні перетворення використовуються під час математичного моделювання, у комп'ютерній графіці, автоматизованому проектуванні, робототехніці, картографії, обробленні зображень та інших галузях, у яких виникає потреба змінювати положення або орієнтацію об'єктів і водночас досліджувати властивості, що при цьому зберігаються.

Для майбутнього вчителя математики знання теорії геометричних перетворень є важливим складником професійної математичної підготовки. Учитель повинен не лише знати означення та властивості переміщень, а й уміти пояснювати їх геометричний зміст, встановлювати зв'язки між різними способами подання, добирати доцільні методи розв'язування задач та демонструвати учням практичне значення математичних понять.

Вивчення переміщень сприяє розвитку просторового

таких співвідношень між даними відрізками:

$$AD - BC < 2MN < AD + BC,$$

$$AB - CD < C_l D_l < AB + CD.$$

§2. Задачі для самостійного розв'язування.

- 1) Записати формули аналітичного завдання
 1. паралельного перенесення $T_{\vec{a}}$, де $\vec{a}(-2;1)$;
 2. осової симетрії S_l , де $l: x+2y=0$;
 3. повороту R_M^α , де $M(1,0)$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$;
 4. ковзної симетрії $T_{\vec{a}} \circ S_l$, де $\vec{a}(1,-1)$ $l: x+y=0$.
- 2) Знайти образ
 1. точки $M(2,3)$ при повороті R_M^α , де $\alpha = \frac{\pi}{4}$;
 2. точки $A(-2,1)$ при паралельному перенесенні $T_{\vec{a}}$, де $\vec{a}(4,0)$;
 3. прямої $x+2y-7=0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{b}(-3,-1)$;
 4. прямої $2x+3y=0$ при осовій симетрії S_l , де $l: 2x-y=0$;
- 3) Знайти прообраз
 1. точки $M'(1,3)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{v}(-1,0)$;
 2. точки $A'(2,1)$ при ковзній симетрії $T_{\vec{a}} \circ S_l$, де $\vec{a}(1,1)$, $l: x-y=0$;
 3. прямої $x-2y+10=0$ при осовій симетрії S_l , де

$MD_1 = T_{\overline{AM}}(AD)$. Тоді

$$\Delta CC_1N = \Delta DD_1N \text{ (бо } BM =$$

$$= AM = DD_1, \quad CN = ND,$$

$$\angle C_1CN = \angle D_1DN) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\angle CNC_1 = \angle DND_1), \text{ тому}$$

точки C_1, N, D_1 нале-

жать одній прямій і A

$$C_1N = ND_1.$$

Виконаємо паралельне

перенесення відрізка MC_1 на вектор MD_1 :

$$D_1M_1 = T_{\overline{MD_1}}(MC_1). \text{ Маємо: } \Delta MC_1N = \Delta D_1NM_1, \text{ звідки}$$

$$MN = NM_1 \text{ у } \Delta MM_1D_1 \text{ відомі всі його сторони. Отже,}$$

задача зводиться до побудови трикутника MM_1D_1 за

відомими трьома сторонами. Маючи цей трикутник,

неважко побудувати вершини шуканого

чотирикутника.

Побудова. 1) будуємо ΔMM_1D_1 , сторони якого

$$MD_1 = AD, D_1M_1 = BC \quad MM_1 = 2MN \text{ і знаходимо } N -$$

середину MM_1 ; 2) знаходимо точку D як перетин кіл

$$(N, \frac{CD}{2}) \text{ і } (D_1, \frac{AB}{2}); 3) \text{ будуємо}$$

$$A = T_{\overline{D_1D}}(M), B = T_{\overline{D_1D}}(M), C = T_{\overline{D_1M_1}}(B).$$

Доведення. При виконанні побудови безпосередньо

використовувались дані відрізки, тому справедливність

побудови випливає з попереднього аналізу.

Дослідження. Побудову чотирикутника зведено до

побудови двох трикутників MM_1D_1 і DD_1N за трьома

сторонами, тому побудова можлива при виконанні

та логічного мислення, уміння встановлювати інваріантні властивості геометричних об'єктів, аналізувати взаємне розташування фігур, використовувати координатний і векторний методи, а також обґрунтовувати математичні твердження. Ці вміння мають безпосереднє значення для майбутньої педагогічної діяльності та викладання геометрії в гімназіях і ліцеях.

Матеріал посібника також може бути використаний майбутніми вчителями під час підготовки до проведення уроків, практичних занять, факультативних та інших форм математичної роботи. Теоретичні відомості й розв'язання типових задач можуть слугувати основою для добору та конструювання власних навчальних завдань, пояснення способів розв'язування геометричних задач, організації самостійної роботи учнів і формування в них уміння застосовувати властивості геометричних перетворень.

Отже, вивчення переміщень площини є важливою складовою підготовки майбутнього вчителя математики, оскільки поєднує фундаментальні геометричні поняття з аналітичними методами їх дослідження та створює основу для подальшого методично грамотного викладання геометричних перетворень у закладах загальної середньої освіти, зокрема в гімназіях і ліцеях.

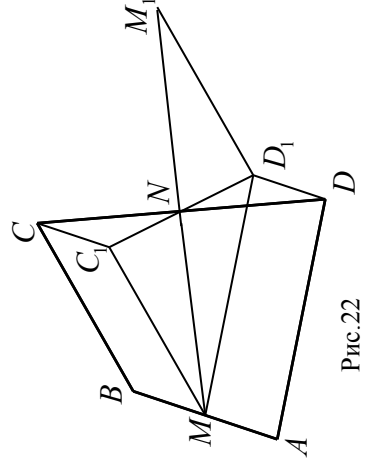


Рис.22

1. Загальні відомості про перетворення площини

§1. Поняття перетворення площини

Площину і всяку фігуру, що лежить в ній, будемо розглядати як множину точок. Перетворення площини визначимо як спеціальний вид відображення точкових множин.

Нехай дано дві множини A і B .

Означення. Якщо задано правило, за яким кожному елементу $a \in A$ ставиться у відповідність певний елемент $b \in B$, то кажуть, що задано *відображення f множини A в множину B* .

Замість слів « f є відображенням множини A в множину B » пишуть: $f: A \rightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$, або $f(A) = B$, а також $f: a \rightarrow b$, $a \xrightarrow{f} b$, $f(a) = b$.

Елемент b називається *образом* елемента a при відображенні f , а елемент a - *прообразом* елемента b .

Означення. Якщо при відображенні f кожен елемент $b \in B$ є образом деякого елемента $a \in A$, то відображення f називають *відображенням множини A на множину B* (або сур'єктивним, чи сур'єкцією).

Проектування точок кола на його діаметр є прикладом відображення множини точок кола на множину всіх точок даного діаметра.

Означення. Якщо при відображенні f множини A на множину B кожен елемент $b \in B$ є образом лише одного елемента $a \in A$, то відображення f називається *взаємно-однозначним* (або *бієктивним*, чи *бієкцією*).

сторін BC , DA
чотирикутника $ABCD$
(рис. 21). Якщо
 $2MN = AB + CD$, то чотирикутник є трапецією. Довести це.

Розв'язання.

Припустимо, що чотирикутник $ABCD$ не є трапецією. Виконаємо

паралельне перенесення сторін AB і DC : $MM' = T_{\vec{DM}}(DC)$, $MM'' = T_{\vec{AM}}(AB)$, тоді $CM'' = BM''$, $CM' \parallel BM''$, $\angle NBM'' = \angle NCM'$. Тому трикутники NBM'' і NCM' рівні і $\angle BNM'' = \angle CNM'$. Отже, точки M'' , N , M' лежать на одній прямій, фігура $MM''M'$ є трикутником, а MN – його медіаною. Звідси приходимо до нерівності $2M < MM' + MM'' = DC + AB$, що суперечить умові (на малюнку $MN' = NN''$, $MM' = M''N'$). Отже, чотирикутник $ABCD$ є трапецією.

Зауважимо, що коли виконується умова задачі і $AD \parallel CB$, то чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

Задача 30. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його сторонами і відрізком MN , що сполучає середини сторін AB і CD .

Аналіз. Нехай шуканий чотирикутник $ABCD$ побудований, у ньому M – середина відрізка AB , N – середина відрізка CD (рис.22).

Щоб зблизити відрізки BC і AD , виконаємо паралельне перенесення відрізків BC і AD відповідно на вектори BM і AM , тобто побудуємо $MC_1 = T_{\vec{BM}}(BC)$ і

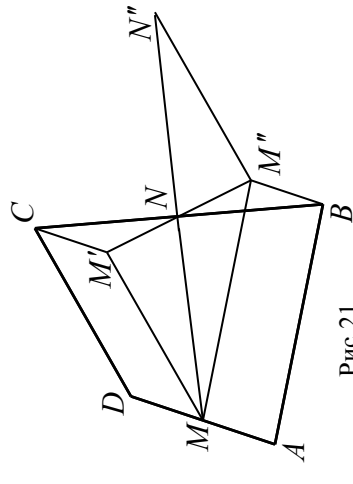


Рис.21

трикутники CA_1B , $C_1B'A$, CA_1C_1 , мають однакову площу і тому $S_{\Delta C_1B'A} = 3S_{\Delta C_1B'A_1} = 3 \cdot \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$, що й треба довести.

Задача 28. У чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони AB і CD рівні. Довести, що пряма, яка з'єднує середини діагоналей чотирикутника, перетинає рівні сторони під рівними кутами.

