

**Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її навчання**

**Методичні рекомендації
до вивчення теми
«ГРУПИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ»
для студентів спеціальності
А4.04 Середня освіта (Математика)**

Рівне–2026

Методичні рекомендації до вивчення теми «Групи та їх властивості» для студентів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) / автори-укладачі: О.В. Крайчук, С.В. Мишкарьова. Рівне: РДГУ, 2026. 27 с.

Рецензенти:

Остапчук Наталія Олександрів – кандидат педагогічних наук, доцент, професор кафедри цифрових технологій та методики навчання інформатики

Полюхович Наталія Вікторівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри цифрових технологій та методики навчання інформатики

Навчально-методичний посібник розглянуто та затверджено на засіданні кафедри математики та методики її навчання (протокол № 7 від 26 травня 2026р.)

Рекомендовано до друку рішенням Навчально-методичної комісії факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 6 від 15 червня 2026 р.)

Навчально-методичний посібник містить рекомендації до вивчення теми «Групи та їх властивості» для студентів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика). Може бути корисним при вивченні таких навчальних дисциплін як «Алгебра і теорія чисел», «Вибрані питання загальної алгебри», «Числові системи».

© Крайчук О.В., Мишкарьова С.В.
© РДГУ, 2026

Зміст

Вступ.....	4
§1. Нормальний дільник групи та його властивості.....	8
§2. Класи спряжених елементів та спряжених підгруп.....	13
§3. Гомоморфізми груп.....	20
Висновки.....	25
Список використаних та рекомендованих джерел.....	27

Вступ

На протязі багатьох століть алгебра була наукою про рівняння. Так, квадратні рівняння вміли розв'язувати ще древні греки. Формули для розв'язування рівнянь 3-го і 4-го степенів були відкриті Італійськими математиками в XVI от. Після цього майже три століття продовжувалися спроби знайти подібні формули для рівнянь 8-го степеня, але вони не увінчалися успіхом. На початку XIX от. причина цих невдач з'ясувалася: було доведено, що не можна знайти загальну формулу коренів для алгебраїчних рівнянь степеня вище 4. Це доведення вперше було отримане Італійським математиком П. Руффіні, а в більш строгій формі – норвезьким математиком Н. Абелем. Вичерпну ж відповідь на питання про умови, при яких алгебраїчне рівняння допускає розв'язання в радикалах, дав французький математик Е. Галуа в 1832 р. Його дослідження вказали нові напрямки в розвитку алгебри, що привело вже в XX ст. до формування нової точки зору на задачі алгебраїчної науки. Зараз вже є безсумнівним, що зовсім не вивчення рівнянь є центральною задачею алгебри. Справжнім об'єктом алгебраїчного дослідження слід вважати алгебраїчні операції, задані на множинах довільної природи.

Найбільш детально в алгебрі вивчаються лише найважливіші алгебраїчні системи, тобто множини із заданими на них алгебраїчними операціями. Такими є, зокрема, поля, тобто множини з двома алгебраїчними операціями, властивості яких аналогічні властивостям додавання і множення дійсних або комплексних чисел. Теорія полів виявилась природною областю для подальшого розвитку теорії рівнянь, а два її найважливіші розділи – теорія полів алгебраїчних чисел і теорія полів алгебраїчних функцій – тісно пов'язали її з теорією чисел з одного боку і з теорією функцій комплексної змінної з другого.

Більш широким, ніж поняття поля, є поняття кільця. На відміну від поля, тут вже не вимагається, щоб для операції множення існувала обернена операція – ділення; крім того, множення в кільці може бути некомутативним і навіть неасоціативним. Прикладами кілець є множина всіх цілих чисел,

множина всіх квадратних матриць фіксованого порядку, множина всіх многочленів від однієї або кількох змінних. Теорія кілець має широкі застосування в багатьох розділах математики.

Ще більшу область застосувань має теорія груп. Групи мали важливі застосування вже в теорії Е. Галуа при встановленні критеріїв розв'язаності алгебраїчних рівнянь у радикалах. Зараз же вони є одним із головних знарядь у теорії полів, у багатьох розділах геометрії, теорії чисел, математичного аналізу, топології і навіть за межами математики в кристалографії, теоретичній фізиці. Взагалі, за широтою застосувань теорія груп займає серед усіх розділів алгебри друге місце після лінійної алгебри. Знадобилася робота декількох поколінь математиків, що тривала близько ста років, перш ніж ідея групи викристалізувалась із її сьогодишньою ясністю. Від Ж.Лагранжа, який стихійно застосовував групи підстановок для розв'язування алгебраїчних рівнянь у радикалах (1771), через роботи П. Руффіні (1799) і Н. Абеля (1894) до Е. Галуа, в працях якого (1830) вже досить свідомо використовується ідея групи (ним же введений і сам термін) – таким шляхом розвивалася ця ідея в рамках теорії алгебраїчних рівнянь. Незалежно і з інших причин вона виникла в геометрії, коли в середині XIX ст. на зміну єдиній евклідовій геометрії прийшли численні “неевклідові” геометрії і постало питання про встановлення зв'язків та спорідненості між ними. Вихід був вказаний “Ерлангенською програмою” Й.Клейна (1872), який поклав в основу класифікації геометрій поняття групи перетворень. Третє джерело поняття групи – теорія чисел. Тут серед основних імен слід назвати Л.Ейлера, що вивчав степеневі залишки (1761), К.Гауса з його “композицією бінарних квадратичних форм” (1801), Л. Кронекера, який, по суті, описав скінченні абелеві групи на мові теорії чисел (1870).

У наш час теорія груп є одним з найбільш розвинутих розділів алгебри, що має численні застосування як у самій математиці (теорія функцій, топологія, теорія алгебраїчних та диференціальних рівнянь), так і за її межами (кристалографія, теоретична фізика). Як уже відзначалося, одним із перших застосувань теорії груп було встановлення Е. Галуа критеріїв розв'язності алгебраїчних рівнянь у радикалах. Суть цього

підходу полягала, в тому, що кожному алгебраїчному рівнянню Е. Галуа зіставляв групу підстановок його коренів. З'ясувалося, що цю групу (вона пізніше отримала назву групи Галуа даного рівняння) можна знайти, навіть не знаючи самих коренів. Було встановлено, що розв'язність рівняння в радикалах рівносильна тому, що група Галуа цього рівняння має певні властивості (є розв'язною). Пізніше норвезький математик побудував теорію розв'язності в квадратурах звичайних диференціальних рівнянь, аналогічну теорії Е. Галуа розв'язності алгебраїчних рівнянь. При цьому місце груп підстановок у новій теорії зайняли т. з. циклічні групи.

