

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 8 (17)**

**Рівне-2011**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундраг М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 25 листопада 2011 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: [vmvspm@gmail.com](mailto:vmvspm@gmail.com).

## **Зміст**

<i>Бабич С. М. Розрахунок прямобічного шліцьового з'єднання трибосистеми «пружна пластинка – жорсткий диск».....</i>	<i>5</i>
<i>Бехта М. І., Савула Я. Г. Задача оптимального вибору параметрів об'єднання безсіткового методу та методу скінченних елементів.....</i>	<i>15</i>
<i>Бомба А. Я., Сінчук А. М. Застосування квазіконформних відображень до математичного моделювання процесів вибуху.....</i>	<i>32</i>
<i>Булавацький В. М. Математичне моделювання динаміки неізотермічного консолідаційного процесу насиченого сольовим розчином пористого середовища за умов масообміну.....</i>	<i>42</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей.....</i>	<i>51</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О., Сівак В. М. Числова реалізація аналога методу конформних відображень побудови просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідною засипкою.....</i>	<i>63</i>
<i>Климюк Ю. Є., Теслюк А. О., Шепетько Ю. О. Математичне моделювання одного класу просторових нелінійних сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах.....</i>	<i>76</i>
<i>Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах.....</i>	<i>92</i>
<i>Кузьменко А. П., Гладка О. М. Застосування методу прямих сумісно з <math>R</math>-трансформаціями для розв'язування просторової початково-крайової задачі.....</i>	<i>108</i>

<i>Петрик М. Р. Методи моделювання та аналізу причинних характеристик крайових задач масопереносу з використанням матриць впливу для неоднорідних багатоскладових середовищ .....</i>	113
<i>Присяжнюк О. В., Присяжнюк І. М. Асимптотичний метод розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморежим» .....</i>	140
<i>Романюк В. В. Точне розв'язування інтегрального рівняння з виродженим ядром з поліноміалізованою функцією, котра додається, з використанням граничної рекурсії .....</i>	152
<i>Савюк Є. В. Комплексний підхід до моделювання процесу руху рідин у водоймах з урахуванням джерел поповнення ...</i>	171
<i>Теребус А. В. Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення.....</i>	190
<i>Цимбал В. М. Мішана задача для деякого сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку.....</i>	205
<i>Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона .....</i>	213
<i>Яроцак С. В. Математичне моделювання двохфазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах ...</i>	240
* * * * *	
<i>Джунь Й. В. Закон Джеффриса і його значення як сучасної концепції імовірнісного моделювання випадкових похибок спостережень.....</i>	247
Хроніка	
<i>До 80-річчя Ніни Опанасівни Вірченко.....</i>	258

УДК 519.63

**Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.****ПРОСТОРОВІ АНАЛОГИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ  
ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ  
ОБЛАСТЕЙ**

*Розроблено алгоритм числової реалізації крайових задач на знаходження просторових аналогів конформних відображень одного класу кусково-однорідних областей – криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою екіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди. Наведено результати числових розрахунків.*

**Вступ.** В [1 – 3] було запропоновано числові алгоритми розв'язання обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів конформних відображень одно- та двозв'язних областей, обмежених екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, на відповідні прямокутні паралелепіпеди. У цій роботі нами адаптовано, описаний в [1], алгоритм для безпосереднього застосування його для знаходження просторових аналогів конформних відображень криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою екіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди.

**Загальна постановка задачі.** Для кусково-однорідної області, яка є криволінійним паралелепіпедом  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  ( $z = (x, y, z)$ ), обмеженим гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома екіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  і чотирма поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  та розділеним

еквіпотенціальною поверхнею  $EFF_*E_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$  на дві під-області  $G_{z-} = ABFE_*B_*F_*E_*$  і  $G_{z+} = EFCDE_*F_*C_*D_*$  (рис. 1 а), розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi \Big|_{EFF_*E_*} = \varphi \Big|_{EFF_*E_*}, \quad \kappa_1 \cdot \varphi'_\vec{n} \Big|_{EFF_*E_*} = \kappa_2 \cdot \varphi'_\vec{n} \Big|_{EFF_*E_*}, \quad (3)$$

де  $\varphi$  – потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ),  $\kappa$  – коефіцієнт, що характеризує область  $G_z$ ,  $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ \kappa_2, & (x, y, z) \in G_{z+} \end{cases}$ ,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості

( $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$ ),  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, (3) – умови узгодженості на еквіпотенціальній поверхні  $EFF_*E_*$ .