Розв'язання. Нехай точки M і N – середини діагоналей AC і BD . Продовження відрізка MN перетинає сторони AB і CD в точках F і E (див. рис. 20). Виконаємо паралельне перенесення сторін BA і CD :

$$MP = T_{\vec{BM}}(BA), \quad MQ = T_{\vec{CM}}(CD),$$

тоді сторона BA рівна і паралельна MP , сторона CD рівна і паралельна MQ , але, за умовою $BA=CD$, трикутник MPQ – рівнобедрений ($MP=MQ$) і тому $\angle 3 = \angle 4$, MS – середня лінія трикутника ACD , отже, точка S – середина сторони AD , звідси NS – середня лінія трикутника ABD . Трикутники MSN і STQ рівнобедрені і тому $\angle 5 = \angle 6 = \angle 4$. Чотирикутники $ABNT$, $MCDQ$ і $PMNT$ – паралелограми, звідси $\angle 2 = \angle 5 = \angle 4$, $\angle 6 = \angle 1$ (як різносторонні при паралельних прямих). Отже, $\angle 1 = \angle 2$, що й треба довести.

Задача 29. Нехай M , N – середина протилежних

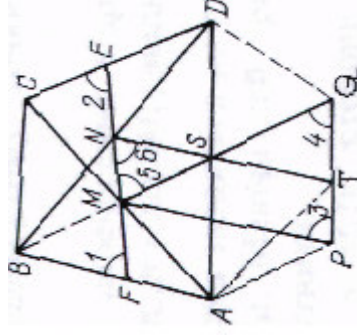


Рис. 20

Відображення кола на діаметр не є бієктивним: в одну і ту ж внутрішню точку діаметра проєктується дві різні точки кола. Але якщо проєктувати на діаметр не все коло, а тільки півколо, кінці якого співпадають з кінцями даного діаметра, то відображення стане бієктивним.

Означення. Будь-яке взаємно-однозначне відображення f множини A на себе називається *перетворенням* цієї множини.

Означення. Перетворення f^{-1} , *обернене* до даного перетворення f , задається умовою:

$$\text{якщо } f: M \rightarrow M', \text{ то } f^{-1}: M' \rightarrow M.$$

Означення. Взаємно-однозначне (бієктивне) відображення площини на себе називається *перетворенням площини*.

§2. Група перетворень площини

Нехай f_1 і f_2 – два перетворення площини, причому $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$. Тоді перетворення f_1 і f_2 породжують нове перетворення f , таке, що $f(M) = M''$.

Означення. Якщо перетворення f_1 визначено так, що $M \xrightarrow{f_1} M'$, а перетворення f_2 так, що $M' \xrightarrow{f_2} M''$, то перетворення f таке, що $M \xrightarrow{f} M''$ називають *композицією перетворень* f_1 і f_2 . При цьому пишуть: $f = f_2 \circ f_1$.

Легко впевнитись, що композиція перетворень площини має властивість асоціативності: для будь-яких трьох перетворень виконується співвідношення:

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1.$$

Дійсно, якщо $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$, $f_3(M'') = M'''$, то $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(M) = f_3(f_2(f_1(M))) = f_3(f_2(M')) = f_3(M'') = M'''$.

З іншого боку $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2(f_1(M)) = f_3 \circ f_2(M') = f_3(f_2(M')) = f_3(M'') = M'''$.

Введемо поняття групи геометричних перетворень.

Означення. Непорожня множина G називається групою, якщо:

- 1) на ній визначена бінарна операція $\circ$;
- 2) Операція $\circ$ асоціативна, тобто $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для $\forall a, b, c \in G$;
- 3) в множині G існує елемент e , нейтральний відносно операції $\circ$, тобто такий, що $a \circ e = e \circ a = a$ для $\forall a \in G$;
- 4) для $\forall a \in G$ існує такий елемент $a^{-1} \in G$ (називається оберненим до елемента a), що $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Множина K всіх перетворень площини є групою відносно композиції перетворень. Дійсно:

композиція двох перетворень площини є перетворення площини;
композиція перетворень асоціативна;
тотожне перетворення E є на множині K нейтральним елементом;
для кожного перетворення f площини існує обернене перетворення f^{-1} .

Нехай M – підмножина множини K . Визначимо, при яких умовах множина M є групою - підгрупою групи K – відносно композиції перетворень. Для цього необхідно, перш за все, щоб на M була визначена

шуканого трикутника. Далі будуюмо $B=Z_M(M')$ – третю вершину шуканого трикутника. Знайдені вершини A, B, C визначають шуканий трикутник. Задача має єдиний розв'язок, якщо $|m_b - m_c| m_a < m_c + m_b$.

Метод паралельного перенесення

Задача 27. Якщо площу деякого трикутника ABC позначити через S , то площа трикутника, сторонами якого є медіани даного трикутника становить $\frac{3}{4}S$. Довести це.

Розв'язання. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – медіани $\triangle ABC$ (рис.19). Побудуємо $B' = T_{AA_1}(AB)$. Очевидно, $C_1B' = T_{AC_1}(AA_1)$

і сторонами $\triangle C_1B'C$ будуть медіани

$$\triangle ABC. S_{\triangle C_1B'C} = \frac{1}{4}S, \text{ бо } S_{\triangle A_1B_1C} = S_{\triangle A_1B_1C} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{2} h_c = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} (CK = \frac{1}{2} h_c), \text{ де } K -$$

основа висоти з вершини C на сторону $B'A_1$. Незавжди переконатись, що точка A_1 є перетин медіан $B'M, C_1N, CP$ трикутника CC_1B' . Оскільки у трикутників $C_1B'M$ і $CB'M$ рівні основи C_1M і CM і спільна висота, то $S_{\triangle C_1B'M} = S_{\triangle CB'M}$. Так само $S_{\triangle C_1A_1M} = S_{\triangle CA_1M}$. Віднявши почленно останні рівності, дістанемо

$$S_{\triangle C_1B'M} - S_{\triangle C_1A_1M} = S_{\triangle CB'M} - S_{\triangle CA_1M} \text{ або } S_{\triangle C_1B'A_1} = S_{\triangle CBA_1}.$$

Аналогічно переконуюмось, що $S_{\triangle CBA_1} = S_{\triangle CA_1C_1}$. Отже,

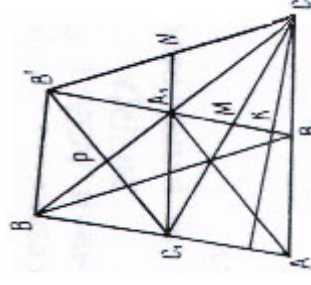


Рис. 19

Дослідження показує, що задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають пряма AB і коло (O_I, r) , тобто два, один, або не має жодного.

Центральну симетрію використовують також для побудови паралелограмів або інших фігур, що мають центр симетрії і до побудови фігур на основі зроблених припущень.

Задача 26. Побудувати трикутник за трьома його медіанами m_a, m_b, m_c .

Розв'язання. Нехай ABC - шуканий трикутник з медіанами $AA_I = m_a, BB_I = m_b, CC_I = m_c$, M - точка їх перетину (рис. 18). Побудуємо точку $M' = Z_{B_I}(M)$ і розглянемо чотирикутник $AMCM'$.

У нього $MB_I = B_I M$ і $AB_I = B_I C$, а тому

він паралелограм. Врахувавши, що

медіани трикутника діляться точкою їх

перетину у відношенні 2:1, рахуючи

від вершини, маємо: $MM' = \frac{2}{3} m_b$,

$MC = AM = \frac{2}{3} m_c, CM' = AM = \frac{2}{3} m_a$. Це означає, що

побудова шуканого трикутника зводиться до побудови допоміжної фігури: одного з трикутників CMM' або AMM' . Будемо, наприклад $\triangle CMM'$ (C - перша вершина шуканого трикутника) за трьома даними сторонами $\frac{2}{3}$

$m_a, \frac{2}{3} m_b, \frac{2}{3} m_c$. Нехай точка B_I - середина сторони

MM' , тоді будемо $B = Z_{B_I}(C)$ - другу вершину

композиція перетворень, тобто, щоб композиція будь-яких двох перетворень із M також належала M . Оскільки асоціативна властивість композиції справедлива для будь-яких перетворень, то множина M буде групою, якщо на M будуть виконуватись умови 3) і 4), сформульовані в означенні групи. При цьому виконання на множині M умови 4) (де E - тотожне перетворення) означає, що $E \in M$ і, що виконується умова 3). Дійсно, нехай деяке перетворення f належить M . За умовою 4) f^{-1} також належить M . Враховуючи умову 1) маємо, що і композиція $f \circ f^{-1} \in M$. Але $f \circ f^{-1}$, за означенням оберненого елемента, є тотожне перетворення E . Таким чином, $E \in M$, тобто виконується умова 2).

Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема. Якщо деяка множина перетворень площини містить композицію будь-яких двох її елементів і для кожного її елемента містить перетворення, обернене йому, то така множина перетворень є групою.

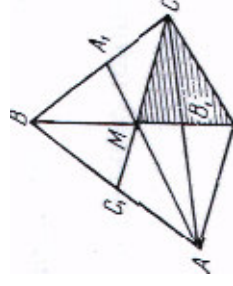


Рис.18

2. Загальна теорія переміщення площини

§1. Переміщення площини і його

властивості

Означення. Перетворення площини називається **переміщенням (рухом)**, якщо зберігається відстань між будь-якими двома точками, тобто якщо для будь-яких двох точок площини A, B і їх образів A', B' виконується співвідношення:

$$\rho(A', B') = \rho(A, B) \quad (1)$$

Розглянемо властивості переміщення.

1. При переміщенні зберігається відношення "лежати між".

Як відомо, точка B лежить між точками A і C тоді і тільки тоді, коли

$$\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C) \quad (2)$$

де кожний із доданків правої частини відмінний від нуля.