Відштовхуючись від ідей Е. Галуа, німецький математик Ф. Клейн знайшов важливі застосування теорії груп у геометрії. У 1876 р. при вступі на посаду професора по кафедрі геометрії університету в м. Ерлангені він прочитав блискучу лекцію, в якій намітив далекосяжну наукову програму класифікації різних геометрій з єдиної групової точки зору, яка пізніше отримала назву "Ерлангенської програми". Основною ідеєю такої класифікації стало поняття групи геометричних перетворень та поняття інваріанта такої групи (тобто тих властивостей геометричних фігур, які залишаються незмінними при всіх перетвореннях з цієї групи). При такому підході предметом вивчення кожної конкретної геометрії є ті властивості геометричних фігур, які є інваріантами відповідної групи перетворень, якою ця геометрія визначається. Наприклад, предметом вивчення евклідової геометрії є властивості геометричних фігур, що ґрунтуються на понятті відстані, яка є інваріантом групи, т. з. ортогональних перетворень (або, як їх ще називають, рухів). Ця ідея дозволила об'єднати єдиним підходом численні геометрії, які до того існували розрізнено: евклідову, афінну, проєктивну, гіперболічну геометрію Лобачевського, еліптичну геометрію Рімана та ряд інших.

Поняття групи дозволяє в точних термінах охарактеризувати симетричність тої або іншої геометричної фігури. Саме з цих позицій російському кристалографу Е.С.Федорову в 1890 р. і майже одночасно з ним німецькому математику А. Шенфлісу вдалося розв'язати задачу класифікації

правильних просторових систем точок, що є однією з основних задач кристалографії - науки про будову і властивості кристалів. Плоских кристалографічних груп існує всього 17 і вони були знайдені безпосередньо. Просторових же кристалографічних груп існує 230 і тільки теорія груп дозволила провести їх вичерпну класифікацію. Це був історично перший випадок застосування теорії груп безпосередньо в природознавстві.

Аналогічну роль відіграє теорія груп у фізиці. Так, в квантовій механіці стан фізичної системи зображається точкою нескінченно вимірного векторного простору. Якщо фізична система переходить з одного стану в інший, то точка, якою вона зображається, зазнає деякого лінійного перетворення. Оскільки лінійні перетворення векторного простору утворюють групу, то міркування симетрії і теорія подання груп лінійними перетвореннями і тут посідають важливе місце. Ще один приклад застосування теорії груп у фізиці дає спеціальна теорія відносності А. Ейнштейна. В її основі лежить група перетворень Лоренца, яка задає своєрідну геометрію чотирьохвимірного простору – часу і прояснює фізичну картину просторово-часових взаємозв'язків.

Наведені приклади показують класифікуючу роль теорії груп скрізь, де мова йде про симетрію. Вивчаючи симетрію, по суті мають справу з групами, тому теорія груп незамінна в цих питаннях. Отже, групи – це потужний інструмент пізнання однієї з найбільш глибоких закономірностей реального світу – симетрії.

Теорія Е. Галуа стала поштовхом для бурхливого розвитку алгебри в середині і другій половині XIX ст. З'явилися нові напрямки, такі як теорія полів алгебраїчних чисел і полів алгебраїчних функцій, а також пов'язала з ними теорія ідеалів, значний внесок в розвиток яких внесли німецькі математики Е. Куммер, Л. Кронекер, Р. Дедекінд, український математик Г.Т. Вороний. Значних успіхів досягла теорія скінчених груп, започаткована *Лагранжем* і Е. Галуа. Тут плідно працювали французькі математики О. Коші і К. Жордан, норвезький математик П. Сілов, німецькі математики Ф. Фробеніус і О. Гьольдер. Усвідомлення в кінці XIX ст. принципової єдності теоретико-групових ідей, які існували до того часу незалежно в

різних областях математики, привело до вироблення сучасного абстрактного поняття групи. Це був один з найбільш ранніх прикладів абстрактної алгебраїчної системи. Він послужив у багатьох відношеннях зразком при побудові інших розділів алгебри і всієї математики в цілому на рубежі ХХ ст. – їх шлях вже не був таким звивистим і тернистим. Великі заслуги у формуванні нового погляду на предмет та завдання алгебраїчної науки належать німецьким математикам Е. Ньотер та Е. Артіну.

Вивчення груп без обмеження скінченності і без будь-яких припущень про природу їх елементів вперше сформувалось у самостійну область досліджень із виходом у світ книги О.Ю.Шмідта “Абстрактна теорія груп” (1916 р.). Дослідження в теорії груп О.Ю.Шмідта, значна частина творчого життя якого була пов’язана з Київським університетом, були продовжені його учнями С.М. Черніковим, В.М. Глушковим та іншими. С.М. Черніков став засновником української теоретико-групової школи і першовідкривачем нового напрямку в теорії груп – дослідження груп з обмеженнями для підгруп.

§1. Нормальний дільник групи та його властивості

Якщо H - довільна підгрупа абелевої групи G , то лівосторонній і правосторонній розклади групи G за підгрупою H збігаються: $aH=Ha$ для довільного елемента $a \in G$. Неабелева група вже може містити підгрупу, за якою лівосторонній розклад відрізняється від правостороннього. Наприклад, для групи дієдра $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ такою є підгрупа $H = \{e, b\}$. Але за підгрупою $K = \{e, a, a^2\}$ обидва розклади груп D_3 збігаються. В довільній групі G обидва розклади збігаються за тривіальною підгрупою $\langle e \rangle$ і за самою групою G , оскільки в першому випадку суміжними класами є окремі елементи групи G , а в другому випадку маємо всього один суміжний клас - саму групу G .

Означення.1. Підгрупа H групи G називається нормальним дільником /або інваріантною підгрупою/ групи G / записують: $H \leq G$ /, якщо лівосторонній і правосторонній розклади групи G за підгрупою H збігаються, тобто якщо $aH=Ha$ для довільного елемента $a \in G$.

Означення 2. Якщо a, g - довільні елементи групи G і $b = g^{-1}ag$, то елемент b називається спряженим з елементом a за допомогою елемента g . Якщо S - деяка підмножина групи G , то підмножина $g^{-1}Sg = \{g^{-1}sg \mid s \in S\}$ називається спряженою з підмножиною S за допомогою елемента g .

Очевидно, підмножина $g^{-1}Sg$ теж є підмножиною групи G , оскільки $g^{-1}sg \in G$ для всіх $s \in S$. Зокрема, якщо H - підгрупа групи G , то $g^{-1}Hg$ теж є підгрупою групи G . Справді, якщо $g^{-1}h_1g$ і $g^{-1}h_2g$ довільні елементи $g^{-1}Hg$, то їхній добуток $(g^{-1}h_1g)(g^{-1}h_2g) = g^{-1}(h_1h_2)g$ також належить підмножині $g^{-1}Hg$. Ця підмножина також замкнена відносно взяття обернених елементів:

$(g^{-1}h_1g)^{-1} = g^{-1}h_1^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}h_1^{-1}g \in g^{-1}Hg$. Отже, згідно з теоремою 1 лекції про групи та її підгрупи, підмножина $g^{-1}Hg$ є підгрупою групи G . Ця підгрупа називається, спряженою з підгрупою H за допомогою елемента g .

