Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 8 (17)

Рівне-2011

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 25 листопада 2011 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Хроніка

УДК 517.95

Климюк Ю. Є., Теслюк А. О., Шепетько Ю. О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ПРОСТОРОВИХ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ДВОШАРОВИХ ІЗОТРОПНИХ НАСИЧЕНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У роботі запропонована математична модель для прогнозування процесу поширення забруднюючих речовин із врахуванням сумарного зворотного впливу величин їх концентрацій у всі попередні моменти часу на величини коефіцієнтів дифузій в двошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищах – модельних областях, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі.

Вступ. При дослідженні процесів поширення забруднюючих речовин у однорідних ізотропних пористих середовищах трапляються випадки, коли на величину коефіцієнта дифузії в кожній точці у даний момент часу вносять впливи її величини концентрацій, що мали місце в усі попередні моменти часу. В [6] відповідну залежність описано формулою $D = \varepsilon \cdot \left(d_0 + \varepsilon \cdot \int_0^t a\left(x, y, z, \tilde{t}\right) \cdot C\left(x, y, z, \tilde{t}\right) d\tilde{t} \right)$, де $a(x, y, z, t)$ – деяка вагова обмежена функція, d_0 – задане додатне дійсне число, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), а в [2] на основі [7], де побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник, одержано асимптотичне розвинення розв'язку відповідної простророві сингулярно збуреної крайової задачі типу "конвекція-дифузія".

 С. 76–91

У цій роботі нами відповідну методику перенесено на випадок двошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищ – модельних областей, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії.

Загальна постановка задачі. Для області $G = G_{\mathrm{z}} \times (0,\infty)$ ($\mathrm{z} = (x, y, z)$), $G_{\mathrm{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathrm{z}: f_1(x,y,z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathrm{z}: f_2(x,y,z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathrm{z}: f_3(x,y,z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathrm{z}: f_4(x,y,z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathrm{z}: f_5(x,y,z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathrm{z}: f_6(x,y,z) = 0\}$ та розділений еквіпотенціальною поверхнею $EFF_*E_* = \{\mathrm{z}: f_*(x,y,z) = 0\}$ на дві підобласті $G_{\mathrm{z}-} = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{\mathrm{z}+} = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 1 а), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої речовини із врахуванням нерівномірного і змінного в часі розподілу величини її концентрації на ділянці входу ABB_*A_* фільтраційної течії, відсутності інтенсивного відводу рідини на виході CDD_*C_*, наявності додаткових джерел на водонепроникних ділянках ADD_*A_*, BCC_*B_*, $ABCD$ і $A_*B_*C_*D_*$ фільтраційної області, що описується рівняннями:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi\,,\ div\, \vec{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$div\left(D \cdot grad\ C\right) - \vec{v} \cdot grad\ C = \sigma \cdot C_t' \tag{2}$$

за наступних крайових умов:

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0\,, \tag{3}$$

$$C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{ABB_*A_*}=c_*\left(M,t\right),\ C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{CDD_*C_*}=c^*\left(M,t\right),$$

$$C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{ADD_*A_*}=c_{**}\left(M,t\right),\ C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{BCC_*B_*}=c^{**}\left(M,t\right),$$

$$C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{ABCD}=c_{***}\left(M,t\right),\ C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{A_*B_*C_*D_*}=c^{***}\left(M,t\right), \qquad (4)$$

початкової умови

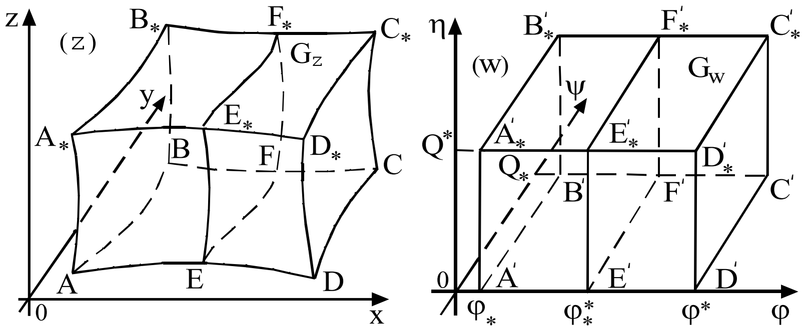
$$C(x,y,z,0)=c_0^0\left(x,y,z\right) \qquad (5)$$

і умов узгодженості на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_*:

$$\varphi\,\Big|_{EFF_*E_{*-}}=\varphi\,\Big|_{EFF_*E_{*+}},\ \kappa_1\cdot\varphi'_{\vec n}\,\Big|_{EFF_*E_{*-}}=\kappa_2\cdot\varphi'_{\vec n}\,\Big|_{EFF_*E_{*+}}, \qquad (6)$$

$$C\Big|_{EFF_*E_{*-}}=C\Big|_{EFF_*E_{*+}},\ D_*\cdot C'_{\vec n}+v_n\cdot C\Big|_{EFF_*E_{*-}}=D^*\cdot C'_{\vec n}+v_n\cdot C\Big|_{EFF_*E_{*+}}, \qquad (7)$$