Доведення. Якщо A', B', C' - образи точок A, B, C при переміщенні f , тоді з (1) отримаємо:

$$\rho(A', B') = \rho(A, B), \quad \rho(B', C') = \rho(B, C), \quad \rho(A', C') = \rho(A, C).$$

Враховуючи останні співвідношення і (2) маємо:

$\rho(A', C') = \rho(A', B') + \rho(B', C')$. Отримана рівність доводить, що точка B' лежить між точками A' і C' .

2. Переміщення зберігає просте відношення трьох точок.

Метод центральної симетрії

Задача 24. У трапеції $ABCD$ бічна сторона AB 10 м. задовожки, перпендикулярна до основи, а точка E середина CD , другої непаралельної сторони, знаходиться від вершини A на відстані 18 м. Визначити площу трапеції.

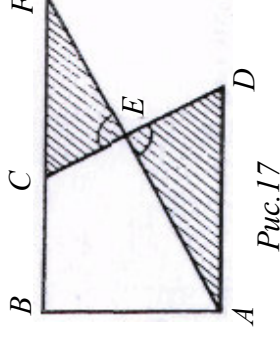


Рис.17

Розв'язання: З'єднаємо точку A з серединою сторони CD точкою E , відрізок прямої AE дорівнює 18 м. Прийmemo точку E за центр симетрії, тоді $Z_E(D) = C$ (рис.17). Побудуємо $F = Z_E(A)$, тоді за властивостями центральної симетрії $CF \parallel AD$ і $CF = AD$. Точки B, C, F належать одній прямій. Оскільки $Z_E(\triangle AED) = \triangle FEC$, то $\triangle AED = \triangle FEC$. Тому площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі прямокутного трикутника ABF , в якого $AB = 10$ м і $AF = 36$ м. За теоремою Піфагора $BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{36^2 - 10^2} \approx 35$. Тоді $S_{\triangle ABF} \approx 35 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 175 (\text{м}^2)$.

Задача 25. Побудувати відрізок, середина якого збігається з даною точкою M , а кінці знаходяться на даній прямій AB і на даному колі (O, r) .

Аналіз. Якщо побудувати коло (O_1, r) , симетричне даному колу (O, r) відносно точки M , то спільна точка K прямої AB і кола (O_1, r) є одним кінцем шуканого відрізка. Знаючи цю точку K , будемо точку $K_1 = Z_M(K)$. Відрізок KK_1 відповідає умові задачі.

тому що точка D належить колу (O_1, r) , але точка D належить a , тоді D є перетин прямої a і кола (O_1, r) .

Маючи точку D , знайдемо $B = R_A^{-90^\circ}(D)$, причому B належить колу (O, r) .

Побудова. З аналізу випливає такий план побудови:

- 1) побудуємо $(O_1, r) = R_A^{90^\circ}((O, r))$. Позначимо точку D – перетин прямої a і кола (O_1, r) ;
- 2) побудуємо $B = R_A^{-90^\circ}(D)$;
- 3) побудуємо квадрат $ABCD$ за трьома вершинами A, B, D .

Доведення.

$$\left. \begin{aligned} A &= R_A^{-90^\circ}(A) \\ B &= R_A^{-90^\circ}(B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = R_A^{-90^\circ}(AD) \Rightarrow AB = AD, \angle A = 90^\circ.$$

Крім того, за побудовою точка D належить прямій a , а B – колу (O, r) .

Дослідження. Число розв'язків збігається з числом точок перетину даної прямої a з образом (O_1, r) даного кола (O, r) при повороті $R_A^{90^\circ}$.

Зауваження.

1. Можна брати як $R_A^{90^\circ}$, так і $R_A^{-90^\circ}$.
2. Розв'язання задачі можна розпочати з побудови $a_1 = R_A^{-90^\circ}(a)$.

Доведення. Якщо точка B лежить між точками A і C , тоді

$$\lambda = (AC, B) = \frac{\rho(A, B)}{\rho(B, C)}.$$

Нехай A', B', C' - образи точок A, B, C при переміщенні f і виконується рівність:

$$\lambda' = \frac{\rho(A', B')}{\rho(B', C')}.$$

Покажемо, що $\lambda = \lambda'$. Справді

$$\lambda' = \frac{\rho(A', B')}{\rho(B', C')} = \frac{\rho(A, B)}{\rho(B, C)} = \lambda.$$

3. Переміщення відображає пряму в пряму, промінь у промінь, відрізок у відрізок.

4. При переміщенні зберігається величина кута.

5. Переміщення відображає коло у коло того ж радіуса.

Властивості 3-5 є наслідками властивостей 1, 2.

6. Якщо перетворення f площини зберігає відношення будь-яких трьох точок прямої, то в цьому перетворенні репер $R' = \{O, A_1, A_2\}$ переходить в такий репер $R' = \{O', A'_1, A'_2\}$, що координати точки $M' = f(M)$ в репері R' рівні відповідним координатам точки M в репері R .

Доведення. Оскільки перетворення f зберігає відношення трьох точок будь-якої прямої, то в цьому

перетворенні відрізок переходить у відрізок, пряма - в пряму, точки, що не належать одній прямій - в точки, що не належать одній прямій, паралельні прямі - в паралельні прямі, промінь - в промінь, півплощина - в півплощину. Тому в перетворенні f репер $R = \{O, A_1, A_2\}$ переходить в репер $R' = \{O', A'_1, A'_2\}$.

Нехай x, y координати точки M в репері R , x', y' - координати точки $M' = f(M)$ в репері R' . Проведемо пряму $MM_1 \parallel OA_2$ ($M_1 \in OA_1$). Якщо $f(M_1) = M'_1$, тоді $M'_1 \in O'A'_1$, $MM'_1 \parallel O'A'_2$. Оскільки $f(A_1) = A'_1$, то із $x=1$ маємо, що $x'=1$.

Нехай $x \neq 1$ і відповідно, $x' \neq 1$. Маємо: $\overline{OM_1} = x\overline{OA_1}$, $\overline{O'M'_1} = x'\overline{O'A'_1}$. З цих рівностей одержимо: $x = (M_1A_1, O)$, $x' = (M'_1A'_1, O')$, отже, $x = x'$. Аналогічно отримаємо, що $y = y'$.

7. Будь-яке переміщення f площини переводить ортонормований репер R в ортонормований репер R'

і координати точки $M' = f(M)$ в репері R' дорівнюють відповідним координатам точки M в репері R .

Доведення.

Нехай $R = \{O, A_1, A_2\}$ - ортонормований репер, f - переміщення площини і $f(O) = O'$, $f(A_1) = A'_1$, $f(A_2) = A'_2$ (див. рис.1).

Тоді маємо: $(\rho(O, A_1) = \rho(O, A_2) = 1, \rho(A_1, A_2) = \sqrt{2}$,

Побудова: 1) візьмемо вершину A , як довільну точку прямої a ; 2) побудуємо $c_1 = R_A^{90^\circ}(c)$, B - перетин прямих b і c_1 ; 3) побудуємо $\triangle ABC$ - шуканий.

Доведення.

$$\left. \begin{aligned} A &= R_A^{-90^\circ}(A) \\ C &= R_A^{-90^\circ}(B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = R_A^{-90^\circ}(AB) \Rightarrow AC = AB, \angle A = 90^\circ.$$

Крім того, за побудовою точки A, B, C відповідно належать прямим a, b, c .

Дослідження. Задача завжди має розв'язок, бо при повороті $R_A^{90^\circ}$ пряма $c_1 = R_A^{90^\circ}(c)$ завжди перетне пряму b в якійсь точці (це й буде точка B), а образ точки C , яка належить прямій c належатиме прямій c_1 . Якщо взяти поворот $R_A^{-90^\circ}$, то матимемо інший трикутник AB_1C_1 , симетричний трикутнику ABC відносно прямої, що проходить через точку a перпендикулярну до даних прямих. Проте $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$, тому задача має єдиний розв'язок.

Задача 23. Побудувати квадрат так, щоб одна його вершина сумістилась з даною точкою, а дві сусідні їй - лежали по одній на даному колі і на даній прямій.

Дано: A - точка, a - пряма, (O, r) - коло. Побудувати: $ABCD$ - квадрат, в якого точка B належить колу, (O, r) а точка D - прямій a .

Розв'язання.

Аналіз. Нехай $ABCD$ - квадрат, що задовольняє умову задачі (рис. 16). Виберемо поворот $R_A^{90^\circ}$ (проти руху стрілки годинника), тоді $D = R_A^{90^\circ}(B)$. Побудуємо коло $(O_1, r) = R_A^{90^\circ}((O, r))$. Точка B належить колу (O, r) ,

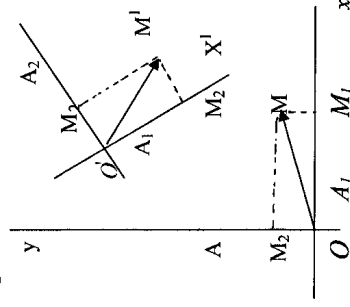


рис.1

перетинаються в точці O – центроїді цього шестикутника і ділять його на шість рівних правильних трикутників (рис. 14). Отже, чотирикутник $AOCB$ – ромб, тому точка M – середина відрізка AC – буде і серединою відрізка OB . Повернемо сторону DE навколо точки F на кут 60° . Тоді із рівностей $\angle BFD = 60^\circ$ і $DF = BF$ випливає, що при цьому повороті точка D переходить у точку B , $\angle OFE = 60^\circ$, тоді точка E перейде у точку O і відрізок DE переходить у відрізок BO , а середина відрізка DE – точка N – у середину відрізка BO – точку M . Отже, $MF = NF$ і $\angle NFM = 60^\circ$, значить трикутник MNF правильний.