Відношення спряженості можна розглядати як деяке бінарне відношення на множині всіх елементів групи $G: a \sim b \Leftrightarrow \exists g(a = g^{-1}bg)$. Це відношення рефлексивне: $a \sim a$, оскільки $a = e^{-1}ae$; симетричне: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, оскільки з $a = g^{-1}bg$ випливає $b = gag^{-1} = (g^{-1})^{-1}ag^{-1}$; і транзитивне: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$, оскільки з $a = g^{-1}bg$ і $b = h^{-1}ch$ випливає $a = g^{-1}(h^{-1}ch)g = (hg)^{-1}c(hg)$. Отже, відношення спряженості на множині G є відношенням еквівалентності, за яким множина G розбивається на класи спряжених елементів, які будемо позначати $K(a), K(b), \dots$, де $a, b, \dots$ - довільні представники цих класів. При цьому клас $K(a)$ складається з усіх елементів групи G , які є спряженими з елементом a . З властивостей відношення еквівалентності випливає, що різні класи спряжених елементів не мають спільних елементів, а їхнє об'єднання дає всю групу $G: G = \cup K(g_i)$. Зауважимо, що різні класи можуть мати

різну кількість елементів. Зокрема, клас $K(e)$ складається лише з нейтрального елемента e , оскільки $g^{-1}eg = e$ для всіх $g \in G$.

Встановимо найважливіші властивості нормальних дільників групи. Спочатку розглянемо ті властивості, які рівносильні означенню 1, тобто які теж можна прийняти за означення нормального дільника.

Властивість 1. Підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $g \in G$, $h \in H$ знайдуться такі елементи $h_1, h_2 \in H$, що $gh = h_1g$, $hg = gh_2$.

Справді, якщо $H \leq G$, то для довільного $g \in G$ $gH = Hg$, тобто для кожного $h \in H$ знайдуться такі елементи $h_1, h_2 \in H$, що $gh = h_1g$, $hg = gh_2$. Навпаки, якщо для довільних $g \in G$, $h \in H$ знайдуться такі $h_1, h_2 \in H$, що $gh = h_1g$, $hg = gh_2$, то, як неважко зрозуміти, в цьому випадку $gH = Hg$ для довільного $g \in G$, тому $H \leq G$.

Властивість 2. Підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли вона з кожним своїм елементом містить і всі спряжені з ним елементи, тобто якщо для довільних $g \in G$, $h \in H$ $g^{-1}hg \in H$.

Справді, якщо $H \leq G$, то для довільних $g \in G$, $h \in H$, згідно з властивістю 1, знайдеться такий елемент $h_2 \in H$, що $hg = gh_2$, звідки $g^{-1}hg = h_2 \in H$. Навпаки, якщо підгрупа H групи G з кожним своїм елементом містить і всі елементи, з ним спряжені, то для довільних елементів $g \in G$, $h \in H$ знайдуться такі елементи $h_1, h_2 \in H$, що $g^{-1}hg = h_2ghg^{-1} = (g^{-1})^{-1}hg^{-1} = h_1$, звідки $hg = gh_2$, $gh = h_1g$. Згідно з властивістю 1, в цьому випадку $H \leq G$.

Властивість 3. Підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді

об'єднання деякої кількості класів спряжених елементів, тобто якщо $H = \cup K(h_i)$.

Справді, якщо $H \leq G$ і $h \in H$, то з властивості 2 випливає, що $K(h) = \{g^{-1}hg \mid g \in G\} \leq H$. Оскільки $h \in K(h)$, то в цьому випадку $H = \cup K(h_i)$. Навпаки, якщо $H = \cup K(h_i)$, то підгрупа H разом з кожним своїм елементом h містить і всі спряжені з ним елементи, які утворюють клас $K(h)$, отже, згідно з властивістю 2, $H \leq G$.

Властивість 4. Підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли вона збігається з усіма своїми спряженими підгрупами.

Справді, якщо $H \leq G$, то для довільних $g \in G$, $h \in H$, згідно з властивістю 2, $g^{-1}hg \in H$, тобто $g^{-1}Hg \leq H$. Аналогічно, взявши в ролі g елемент g^{-1} , будемо мати: $gHg^{-1} = (g^{-1})^{-1}Hg^{-1} \leq H$, звідки $H = g^{-1}(gHg^{-1})g \leq g^{-1}Hg$. Із включень $g^{-1}Hg \leq H$ і $H \leq g^{-1}Hg$ отримуємо $g^{-1}Hg = H$. Навпаки, якщо для довільного $g \in G$ $g^{-1}Hg = H$, то для довільного $h \in H$ $g^{-1}hg \in H$, тому, згідно з властивістю 3, $H \leq G$.

Властивість 5. Переріз довільної кількості нормальних дільників групи G є нормальним дільником групи G .

Справді, якщо $H = \cup H_i$, причому $H_i \leq G$ для всіх $i \in I$, то для довільних елементів $g \in G$ і $h \in H$ $g^{-1}hg \in H_i$ для всіх $i \in I$, тобто $g^{-1}hg \in H$. Отже, згідно з властивістю 2, $H \leq G$.

Властивість 6. Якщо $[G : H] = 2$, то $H \leq G$.

Справді, якщо підгрупа H має індекс 2 в групі G , то всього два ліві та два праві суміжні класи за підгрупою H . Оскільки одним з цих класів є сама підгрупа H , то інший клас складається з усіх тих елементів групи G , які не ввійшли в H . Отже, лівосторонній та правосторонній розклади групи G за підгрупою H збігаються, тому $H \leq G$.

Властивість 7. Якщо $H \leq G$ і F - підгрупа групи G , яка містить H , то $H \leq F$.

Справді, для довільних елементів $g \in F$ і $h \in H$ $g^{-1}hg \in H$, тому, згідно з властивістю 2, $H \leq F$.

Очевидно, довільна підгрупа H абелевої групи G є в ній нормальним дільником, оскільки, в силу комутативності групової операції, $gH = Hg$ для довільного елемента $g \in G$, але цю властивість мають і деякі неабелеві групи, зокрема, група кватерніонів

$Q = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, b^3, ab, ba\}$. Остання група має одну підгрупу $\{e, a^2\}$ порядку 2 і три підгрупи $\{e, a, a^2, a^3\}$, $\{e, b, a^2, b^3\}$, $\{e, ab, a^2, ba\}$ порядку 4, якими вичерпуються всі її власні підгрупи. Три останні підгрупи є нормальними дільниками в Q на основі властивості 6. Підгрупа $\{e, a^2\}$ є об'єднанням двох класів спряжених елементів $\{e\}$ і $\{a^2\}$, тому, згідно з властивістю 3, теж є нормальним дільником в Q .