де φ – фільтраційний потенціал ($0<\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*<\infty$), κ – коефіцієнт фільтрації, що характеризує область $G_{\mathbf{z}}$, $\kappa=\left[\begin{array}{l}\kappa_1,\ \left(x,y,z\right)\in G_{\mathbf{z-}},\\ \kappa_2,\ \left(x,y,z\right)\in G_{\mathbf{z+}}\end{array}\right.$, $\vec v(v_x,v_y,v_z)$ – вектор швидкості ($\left|\vec v\right|=\sqrt{v_x^2(x,y,z)+v_y^2(x,y,z)+v_z^2(x,y,z)}>$ $>v_*>>0$), $\vec n$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C=C(x,y,z,t)$ – концентрація розчинної речовини в фільтраційній течії у точці (x,y,z) в момент часу t, $D=\left[\begin{array}{l}D_1,\left(x,y,z\right)\in G_{z-},\\ D_2,\left(x,y,z\right)\in G_{z+}\end{array}\right.$ – коефіцієнт дифузії, $D_j=\varepsilon\cdot\left(d_j+\varepsilon\cdot\int\limits_0^t a_j\left(x,y,z,\hat t\right)\cdot C\left(x,y,z,\hat t\right)d\hat t\right)$ ($j=1,2$), $0<d_1,d_2\le 1$, $a_j(x,y,z,t)$ – деякі вагові обмежені функції ($j=1,2$), ε – малий параметр ($\varepsilon>0$), $\sigma=\left[\begin{array}{l}\sigma_1,\left(x,y,z\right)\in G_{z-},\\ \sigma_2,\left(x,y,z\right)\in G_{z+}\end{array}\right.$ – коефіцієнт пористості, $0<\sigma_1,\sigma_2\le 1$, $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_{**}\left(M,t\right)$, $c^{**}\left(M,t\right)$, $c_{***}\left(M,t\right)$, $c^{***}\left(M,t\right)$, $c_0^0\left(x,y,z\right)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G [1, 9], M – довільна точка відповідної поверхні, v_n – нормальна складова швидкості на поверхні розділу EFF_*E_*.



а) *б)*

Рис. 1. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення пари функцій $\psi=\psi(x,y,z)$, $\eta=\eta(x,y,z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x,y,z)$) таких, що $\kappa\cdot grad\,\varphi = grad\,\psi\times grad\,\eta$ [10] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*}=0$, $\psi\big|_{BCC_*B_*}=Q_*$, $\eta\big|_{ABCD}=0$, $\eta\big|_{A_*D_*C_*B_*}=Q^*$, ця задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області $G_{\mathbf{z}}$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_{\mathbf{w}}=\{\mathbf{w}=(\varphi,\psi,\eta):\ \ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ \ 0<\psi<Q_*,\ \ 0<\eta<Q^*\}$ (рис. 1 б), де Q_*, Q^* – невідомі параметри, $Q_*\cdot Q^*=Q=\int\limits_{EFF_*E_*}\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds$ – кількість рідини, що проходить через деяку еквіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області $G_{\mathbf{z}}$ (повна фільтраційна витрата). Припустимо, що ця задача є

розв'язаною [7], зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v}$ і параметри Q_*, Q^*, Q, φ_*^*. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi,\eta)$, $y = y(\varphi,\psi,\eta)$, $z = z(\varphi,\psi,\eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7) отримаємо відповідну "дифузійну задачу" для області $G_{\mathrm{w}} \times (0,\infty)$:

$$\tilde{D}\cdot\left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2}\cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1}\cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2}\cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1}\cdot c'_{\psi} + b_{2,2}\cdot c'_{\eta}\right) +$$

$$+\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2}\cdot\tilde{D}'_{\varphi}\cdot c'_{\varphi} + b_{1,1}\cdot\tilde{D}'_{\psi}\cdot c'_{\psi} + b_{1,2}\cdot\tilde{D}'_{\eta}\cdot c'_{\eta} - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa}\cdot c'_{\varphi} = \sigma\cdot c'_t, \tag{8}$$

$$c(\varphi_*,\psi,\eta,t) = c_*(\psi,\eta,t),\ c(\varphi^*,\psi,\eta,t) = c^*(\psi,\eta,t),$$

$$c(\varphi,0,\eta,t) = c_{**}(\varphi,\eta,t),\ c(\varphi,Q_*,\eta,t) = c^{**}(\varphi,\eta,t),$$

$$c(\varphi,\psi,0,t) = c_{***}(\varphi,\psi,t),\ c(\varphi,\psi,Q^*,t) = c^{***}(\varphi,\psi,t),$$

$$c(\varphi,\psi,\eta,0) = c_0^0(\varphi,\psi,\eta), \tag{9}$$

$$c(\varphi_{*-}^*,\psi,\eta,t) = c(\varphi_{*+}^*,\psi,\eta,t),$$

$$\tilde{D}_1\cdot c'_{\varphi}(\varphi_{*-}^*,\psi,\eta,t) + \kappa_1\cdot c(\varphi_{*-}^*,\psi,\eta,t) =$$

$$= \tilde{D}_2\cdot c'_{\varphi}(\varphi_{*+}^*,\psi,\eta,t) + \kappa_2\cdot c(\varphi_{*+}^*,\psi,\eta,t), \tag{10}$$

де $\quad c = c(\varphi,\psi,\eta,t) = C\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$

$$\tilde{D} = \tilde{D}(\varphi,\psi,\eta,t) = D\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$

$$\tilde{D}_j = \varepsilon\cdot\left(d_j + \varepsilon\cdot\int_0^t \tilde{a}_j(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})\cdot c(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})\,d\hat{t}\right)\ (j=1,2),$$

$$\tilde{a}_j = \tilde{a}_j(\varphi,\psi,\eta,t) = a_j\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big)\ (j=1,2),$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\varphi,\psi,\eta) = v\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\big),$$

$$b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2,\ b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta) = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2,$$

$$b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta) = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz},\ b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta) = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz}\ \text{[2]}.$$