Задача 22. Побудувати рівнобедрений трикутник, вершини якого належать трьом даним паралельним прямим.

Розв'язання. Дано: $a \parallel b \parallel c$.

Аналіз. Припустимо, що трикутник ABC побудовано так, що він задовольняє умову задачі (рис. 15). Виберемо поворот $R_A^{90^\circ}$ (проти руху стрілки годинника).

Тоді $B = R_A^{90^\circ}(C)$. Побудуємо пряму $c_1 = R_A^{90^\circ}(c)$. Точка C належить прямій c , тому точка B належить прямій c_1 , але точка B також належить прямій b ; тому $B \in$ перетині прямих b і c_1 . Маючи B , знайдемо $C = R_A^{-90^\circ}(B)$.

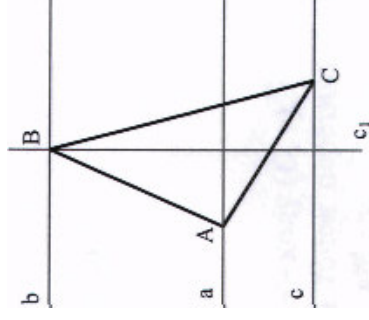


Рис. 15

$$O \notin (A_1, A_2) \Rightarrow (\rho(O', A_1') = \rho(O', A_2') = 1, \quad \rho(A_1', A_2') = \sqrt{2}, \\ O' \notin (A_1', A_2')) \Rightarrow R'\{O', A_1', A_2'\} - \text{ортономований репер.}$$

Оскільки переміщення зберігає відношення трьох точок, то координати x, y будь-якої точки M репера R рівні відповідним координатам x', y' точки $M' = f(M)$ репера R' .

8. Множина всіх переміщень площини утворює групу.

Доведення. Щоб впевнитись в цьому перевіримо виконання умов означення групи перетворень.

1) Композиція двох переміщень є переміщення. Дійсно, нехай $f_1(A) = A', f_1(B) = B'$, а $f_2(A') = A'', f_2(B') = B''$ тоді композиція $f_2 \circ f_1$ відображає точки A і B відповідно в точки A'', B'' . З означення переміщення $\rho(A, B) = \rho(A', B')$, $\rho(A', B') = \rho(A'', B'')$ одержуємо, що $\rho(A, B) = \rho(A'', B'')$ і перетворення $f_2 \circ f_1$ є переміщенням.

2) 2) Перетворення, обернене до переміщення, є переміщення. Це випливає із симетрії рівності $\rho(A, B) = \rho(A', B')$.

§2. Аналітичне вираження переміщення

Дано два ортономованих реperi $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ і $R' = \{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$. Нехай a - величина напрямленого кута $(\vec{i}, \wedge \vec{i}')$, $\vec{OO'} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ і нехай f - переміщення площини, що переводить репер R в R' .

Якщо x, y - координати точки M , x', y' -

координати точки $M' = f(M)$ в репері R , то x, y - координати точки M' в репері R' . Використавши формули перетворення ортонормованої системи координат, одержимо

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - \xi y \sin \alpha + x_0 \\ y' = x \sin \alpha + \xi y \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

де $\xi = +1$, якщо реperi R і R' однаково орієнтовані, і $\xi = -1$, якщо реperi протилежно орієнтовані.

В переміщенні f , що переводить ортонормований репер R в репер R' , формули (1) виражають координати x', y' точки $f(M)$ через координати x, y точки M в тому ж репері R . Навпаки, якщо дано ортонормований репер, $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, то формули (1) визначають відображення f :

$$\{M(x, y)\} \rightarrow \{M'(x', y')\}.$$

$$\text{Так як визначник системи (1)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\xi \sin \alpha \\ \sin \alpha & \xi \cos \alpha \end{vmatrix} = \xi \neq 0,$$

то відображення f є перетворенням площини. Для будь-яких двох точок $M(x, y), M_1(x_1, y_1)$ із формул (1) отримуємо:

$$\rho(MM_1') = \sqrt{(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \rho(M, M_1),$$

отже, перетворення f - переміщення площини. При цьому переміщенні:

$$O(0, 0) \rightarrow O'(x_0, y_0),$$

$$A_1(1, 0) \rightarrow A_1'(\cos \alpha + x_0, \sin \alpha + y_0),$$

$$A_2(0, 1) \rightarrow A_2'(-\xi \sin \alpha + x_0, \xi \cos \alpha + y_0).$$

Звідси $f(R) = R' = \{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$, де

перпендикулярна до NQ і дорівнює половині цього відрізка.

Розв'язання. Повернемо трикутник ANQ навколо центра A на $+90^\circ$ (рис.13). Тоді точка A перейде в точку A , точка Q - в точку C , точка N - в точку N' , при цьому точка A є серединою відрізка NN' . Відрізок AE є середньою лінією в трикутнику $BN'C$. Тому: 1) $AE \parallel N'C$ і $N'C \perp NQ$ (як образ і прообраз),

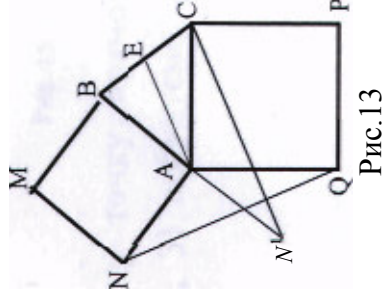


Рис.13

звідки випливає, що $AE \perp NQ$; 2) $AE = \frac{1}{2} N'C = \frac{1}{2} NQ$.

Аналогічно розв'язується така задача:

Задача 20. На сторонах AB і AC трикутника ABC побудовано рівносторонні трикутники ABM і CAN , причому трикутник ABM міститься зовні трикутника ABC , а трикутник CAN з тієї ж сторони від AC , що і трикутник ABC . Довести, що відрізки MN і BC рівні.

Задача 21. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, M - середина діагоналі AC , N - середина сторони DE . Довести, що трикутник MNF правильний.

Розв'язання. Шестикутник $ABCDEF$ - правильний, його діагоналі AD , BE і CF

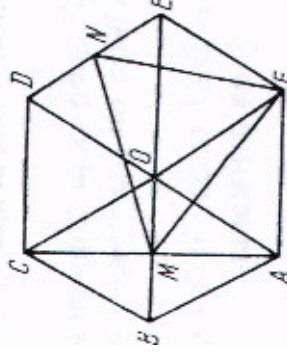


Рис. 14

3) якщо кола (O_1, r_1) і (O_2, r_2) не мають спільних точок або обидва лежать по один бік від даної прямої, то задача розв'язків не має;

4) якщо кола (O_1, r_1) і (O_2, r_2) збігаються, то розв'язків нескінченна множина.

Зауваження. Розв'язання можна розпочати з побудови кола $(O_2', r_2') = S_a((O_2, r_2))$.

Метод повороту навколо точки

Задача 18. На гіпотенузі прямокутного трикутника зовні його побудовано квадрат. Знайти відстань від вершини прямого кута трикутника до центра квадрата, якщо сума довжин катетів трикутника дорівнює m .

Розв'язання. Нехай O центр квадрата $ABMN$ (рис.12).

Тоді $R_O^{90^\circ}(B) = A$, $R_O^{90^\circ}(A) = N$. Якщо $R_O^{90^\circ}(C) = C_1$, то точки

C, A, C_1 належать одній прямій,

тому що $\angle CAB + \angle BAN +$

$+ \angle NAC_1 = 180^\circ$. Трикутник

COC_1 – прямокутний рівнобедрений і за умовою $CC_1 = CA +$

$+ AC_1 = CA + CB = m$. Так як

(рис.12) $OC = OC_1$, то із $OC^2 +$

$+ OC_1^2 = CC^2$ маємо $2OC^2 = m^2$,

$$OC = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Задача 19. На сторонах AB і AC трикутника ABC зовні його побудовані квадрати $ABMN$ і $ACPQ$. Довести, що медіана AE трикутника ABC

$$OO' = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j},$$

$$\vec{i}' = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\vec{j}' = \xi(-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha)$$

Отже, в ортонормованому репері R формули (1) виражають переміщення площини, і репер R при цьому переміщенні переходить в репер R' , що визначається формулами (2). Тому кажуть, що формули (1) є формулами аналітичного вираження переміщення.

Переміщення f називається переміщенням *першого роду (другого роду)*, якщо ортонормовані репери R і $R' = f(R)$ однаково (протилежно) орієнтовані.

Формули (1) визначають в ортонормованому репері R переміщення першого роду (другого роду) тоді і тільки тоді, коли $\xi = +1$ ($\xi = -1$).

Множина переміщень першого роду утворює групу, а другого роду групи не утворює.

Група переміщень першого роду називається *підгрупою* групи рухів.

Сформулюємо тепер означення рівності двох фігур:

Означення. Фігури Φ і Φ' називаються рівними, якщо існує переміщення яке переводить фігуру Φ у Φ' .

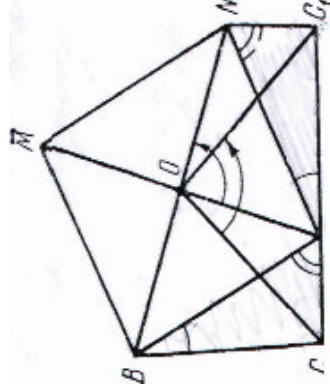


Рис. 12

§3. Класифікація переміщень площини.

3.1. Паралельне перенесення площини.

Означення. Нехай $\vec{v}$ - деякий вектор площини. Перетворення, при якому кожній точці A площини ставиться у відповідність така точка A' цієї ж площини, що $\overline{AA'} = \vec{v}$, називається паралельним перенесенням і позначається $T_{\vec{v}}$.