Неабелева група, всі підгрупи якої є в ній нормальними дільниками, називається гамільтоновою / названою так в честь англійського математика У. Гамільтона /. Було встановлено, що кожна така група містить нормальний дільник, ізоморфний групі кватерніонів.

З іншого боку, існують групи, що не мають ніяких інших нормальних дільників, крім тривіальної групи $\{e\}$ і самої групи. Такі групи називаються простими. Оскільки проста абелева група взагалі не повинна містити власних підгруп, то з теореми 2 лекції про групи та її підгрупи безпосередньо отримується наступне твердження.

Теорема 1. Нетривіальна абелева група є простою тоді і тільки тоді, коли вона циклічна і її порядок є простим числом.

В той же час існує багато типів неабелевих простих груп, як скінченних, так і не скінченних.

Вкажемо ще один підхід до означення нормального дільника. Нехай $\gamma: G \rightarrow G$ - деякий автоморфізм групи G . Тоді підгрупа H групи G називається допустимою відносно автоморфізму γ , якщо $\gamma(H) \leq H$. У випадку, коли γ - внутрішній автоморфізм: $\gamma(a) = g^{-1}ag$, допустимість підгрупи H відносно γ запишеться у вигляді: $g^{-1}Hg \leq H$. Тоді, враховуючи властивість 4, означення нормального дільника можна сформулювати ще так: підгрупа H групи G називається нормальним дільником групи G , якщо вона допустима відносно всіх автоморфізмів групи G . Це означення можна узагальнити наступним чином: підгрупа H групи G називається характеристичною підгрупою, якщо вона допустима відносно всіх автоморфізмів групи G . Очевидно, кожна характеристична підгрупа групи G є її нормальним дільником.

§2. Класи спряжених елементів та спряжених підгруп

Враховуючи, що довільний нормальний дільник, групи є об'єднанням деякої кількості класів спряжених елементів, розглянемо більш детально, якими можуть бути ці класи.

Означення 3. Нехай M - деяка підмножина групи G . Тоді підмножина $N(M) = \{g \mid g^{-1}Mg = M, g \in G\}$ називається нормалізатором підмножини M в групі G . Підмножина $C(M) = \{g \mid g^{-1}hg = h, h \in M, g \in G\}$ називається централізатором підмножини M в групі G .

Підмножини $N(M)$ і $C(M)$ є підгрупами групи G . Справді, якщо $g_1, g_2 \in N(M)$, тобто $g_1^{-1}Mg_1 = M$ і $g_2^{-1}Mg_2 = M$, то

$$(g_1g_2)^{-1}M(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}Mg_1)g_2 = g_2^{-1}Mg_2 = M, \quad (g_1^{-1})^{-1}Mg_1^{-1} = g_1Mg_1^{-1} = M$$

/остання умова отримується з рівності $g_1^{-1}Mg_1 = M$ домноженням обох її частин зліва на g_1 і справа – на g_1^{-1} . Отже, $g_1g_2, g_1^{-1} \in N(M)$, тому $N(M)$ є підгрупою групи G .

Аналогічно, якщо $g_1, g_2 \in C(M)$, тобто $g_1^{-1}hg_1 = h$ і $g_2^{-1}hg_2 = h$ для довільного елемента $h \in M$, то $(g_1g_2)^{-1}h(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}hg_1)g_2 = g_2^{-1}hg_2 = h$, $(g_1^{-1})^{-1}hg_1^{-1} = g_1hg_1^{-1}$. Отже, $g_1g_2, g_1^{-1} \in C(M)$, тобто $C(M)$ теж є підгрупою групи G .

Якщо $M = \{h\}$, то $N = (\{h\})$ називається нормалізатором елемента h і позначається $N(h)$. В цьому випадку, очевидно, $C(h) = N(h)$. З властивості 4 випливає, що підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли $N(H) = G$. Тобто, коли нормалізатор підгрупи H збігається з усією групою G . Очевидно також, що $H \leq N(H)$.

Підгрупа $C(G)$, тобто централізатор всієї групи G , називається центром групи G . Вона складається з усіх таких елементів c , що $c^{-1}gc = g$ для довільного $g \in G$, тобто $gc = cg$, $g^{-1}cg = c$. З останньої рівності випливає, що довільна підгрупа центру є нормальним дільником групи. Сам центр $C(G)$ є навіть характеристичною підгрупою групи G . Справді, для довільного автоморфізму $\gamma: G \rightarrow G$ і будь-яких елементів $g \in G$, $c \in C(G)$ знайдеться елемент $g_1 \in G$ такий, що $\gamma(g_1) = g$, і ми будемо мати:

$$\gamma(c)g = \gamma(c) * \gamma(g_1) = \gamma(cg_1) = \gamma(g_1c) = \gamma(g_1) * \gamma(c) = g\gamma(c)$$

звідки $(\gamma(c))^{-1}g * \gamma(c) = g$, тобто $\gamma(c) \in C(G)$. Отже, $\gamma(C(G)) \leq C(G)$. Зауважимо також, що коли $C = C(G)$, то група G абелева. Справді, в цьому випадку для довільних елементів $g, h \in G$ $g^{-1}hg = h$, тобто $gh = hg$.

Зрозуміло, що клас спряжених елементів $K(g)$ складається лише з одного елемента тоді і тільки тоді, коли $g \in C(G)$. В загальному випадку кількість елементів, спряжених з елементом

a , визначається індексом нормалізатора $N(a)$ цього елемента в групі G .

Теорема 2. Якщо елемент $a \in G$ має скінченну кількість спряжених елементів, то вона дорівнює індексу підгрупи $N(a)$ в групі G , якщо ж елемент a має нескінченну кількість спряжених, то індекс $N(a)$ в G теж нескінченний, тобто $|K(a)| = [G : N(a)]$ /через $|M|$ позначається кількість елементів множини M ; якщо M - нескінченна множина, то вважається $|M| = \infty$ /.

Доведення. Встановимо відповідність між елементами множини $K(a)$ і правими суміжними класами групи G за підгрупою $N = N(a)$ наступним чином: елементу $b = g^{-1}ag \in K(a)$ зіставимо суміжний клас Na . Оскільки

$$g^{-1}ag = b = b_1 = g_1^{-1}ag_1 \Leftrightarrow g_1g^{-1}agg_1^{-1} = a \Leftrightarrow (gg_1^{-1})^{-1}a(gg_1^{-1}) = a \Leftrightarrow$$

$$= N \Leftrightarrow Ng = Ng_1$$

то ця відповідність є взаємно однозначною. Отже, $|K(a)| = [G : N(a)]$.

Оскільки індекс будь-якої підгрупи в скінченній групі є дільником порядку групи, то з теореми 2 безпосередньо отримується

Наслідок. Число елементів довільного класу спряжених елементів скінченної групи є дільником порядку цієї групи.

Теорема 3. Скінченна група порядку p^n , де p - просте, а n - натуральне число, має нетривіальний центр.

