

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 8 (17)

Рівне-2011

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопечкий В.В.</u> (<i>консультант</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундраг М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 25 листопада 2011 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

Зміст

<i>Бабич С. М. Розрахунок прямобічного шліцьового з'єднання трибосистеми «пружна пластинка – жорсткий диск».....</i>	<i>5</i>
<i>Бехта М. І., Савула Я. Г. Задача оптимального вибору параметрів об'єднання безсіткового методу та методу скінченних елементів.....</i>	<i>15</i>
<i>Бомба А. Я., Сінчук А. М. Застосування квазіконформних відображень до математичного моделювання процесів вибуху.....</i>	<i>32</i>
<i>Булавацький В. М. Математичне моделювання динаміки неізотермічного консолідаційного процесу насиченого сольовим розчином пористого середовища за умов масообміну.....</i>	<i>42</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей.....</i>	<i>51</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О., Сівак В. М. Числова реалізація аналога методу конформних відображень побудови просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідною засипкою.....</i>	<i>63</i>
<i>Климюк Ю. Є., Теслюк А. О., Шепетько Ю. О. Математичне моделювання одного класу просторових нелінійних сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах.....</i>	<i>76</i>
<i>Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах.....</i>	<i>92</i>
<i>Кузьменко А. П., Гладка О. М. Застосування методу прямих сумісно з R-трансформаціями для розв'язування просторової початково-крайової задачі.....</i>	<i>108</i>

<i>Петрик М. Р. Методи моделювання та аналізу причинних характеристик крайових задач масопереносу з використанням матриць впливу для неоднорідних багатоскладових середовищ</i>	113
<i>Присяжнюк О. В., Присяжнюк І. М. Асимптотичний метод розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморезим»</i>	140
<i>Романюк В. В. Точне розв'язування інтегрального рівняння з виродженим ядром з поліноміалізованою функцією, котра додається, з використанням граничної рекурсії</i>	152
<i>Савюк Є. В. Комплексний підхід до моделювання процесу руху рідин у водоймах з урахуванням джерел поповнення ...</i>	171
<i>Теребус А. В. Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення.....</i>	190
<i>Цимбал В. М. Мішана задача для деякого сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку.....</i>	205
<i>Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона.....</i>	213
<i>Яроцак С. В. Математичне моделювання двохфазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах ...</i>	240
* * * * *	
<i>Джунь Й. В. Закон Джеффриса і його значення як сучасної концепції імовірнісного моделювання випадкових похибок спостережень.....</i>	247
Хроніка	
<i>До 80-річчя Ніни Опанасівни Вірченко.....</i>	258

УДК 519.63+628.315.3

Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О., Сівак В. М.

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ АНАЛОГА МЕТОДУ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ПОБУДОВИ ПРОСТОРОВОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ФІЛЬТРІВ ІЗ ОДНОРІДНОЮ ЗАСИПКОЮ

Розроблено алгоритм числової побудови просторового фільтраційного поля для фільтрів із однорідною засипкою, які мають форму однозв'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії. Наведено результати числових розрахунків.

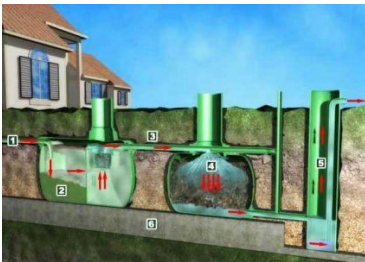


Рис. 1. Схема очисної споруди з біофільтром

Вступ. З одного боку відносно висока вартість фільтруючих матеріалів, а з іншого – потреба у фільтруванні великих об'ємів рідин, зумовлюють необхідність проведення оптимізації форми фільтрів для доочистки води за рахунок більш якісного використання завантаження та збільшення тривалості фільтроциклу. Даного роду опти-

мізація була проведена в [1] на прикладі двох фільтрів, які мали форму криволінійного і прямокутного паралелепіпедів відповідно. Виявилось, що криволінійна форма фільтра з “монотонним звуженням” в напрямку від входу до виходу дозволяє більш раціонально використати сорбційну ємкість і продовжити термін фільтроциклу на 3-6%. Через це на практиці замість фільтрувальних установок з циліндричною формою, для деяких з яких характерна повздовжня викривленість (рис. 1), більш ефективним є використання фільтрів конусоподібної форми. При подальшому дослідженні таких просторових процесів фільтрування через пористі

завантаження виникає чимало труднощів, пов'язаних із повздовжніми і поперечними викривленостями області, в якій шукається розв'язок, та складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач за рахунок врахування зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища. У зв'язку із цим для випадків областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, у рівняннях конвективної дифузії, граничних та початкових умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу, завдяки чому суттєво спрощується запис задачі та її розв'язання [1 – 3].