Алгоритм числового розв'язання задачі. Асимптотичне наближення розв'язку $c(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} c_1(\varphi,\psi,\eta,t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ c_2(\varphi,\psi,\eta,t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$ задачі (8) – (10) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів [4]:

$$c_1=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{1,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot p_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{H}_{1,i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\hat{H}_{1,i}+R_{1,n+1}, \tag{11}$$

$$c_2=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{2,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot p_{2,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot P_{2,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{P}_{2,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{P}_{2,i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{H}_{2,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{H}_{2,i}+\tilde{R}_{2,n+1}, \tag{12}$$

де $c_{j,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $p_{j,i}(\phi_j,\psi,\eta,t)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi_*^*$ (поправки в околі поверхні EFF_*E_* розділу підобластей $G_{\mathbf{z-}}$ і $G_{\mathbf{z+}}$), $P_i(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\tilde{P}_{j,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\hat{P}_{j,i}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\tilde{H}_{j,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\hat{H}_{j,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\eta=0$, $\eta=Q^*$, що враховують вплив "бічних джерел забруднень", $\phi_1=\dfrac{\varphi_*^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\phi_2=\dfrac{\varphi-\varphi_*^*}{\varepsilon}$, $\tilde{\varphi}=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi}=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}}=\dfrac{Q_*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta}=\dfrac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}}=\dfrac{Q^*-\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{j,n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ ($j=1,2$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму [1]).

У результаті підстановки (11) і (12) в (8) – (10) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержимо задачі для знаходження головних частин $c_{j,0}$ ($j=1,2$) розв'язку і поправок $c_{j,i}$ ($j=1,2$, $i=\overline{1,n}$):

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_1}\cdot c'_{(1,0)\,\varphi}+\sigma_j\cdot c'_{(1,0)\,t}=0, \\ c_{1,0}(\varphi,\psi,\eta,0)=c_0^0(\varphi,\psi,\eta),\ c_{1,0}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=c_*(\psi,\eta,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_1}\cdot c'_{(1,i)\,\varphi}+\sigma_j\cdot c'_{(1,i)\,t}=g_{1,i}, \\ c_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,0)=0,\ c_{1,i}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=0\ (i=\overline{1,n}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_2}\cdot c'_{(2,0)\,\varphi}+\sigma_j\cdot c'_{(2,0)\,t}=0, \\ c_{2,0}(\varphi,\psi,\eta,0)=c_0^0(\varphi,\psi,\eta),\ c_{2,0}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t)=c_{1,0}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_2}\cdot c'_{(2,i)\,\varphi}+\sigma_j\cdot c'_{(2,i)\,t}=g_{2,i}, \\ c_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,0)=0,\ c_{2,i}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t)=c_{1,i}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t)\ (i=\overline{1,n}), \end{cases}$$

де $$g_{j,i}=d_j\cdot\left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2}\cdot c''_{(j,i-1)\varphi\varphi}+b_{1,1}\cdot c''_{(j,i-1)\psi\psi}+b_{1,2}\cdot c''_{(j,i-1)\eta\eta}+b_{2,1}\cdot c''_{(j,i-1)\psi}+b_{2,2}\cdot c''_{(j,i-1)\eta}\right)+$$

$$+I(i,2)\left(\sum_{k=0}^{i-2}\left(\int_0^t\left(\hat{\tilde{a}}_j\cdot\hat{c}_{j,k}\right)d\hat{t}\left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2}\cdot c''_{(j,i-2-k)\varphi\varphi}+b_{1,1}\cdot c''_{(j,i-2-k)\psi\psi}+b_{1,2}\cdot c''_{(j,i-2-k)\eta\eta}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+b_{2,1}\cdot c'_{(j,i-2-k)\psi}+b_{2,2}\cdot c'_{(j,i-2-k)\eta}\right)+\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_2}\cdot c'_{(j,k)\,\varphi}\cdot\int_0^t\left(\hat{\tilde{a}}_j\cdot\hat{c}'_{(j,i-2-j)\varphi}+\hat{\tilde{a}}'_{j\,\varphi}\cdot\hat{c}_{(j,i-2-j)}\right)d\hat{t}+$$

$$\left.\left.+b_{1,1}\cdot c'_{j,k\,\psi}\cdot\int_0^t\left(\hat{\tilde{a}}_j\cdot\hat{c}'_{(i-2-j)\psi}+\hat{\tilde{a}}'_{j\,\psi}\cdot\hat{c}_{(j,i-2-k)}\right)d\hat{t}+b_{1,2}\cdot c'_{j,k\,\eta}\cdot\int_0^t\left(\hat{\tilde{a}}_j\cdot\hat{c}'_{(i-2-j)\eta}+\hat{\tilde{a}}'_{j\,\eta}\cdot\hat{c}_{(j,i-2-k)}\right)d\hat{t}\right)\right)$$