Якщо $A'(x', y')$ -образ точки $A(x, y)$, то із означення, $\overline{AA'} = \vec{v}$. Але вектор $\overline{AA'}$ має при наших позначеннях координати $x' - x$ і $y' - y$. Звідси, якщо $\vec{v} = (m, n)$, то $x' - x = m$, $y' - y = n$. Отже, координати x' , y' образу виражаються через координати x , y прообразу при паралельному перенесенні на вектор $\vec{v} = (m, n)$ наступними формулами:

$$\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases} \quad (1)$$

При паралельному перенесенні:

- 1) пряма відображається в паралельну їй пряму.
- 2) зберігається відстань між точками, тобто паралельне перенесення є рух. Доведемо це.

Справді, нехай деяка пряма g задана рівнянням $Ax + By + C = 0$. Підставивши в це рівняння $x' - m$ замість x і $y' - n$ замість y , отримаємо:

$$A(x' - m) + B(y' - n) + C = 0,$$

$$Ax' + By' + (C - Am - Bn) = 0,$$

$$Ax' + By' + C_1 = 0.$$

Це і означає, що множина образів точок прямої g є

вершини B і D – відповідно даним колам (O_1, r_1) і (O_2, r_2) . Оскільки діагональ AC квадрата є його віссю симетрії, то точки B і D симетричні відносно прямої a (рис.11). Побудуємо коло $(O'_1, r'_1) = S_a((O_1, r_1))$. Оскільки $D = S_a(B)$ і вершина B належить колу (O_1, r_1) , то вершина D належить колу (O'_1, r'_1) . Крім цього, вершина D належить колу (O_2, r_2) . Отже, точка D є перетин кіл (O'_1, r'_1) і (O_2, r_2) . Побудувавши точку D , знайдемо $B = S_a(D)$ і точку O – перетин відрізка BD і прямої a . Тоді $OB = OD = OA = OC$ і точки A і C належать a .

Побудова: 1) виберемо S_a ; 2) побудуємо $(O'_1, r'_1) = S_a((O_1, r_1))$ і точку D як одну з точок перетину кіл (O'_1, r'_1) і (O_2, r_2) ; 3) знаходимо точку $B = S_a(D)$ і точку O , як перетин прямої a і відрізка BD ; 4) відкладемо на a по різні сторони від O відрізки $OA = OB$ і $OC = OD$.

Доведення. $ABCD$ – чотирикутник, у якого діагоналі AC і BD перпендикулярні, відрізки OA , OB , OC , OD рівні, тому $ABCD$ – квадрат, у якого точки A і C належать даній прямій a , а точки B і D відповідно належать даним колам (O_1, r_1) і (O_2, r_2) .

Дослідження. При вибраному способі побудови кількість розв'язків залежить від кількості точок перетину кіл (O_1, r_1) і (O_2, r_2) і положення цих точок відносно прямої AC . Можливі такі випадки:

- 1) якщо кола (O_1, r_1) і (O_2, r_2) перетинаються, то задача має два розв'язки;
- 2) якщо кола (O_1, r_1) і (O_2, r_2) дотикаються, то задача має один розв'язок;

по-друге, пряма p , напрямний вектор якої $\vec{y}(1,1)$, перпендикулярна до $AA'(x'-x, y'-y)$, тому справеджується рівність

$$1 \cdot (x'-x) + 1 \cdot (y'-y) = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2) і (3) відносно x' і y' дістанемо рівняння шуканої осової симетрії:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Задача 16. Довести, що графік функції $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симетричний відносно осі y графіку функції $y = a^x$.

Розв'язання. Оскільки $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, то легко зрозуміти, що коли точка $A(k, m)$ належить графіку $y = a^x$, то симетрична їй точка відносно осі y $A'(-k, m)$ належить графіку $y = a^{-x}$. Справді, якщо рівність $m = a^k$ правильна, то буде правильна і рівність $m = a^{-(-k)} = a^k$.

Задача 17.

Побудувати квадрат, дві протилежні вершини якого належать даним прямій, а дві інші – двом даним колам.

Аналіз. Нехай $ABCD$ – шуканий квадрат, вершини A і C належать даним прямій a , а

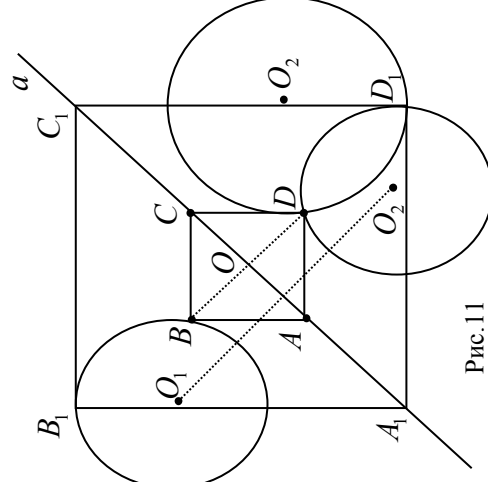


Рис.11

також деяка пряма g' . При цьому коефіцієнти при змінних в отриманих рівняннях відповідно рівні, так що прямі g і g' паралельні.

Доведемо другу властивість паралельного перенесення. Якщо $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ – дві довільні точки і $A'(x'_1, y'_1)$ і $B'(x'_2, y'_2)$ – їх образи, то $x'_1 = x_1 + m$, $y'_1 = y_1 + n$, $x'_2 = x_2 + m$, $y'_2 = y_2 + n$, тому $\rho(A', B') = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(A, B)$. Отже, паралельне перенесення є переміщенням площини.

Якщо вектор $\vec{v} = \vec{0}$, то в цьому випадку кожна точка площини переходить сама в себе, тобто є інваріантною і ми маємо **тотожне перетворення**. Якщо $\vec{v} \neq \vec{0}$, то інваріантних точок немає.

3.2. Осьова симетрія

Означення. Симетрією S_l відносно прямої l називається перетворення площини, при якому образом точки $A \notin l$ є точка A' (цієї ж площини), така що:

- 1) $AA' \perp l$,
- 2) точка $A_0 = (AA') \cap l$ – середина відрізка AA' (рис. 2).

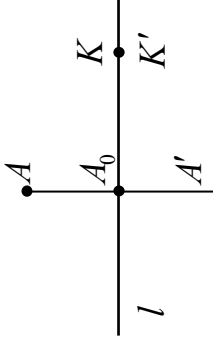


Рис. 2

Пряма l називається **віссю симетрії**. Якщо точка $K \in l$, то $K' = K$, тобто кожна точка, що належить l є подвійною точкою перетворення

симетрії; інших точок площини, що мають таку властивість немає.

Не обмежуючи загальності приймемо за вісь симетрії яку-небудь з осей координат. Наприклад, при симетрії відносно осі Ox кожна точка $A(x, y)$ переходить в точку $A'(x, -y)$ (рис. 3). Звідси маємо, що дане переміщення виражається формулами:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \quad (2)$$

Якщо за вісь симетрії взяти вісь декартової системи координат Oy , то одержимо наступні формули для вираження осьової симетрії:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (3)$$

Розглянемо деякі властивості осьової симетрії.

1) Осьова симетрія є переміщення другого роду.

Справді, нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ - дві довільні точки площини, а точки $A'(x_1, -y_1)$, $B'(x_2, -y_2)$ - їх образи. Тоді:

$$\rho(A', B') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((-y_2) - (-y_1))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \rho(AB).$$

Із (2) і (3) маємо, що $\varepsilon = -1$.

2) При осьовій симетрії вісь симетрії залишається інваріантною, причому абсолютноно (всі точки інваріантні).

3) Пряма, яка перпендикулярна до осі симетрії є інваріантною (переходить сама в себе), але не абсолютноно (див. рис.3).

4) Пряма, що паралельна осі

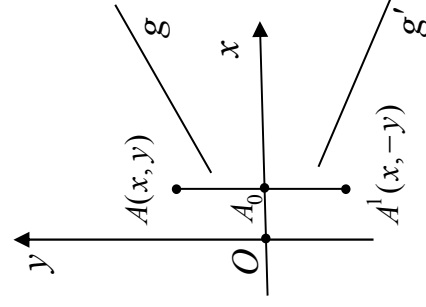


Рис. 3

Задача 14. Доведіть, що лінія, рівняння якої $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, симетрична відносно координатних осей.

Розв'язання. Виконаємо симетрію відносно осі x за формулами:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Рівняння ліній-образа буде $(x')^2 + 2(-y')^2 - 1 = 0$ або $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, і воно збігається з рівнянням ліній-образа. Аналогічно доводиться симетрія відносно осі y .

Задача 15. Знайдіть рівняння осьової симетрії відносно прямої $y = x$.

Розв'язання. За умовою рівняння осі p симетрії (бісектриси першого і третього координатних кутів) буде $y = x$ або

$$x - y = 0 \quad (1)$$

Для розв'язування задачі слід виразити координати образу $A'(x', y')$ через координати прообразу $A(x, y)$ відносно осі p (рис.10). Згідно з означенням осьової симетрії, по-перше, середина відрізка AA' точка $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ належить осі p

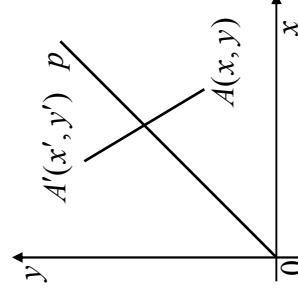


Рис. 10

(рис. 10), і тому її координати задовольняють рівняння (1), тобто,

$$\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} = 0, \quad (2)$$

рівнобедреного трикутника точка A переходить у C , точка $B - B$, відрізок $AB -$ у відрізок CB . Відрізки AM і CN , AP і CQ рівні, тому згідно з властивістю осевої симетрії точки N перейде в точку M і точка P в точку. Отже, відрізок NQ симетричний відносно осі BD відрізку MP , тоді відрізки NQ і MP (образ і прообраз) перетнуться вісь BD в одній і тій самій точці O , яка належить висоті BD .