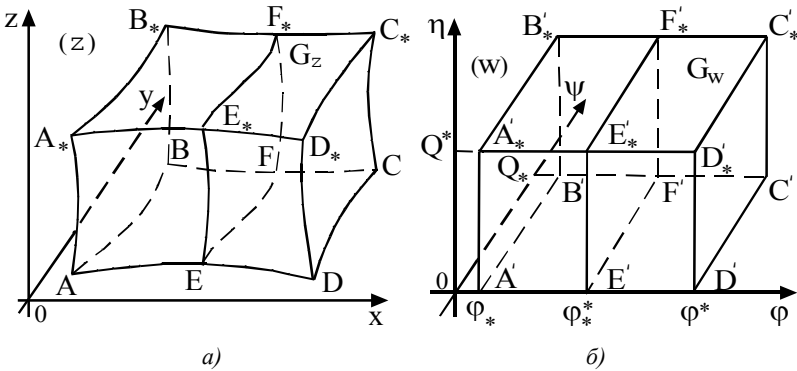


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) таких,

що  $\kappa \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = \text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \eta(x, y, z)$  [4], і заміною останньої з граничних умов (2) на умови:  $\psi|_{ADD_+A_+} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_+B_+} = Q_*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A,D,C_+B_+} = Q^*$ , задачу (1) – (3) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$  (рис. 1 б), де  $\varphi_*$ ,  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – невідомі величини:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \quad \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x; \quad \varphi|_{ABB_+A_+} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCC_+D_+} = \varphi^*, \\ \psi|_{ADD_+A_+} = 0, \quad \psi|_{BCC_+B_+} = Q_*, \quad \eta|_{ADCB} = 0, \quad \eta|_{A,D,C_+B_+} = Q^*, \\ \varphi|_{EFF_+E_+} = \varphi|_{EFF_+E_+} = \varphi_*, \quad \kappa_1 \cdot \varphi'_n|_{EFF_+E_+} = \kappa_2 \cdot \varphi'_n|_{EFF_+E_+}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Відповідний просторовий аналог оберненої до (4) крайової задачі на конформне відображення  $z = z(w)$  області  $G_w$  на  $G_z$  при невідомих значеннях величин  $\varphi_*$ ,  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q$  запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), \quad y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), \quad z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta), \\ f_1(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_2(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_3(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\ f_4(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) = 0, \\ f_5(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_6(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0, \\ f_7(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ \kappa_1 \cdot \sqrt{x'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta) + y'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta) + z'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta)} \Big|_{EFF_+E_+} = \\ = \kappa_2 \cdot \sqrt{x'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta) + y'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta) + z'^2_\varphi(\varphi_*, \psi, \eta)} \Big|_{EFF_+E_+}. \end{array} \right. \quad (5)$$

**Різницевий аналог задачі та алгоритм числового розв'язання.** Аналогічно [1] в області  $G_w$  вводимо рівномірну ортогональну сітку:

$$G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \begin{cases} \overline{\varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i}, i = \overline{0, n_1}, \\ \overline{\varphi_*^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1)}, i = \overline{n_1 + 1, n + 1}; \end{cases} \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \right.$$

$$j = \overline{0, m + 1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l + 1}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_*^* - \varphi_*}{n_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_*^* - \varphi_*}{n_2 + 1},$$

$$\left. \Delta\psi = \frac{Q_*}{m + 1}, \Delta\eta = \frac{Q^*}{l + 1}, \gamma_p = \frac{\Delta\varphi_p}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta}, p = 1, 2 \right\}, \text{ де } n = n_1 + n_2, m, l \in N -$$

параметри розбиття області комплексного потенціалу, а  $\Delta\varphi_p, p = 1, 2, \Delta\psi, \Delta\eta$  – кроки сітки відповідно по змінних  $\varphi, \psi$  та  $\eta$  (рис. 1 б). Через  $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$  позначимо координати відповідних вузлів сітки у  $G_z$ .