($j=1,2$, $i=\overline{1,n}$), $\hat{c}_j=c_j\left(\varphi,\psi,\eta,\hat{t}\right)$, $\hat{\tilde{a}}_j=\tilde{a}_j\left(\varphi,\psi,\eta,\hat{t}\right)$ ($j=1,2$),

$$I(a,b)=\begin{cases}1, & якщо\ a\ge b,\\ 0, & якщо\ a<b.\end{cases}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{1,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} c_*(\psi,\eta,t-f_1(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge f_1(\varphi,\psi,\eta),\\ c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t<f_1(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} \kappa_1\cdot\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{g_{1,i}(s,\psi,\eta,f_1(s,\psi,\eta)+t-f_1(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}ds, & t\ge f_1(\varphi,\psi,\eta),\\ \int\limits_0^t\dfrac{g_{1,i}(f_1^{-1}(s+f_1(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\sigma_1}ds, & t<f_1(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{2,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} c_{1,0}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t-f_2(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge f_2(\varphi,\psi,\eta),\\ c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t<f_2(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} h_i(\varphi,\psi,\eta,t), & t\ge f_2(\varphi,\psi,\eta),\\ \int\limits_0^t\dfrac{g_{2,i}(f_2^{-1}(s+f_2(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\sigma_2}ds, & t<f_2(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$h_i(\varphi,\psi,\eta,t)=\kappa_2\cdot\int\limits_{\varphi_*^*}^{\varphi}\frac{g_{2,i}(s,\psi,\eta,f_2(s,\psi,\eta)+t-f_2(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}ds+c_{1,i}(\varphi_*^*,\psi,\eta,t),$$

де $f_1(\varphi,\psi,\eta)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{\kappa_1\cdot\sigma_1\cdot ds}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки $\left(x(\varphi_*,\psi,\eta),y(\varphi_*,\psi,\eta),z(\varphi_*,\psi,\eta)\right)\in ABB_*A_*$ до точки $\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),\ z(\varphi,\psi,\eta)\right)\in G_-$ вздовж відповідної лінії течії, а $f_2(\varphi,\psi,\eta)=\int\limits_{\varphi_*^*}^{\varphi}\dfrac{\kappa_2\cdot\sigma_2\cdot ds}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}$ – від точки $\left(x(\varphi_*^*,\psi,\eta),y(\varphi_*^*,\psi,\eta),z(\varphi_*^*,\psi,\eta)\right)\in$ $\in EFF_*E_*$ до точки $\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),\ z(\varphi,\psi,\eta)\right)\in G_+$, f_j^{-1} ($j=1,2$) – функції, обернені відповідно до f_j ($j=1,2$) відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi,\psi,\eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Для знаходження примежових функцій $P_{2,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_2\cdot P''_{(2,0)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_2\cdot P'_{(2,0)\,\tilde{\varphi}}=0, \\ P_{2,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P_{2,0}\left(0,\psi,\eta,t\right)=c^*\left(\psi,\eta,t\right)-c_{2,0}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2\cdot P''_{(2,i)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_2\cdot P'_{(2,i)\,\tilde{\varphi}}=q_i\ \ (i=\overline{1,n}), \\ P_{2,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P_{2,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)=-c_{2,i}(\varphi^*,\psi,\eta,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2\cdot P''_{(2,n+1)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_2\cdot P'_{(2,n+1)\,\tilde{\varphi}}=q_{n+1}, \\ P_{2,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P_{2,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0, \end{cases}$$

де $$q_i=\frac{\kappa_2^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*,\psi,\eta)}\cdot\left(\sigma_2\cdot P'_{(2,i-1)\,t}-\sum_{k=1}^{i}\left(d_2\cdot\frac{V_k}{\kappa_2^2}\cdot P''_{(2,i-k)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\frac{V_k}{\kappa_2}\cdot P'_{(2,i-k)\,\tilde{\varphi}}\right)-I(i,2)\times\right.$$
$$\times\left(d_2\cdot\sum_{k=0}^{i-2}\left(B_{1,1,k}\cdot P''_{(2,i-2-k)\,\psi\psi}+B_{2,1,k}\cdot P'_{(2,i-2-k)\,\psi}+B_{1,2,k}\cdot P''_{(2,i-2-k)\,\eta\eta}+B_{2,2,k}\cdot P'_{(2,i-2-k)\,\eta}\right)+\right.$$
$$+\sum_{m=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\left(\frac{V_k}{\kappa_2^2}\cdot\left(P''_{(2,l-k)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\cdot\int_0^t\widehat{A}_{m-l}\cdot\widehat{P}_{2,i-1-m}\,d\widehat{t}+P'_{(2,l-k)\,\tilde{\varphi}}\cdot\left(\int_0^t\widehat{A}_{2,m-l}\cdot\widehat{P}'_{(2,i-1-m)\,\tilde{\varphi}}\,d\widehat{t}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\int_0^t\widehat{A}'_{(2,m-l)\,\tilde{\varphi}}\cdot\widehat{P}_{2,i-2-m}\,d\widehat{t}\right)\right)\right)\right)-I(i,3)\cdot\sum_{m=0}^{i-3}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\left(\left(B_{1,1,k}\times P''_{(2,l-k)\,\psi\psi}+B_{1,2,k}\cdot P''_{(2,l-k)\,\eta\eta}+B_{2,1,k}\times\right.\right.$$
$$\left.\times P'_{(2,l-k)\,\psi}+B_{2,2,k}\cdot P'_{(2,l-k)\,\eta}\right)\cdot\int_0^t\widehat{A}_{m-l}\cdot\widehat{P}_{2,i-3-m}\,d\widehat{t}+B_{1,1,k}\cdot P'_{(2,l-k)\,\psi}\cdot\left(\int_0^t\widehat{A}_{2,m-l}\cdot\widehat{P}'_{(2,i-3-m)\,\psi}\,d\widehat{t}+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\int_0^t\widehat{A}'_{(2,m-l)\,\psi}\cdot\widehat{P}_{2,i-3-m}\,d\widehat{t}\right)+B_{1,2,k}\cdot P'_{(2,l-k)\,\eta}\cdot\left(\int_0^t\widehat{A}_{2,m-l}\cdot\widehat{P}'_{(2,i-3-m)\,\eta}\,d\widehat{t}+\int_0^t\widehat{A}'_{(2,m-l)\,\eta}\cdot\widehat{P}_{2,i-3-m}\,d\widehat{t}\right)\right)\right)$$