Доведення. Оскільки група G розбивається на класи спряжених елементів: $G = K(g_1) \cup K(g_2) \cup \dots \cup K(g_m)$, то $p^n = |K(g_1)| + |K(g_2)| + \dots + |K(g_m)|$. Згідно з наслідком теореми 2, кожне значення $|K(g_m)|$ є дільником числа p^n , тобто дорівнює i або ж є степенем числа p з деяким натуральним показником. Оскільки серед чисел $|K(g_m)|$ є хоча б одне, рівне 1

/а саме, $|K(e)| = |\{e\}| = 1$ /, то це можливо лише у випадку, коли кількість одноелементних класів буде кратною p . Але елементи цих класів утворюють центр групи G , який, таким чином, буде нетривіальною підгрупою групи G .

Слід зауважити, що існують також групи з тривіальним центром. Прикладом такої групи є група діедра $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Це впливає з того, що класи спряжених елементів групи D_3 будуть: $K(e) = \{e\}$, $K(a) = \{a, a^2\}$, $K(b) = \{b, ab, a^2b\}$.

Подібно до того, як група розпадається на класи спряжених елементів, так множина всіх підгруп групи G . Розпадається на класи спряжених підгруп. При цьому, очевидно, клас спряжених підгруп складається з однієї підгрупи тоді і тільки тоді, коли ця підгрупа є нормальним дільником групи. Клас підгруп, спряжених в групі G з підгрупою H , будемо позначати $K(H)$.

Теорема 4. Число елементів класу $K(H)$ дорівнює індексу нормалізатора $N(H)$ підгрупи H в групі G .

Доведення. Аналогічно, як і при доведенні теореми 2, задамо відповідність між підгрупами класу $K(H)$ і правими суміжними класами групи G за підгрупою $N = N(H)$: підгрупі

$F = g^{-1}Hg$ зіставимо суміжний клас Ng . Оскільки

$$\begin{aligned} g^{-1}Hg = F &= F_1 = g_1^{-1}Hg_1 \Leftrightarrow g_1g^{-1}Hgg_1^{-1} = H \Leftrightarrow (gg_1^{-1})^{-1}H(gg_1^{-1}) \\ &= N \Leftrightarrow Ng = Ng_1 \end{aligned}$$

то ця відповідність є взаємно однозначною. Отже, $|K(H)| = [G : N(H)]$.

Теорема 5. Спряжені підгрупи групи G мають однакові індекси групи G .

Доведення. Розглянемо дві довільні підгрупи H і $F = g^{-1}Hg$ групи G і внутрішній автоморфізм $\gamma : G \rightarrow G$ групи G , що визначається елементом $g : \gamma(a) = g^{-1}ag$. Очевидно, при цьому $\gamma(H) = F$. Автоморфізм γ здійснює взаємно однозначне

відображення множин лівих суміжних класів групи G за підгрупою H на множину лівих суміжних класів групи G за підгрупою F за правилом: $aH \leftrightarrow (g^{-1}ag)F$. Справді,

$$\begin{aligned} aH = bH &\Leftrightarrow b^{-1}a \in H \Leftrightarrow g^{-1}(b^{-1}a)g \in F \Leftrightarrow (g^{-1}b^{-1}g)(g^{-1}ag) \in F \\ &\Leftrightarrow (g^{-1}ag)F = (g^{-1}bg)F \end{aligned}$$

Отже, $[G:H] = [G:F]$.

Теорема 6. Переріз всіх підгруп групи G , спряжених з за підгрупою H , є нормальним дільником групи G

Доведення. Справді, нехай $F = \bigcap_{i \in J} H_i$, де підгрупи $H_i (i \in J)$ утворюють клас спряжених підгруп групи G . Оскільки, для довільних $i \in J, g \in G$ $F = H_i \Rightarrow g^{-1}Fg \leq g^{-1}H_i g = H_j$ для деякого $j \in J$, при чому знайдеться таке $k \in J$, що $g^{-1}H_k g = H_i$, то $F \leq H_k \Rightarrow g^{-1}Fg \leq g^{-1}H_k g = H_i$. Отже, $g^{-1}Fg \leq H_i$ для довільного $i \in J$, тобто $g^{-1}Fg = \bigcap_{i \in J} H_i = F$. Як впливає з доведення властивості 4, в цьому випадку підгрупа F є нормальним дільником групи G .

Теорема 7. Якщо в групі G є підгрупа H скінченного індексу, то H містить нормальний дільник групи G , який теж має скінченний індекс в G .

Доведення. Справді, якщо $[G:H] < \infty$, то $[G:N(H)] < \infty$, оскільки $H \leq N(H) \leq G$. Згідно з теоремами 4,5 підгрупа H має скінченну кількість спряжених підгруп, кожна з яких має скінченний індекс в групі G . В ній переріз є також підгрупою скінченного індексу 1, згідно з теоремою 6, нормальним дільником групи G .

Фактор-група.

Якщо H – нормальний дільник групи G , то правосторонній та лівосторонній розклади групи G за підгрупою H збігаються, тобто $aH = Ha$ для довільного елемента $a \in G$. Тоді бінарну алгебраїчну операцію, задану в групі G , можна поширити на

множину суміжних класів групи G за підгрупою H наступним чином: $aH * bH = ab * H * H = abH$. Зауважимо, що $H * H = H$, оскільки добуток двох елементів підгрупи H належить H , а домножаючи елементи з H на нейтральний елемент e , отримаємо всю підгрупу H .

Наведене означення добутку суміжних класів є коректним, тобто не залежить від вибору конкретних представників у класах-співмножниках. Справді, якщо $aH = a_1H$, $bH = b_1H$, то $a_1 = ah_1$, $b_1 = bh_2$ для деяких елементів $h_1, h_2 \in H$, тому $a_1H * b_1H = a_1b_1H = ah_1bh_2H = ab(b^{-1}h_1b)h_2H = abH = aH * bH$,

оскільки $b^{-1}h_1b \in H$. Операція множення класів асоціативна:

$$(aH * bH) * cH = abH * cH = (ab)cH = a(bc)H = aH * bcH = aH(bH * cH)$$

; нейтральним елементом відносно цієї операції є суміжний клас $eH = H$: $aH * H = H * aH = aH$; для кожного суміжного класу aH існує обернений клас

$$(aH)^{-1} = a^{-1}H : aH : a^{-1}H = a^{-1}H * H = a * a^{-1}H = H.$$

Отже, множина всіх суміжних класів групи G за нормальним дільником H є групою відносно операції множення класів. Ця група називається фактор-групою групи G за нормальним дільником H і позначається G/H . При цьому, як неважко зрозуміти, фактор-група $G/\langle e \rangle$ ізоморфна самій групі G , а фактор-група G/G ізоморфна тривіальній групі $\langle e \rangle$. Якщо група G абелева, то довільна її фактор-група G/H теж абелева, оскільки з рівності $ab = ba$ випливає рівність $aH * bH = abH = baH = bH * aH$. Більше того, якщо група G циклічна: $G = \langle g \rangle$, то фактор-група G/H також циклічна: $a = g^k \Rightarrow aH = g^kH = (gH)^k$. У випадку, коли група G скінченна, порядок фактор-групи G/H дорівнює індексу підгрупи H в G , тобто є дільником порядку групи G . При цьому справджується рівність: $|G| = |H| * |G/H|$.