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда  $G_w$  на криволінійну область  $G_z$  (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги перших трьох рівнянь (5) у рівномірній сітковій області  $G_w^\gamma$  через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j,k} &= x_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} &= y_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} &= z_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i &= \overline{1, n_1 - 1}, p=1, i = \overline{n_1 + 1, n}, p=2, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$



$$\left\{ \begin{aligned}
 x_{i,j,k} &= x_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
 y_{i,j,k} &= y_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
 z_{i,j,k} &= z_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{4} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
 i &= \overline{1, n_1 - 1}, \quad p=1, \quad i = \overline{n_1 + 1, n}, \quad p=2, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}.
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Крайові умови, які визначають область  $G_z$ , запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_1(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) &= 0, \quad f_2(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 f_3(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) &= 0, \quad f_4(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\
 f_5(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) &= 0, \quad f_6(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 i &= \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}.
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границь області  $G_z$ , які у сітковій області  $G_w^y$  записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{aligned}
 \frac{f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\
 \frac{f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} &= \frac{f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\
 \frac{f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}},
 \end{aligned}$$

$$\frac{f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{x_{i,m,k} - x_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{y_{i,m,k} - y_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{z_{i,m,k} - z_{i,m+1,k}},$$

$$\frac{f'_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} = \frac{f'_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}},$$

$$\frac{f'_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}},$$

$$i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \quad (9)$$

Координати вузлів на екіпотенціальній поверхні  $EFF_*E_*$  уточнюємо, використовуючи наступні різниці рівняння

$$\begin{aligned} \kappa_1 \cdot \Delta\varphi_1 \cdot \sqrt{(x_{n_1+1,j,k} - x_{n_1,j,k})^2 + (y_{n_1+1,j,k} - y_{n_1,j,k})^2 + (z_{n_1+1,j,k} - z_{n_1,j,k})^2} = \\ = \kappa_2 \cdot \Delta\varphi_2 \cdot \sqrt{(x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k})^2 + (y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k})^2 + (z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k})^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$f_*(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) = 0, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1} \quad (11)$$

та

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*x}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k}} = \frac{f'_{*y}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k}} = \\ = \frac{f'_{*z}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*x}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1+1,j,k}} = \frac{f'_{*y}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1+1,j,k}} = \\ = \frac{f'_{*z}(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1+1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Інваріанти відображення  $\gamma_p$ ,  $p = 1, 2$  криволінійних паралелепіпедів  $G_{z^-}$  і  $G_{z^+}$  є невідомими і визначаються в процесі розрахунку. Формули для наближеного знаходження даних величин одержимо на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів двох областей:

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_1}{n_1(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_2}{(n_2+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_2,m,l} \gamma_{n_1+i,j,k}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4 \left( \sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \right) / \\ & \left( \left( \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right) \Bigg). \end{aligned}$$

Невідомі величини  $\varphi^*$ ,  $Q$  знаходимо за формулами

$$\varphi^* = \frac{n_1 \cdot \gamma_1 \cdot \varphi^* + (n_2 + 1) \cdot \gamma_2 \cdot \varphi^*}{n_1 \cdot \gamma_1 + (n_2 + 1) \cdot \gamma_2}, \quad (15)$$

$$Q = \Delta\varphi_1 \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_1} \quad (\text{або } Q = \Delta\varphi_2 \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_2}), \quad (16)$$

а величини  $Q_*$ ,  $Q^*$  відповідно за формулами

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q \cdot (m+1)}{\tilde{\gamma} \cdot (l+1)}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} \cdot Q \cdot (l+1)}{m+1}}, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k}, \\ \tilde{\gamma}_{i,j,k} &= \left( \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ &+ \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ &+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ &+ \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \Big) / \\ &\quad \left( \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ &+ \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ &+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ &+ \left. \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right). \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (6) – (17) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин  $\gamma_p$ ,  $p=1,2$ , координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області  $G_z^\gamma$ . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області  $G_w^\gamma$  ( $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m$  та  $l$ ), параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів  $(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)})$ ,  $(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)})$ ,  $j = \overline{0, m+1}$ ,  $k = \overline{0, l+1}$ ,  $(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)})$ ,  $(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, n_1-1}$ ,  $k = \overline{0, l+1}$ ,