$(i=\overline{1,n+1})$, V_k, $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$, $\widehat{A}_{m-l}$, $\widehat{A}'_{(m-l)\,\tilde{\varphi}}$, $\widehat{A}'_{(m-l)\,\psi}$, $\widehat{A}'_{(m-l)\,\eta}$ – коефіцієнти при k-тих ($m-l$-тих) степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$,

$b_{2,2}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $\tilde{a}_2(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,\hat{t})$, $\tilde{a}'_{2\,\tilde{\varphi}}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,\hat{t})$, $\tilde{a}'_{2\,\psi}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,\hat{t})$, $\tilde{a}'_{2\,\eta}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,\hat{t})$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{2,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{d_2}{\kappa_2}\left(c^*\left(\psi,\eta,t\right)-c_{2,0}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\right)\cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{\varphi}},$$

$$P_{2,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_2}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s}\cdot\int\limits_0^{s}q_i(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds-c_{2,i}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\ \ (i=\overline{1,n}),$$

$$P_{2,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_2}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s}\cdot\int\limits_0^{s}q_{n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds.$$

Для знаходження функцій $p_{j,i}(\phi_j,\psi,\eta,t)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,n+1}$) отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases}d_1\cdot p''_{(1,0)\,\phi_1\phi_1}+\kappa_1\cdot p'_{(1,0)\,\phi_1}=0,\ d_2\cdot p''_{(2,0)\,\phi_2\phi_2}-\kappa_2\cdot p'_{(2,0)\,\phi_2}=0,\ p_{j,0}(\phi_j,\psi,\eta,t)\underset{\phi_j\to\infty}{\to}0\ (j=1,2),\\ c_{1,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p_{1,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)=c_{2,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p_{2,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right),\\ d_1\cdot\left(c'_{(1,0)\,\phi_1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p'_{(1,0)\,\phi_1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\right)+\kappa_1\cdot\left(c_{1,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p_{1,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\right)=\\ =d_2\cdot\left(c'_{(2,0)\,\phi_2}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p'_{(2,0)\,\phi_2}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)\right)+\kappa_2\cdot\left(c_{2,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p_{2,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_1\cdot p''_{(1,i)\,\phi_1\phi_1}+\kappa_1\cdot p'_{(1,i)\,\phi_1}=\hat{q}_{1,i},\ d_2\cdot p''_{(2,i)\,\phi_2\phi_2}-\kappa_2\cdot p'_{(2,i)\,\phi_2}=\hat{q}_{2,i},\\ p_{j,i}(\phi_j,\psi,\eta,t)\underset{\phi_j\to\infty}{\to}0\ (j=1,2,\ i=\overline{1,n}),\\ c_{1,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p_{1,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)=c_{2,i}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p_{2,i}\left(0_+,\psi,\eta,t\right),\\ -d_1\cdot\left(c'_{(1,i)\,\phi_1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p'_{(1,i)\,\phi_1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\right)-\kappa_1\cdot\left(c_{1,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+p_{1,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\right)-\tilde{q}_{1,i}=\\ =d_2\cdot\left(c'_{(2,i)\,\phi_2}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p'_{(2,i)\,\phi_2}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)\right)+\kappa_2\cdot\left(c_{2,i}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+p_{2,i}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)\right)+\tilde{q}_{2,i},\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_1\cdot p''_{(1,n+1)\,\phi_1\phi_1}+\kappa_1\cdot p'_{(1,n+1)\,\phi_1}=\hat{q}_{1,n+1},\ d_2\cdot p''_{(2,n+1)\,\phi_2\phi_2}-\kappa_2\cdot p'_{(2,n+1)\,\phi_2}=\hat{q}_{2,n+1},\\ p_{j,n+1}(\phi_j,\psi,\eta,t)\underset{\phi_j\to\infty}{\to}0\ (j=1,2),\ p_{1,n+1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)=p_{2,n+1}\left(0_+,\psi,\eta,t\right),\\ -d_1\cdot p'_{(1,n+1)\,\phi_1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)-\kappa_1\cdot p_{1,n+1}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)-\tilde{q}_{1,n+1}=\\ =d_2\cdot p'_{(2,n+1)\,\phi_2}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+\kappa_2\cdot p_{2,n+1}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{2,n+1},\end{cases}$$