Задача 13. Доведіть, що з усіх трикутників з даною основою і даною висотою рівнобедрений має найменший периметр.

Розв'язання. Порівняємо периметр двох трикутників ABC і ABC_1 де ABC рівнобедрений трикутник, а трикутник ABC_1 будь-який з тих, що має однакову основу і висоту з рівнобедреним (рис.9). Їх вершини C і C_1 лежать на прямій p , паралельній прямій AB . Довести, що $AC_1 + C_1B > AC + CB$. Знайдемо точці B симетричну їй B' відносно осі p : $B' = S_p(B)$. $CB' = CB$, $BC_1 = C_1B'$ (як симетричні відрізки) $\angle ACB' = 180^\circ$, тому ACB' – пряма і, отже, згідно з теоремою, за якою довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що з'єднує її кінці, маємо: $AC_1 + C_1B' > AC + CB'$ або $AC_1 + C_1B > AC + CB$, що й треба було довести.

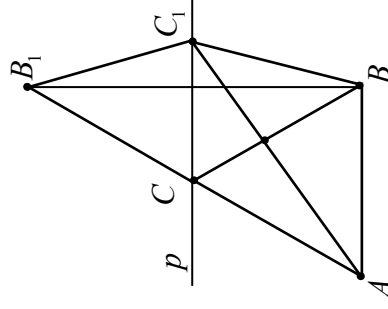


Рис.9

симетрії переходить в паралельну до неї пряму.

Оскільки основа симетрія є переміщення, то для неї характерні всі властивості переміщення.

Множина осевих симетрій не утворює групу, оскільки композиція двох осевих симетрій є рух першого роду.

Означення. Якщо при симетрії відносно прямої l деяка фігура F відображається на себе, то пряма l називається **віссю симетрії** даної фігури.

Тому діаметр будь-якого кола є віссю симетрії даного кола; будь-яка пряма, що перпендикулярна даній прямій, є віссю симетрії цієї прямої; будь-яка висота правильного трикутника є його віссю симетрії.

3.3 Поворот.

Означення. Нехай задано точку O – центр повороту і деякий орієнтований кут α . Тоді **поворотом навколо точки O на кут α** називається перетворення, при якому кожній точці A площини ставиться у відповідність така точка A' цієї площини, що:

$$1) \rho(OA') = \rho(OA);$$

2) Кут AOA' рівний куту α і орієнтований так само як кут α . Поворот навколо точки O на кут α позначається R_α^O .

Виберемо центром повороту початок координат

прямокутної декартової системи і зорієнтуємо кут $(i, \wedge j)$ так само, як даний кут α .

Нехай $A(x, y) \rightarrow A'(x', y')$ Якщо (рис.4) позначити кут $(i, \wedge OA)$ через β , то кут $(i, \wedge \overrightarrow{OA'})$ буде мати таку саму ж величину, як і кут $\alpha + \beta$. Тому

$x' = OA' \cos(\alpha + \beta) = OA(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$. Аналогічно $y' = OA' \sin(\alpha + \beta) = OA(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$. А оскільки $OA \cos \beta = x, OA \sin \beta = y$, то

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Це і формули аналітичного вираження повороту навколо початку координат на кут α .

Якщо ж центр повороту міститься в довільній точці $M_0(x_0, y_0)$, то формули повороту набувають вигляду:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Не важко впевнитися, що поворот є переміщенням першого роду, тому для нього мають місце усі властивості переміщення.

Множина всіх поворотів утворює групу, яка є підгрупою групи рухів першого роду.

Справді: $R_0^\beta \circ R_0^\alpha = R_0^{\alpha+\beta}$ і $(R_0^\alpha)^{-1} = R_0^{-\alpha}$.

Означення. Поворот навколо точки O на кут 180° називається **центральною симетрією** (Z_0). Точку O

з ΔABC в результаті паралельного перенесення.

Запишемо формули цього перенесення: $\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases}$

Оскільки при цьому перетворенні точка A переходить в точку A' , то маємо $\begin{cases} 6 = 1 + a_1 \\ 1 = 0 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5, \\ a_2 = 1, \end{cases}$ тобто $\vec{a}(5,1)$. Тоді шукані формули аналітичного вираження паралельного перенесення мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Застосування рухів, зокрема, осової симетрії, повороту, паралельного перенесення, центральної симетрії значно допомагає при розв'язуванні геометричних задач на доведення, обчислення, побудову. Розглянемо деякі приклади на використання переміщень.

Метод осової симетрії

Задача 12. На основі рівнобедреного трикутника ABC відкладено рівні відрізки AM і CN , а на бічних сторонах – рівні відрізки AP і CQ . Довести, що відрізки PM і QN перетинаються на висоті BD цього трикутника.

Розв'язання. Нехай дані відрізки відкладено так, як показано на рис.8. Розглянемо осову симетрію, віссю якої буде пряма BD . За властивістю

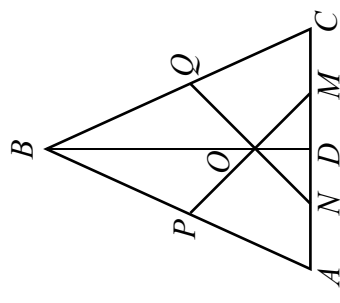


Рис.8

Тепер можна записати формули перетворення $f: T_a \circ W_i^b$

$$\begin{cases} x''' = -y + 3, \\ y''' = -x + 6. \end{cases}$$

Задача 10. Записати формули перетворення f^{-1} оберненого до перетворення

$$f: \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y \end{cases}$ відносно

x і y . Маємо, що $x = \frac{1}{2}(x' + y')$, $y = \frac{1}{2}(-x' + y')$. Отже, формули перетворення f^{-1} мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y', \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$$

Задача 11. В репері дано R координати точок $A(1,0)$, $B(1,3), C(3,1)$, $A'(6,1)$, $B'(6,4), C'(8,2)$. Довести, що $\triangle A'B'C'$ утворений внаслідок паралельного перенесення $\triangle ABC$. Визначити формули перетворення і записати координати вектора, на який здійснюється паралельне перенесення.

Розв'язання. Знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{AB}(0,3), \overrightarrow{AC}(2,1), \overrightarrow{BC}(2,-2), \overrightarrow{A'B'}(0,3), \overrightarrow{A'C'}(2,1), \overrightarrow{B'C'}(2,-2).$$

Отримали, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$. Отже, сторони AB і $A'B'$ і $A'C'$, BC і $B'C'$ даних трикутників є паралельними і рівними. Тобто $\triangle A'B'C'$ отримується

називають *центром симетрії*.

Запишемо формули для аналітичного вираження центральної симетрії. Нехай центр симетрії міститься в початку координат, в точці $O(0, 0)$, тоді із (4) отримаємо наступні формули:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases} \quad (6)$$

Якщо ж центр знаходиться в довільній точці $M_0(x_0, y_0)$, то із (5) одержимо:

$$\begin{cases} x' = -(x - x_0) + x_0 \\ y' = -(y - y_0) + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases} \quad (7)$$

Означення. Якщо деяка фігура при симетрії відносно точки O відображається на себе, то точка O називається *центром симетрії* даної *фігури*.

Тому, центр кола є одночасно і його центром симетрії, точка перетину діагоналей паралелограма – центр симетрії цього паралелограма.

3.4 Ковзна симетрія

Означення. Композиція $f = T_{\vec{v}} \circ S_l$ осевої симетрії S_l і перенесення $T_{\vec{v}}$ при $\vec{v} \parallel l$ називається **ковзною симетрією** ($W_e^{\vec{v}}$).

$$\text{Якщо } S_l(A) = A' \text{ і } T_{\vec{v}}(A') = A'', f(A) = A'',$$

Порядок співмножників $T_{\vec{v}}$ і S_l в даному випадку не грає ролі: якщо $T_{\vec{v}}(A) = A'_1$, то однаково $S_l(A'_1) = A''$ (рис. 5).

Прийнявши пряму l за вісь Ox прямокутної декартової системи координат і вважаючи, що у вибраній системі координат $A(x, y)$, $\vec{v}(\alpha, 0)$, $A'(\bar{x}, \bar{y})$, $A''(x', y')$, то одержимо:

$$S_{\xi} : \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = -y' \end{cases}, \quad T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = \bar{x} + \alpha, \\ y' = \bar{y} \end{cases}, \quad W_{\vec{l}} : \begin{cases} x' = \bar{x} + \alpha, \\ y' = -y \end{cases},$$

отже,

$$W_{\vec{l}} : \begin{cases} x' = x + \alpha, \\ y' = -y \end{cases} \quad (8)$$

Це і є формули, що виражають ковзну симетрію у випадку, коли віссю симетрії є вісь Ox .

Якщо за пряму l прийняти вісь Oy , то отримаємо наступні формули:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y + \alpha \end{cases} \quad (9)$$

Ковзна симетрія, як композиція двох переміщень, є переміщенням, причому другого роду. Множина всіх ковзних симетрій не утворює групи.

Отже, ми отримали наступну класифікацію переміщень площини:

Розв'язання. Запишемо спочатку формули ковзної симетрії. Для цього знайдемо аналітичне вираження осової симетрії. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка площини, а $M'(x', y')$ – її образ при симетрії відносно прямої $l: x + y = 0$. Знайдемо координати точки O , використовуючи формули поділу відрізка пополам: $O(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$. Точка O належить прямій l , тому її координати задовольняють рівняння $x + y = 0$. Маємо:

$$\frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} = 0 \Rightarrow x' + y' + x + y = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{M'M}(x - x', y - y')$ ортогональний до напрямного $\vec{a}(-1, 1)$ прямої $x + y = 0$, тому запишемо $(-1)(x - x') + 1(y - y') = 0$, $x' - y' - x + y = 0$.