$\left(x_{n_i+i,0,k}^{(0)}, y_{n_i+i,0,k}^{(0)}, z_{n_i,0,k}^{(0)}\right), \quad \left(x_{n_i+m+1,k}^{(0)}, y_{n_i+m+1,k}^{(0)}, z_{n_i+m+1,k}^{(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_2},$   
 $k = \overline{0, l+1}, \quad \left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right), \quad \left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_1-1}, \quad j = \overline{1, m},$   
 $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right), \quad \left(x_{n_i+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_i+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_i+i,j,l+1}^{(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad j = \overline{1, m}$  і вузлів  
 поверхні розділу  $\left(x_{n_i,j,k}^{(0)}, y_{n_i,j,k}^{(0)}, z_{n_i,j,k}^{(0)}\right), \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}$  (так, щоб  
 виконувались рівності відповідно (8) і (11)), початкові наближення ко-  
 ординат внутрішніх вузлів обох областей  $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_1-1},$   
 $j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}$  і  $\left(x_{n_i+i,j,k}^{(0)}, y_{n_i+i,j,k}^{(0)}, z_{n_i+i,j,k}^{(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}$ , за  
 формулами (14) знаходимо початкові наближення  
 $\gamma_p^{(0)} = \gamma_p \left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$  інваріантів відображення  $\gamma_p, \quad p = 1, 2$ . Уточ-  
 нення координат внутрішніх вузлів  $\left(x_{i,j,k}^{(s)}, y_{i,j,k}^{(s)}, z_{i,j,k}^{(s)}\right), \quad i = \overline{1, n_1-1},$   
 $j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}$  і  $\left(x_{n_i+i,j,k}^{(s)}, y_{n_i+i,j,k}^{(s)}, z_{n_i+i,j,k}^{(s)}\right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}$  про-  
 водимо на основі почергового розв'язання систем (6) і (7) із викорис-  
 танням значень з попереднього кроку ітерації  $s$  ( $s = 0, 1, \dots$  – номер  
 кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів,  
 розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (8) і (9), коор-  
 динати вузлів поверхні розділу на основі рівнянь (11), (12) та почерго-  
 вого використання (12) і (13). Потім знаходимо нові наближення  $\gamma_p,$   
 $p = 1, 2$  за формулами (14), величин  $\Phi^*, Q, Q_*$  і  $Q^*$  – за формулами  
 (15) – (17) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів  
 сітки і величин  $\Phi^*, Q$  відносно кроку ітерації відповідно

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left( \left| x_{i,j,k}^{(s+1)} - x_{i,j,k}^{(s)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(s+1)} - y_{i,j,k}^{(s)} \right|, \right. \\
 \left. \left| z_{i,j,k}^{(s+1)} - z_{i,j,k}^{(s)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| \Phi_*^{(s+1)} - \Phi_*^{(s)} \right| < \varepsilon, \quad \left| Q^{(s+1)} - Q^{(s)} \right| < \varepsilon. \quad (18)$$

Якщо умови (18) не виконуються, то повертаємося до уточнен-  
 ня координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку для  
 отриманих вузлів обчислюємо нев'язку перших трьох рівнянь системи

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \delta &= \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \text{ де } \delta_1 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left( \left( (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{2} \cdot (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \right) \times \right. \\
 &\times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \left. \right), \quad \delta_2 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left( \left( (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{2} \cdot ((z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right) \right), \quad \delta_3 = \\
 &= \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1}}^{n,m,l} \left( \left( (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_p \cdot \gamma_p}{2} \cdot ((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right) \right), \quad p = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, & i = \overline{n_1 + 1, n}. \end{cases} \text{ Якщо точність отриманого}
 \end{aligned}$$

розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки  $G_z^y$  та розв'язуємо задачу заново.