де $\widehat{q}_{j,i} = \dfrac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_*^*,\psi,\eta)}\cdot\bigg(\sigma_j\cdot p'_{(j,i-1)t} - \sum_{k=1}^{i}\bigg(d_j\cdot\dfrac{\tilde{V}_{j,k}}{\kappa_j^2}\cdot p''_{(j,i-k)\phi_j\phi_j} - (-1)^j\cdot\dfrac{\tilde{V}_{j,k}}{\kappa_j}\cdot p'_{(j,i-k)\phi_j}\bigg)-$

$$-I(i,2)\cdot\bigg(d_j\cdot\sum_{k=0}^{i-2}\Big(\tilde{B}_{1,1,j,k}\cdot p''_{(j,i-2-k)\psi\psi} + \tilde{B}_{2,1,j,k}\cdot p'_{(j,i-2-k)\psi} + \tilde{B}_{1,2,j,k}\cdot p''_{(j,i-2-k)\eta\eta} +$$

$$+\tilde{B}_{2,2,j,k}\cdot p'_{(j,i-2-k)\eta}\Big) + \sum_{m=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\frac{\tilde{V}_{j,k}}{\kappa_j^2}\cdot\bigg(p''_{(j,l-k)\phi_j\phi_j}\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{A}}_{j,m-l}\cdot\tilde{\tilde{p}}_{j,i-1-m}\,d\tilde{\tilde{t}} - (-1)^j\times$$

$$\times\bigg(p'_{(j,l-k)\phi_j}\cdot\int_0^t\widehat{A}_{j,m-l}\cdot\tilde{\tilde{p}}'_{(j,i-1-m)\phi_j}\,d\tilde{\tilde{t}} + p'_{(j,l-k)\phi_j}\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\phi_j}\cdot\tilde{\tilde{p}}_{j,i-2-m}\,d\tilde{\tilde{t}}\bigg)\bigg)\bigg)\bigg)-I(i,3)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{i-3}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\bigg(\Big(\tilde{B}_{1,1,j,k}\cdot p''_{(j,l-k)\psi\psi} + \tilde{B}_{1,2,j,k}\cdot p''_{(j,l-k)\eta\eta} + \tilde{B}_{2,1,j,k}\cdot p'_{(j,l-k)\psi} + \tilde{B}_{2,2,j,k}\cdot p'_{(j,l-k)\eta}\Big)\times$$

$$\times\int_0^t\tilde{\tilde{A}}_{j,m-l}\cdot\tilde{\tilde{p}}_{j,i-3-m}\,d\tilde{\tilde{t}} + \tilde{B}_{1,1,j,k}\cdot p'_{(j,l-k)\psi}\cdot\bigg(\int_0^t\tilde{\tilde{A}}_{j,m-l}\cdot\tilde{\tilde{p}}'_{(j,i-3-m)\psi}\,d\tilde{\tilde{t}} + \int_0^t\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\psi}\cdot\tilde{\tilde{p}}_{j,i-3-m}\,d\tilde{\tilde{t}}\bigg)+$$

$$+\tilde{B}_{1,2,j,k}\cdot p'_{(j,l-k)\eta}\cdot\bigg(\int_0^t\tilde{\tilde{A}}_{j,m-l}\cdot\tilde{\tilde{p}}'_{(j,i-3-m)\eta}\,d\tilde{\tilde{t}} + \int_0^t\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\eta}\cdot\tilde{\tilde{p}}_{j,i-3-m}\,d\tilde{\tilde{t}}\bigg)\bigg)\bigg),\quad \tilde{q}_{j,i} =$$

$$=\sum_{m=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\int_0^t\tilde{\tilde{A}}_{j,k}\cdot\Big(\tilde{\tilde{c}}_{j,l-k}+\tilde{\tilde{p}}_{j,l-k}\Big)d\tilde{\tilde{t}}\cdot\Big(c_{j,i-2-m}+p_{j,i-2-m}\Big)\quad (j=1,2,\ i=\overline{1,n+1}),$$

$\tilde{V}_{j,k}$, $\tilde{B}_{1,1,j,k}$, $\tilde{B}_{1,2,j,k}$, $\tilde{B}_{2,1,j,k}$, $\tilde{B}_{2,2,j,k}$, $\tilde{\tilde{A}}_{j,k}$ або $\tilde{\tilde{A}}_{j,m-l}$, $\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\phi_1}$, $\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\psi}$, $\tilde{\tilde{A}}'_{(j,m-l)\eta}$ ($j=1,2$) – коефіцієнти при k-тих ($m-l$-тих) степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $\tilde{a}_1(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{1\phi_1}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{1\psi}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{1\eta}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_{*-}^*$ та $\tilde{v}^2(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $\tilde{a}_2(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{2\phi_1}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{2\psi}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$, $\tilde{a}'_{2\eta}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta,\tilde{\tilde{t}})$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_{*+}^*$.

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$p_{1,0}\left(\phi_1,\psi,\eta,t\right)=0.5\cdot\kappa_2^{-1}\Big(d_2\cdot c_{2,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)-d_1\cdot c_{1,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+$$

$$+3\cdot\kappa_2\cdot c_{2,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)-2\cdot\kappa_2\cdot c_{1,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)-\kappa_1\cdot c_{1,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)\Big)\cdot e^{-\frac{\kappa_1}{d_1}\phi_1},$$

$$p_{2,0}\left(\phi_2,\psi,\eta,t\right)=0.5\cdot\kappa_2^{-1}\Big(d_2\cdot c_{2,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)-d_1\cdot c_{1,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+$$

$$+\kappa_2\cdot c_{2,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)-\kappa_1\cdot c_{1,0}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)\Big)\cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\phi_2},$$