Підмножина $n\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел, кратних натуральному числу n , є підгрупою адитивної групи $\mathbb{Z}$ цілих чисел, при чому нормальним дільником, оскільки група $\mathbb{Z}$ абелева. Адитивна

група Z_n класів залишків за модулем n якраз є не що інше, як фактор-група групи Z за підгрупою $nZ : Z_n = Z / nZ$. Група квантерніонів

$$Q = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, b^3, ab, ba\} \quad \text{має}$$

чотири власні підгрупи:
 $H_1 = \{e, a^2\}$, $H_2 = \{e, a, a^2, a^3\}$, $H_3 = \{e, b, a^2, b^3\}$, $H_4 = \{e, ab, a^2, ba\}$

і всі вони є нормальними дільниками групи Q . Фактор-група $Q / H_1 = \{H_1, aH_1, bH_1, abH_1\}$ ізоморфна четвертій групі D_2 , а фактор-групи

$$Q / H_2 = \{H_2, bH_2\}, \quad Q / H_3 = \{H_3, aH_3\}, \quad Q / H_4 = \{H_4, aH_4\}$$

є циклічними групами порядку 2.

Приклад 1. Довести, що коли фактор-група G / C групи G за її центром C циклічна: $G / C = \langle aC \rangle$, то група G абелева.

Розв'язання. Оскільки центр C є нормальним дільником групи G , то фактор-група G / C існує і нехай $G / C = \langle aC \rangle$ є циклічною групою. Тоді два довільні елементи $b, c \in G$ містяться в деяких суміжних класах за підгрупою $C : b \in a^k C, c \in a^e C$, тобто $b = a^k z_1, c = a^e z_2$, де $z_1, z_2 \in C$. Тоді

$$bc = a^k z_1 * a^e z_2 = a^k a^e z_1 z_2 = a^{k+e} z_1 z_2 = a^e a^k z_2 z_1 = a^e z_2 * a^k z_1 = cb$$

, оскільки елементи z_1, z_2 переставні з довільними елементами групи G . Отже, група G абелева.

Зауважимо, що коли фактор-група G / C групи G за її центром C абелева, але не циклічна, то група G вже може бути неабелевою, як показує приклад групи кватерніонів Q , фактор-група Q / C якої за її центром $C = H_1$ абелева.

§3. Гомоморфізми груп

Нехай $\gamma: G \rightarrow H$ - гомоморфізм групи G на групу H . Встановимо зв'язок між гомоморфізмами групи G та її нормальними дільниками.

Означення 4. Ядром гомоморфізму $\gamma: G \rightarrow H$ /позначається: **$\text{Ker } \gamma$** / називається множина тих елементів групи G , які при відображенні γ переходять в одиничний елемент групи G , тобто **$\text{Ker } \gamma = \{g | g \in G, \gamma(g) = e\}$** .

Теорема 8. Гомоморфізм $\gamma: G \rightarrow H$ - гомоморфізм групи G на групу H є ізоморфним тоді і тільки тоді, коли **$\text{Ker } \gamma = \{e\}$** .

Доведення. Справді, кожний ізоморфізм $\gamma: G \rightarrow H$ є гомоморфізмом, причому **$\text{Ker } \gamma = \{e\}$** , оскільки γ є взаємно однозначним відображенням. Навпаки, якщо $\gamma: G \rightarrow H$ є гомоморфізмом групи G на групу H з тривіальним ядром, то γ - ізоморфізм, бо з $\gamma(a) = \gamma(b)$ випливає $\gamma(ab^{-1}) = \gamma(a)\gamma(b^{-1}) = \gamma(a)(\gamma(b))^{-1} = e$, звідки **$ab^{-1} \in \text{Ker } \gamma = \{e\}$** , **$ab^{-1} = e, a = b$** . Отже, γ - взаємно однозначне відображення групи G на групу H , тобто є ізоморфізмом.

Теорема 9. Ядро гомоморфізму $\gamma: G \rightarrow H$ є нормальним дільником групи G .

Доведення. Справді, згідно з властивостями гомоморфізму, для довільних **$ab \in \text{Ker } \gamma, \gamma(ab) = \gamma(a) * \gamma(b) = e * e = e, \gamma(a^{-1}) = (\gamma(a))^{-1} = e^{-1} = e$** звідки **$ab, a^{-1} \in \text{Ker } \gamma$** , тобто **$\text{Ker } \gamma$** є підгрупою групи G . Крім того, для довільного елемента **$g \in G, \gamma(g^{-1}ag) = \gamma(g^{-1})\gamma(a)\gamma(g) = (\gamma(g))^{-1}e\gamma(a) = e$** , звідки **$g^{-1}ag \in \text{Ker } \gamma$** . Отже, **$\text{Ker } \gamma$** - нормальний дільник групи G .

Нехай тепер N - довільний нормальний дільник групи G . Зіставляючи кожному елементу **$g \in G$** суміжний клас **gN** , отримаємо відображення $\gamma: G \rightarrow G/N$ групи G на фактор-групу

G/N . Це відображення є гомоморфізмом, оскільки $\gamma(g_1 g_2) = g_1 g_2 N = g_1 N * g_2 N = \gamma(g_1) * \gamma(g_2)$, причому його ядро збігається з підгрупою N . Справді, якщо $g \in \text{Ker } \gamma$, то $\gamma(g) = gN = N$ звідки $g \in N$. Навпаки, якщо $g \in N$, то $\gamma(g) = gN = N$, тобто $g \in \text{Ker } \gamma$. Отже, $\text{Ker } \gamma = N$. Враховуючи теорему 9, звідси отримуємо наступне твердження:

Теорема 10. Підгрупа N групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли N є ядром гомоморфізму групи G на деяку групу H .

Розглянутий вище гомоморфізм групи G на її фактор-групу G/N називається природним гомоморфізмом. Виявляється, що природними гомоморфізмами в певному розумінні вичерпуються всі можливі гомоморфізми групи G на інші групи.

Теорема 11. Нехай $\gamma: G \rightarrow G'$ - гомоморфізм групи G на групу G' , $\text{Ker } \gamma = N$ - ядро цього гомоморфізму. Тоді група G' ізоморфна фактор-групі G/N , при чому існує такий гомоморфізм $\delta: G' \rightarrow G/N$, що композиція відображення γ і δ /тобто їх послідовне виконання/ збігається з природним гомоморфізмом групи G на групу G/N .