Виходячи із вище сказаного, подальші дослідження обумовлюють необхідність побудови просторових фільтраційних полів у фільтрах із однорідною засипкою, які мають форму однозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії.

Постановка задачі. Для фільтра, що має форму однозв'язної області G_z ($\mathbf{z} = (x, y, z)$), обмеженої гладкими, ортогональними між собою вздовж ліній перетину, двома еквіпотенціальними поверхнями $S_* = \{\mathbf{z} : f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{\mathbf{z} : f^*(x, y, z) = 0\}$ і поверхнею течії $S^{**} = \{\mathbf{z} : f^{**}(x, y, z) = 0\}$ (рис. 2), розглянемо модельну задачу, яка описує процес фільтрації рідини у відповідному однорідному пористому завантаженні:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{S^{**}} = 0, \quad (2)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал та вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), κ – коефіцієнт фільтрації ($\kappa = \text{const}$), \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

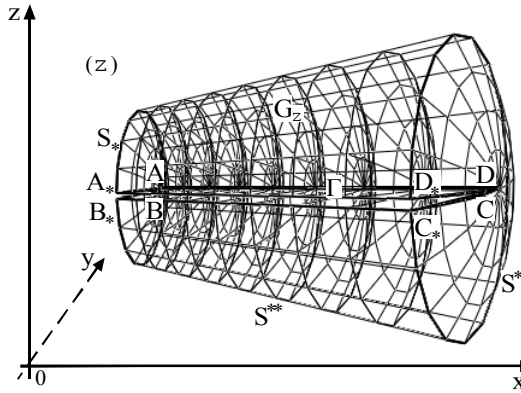


Рис. 2. Просторова область фільтрації G_z

Як і в [1–3], введемо функції $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжені із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$), такі, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = \text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \eta(x, y, z)$ [7]. Вибравши довільну точку $A = B \in S_* \cap S^{**}$, проводимо деякий умовний розріз $\Gamma_* \in S_*$, що сполучає дану точку із деякою точкою $A_* = B_* \in S_*$. Через точку $A_* = B_*$ проводимо деякий умовний розріз $\Gamma_{0*} \in S_*$ (у певному сенсі впоперек розрізу Γ_*). Дані два розрізи породжують двох типів поверхні течії S_0 і S^0 . Через Γ^* і Γ_{0*}^* позначимо відповідні образи розрізів Γ_* і Γ_{0*} в S^* (а саме $\Gamma^* = S_0 \cap S^*$, $\Gamma_{0*}^* = S^0 \cap S^*$), а через C , D , C_* , $D_* \in S^*$ відповідні B , A , B_* , A_* точки. В результаті приходимо до розв’язання задачі на побудову просторового аналога конформного відображення однозв’язної області $G_z \setminus (S_0 \cup S^0)$ (“сильно” криволінійного паралелепіпеда $ABCD A_* B_* C_* D_*$) на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$ (рис. 3), де $Q = Q_* \cdot Q^*$ – потік через довільний поперечний переріз течії. З метою уникнення особливостей такого відображення цю задачу “на-

близимо” деякою задачею без особливостей, апроксимувавши “двохберегову” ділянку, породжену поверхнею S^0 , деякою гладкою поверхнею течії $S_0^0 = \{\mathbf{z} : \tilde{f}(x, y, z) = 0\}$:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, & \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x; & \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \\ \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, & \eta|_{ABCD} = 0, \eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*. \end{cases} \quad (3)$$

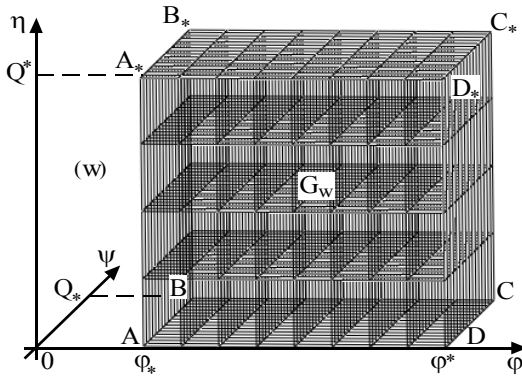


Рис. 3. Просторова область комплексного потенціалу G_w

Відповідна обернена до (3) крайова задача на знаходження просторового аналогу конформного відображення $G_w \rightarrow G_z \setminus (S_0 \cup S_0^0)$ при невідомих значеннях параметрів Q_* , Q^* та витраті Q запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), & y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), & z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta); \\ f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), & y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), & z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x_\psi, & \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y_\psi, & \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z_\psi. \end{cases} \quad (4)$$

Різницевий аналог задачі та алгоритм числового розв'язання.