$$p_{1,i}\left(\phi_1,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_1}\cdot\int_0^{\phi_1}\left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_1}s}\cdot\int_0^{s}\widehat{q}_{1,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_1}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds-\left(\kappa_1+\kappa_2\right)^{-1}\times$$

$$\times\Big(d_1\cdot c_{(1,i)\,\phi_1}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+d_2\cdot c_{(2,i)\,\phi_2}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\times$$

$$\times c_{1,i}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{2,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{1,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)\Big),$$

$$p_{2,i}\left(\phi_2,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_2}\cdot\int_0^{\phi_2}\left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s}\cdot\int_0^{s}\widehat{q}_{2,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds+\left(\kappa_1+\kappa_2\right)^{-1}\times$$

$$\times\Big(d_1\cdot c_{(1,i)\,\phi_1}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+d_2\cdot c_{(2,i)\,\phi_2}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\times$$

$$\times c_{2,i}\left(\varphi_*^*,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{2,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{1,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)\Big)\ \ (i=\overline{1,n}),$$

$$p_{1,n+1}\left(\phi_1,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_1}\cdot\int_0^{\phi_1}\left(e^{-\frac{\kappa_1}{d_1}s}\cdot\int_0^{s}\widehat{q}_{1,n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_1}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds-\frac{\tilde{q}_{2,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{1,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)}{\kappa_1+\kappa_2},$$

$$p_{2,n+1}\left(\phi_2,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_2}\cdot\int_0^{\phi_2}\left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s}\cdot\int_0^{s}\widehat{q}_{2,n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}}\,d\tilde{s}\right)ds-\frac{\tilde{q}_{2,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)+\tilde{q}_{1,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)}{\kappa_1+\kappa_2}.$$

Функції $\tilde{P}_{j,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,2n+1}$) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_j\cdot b_{1,1}\left(\varphi,0,\eta\right)\cdot\tilde{P}''_{(j,0)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}-\dfrac{\tilde{v}^2\left(\varphi,0,\eta\right)}{\kappa_j}\cdot\tilde{P}'_{(j,0)\,\varphi}=\sigma_j\cdot\tilde{P}'_{(j,0)\,t}\ \ (j=1,2),\\ \tilde{P}_{j,0}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \tilde{P}_{j,0}(\varphi,0,\eta,t)=c_{**}(\varphi,\eta,t)-\widehat{M}_{j,0}(\varphi,\eta,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases} d_j \cdot b_{1,1}(\varphi,0,\eta)\cdot \tilde{P}''_{(j,i)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}} - \dfrac{\tilde{v}^2(\varphi,0,\eta)}{\kappa_j}\cdot \tilde{P}'_{(j,i)\,\varphi} = \sigma_j \cdot \tilde{P}'_{(j,i)\,t} - \tilde{M}_{j,i} \ (j=1,2,\ i=\overline{1,2n+1}),\\ \tilde{P}_{j,i}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to} 0,\ \tilde{P}_{j,i}(\varphi,0,\eta,t)=\begin{cases} 0,\ \textit{якщо}\ i - \textit{не парне},\\ -\widehat{M}_{j,i}(\varphi,\eta,t),\ \textit{якщо}\ i - \textit{парне}.\end{cases}\end{cases}$$

Тут $\widehat{M}_{1,i}(\varphi,\eta,t) = c_{1,i-i/2}(\varphi,0,\eta,t) + p_{1,i-i/2}(\varphi,0,\eta,t)$, $\widehat{M}_{2,i}(\varphi,\eta,t) = c_{2,i-i/2}(\varphi,0,\eta,t) +$

$$+ p_{2,i-i/2}(\varphi,0,\eta,t) + P_{2,i-i/2}(\varphi,0,\eta,t)\ ,\ \tilde{M}_{j,i} = d_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{i} B^*_{1,1,j,k} \cdot \tilde{P}''_{(j,i-k)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + \sum_{k=0}^{i-1}\Big(B^*_{2,1,j,k} \times \right.$$

$$\left. \times \tilde{P}'_{(j,i-1-k)\,\tilde{\psi}} \Big) + I(i,2)\cdot \sum_{k=0}^{i-2}\left(\frac{V^*_{j,k}}{\kappa_j^2}\cdot \tilde{P}''_{(j,i-2-k)\,\varphi\varphi} + B^*_{1,2,j,k}\cdot \tilde{P}''_{(j,i-2-k)\,\eta\eta} + B^*_{2,2,j,k}\cdot \tilde{P}'_{(j,i-2-k)\,\eta} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i} \frac{V^*_{j,k}}{k_j}\cdot \tilde{P}'_{(j,i-k)\,\varphi} + I(i,2)\cdot \left(\sum_{m=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} B^*_{1,1,j,k}\cdot \tilde{P}''_{(j,l-k)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}} \cdot \int_0^t \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-1-m}\, d\tilde{\tilde{t}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} B^*_{2,1,j,k}\cdot \tilde{P}'_{(j,l-k)\,\tilde{\psi}} \cdot \int_0^t \left(\tilde{\tilde{A}}'^*_{(j,m-l)\,\tilde{\psi}} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-2-m} + \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(j,i-2-m)\,\tilde{\psi}} \right) d\tilde{\tilde{t}} \right) + I(i,3)\times$$