Доведення. Справді, нехай x' - довільний елемент групи G' , x - такий елемент групи G , що $\gamma(x) = x'$. Оскільки для довільного елемента $a \in N$ справджується рівність $\gamma(a) = e$, то $\gamma(xa) = \gamma(x)\gamma(a) = x'e = x'$, тобто всі елементи суміжного класу xN γ відображає в елемент x' . З іншого боку, якщо h - довільний елемент групи G такий, що $\gamma(h) = x'$, то $\gamma(x^{-1}h) = \gamma(x^{-1})\gamma(h) = (\gamma(x))^{-1}\gamma(h) = x^{-1}x = e$, тобто $x^{-1}h \in N$, $x^{-1}hN = N$, звідки $hN = xN$. Отже, в елемент $x' \in G'$ γ відображає ті і тільки ті елементи з G , які містяться у суміжному класі xN . Зіставляючи кожному елементу $x' \in G'$ той суміжний клас xN за підгрупою N , для якого $\gamma(xN) = x'$,

отримаємо взаємно однозначне відображення $\delta: G' \rightarrow G/N$ групи G на фактор-групу G/N . Це відображення є ізоморфним, оскільки для довільних $x', y' \in G'$ $\delta(x' y') = xyN = xN * yN = \delta(x') \delta(y')$. Нарешті, якщо $x \in G$ - довільний елемент групи G , то $(\delta\gamma)(x) = \delta(\gamma(x)) = \delta(x') = xN$, тобто композиції відображень γ і δ збігається з природним гомоморфізмом групи G на фактор-групу G/N .

Оскільки всі фактор-групи адитивної групи Z цілих чисел є циклічними групами /кожна така фактор-група є адитивною групою класів залишків за деяким модулем n /, то впливає, що коли існує гомоморфізм групи Z на деяку групу H , то H є циклічною групою. Цей результат однак легко отримується і безпосередньо, виходячи з властивостей гомоморфного відображення.

Якщо кожному елементу $g \in G$ зіставити внутрішній автоморфізм групи G , що визначається цим елементом, тобто який переводить довільний елемент $a \in G$ в елемент $g^{-1}ag$, то отримаємо відображення групи G на групу $\text{Int } G$ внутрішніх автоморфізмів групи G . Оскільки для довільних елементів $g_1, g_2 \in G$ $(g_1 g_2)^{-1} a (g_1 g_2) = g_2^{-1} (g_1^{-1} a g_1) g_2$, то це відображення є гомоморфізмом групи G на групу $\text{Int } G$. Ядро цього гомоморфізму збігається з центром $C(G)$ групи G , бо рівність $g^{-1}ag = a$ для всіх $a \in G$ рівносильна умові $g \in C(G)$.

Нехай N - нормальний дільник групи G . Розглянемо природний гомоморфізм $\gamma: G \rightarrow \overline{G}$ групи G на групу $\overline{G} = G/N$. Кожній підгрупі $\overline{H}$ групи $\overline{G}$ зіставимо підмножину H групи G всіх елементів $h \in G$, для яких $\gamma(h) \in \overline{H}$. Легко побачити, що підмножина H є підгрупою групи G , яка містить підгрупу N . Справді, для довільних $h_1, h_2 \in H$ $\gamma(h_1 h_2) = \gamma(h_1) \gamma(h_2) \in \overline{H}$, $\gamma(h_1^{-1}) = (\gamma(h_1))^{-1} \in \overline{H}$

, звідки $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1^{-1} \in \mathbf{H}$. Крім того, якщо $\mathbf{h} \in \mathbf{N}$, то $\gamma(\mathbf{h}) = \mathbf{e} \in \overline{\mathbf{H}}$, тобто $\mathbf{N} \leq \mathbf{H}$. Отримана таким чином підгрупа $\mathbf{H}$ називається повним прообразом підгрупи $\overline{\mathbf{H}}$.

Теорема 12. Нехай $\gamma: \mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}$ - природний гомоморфізм групи $\mathbf{G}$ на фактор-групу $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{N}$. Тоді відповідність, яка кожній підгрупі $\overline{\mathbf{H}}$ групи $\overline{\mathbf{G}}$ зіставляє її повний прообраз $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$, є взаємно однозначною відповідністю між множиною всіх підгруп групи $\overline{\mathbf{G}}$ і множиною всіх підгруп групи $\mathbf{G}$, що містить нормальний дільник $\mathbf{N}$. При цьому група $\overline{\mathbf{H}}$ є нормальним дільником групи $\overline{\mathbf{G}}$ тоді і тільки тоді, коли її повний прообраз $\mathbf{H}$ є нормальним дільником групи $\mathbf{G}$. В останньому випадку фактор-групи $\overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$ і $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ ізоморфні.

Доведення. Справді, вказана відповідність між підгрупами груп $\overline{\mathbf{G}}$ і $\mathbf{G}$ є взаємно однозначною, оскільки $\mathbf{x} \in \mathbf{H} \Leftrightarrow \gamma(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbf{H}}$. Якщо підгрупа $\overline{\mathbf{H}}$ є нормальним дільником групи $\overline{\mathbf{G}}$, то композиція природних гомоморфізмів $\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}$ і $\overline{\mathbf{G}} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$ буде, як неважко перевірити, деяким гомоморфізмом групи $\mathbf{G}$ на фактор-групу $\overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$. При цьому одиничний елемент фактор-групи $\overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$ будуть відображатися ті і тільки ті елементи групи $\mathbf{G}$, які при гомоморфізмі $\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}$ відображаються в підгрупу $\overline{\mathbf{H}}$, тобто які утворюють в групі $\mathbf{G}$ підгрупу $\mathbf{H}$, що є повним прообразом при гомоморфізмі γ підгрупи $\overline{\mathbf{H}}$. Отже, ядро гомоморфізму $\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$ збігається з підгрупою $\mathbf{H}$, яка таким чином, є нормальним дільником групи $\mathbf{G}$. Згідно з теоремою 2, фактор-група $\overline{\mathbf{G}}/\overline{\mathbf{H}}$ ізоморфна фактор-групі $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. З іншого боку, якщо $\mathbf{h}$ є нормальним дільником групи $\mathbf{G}$, при чому $\mathbf{N} \leq \mathbf{H}$, то для довільних елементів $\mathbf{g} \in \mathbf{G}, \overline{\mathbf{h}} \in \overline{\mathbf{H}}$, де $\overline{\mathbf{H}} = \gamma(\mathbf{H})$, знайдуться такі елементи $\mathbf{g} \in \mathbf{G}, \mathbf{h} \in \mathbf{H}$, що $\gamma(\mathbf{g}) = \overline{\mathbf{g}}, \gamma(\mathbf{h}) = \overline{\mathbf{h}}$. Тоді $\mathbf{g}^{-1}\overline{\mathbf{h}}\overline{\mathbf{g}} = (\gamma(\mathbf{g}))^{-1}\gamma(\mathbf{h})\gamma(\mathbf{g}) = \gamma(\mathbf{g})^{-1}\gamma(\mathbf{h})\gamma(\mathbf{g}) = \gamma(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{g}) \in \overline{\mathbf{H}}$,

оскільки $g^{-1}hg \in H$. Отже, підгрупа $\overline{H}$ є нормальним дільником групи $\overline{G}$. Цим доведення теореми завершено.