Із системи $\begin{cases} x' + y' + x + y = 0, \\ x' - y' - x + y = 0 \end{cases}$ отримуємо $\begin{cases} x' = -y', \\ y' = -x. \end{cases}$

Це і є формули аналітичного вираження S_l .

Запишемо формули паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(2, 4)$. Нехай $T_{\vec{b}}(M') = M''$ і $M''(x'', y'')$. Маємо:

$$T_{\vec{b}} : \begin{cases} x'' = x' + 2, \\ y'' = y' + 4. \end{cases}$$

Тоді перетворення $W_l^{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ S_l$ запишеться так:

$$\begin{cases} x'' = -y' + 2, \\ y'' = -x + 4. \end{cases}$$

Аналітичне вираження паралельного перенесення $T_{\vec{a}}$ має вигляд:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1, \\ y'' = y' + 2. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{4} & \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{2}{4} \end{vmatrix} = -1 = \varepsilon.$$

Отже, дані формули виражають аналітичне задання руху, зокрема $\xi = -1$, тобто руху другого роду.

Довести, що дане перетворення є рухом можна і по-іншому. Нехай при цьому перетворенні

$$M(x_1, y_1) \rightarrow M'(x'_1, y'_1),$$

$$f: N(x_2, y_2) \rightarrow N'(x'_2, y'_2),$$

тоді

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{3}{4}x_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}y_1 + \frac{3}{4}, \\ y'_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}x_1 - \frac{3}{4}y_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = \frac{3}{4}x_2 + \frac{\sqrt{7}}{4}y_2 + \frac{3}{4}, \\ y'_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

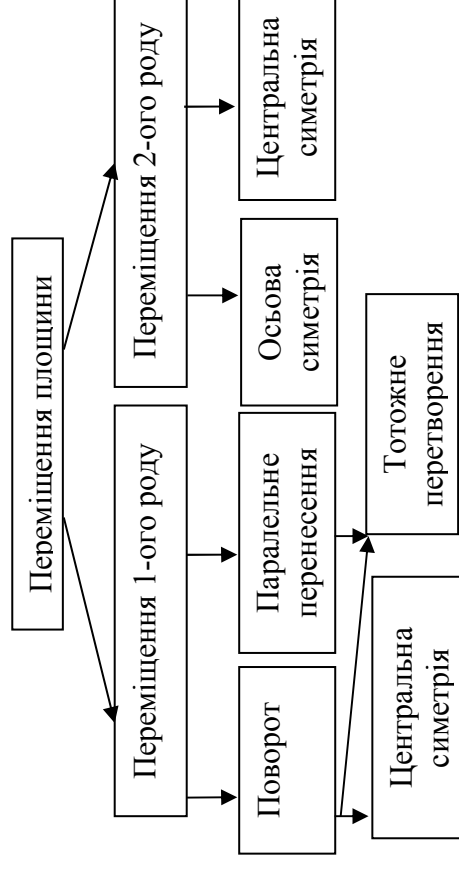
$$\text{Маємо } \rho(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ а}$$

$$\begin{aligned} \rho(M', N') &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}x_2 + \frac{\sqrt{7}}{4}y_2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{4}y_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}x_1 + \frac{3}{4}y_1 - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}(x_2 - x_1) + \frac{\sqrt{7}}{4}(y_2 - y_1)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}(x_2 - x_1) - \frac{3}{4}(y_2 - y_1)\right)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M, N). \end{aligned}$$

А це означає, що дане перетворення є рух.

Задача 9. Записати формули перетворення

$$f: T_{\vec{a}} \circ W_l^{\vec{b}}, \text{ якщо } \vec{a}(1,2), \vec{b}(2,4), \quad l: x + y = 0.$$



§4. Розклад переміщень в добуток осьових симетрій

Теорема 1. Добуток двох осьових симетрій $Sd_1 \circ Sd_2$ ($d_1 \cap d_2 = \emptyset$) є поворотом площини навколо точки O на кут, величина якого рівна подвоєній величині кута, утвореного прямими d_1, d_2 . Навпаки, будь-який поворот площини навколо точки O на кут $\alpha \neq 0$ можна розкласти в добуток двох осьових симетрій, осі яких $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ і утворюють кут, величина якого $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

Доведення. Візьмемо ортонормований репер $R = \{O, A_1, A_2\}$. При відображенні відносно прямої d_1 репер R перейде в протилежно орієнтований репер

$\tilde{R} = \{O, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, який при відображенні відносно прямої d_2 перейде в протилежно-орієнтований репер $R' = \{O, A'_1, A'_2\}$ (див. рис.6).

Отже, реperi R і R' є однаково орієнтовані. Добуток $f_1 = Sd_2 \circ Sd_1$ переводить репер R в R' . Так як і поворот f площини навколо точки O переводить репер R в R' , то $f = f_1 = Sd_2 \circ Sd_1$.

Нехай $d_1 \cap (A_1 \tilde{A}_1) = A_0$, $d_2 \cap (\tilde{A}_1 A'_1) = A'_0$ і $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA'_0}) = \varphi$. Тоді маємо: $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA'_0}) = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA'_1}) = \frac{1}{2} [(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_1}) +$

$$+ (\overrightarrow{OA'_1}, \overrightarrow{OA'_1})] = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA'_1}).$$

Нехай f поворот площини навколо O на кут a . Проведемо через точку O прямі d_1 , d_2 так, щоб величина кута, утвореного прямими d_1 , d_2 , була $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

За доведеним добуток осевих симетрій $Sd_2 \circ Sd_1$ є поворотом площини навколо точки O на кут $2(\frac{\alpha}{2}) = a$, і відповідно

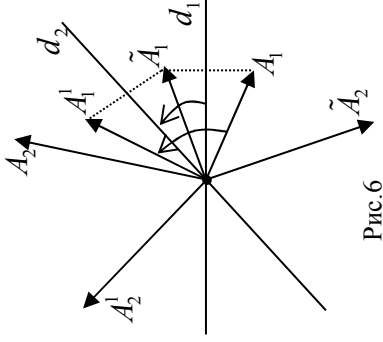


Рис.6

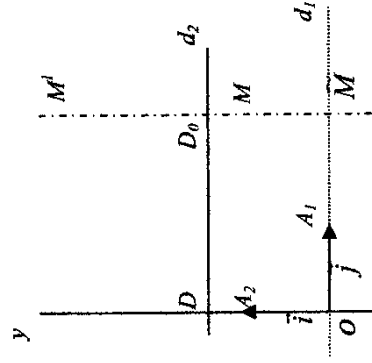


Рис.7

рівності замість x і y відповідні координати точки $B(5, 5)$:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5 + \sqrt{3} + \frac{5}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отже, $C(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} - 2\sqrt{3})$.

Задача 8. Доведіть, що перетворення

$$f: \begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{7}}{4}y + \frac{3}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{7}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \text{ є рух.}$$

Розв'язання. Формули руху мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x \cos a - \xi y \sin a + x_0, \\ y' = x \sin a + \xi y \cos a + y_0, \end{cases}$$

де $\xi = \pm 1$.

Тобто, якщо дане перетворення є рух, то має виконуватися наступне:

$$\cos a = \frac{3}{4}, \quad \sin a = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Щоб впевнитися у справедливості цих рівностей, перевіримо виконання для них основної тригонометричної тотожності $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, маємо $(\frac{\sqrt{7}}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2 = 1$.

$$\begin{cases} x' = 4x + y - 4, \\ y' = x + 2y - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Для знаходження інваріантних точок покладемо $x = x'$ і $y = y'$. Маємо: $\begin{cases} x = 4x + y - 4, \\ y = x + 2y - 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3x + 4, \\ x = -x + 2. \end{cases}$$

Звідки $x = 1$, $y = 1$. Отже, маємо одну нерухому інваріантну точку $(1, 1)$.

Задача 7. Дано точки $A(2, 1)$ і $B(5, 5)$. Знайти кінець вектора $\overrightarrow{AC}$, який отримується із вектора $\overrightarrow{AB}$ обертанням на кут $\frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. Маємо поворот точки $B(5, 5)$ на кут $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ навколо точки $A(2, 1)$. Запишемо формули аналітичного вираження повороту в даному випадку:

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos\frac{5\pi}{6} - (y-1)\sin\frac{5\pi}{6} + 2, \\ y' = (x-2)\sin\frac{5\pi}{6} + (y-1)\cos\frac{5\pi}{6} + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2) - \frac{1}{2}(y-1) + 2, \\ y' = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) + 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3} + \frac{5}{2}, \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Оскільки точка B є прообразом точки C , то для знаходження координат точки C підставимо в останні

$$f = Sd_2 \circ Sd_1.$$

Теорема 2. Добуток двох осьових симетрій, осі яких d_1, d_2 паралельні і різні, є паралельним перенесенням на вектор $\vec{p}$, довжина якого рівна відстані між прямими d_1, d_2 . Навпаки, будь-яке паралельне перенесення на вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$ можна розкласти в добуток двох осьових симетрій, осі d_1, d_2 яких паралельні і $\rho(d_1, d_2) = \frac{1}{2}|\vec{p}|$.