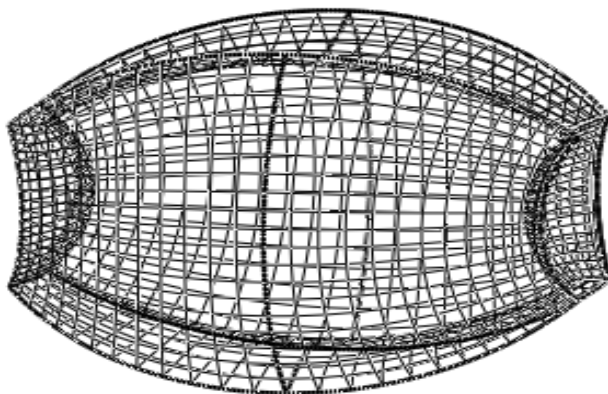
**Програмна реалізація алгоритму та числові приклади.** Вище описаний алгоритм був реалізований у вигляді пакету програм для сучасних багатоядерних ПЕОМ під управлінням ОС Windows, який дозволяє отримувати як числові результати роботи алгоритму, так і візуальне їх представлення у вигляді графіків, малюнків тощо. Комп'ютерна збіжність та точність алгоритму перевірялася за допомогою серії тестових задач. Так, у випадку області  $G_z$ , обмеженої поверхнями

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y, z) &= (x + 2.6197848)^2 + y^2 + z^2 - 137.8525137, \quad f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 + \\
 &+ (x - 52.6197848)^2 - 137.8525137, \quad f_3(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y - 14.4337567)^2 + \\
 &+ z^2 - 833.3333333, \quad f_4(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y + 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333,
 \end{aligned}$$

$f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 25) + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - 833.3333333z^2$ , при  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 6$ ,  $f_*(x, y, z) = x - 25$ ,  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 3$  ми отримали сіткову область, зображену на рис. 2. При цьому параметри  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m$ ,  $l$  вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної. Числові результати розв'язання тестової задачі подані у табл. 1.

Табл. 1. Результати розв'язання задачі (6) – (18) для області  $G_z$ 

№	$n_1 = n_2 + 1$	$m$	$l$	$\varepsilon$	$\varphi^*$	$Q$	$\delta$
1	20	9	15	0.00001	1.468396	4.238980	0.026102
2	40	18	30	0.00001	1.483769	4.313756	0.004000
3	80	36	60	0.00001	1.491772	4.350489	0.000561
4	160	72	120	0.00001	1.495857	4.368597	0.000075
5	320	144	240	0.00001	1.497921	4.377573	0.000010

Рис. 2. Розрахована сіткова область  $G_z$ 

**Висновки і зауваження.** Аналіз отриманих нами результатів числового експерименту (зокрема, представлених у табл. 1) на серії тестових задач свідчить про збіжність запропонованого алгоритму та можливість його використання на практиці для отримання розрахункових сіток. При цьому слід зауважити, що умовою застосування алгоритму є достатньо близьке початкове наближення координат внутрішніх і граничних вузлів та вузлів поверхні розділу до точного розв'язку.

1. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький //

Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.

2. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
3. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими еквіпотенціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 84-92.
4. *Рауз. Х.* Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

*E-mail:* klimyuk@ukr.net

science@prigornitsky.com

Надійшла 14.02.2011

**Климюк Ю. Е., Пригорницький Д. А.** ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АНАЛОГИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ // *Разработан алгоритм численной реализации краевых задач нахождение пространственных аналогов конформных отображений одного класса кусочно-однородных областей – криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделенных некоторой эквипотенциальной поверхностью на две подобласти, которые характеризуются разными постоянными коэффициентами, на соответствующие прямоугольные параллелепипеды. Приведены результаты числовых расчетов.*

**Klymyuk Yu. Ye., Prigornitsky D. A.** SPATIAL ANALOGUES OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS FOR ONE CLASS OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS AREAS // *An algorithm of numerical realization of boundary value problems on finding the spatial analogues of conformal mappings for one class of piecewise homogeneous areas – curvilinear parallelepipeds bounded by two equipotential surfaces and the four surfaces of the flow and separated by a certain equipotential surface into two subareas, which are characterized by different coefficients, onto the corresponding rectangular parallelepipeds is developed. The results of numerical calculations are presented.*