Приклад 2. Довести, що для довільного простого числа p не існує неабелевих груп порядку p^2 .

Розв'язання. Нехай G – довільна група порядку p^2 . Згідно з теоремою 3, група G має нетривіальний центр C . розглянемо фактор-групу G/C /вона існує, оскільки центр є нормальним дільником групи/. Якщо $|G/C|=1$, то $G=C$ і тому група G є абелева, оскільки вона збігається із своїм центром. Якщо ж $|G/C|>1$, то з рівності $p^2 = |G| = |G/C| * |C|$ випливає, що фактор-група G/C має порядок p і тому не містить власних підгруп, бо порядок довільної такої підгрупи повинен бути дільником числа p , відмінним від 1 та самого p , а це неможливо, бо p - просте число. Фактор-група G/C циклічна, тому група G абелева. І в цьому випадку. Отже, не існує жодної неабелевої групи, порядок якої дорівнює квадрату простого числа.

Висновки

Упродовж століть алгебра була наукою про рівняння. Так, квадратні рівняння вміли розв'язувати ще древні греки. Формули для розв'язування рівнянь 3-го і 4-го степенів були відкриті Італійськими математиками в XVI от. Після цього майже три століття продовжувалися спроби знайти подібні формули для рівнянь 8-го степеня, але вони не увінчалися успіхом. На початку XIX от. причина цих невдач з'ясувалася: було доведено, що не можна знайти загальну формулу коренів для алгебраїчних рівнянь степеня вище 4. Це доведення вперше було отримане Італійським математиком П. Руффіні, а в більш строгій формі – норвезьким математиком Н. Абелем. Вичерпну ж відповідь на питання про умови, при яких алгебраїчне рівняння допускає розв'язання в радикалах, дав французький математик Е.Галуа в 1832 р. Його дослідження вказали нові напрямки в розвитку алгебри, що привело вже в XX ст. до формування нової точки зору на задачі алгебраїчної науки. Зараз вже є безсумнівним, що зовсім не вивчення рівнянь є центральною задачею алгебри. Справжні об'єктом алгебраїчного дослідження слід вважати алгебраїчні операції, задані на множинах довільної природи.

Найбільш детально в алгебрі вивчаються лише найбільш важливіші алгебраїчні системи, тобто. Такими є, зокрема, поля, тобто множини з двома алгебраїчними операціями, властивості яких аналогічні властивостям додавання і множення дійсних або комплексних чисел. Теорія полів виявилась природною областю для подальшого розвитку теорії рівнянь, а два її найважливіші розділи - теорія полів алгебраїчних чисел і теорія полів алгебраїчних функцій – тісно пов'язали її з теорією чисел з одного боку і з теорією функцій комплексної змінної з другого.

Ще більшу область застосувань має теорія груп.. Групи мали важливі застосування вже в теорії Галуа при встановленні критеріїв розв'язаності алгебраїчних рівнянь в радикалах. Зараз же вони є одним з головних знарядь в теорії полів, в багатьох розділах геометрії, теорії чисел, математичного аналізу, топології і навіть за межами математики в кристалографії, теоретичній фізиці. Взагалі, за широтою застосувань теорія груп займає серед всіх розділів алгебри друге після лінійної алгебри місце. Знадобилася робота

декількох поколінь математиків, що тривала близько ста років, перш ніж ідея групи викристалізувалась з її сьогодишньою ясністю. Від Ж.Лагранжа, який стихійно застосовував групи підстановок для розв'язування алгебраїчних рівнянь в радикалах (1771), через роботи П.Руффіні (1799) і Н.Абеля (1894) до Е.Галуа, в працях якого (1830) вже досить свідомо використовується ідея групи /ним же введений і сам термін/ - таким шляхом розвивалася ця ідея в рамках теорії алгебраїчних рівнянь. Незалежно і з інших причин вона виникла в геометрії, коли в середині XIX ст. на зміну єдиній евклідовій геометрії прийшли численні "неевклідові" геометрії і постало питання про встановлення зв'язків та спорідненості між ними. Вихід був вказаний "Ерлангенською програмою" Й.Клейна (1872), який поклав в основу класифікації геометрій поняття групи перетворень. Третє джерело поняття групи - теорія чисел. Тут серед основних імен слід назвати Ейлера, що вивчав степеневі залишки, К.Гауса з його "композицією бінарних квадратичних форм", Л.Кroneкера, який, по суті, описав скінченні абелеві групи на мові теорії чисел.

Сьогодні теорія груп є одним з найбільш розвинутих розділів алгебри, що має численні застосування як в самій математиці /теорія функцій, топологія, теорія алгебраїчних та диференціальних рівнянь/, так і за її межами /кристалографія, теоретична фізика/. Як уже відзначалося, одним з перших застосувань теорії груп було встановлення Е.Галуа критеріїв розв'язності алгебраїчних рівнянь в радикалах. Суть цього підходу полягала, в тому, що кожному алгебраїчному рівнянню Галуа зіставляв групу підстановок його коренів. З'ясувалося, що цю групу (вона пізніше отримала назву групи Галуа даного рівняння) можна знайти, навіть не знаючи самих коренів. Було встановлено, що розв'язність рівняння в радикалах рівносильна тому, що група Галуа цього рівняння має певні властивості (є розв'язною). Пізніше він побудував теорію розв'язності в квадратурах звичайних диференціальних рівнянь, аналогічну теорії Галуа розв'язності алгебраїчних рівнянь. При цьому місце груп підстановок у новій теорії зайняли т. з. циклічні групи.

Список використаних та рекомендованих джерел

- 1 Болдарєва О. М. Методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни «Алгебра і теорія чисел» (курс лекцій) / О. М. Болдарєва, О.М. Яковлєва. Одеса : ПНПУ імені К.Д. Ушинського, 2021. – 54 с. URL: <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/11802?locale=uk>
2. Волошина Т.В. Елементи теорії груп: навч. посіб. Луцьк : Вежа-Друк, 2023. –144 с.
3. Гаврилків В. М. Елементи теорії груп та теорії кілець. І.Ф. : Голіней, 2023. – 153 с.
4. Ганюшкін О.Г., Безущак О.О. Теорія груп. К. : ВПЦ «Київський університет», 2005. – 122 с
5. Заїка О. В., Сухойваненко Л.Ф. , Прокопець Т.О. Алгебра і теорія чисел: навчальний посібник / О. В. Заїка, Л.Ф. Сухойваненко, Т.О. Прокопець. – Глухів: ФОП Цьома С.П., 2023. – 264 с.