Аналогічно [1] в області G_w вводимо рівномірну ортогональну сітку:

$$G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, n+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, m+1}; \eta_k = \Delta\eta \cdot k, k = \overline{0, l+1}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n+1}, \Delta\psi = \frac{Q_*}{m+1}, \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} \right\},$$

$n, m, l \in N$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ, ψ та η (рис. 3).

Через $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів сітки у $G_z \setminus (S_0 \cup S^0)$.

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область $G_z \setminus (S_0 \cup S^0)$ (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги перших трьох рівнянь (4) у рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j,k} &= x_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} &= y_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} &= z_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Крайові умови, які визначають фізичну область $G_z \setminus (S_0 \cup S^0)$, апроксимуємо точково-різницевиими рівняннями

$$\left\{ \begin{array}{l} f_* (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, \quad f^* (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f^{**} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, \quad y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, \quad z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, \quad y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \end{array} \right. \quad (7)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, які у сітковій області G_w^y записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\frac{f'_{*x} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} = \frac{f'_{*y} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{*z} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}},$$

$$\frac{f^{*x} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} = \frac{f^{*y} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f^{*z} (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}},$$

$$\frac{f_x^{**f}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} = \frac{f_y^{**f}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f_z^{**f}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}},$$

$$i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \quad (8)$$

Підправляємо координати вузлів, які знаходяться на виродженій умовній поверхні – вибраній нами лінії течії AD , виходячи із умови її ортогональності до еквіпотенціальних ліній та належності точок A і D заданим еквіпотенціальним поверхням.

Інваріант відображення γ є невідомою величиною і визначається в процесі розрахунку. Формулу для його наближеного знаходження одержимо на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів областей $G_z \setminus (S_0 \cup S^0)$ і G_w :

$$\gamma = \frac{\kappa}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4 \left(\sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \right) / \\ & \left(\left(\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
 & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\
 & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right).
 \end{aligned}$$

Невідому витрату Q та величини Q_* , Q^* знаходимо відповідно за формулами

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma}, \quad Q_* = \sqrt{\frac{Q \cdot (m+1)}{\tilde{\gamma} \cdot (l+1)}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} \cdot Q \cdot (l+1)}{m+1}}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma} &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k}, \\
 \tilde{\gamma}_{i,j,k} &= \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
 & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\
 & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right) / \\
 & \left(\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
 & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\
 & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right).
 \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (5) – (10) знаходимо шляхом поетапної параметризації конформного інваріанту γ , координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області $G_z^\gamma \setminus (S_0 \cup S^0)$. А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_w^γ (n , m та l), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)})$, $(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)})$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)})$, $(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, l+1}$, $(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)})$, $(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (так, щоб виконувались рівності (7)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, за формулою (9) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$ інваріанта відображення γ . Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(s)}, y_{i,j,k}^{(s)}, z_{i,j,k}^{(s)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ проводимо на основі почергового розв'язання систем (5) і (6) із використанням значень з попереднього кроку ітерації s ($s = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (7) і (8), а також уточнення координат вузлів лінії течії AD . Потім знаходимо нові наближення γ за формулою (7), Q , Q_* і Q^* – за формулами (10) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і витрати Q відносно кроку ітерації відповідно

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(s+1)} - x_{i,j,k}^{(s)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(s+1)} - y_{i,j,k}^{(s)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(s+1)} - z_{i,j,k}^{(s)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| Q^{(s+1)} - Q^{(s)} \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Якщо умови (11) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів сітки обчислюємо нев'язку перших трьох рівнянь системи (4)

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \text{ де } \delta_1 = \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa \cdot \gamma}{2} \cdot ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \right) \right),$$

$$\delta_2 = \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa \cdot \gamma}{2} \cdot ((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right) \right),$$

$$\delta_3 = \max_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left(\left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa \cdot \gamma}{2} \cdot ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right) \right).$$

Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки $G_z^y \setminus (S_0 \cup S^0)$ та розв'язуємо задачу заново.

Для розрахованої гідродинамічної сітки $G_z^y \setminus (S_0 \cup S^0)$ на основі рівняння руху (1) та перших трьох рівнянь системи (3) величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки знаходимо за такою формулою

$$v_{i,j,k} = \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad v_{x_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa \cdot \Delta \varphi}{J_{i,j,k}} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa \cdot \Delta \varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa \cdot \Delta \varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \times (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right),$$

$$J_{i,j,k} = (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})$$

$-y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) -$
 $-(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} -$
 $-y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})$. Формули для знаходження величин швидкостей у граничних вузлах і на поверхнях розділу отримуються аналогічно [1].