Доведення. Виберемо прямокутну систему координат $R = \{O, A_1, A_2\}$ так, що $O \in d_1$, $A_1 \in d_1$, (рис.7). Нехай, $OA_2 \cap d_2 = D(0, a)$. Якщо $M(x, y), d_1(M) = \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $d_2(\tilde{M}) = M'(x', y')$, то

$$(x = \tilde{x}, \tilde{x} = x', y + \tilde{y} = 0, \frac{\tilde{y} + y'}{2} = a) \Rightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = y + 2a \end{cases} \quad (*)$$

Формули (*) визначають в репері R рух $f = Sd_2 \circ Sd_1$. Відомо, що ці формули в репері R визначають перенесення f площини на вектор $\vec{p} \in \{0, 2a\}$. Отже, $Sd_2 \circ Sd_1$ - перенесення на вектор $\vec{p}$, де $\frac{1}{2}|\vec{p}| = a = \rho(d_1, d_2)$.

Навпаки, якщо f - перенесення площини на вектор $\vec{p}$ і $\overrightarrow{OD} \in \frac{1}{2}\vec{p}$, то, провівши через O і D прямі d_1, d_2 , перпендикулярні OD , за доведеним вище отримаємо:

$$f = d_2 \cdot d_1(d_1 \parallel d_2), \rho(d_1, d_2) = \frac{1}{2}|\vec{p}|$$

Теорема 3. *Будь-який рух f площини або є осовою симетрією, або розкладом в добуток не більше трьох осових симетрій.*

Доведення. Якщо рух f є осова симетрія, чи поворот площини навколо точки, чи перенесення, то теорема справедлива (див. теореми 1,2). Якщо f -ковзна симетрія, то $f=gd_1$, де g –перенесення на вектор $\vec{p} \parallel d_1$. За теоремою 2 маємо: $g = Sd_3 \cdot Sd_2$. Звідси, $f = (Sd_3 \cdot Sd_2)Sd_1$.

Якщо f - тотожне перетворення, то для будь-якої d прямої маємо: $f = SdSd$.

§5. Підгрупи групи переміщень площини

Розглянемо найважливіші підгрупи групи D переміщень площини.

Позначимо через D_1 множину рухів першого роду. Всяке переміщення $f \in D_1$ переводить будь-який ортонормований репер в репер тієї ж орієнтації. Звідси маємо, що $f, g \in D_1 \Rightarrow fg \in D_1$ і $f \in D_1 \Rightarrow f^{-1} \in D_1$, і, значить D_1 підгрупа групи D рухів площини; вона називається *групою рухів першого роду*.

Нехай r і s – два рухи другого роду, R - будь-який ортонормований репер і $r(R)=R', s(R')=R'' \Rightarrow (sr)(R)=R''$. Репери R і R' протилежно орієнтовані, як і репери R', R'' , тому репери R і R'' однаково орієнтовані, а отже, $s \cdot r$ – рух першого роду.

Таким чином, добуток будь-яких двох рухів другого роду є рух першого роду. Тому множина

Розв'язання. Запишемо координатне задання паралельного перенесення на вектор $(1, 3)$:

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y + 3. \end{cases}$$

Визначаємо з даної системи x і y :

$$x = x' - 1, y = y' - 3.$$

В рівняння прямої $2x + 3y + 6 = 0$ замість x і y підставляємо їх значення:

$$2(x' - 1) + 3(y' - 3) + 6 = 0,$$

$$2x' + 3y' - 5 = 0.$$

Отже образом прямої $2x + 3y + 6 = 0$ є пряма $2x' + 3y' - 5 = 0$.

Задача 5. *Знайти прообраз прямої $2x - y + 1 = 0$ при повороті навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{4}$.*

Розв'язання. Оскільки дана пряма є образом шуканої, то її рівняння запишеться так: $2x' - y' + 1 = 0$. Записавши тепер аналітичне задання повороту

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \end{cases}$$

то отримаємо шуканий прообраз прямої:

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + 1 = 0,$$

тобто $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 2 = 0$.

Задача 6. *Знайти інваріантні точки при перетворенні*

Задача 2. Знайти образ M' точки $M(1, 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(2, 3)$.

Розв'язання. Запишемо формули паралельного перенесення на довільний вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$:

$$\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2 \end{cases}$$

В нашому випадку маємо:

$$\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = x + 3 \end{cases}$$

Для знаходження образу M' точки $M(1, 2)$ підставимо замість x і y в формулах паралельного перенесення координати точки –прообразу M . Отримаємо, що $x' = 1 + 2 = 3$, $y' = 2 + 3 = 5$. Таким чином маємо: $M'(3, 5)$.

Задача 3. Знайти прообраз B точки $B'(-1, 2)$ при центральній симетрії Z_{B_0} , де $B_0(1, 3)$.

Розв'язання. Формули центральної симетрії в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = -x + 2, \\ y' = -y + 6 \end{cases}$$

Замість x' і y' тепер підставляємо координати точки-образу $B'(-1, 2)$.

$$\text{Отримуємо } \begin{cases} -1 = -x + 2 \\ 2 = -y + 6 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Точка B має координати $(3, 4)$.

Задача 4. Знайти образ прямої $2x + 2y + 6 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $(1, 3)$.

рухів другого роду групи не утворює.

Теорема 1. Множина паралельних перенесень площини утворює підгрупу групи переміщень першого роду.

Доведення. Паралельні перенесення є переміщеннями першого роду. Якщо паралельне перенесення $T_{\vec{v}_1}$ переводить точку M в точку M' , а паралельне перенесення $T_{\vec{v}_2}$ переводить точку M' в M'' , то $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, так, що перетворення $T_{\vec{v}_2} \circ T_{\vec{v}_1}$ є в свою чергу паралельне перенесення $T_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}$. Перетворення ж, обернене до перенесення $T_{\vec{v}}$, є, очевидно, паралельне перенесення $-T_{\vec{v}}$, протилежне перенесенню $T_{\vec{v}}$. Отже, всі перенесення утворюють групу $T \subset D_1$.

Теорема 2. Всі повороти площини навколо деякої фіксованої точки утворюють підгрупу групи переміщень першого роду.

Доведення.

1. Нехай R^{α_1} і R^{α_2} – два повороти навколо точки O . Нехай при цьому $R^{\alpha_1}(M) = M'$, $R^{\alpha_2}(M') = M''$. Тоді $R^{\alpha_2} \circ R^{\alpha_1}(M) = M''$.

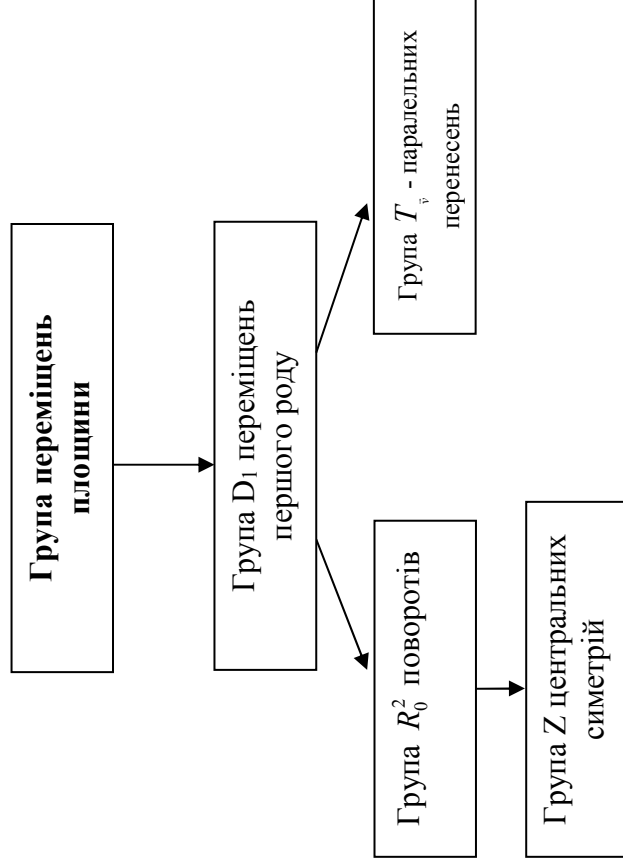
Розглянемо поворот R^{α_3} навколо точки O на кут α_3 . Оскільки $\rho(OM'') = \rho(OM)$, то $R^{\alpha_3}(M) = M''$. В силу єдиності переміщення першого роду, що перетворює точку M в точку M'' , маємо $R^{\alpha_2} \circ R^{\alpha_1} = R^{\alpha_3}$,

так що добуток двох поворотів навколо одного і того ж центру є також поворот навколо цього ж центру.

2. Якщо R – поворот навколо точки O на орієнтований кут AOA' , то R^{-1} є поворотом навколо точки O на орієнтований кут $A'OA$. Отже, перетворення, обернене до повороту, також є поворотом навколо тієї ж точки.

За означенням групи приходимо до висновку, що теорема 2 доведена.

Отже, ми отримали наступну схему підгруп групи переміщень площини:



3. Застосування переміщень до розв'язування геометричних задач

§1. Приклади розв'язування задач

Задача 1. В даній прямокутній декартовій системі координат записати формули аналітичного задання повороту R_M^a де $M(-1, 3), \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Формули повороту з центром у довільній точці (x_0, y_0) і кутом α мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0, \\ y' = (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

В нашому випадку $x_0 = -1, y_0 = 3, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Тому,

формули повороту набувають вигляду:

$$\begin{cases} x' = (x + 1) \cos \frac{\pi}{3} - (y - 3) \sin \frac{\pi}{3} - 1, \\ y' = (x + 1) \sin \frac{\pi}{3} + (y - 3) \cos \frac{\pi}{3} + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (x + 1) \frac{1}{2} - (y - 3) \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \\ y' = (x + 1) \frac{\sqrt{3}}{2} + (y - 3) \frac{1}{2} + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3} - 1}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$