$$\times \sum_{m=0}^{i-3}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} B^*_{1,2,j,k}\cdot \tilde{P}'_{(j,l-k)\,\tilde{\psi}} \cdot \int_0^t \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-1-m}\, d\tilde{\tilde{t}} + I(i,4)\cdot \sum_{m=0}^{i-4}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\left(\left(\frac{V^*_{j,k}}{\kappa_j^2}\cdot \tilde{P}''_{(j,l-k)\,\varphi\varphi} + \right.\right.$$

$$\left. + B^*_{1,2,j,k}\cdot \tilde{P}''_{(j,l-k)\,\eta\eta} + B^*_{2,2,j,k}\cdot \tilde{P}'_{(j,l-k)\,\eta} \right) \times \int_0^t \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-1-m}\, d\tilde{\tilde{t}} + \frac{V^*_{j,k}}{\kappa_j^2}\cdot \tilde{P}''_{(j,i-2-k)\,\varphi} \times$$

$$\times \left(\int_0^t \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(j,i-3-m)\,\varphi} d\tilde{\tilde{t}} + \int_0^t \tilde{\tilde{A}}'^*_{(j,m-l)\,\varphi}\cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-3-m} d\tilde{\tilde{t}} \right) + \tilde{B}_{1,2,j,k}\cdot \tilde{P}'_{(j,l-k)\,\eta}\cdot \left(\int_0^t \tilde{\tilde{A}}^*_{j,m-l}\cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(j,i-3-m)\,\eta} d\tilde{\tilde{t}} + \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \tilde{\tilde{A}}'^*_{(j,m-l)\,\eta}\cdot \tilde{\tilde{P}}_{j,i-3-m} d\tilde{\tilde{t}} \right)\right) \ (j=1,2\ ,\ i=\overline{1,2n+1}),\ V_{*j}\ ,\ B_{1,1*j}\ ,\ B_{1,2*j}\ ,\ B_{2,1*j}\ \text{і}$$

$B_{2,2*j}$ – коефіцієнти при j-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{1,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{1,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{2,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$ і $b_{2,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$. Задачі для знаходження функцій $\widehat{P}_{j,i}(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t)$, $\tilde{H}_{j,i}(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t)$, $\widehat{H}_{j,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t)$ ($j=1,2$, $i=\overline{0,2n+1}$)

отримуються аналогічно. У відповідних задачах рівняння виду $\alpha(\varphi,\xi)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}-\delta(\varphi,\xi)\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=\sigma\dfrac{\partial F}{\partial t}+q(\varphi,\xi,\mu,t)$ розв'язуються шляхом їх зведення за допомогою заміни $F(s)=F(\varphi,\xi)-t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $\tilde{\alpha}(s)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}=\sigma\dfrac{\partial F}{\partial t}+q_0(s,\mu,t)$, де s – параметр.

Висновки. Застосована нами методика "розщеплення" вихідної задачі та конструкція побудови розв'язку шляхом доповнення розв'язку відповідної виродженої задачі різними поправками дозволила вперше отримати розв'язок задачі (1) – (7) в аналітичному виді. Такий підхід знаходить своє вагоме застосування при прогнозуванні роботи і проектуванні двошарових засипних фільтрів з однорідним завантаження кожного шару. Також, у перспективі планується застосування запропонованої методики для розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач на основі [7] для багатозв'язних областей [5], задач для анізотропних середовищ [3].

1. *Бомба А. Я.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
2. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37–44.
3. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 105–113.
4. *Бомба А. Я.* Просторові сингулярно збурені задачі типу "фільтрація-дифузія" у двошарових середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, І. М. Присяжнюк // Вісник Харк. нац. ун-ту. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2008. – № 833, вип. 10. – С. 47–58.
5. *Бомба А. Я.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвяз¬ных областях / А. Я. Бомба, Д. А. Пригорницкий, И. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2004. – № 1. – С. 152–159.

6. *Бомба А. Я.* Численно-асимптотическое приближение решений одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последействием / А. Я. Бомба, Ю. Е. Климюк, И. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2005. – №3. – С. 3–12.
7. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
8. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз’язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
9. *Лаврик В. И.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев: 1985. – 16 с.
10. *Рауз. Х.* Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 18.08.2011

Климюк Ю. Е., Теслюк А. О., Шепетько Ю. А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ДВУХСЛОЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ // *В работе предложена математическая модель для прогнозирования процесса распространения загрязняющих веществ с учетом суммарного обратного влияния величин их концентраций во все предыдущие моменты времени на величины коэффициентов диффузий в двухслойных кусочно-однородных изотропных насыщенных пористых средах – модельных областях, которые имеют форму криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделенных некоторой эквипотенциальной поверхностью на две подобласти, которые характеризуются различными коэффициентами фильтрации, пористости и диффузии. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи.*

Klymyuk Yu. Ye., Teslyuk A. O., Shepetko Yu. O. MATHEMATICAL MODELING OF ONE CLASS SPATIAL NONLINEAR SINGULARLY

PERTURBED contaminants' MASS TRANSFER PROCESSES IN TWO-LAYER ISOTROPIC SATURATED POROUS MEDIA // *A mathematical model proposed in this paper to predict the spread of process contaminants in view of sumar aqueous reverse impact values of their concentrations in all the previous moments of time on diffusion coefficient in two-layer piecewise-homogeneous isotropic saturated porous media - model regions that are curved form parallelepipeds bounded two equipotential surfaces and four surface flow and some equipotential surface divided into two subregions, which are characterized by different coefficients of filtration, porosity and diffusion. An algorithm numerical-asymptotic approximation of solution of the model problem.*