Програмна реалізація алгоритму та числові приклади. Вище описаний алгоритм був реалізований у вигляді пакету програм для сучасних багатоядерних ПЕОМ під управлінням ОС Windows, який дозволяє отримувати як числові результати роботи алгоритму, так і візуальне їх представлення у вигляді графіків, малюнків тощо. Для перевірки його коректної роботи було проведено числовий експеримент побудови просторового фільтраційного поля у фільтрі із однорідною засипкою, форму якого описано поверхнями $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$, $f^{**}(x, y, z) = 7.5486322 \cdot x^2 - y^2 - z^2$ при $\phi_* = 0.1$, $\phi^* = 0.2$, $\kappa = 1$. На рис. 4 зображено отриману в результаті обчислень динамічну сітку в G_z при $n = 32$, $m = 46$, $l = 10$ (параметри n , m , l вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Результати розв'язання подані у табл. 1, де ΔQ – абсолютна похибка величини Q , δ – максимум нев'язки перших трьох рівнянь системи (4).

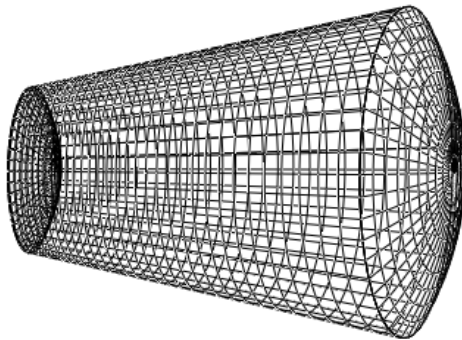


Рис. 4. Динамічна сітка в фізичній області G_z

Табл. 1. Результати розв'язання задачі в області G_z

№	n	m	l	ε	Q	ΔQ	δ
1	32	80	16	0.00001	1.911234	0.282011	0.085410
2	64	160	32	0.00001	2.022250	0.170995	0.025453
3	96	240	48	0.00001	2.067959	0.125286	0.012314
4	128	320	64	0.00001	2.093426	0.099819	0.007315
5	160	400	80	0.00001	2.109826	0.083420	0.004871
6	192	480	96	0.00001	2.121337	0.071908	0.003488
7	224	560	112	0.00001	2.129897	0.063349	0.002628
8	256	640	128	0.00001	2.136529	0.056716	0.002055
9	288	720	144	0.00001	2.141830	0.051415	0.001654
10	320	800	160	0.00001	2.146172	0.047074	0.001361

Висновки і зауваження. Розроблений алгоритм побудови просторових фільтраційних полів у фільтрах із однорідною засипкою, які мають форму однозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії, дозволяє досліджувати фільтраційні процеси у фільтрах конусоподібної форми, яка є більш зручною для впровадження на виробництві і, на цій основі, проводити подальшу оптимізацію параметрів процесу фільтрування: часу захисної дії завантаження, співвідношення розмірів фільтра та швидкості фільтрування тощо.

1. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
2. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
3. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими еквіпотенціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький

цький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 84-92.

4. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк, А. П. Сафоник, В. М. Сивак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-39.
5. Сивак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сивак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Збірн. наук. праць. – Вип. 34. – Рівне : НУВГП. – 2009. – С. 252-261.
6. Климяк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климяк, В. М. Сивак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 93-109.
7. Рауз. Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net
science@prigornitsky.com

Надійшла 20.02.2011

Климяк Ю. Е., Пригорницький Д. А., Сивак В. Н. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛОГА МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФИЛЬТРОВ С ОДНОРОДНОЙ ЗАСЫПКОЙ // *Разработан алгоритм численного построения пространственного фильтрационного поля для фильтров с однородной засыпкой, которые имеют форму односвязных областей, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и поверхностью течения. Приведены результаты численных расчетов.*

Klymyuk Yu. Ye., Prigornitsky D. A., Sivak V. N. NUMERICAL IMPLEMENTATION ANALOG METHOD OF CONFORMAL MAPPING OF SPATIAL FIELD FILTRATION OF FILTERS FOR A CLASS WITH HOMOGENEOUS LOADING // *The algorithm for numerical construction of spatial filtration field in filters with homogeneous loading, which are curvilinear parallelepipeds, bounded by two equipotential surfaces and surface of current is developed. The results of numerical calculations are presented.*