Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 8 (17)

Рівне-2011

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 25 листопада 2011 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

* * * * *

Хроніка

УДК 518.61.001.573:519.6

Присяжнюк О. В., Присяжнюк І. М.

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ТИПУ «КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН-ТЕРМОРЕЖИМ»

Побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язку сингулярно збурених крайових задач для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії за умов малого масообміну породженого двомолекулярною реакцією забруднюючих речовин двох сортів з врахуванням температурного режиму. Поставлену задачу розв'язано для двозв'язної області, обмеженої еквіпотенціальними лініями. Проведено числове моделювання та отримано графічні залежності концентрації речовин від коефіцієнтів дифузії та масообміну.

Вступ. Основні результати розробки та досліджень асимптотичних методів для розв'язування сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь типових крайових та мішаних задач у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (реберних) точках викладено у роботах [1 – 2]. Подальше успішне застосування та розвиток ці асимптотичні методи знайшли у роботах [3 – 5], де модифіковано відповідні алгоритми стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях. Ті ж алгоритми успішно застосовано і до розв'язування таких задач в двозв'язних та багатозв'язних областях [6 – 7]. В працях [8 – 10] ефективно розвинено методику переходу до області комплексного потенціалу і, разом з нею, асимптотичний метод розв'язання систем двох рівнянь для сингулярно збурених задач типу "конвекція-дифузія" у випадку малого масообміну. У роботі [12] побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язку сингулярно збурених крайових задач для системи нелінійних рівнянь чотирикомпонентної конвективної дифузії за умов малого масообміну породженого тримолекулярною реакцією забруднюючих речовин трьох сортів. У цій

 С. 140–151

роботі йдеться про асимптотичне розвинення розв'язків аналогічних нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія-масообмін-терморежим» з урахуванням впливу температури середовища на дифузійні процеси.

Постановка задачі. Розглядається процес конвективно-дифузійного масопереносу трьох розчинних речовин при фільтрації в області $G = G_z \times (0, \infty)$ (рис. 1). В процесі масопереносу дві речовини $(\tilde{C}^1,\ \tilde{C}^2)$ вступають у хімічну реакцію типу $a_1\tilde{C}^1 + a_2\tilde{C}^2 = a_3 \cdot \tilde{C}^3 + W$ [11], в результаті чого утворюється третя розчинна речовина $\tilde{C}^3$ та виділяється певна кількість теплової енергії W.

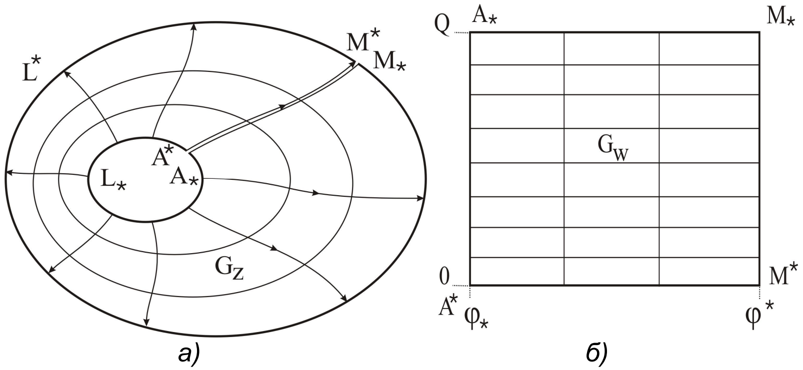


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Відповідна модельна задача типу „конвекція-дифузія-масообмін" [10] матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(D_i(\tilde{T})\tilde{C}_x^i(x,y,t)) + \frac{\partial}{\partial y}(D_i(\tilde{T})\tilde{C}_y^i(x,y,t)) - v_x(x,y)\tilde{C}_x^i(x,y,t) -$$

$$-v_y(x,y)\tilde{C}_y^i(x,y,t) - k(\tilde{T}) \cdot \tilde{a}_i \cdot (\tilde{C}^1(x,y,t))^{a_1}(\tilde{C}^2(x,y,t))^{a_2} =$$

$$= \tilde{C}_t^i(x,y,t)\,,\ \ i = \overline{1,3} \qquad (1)$$

$$D_4\left(\tilde{T}_{xx}(x,y,t)+\tilde{T}_{yy}(x,y,t)\right)-v_x(x,y)\tilde{T}_x(x,y,t)-v_y(x,y)\tilde{T}_y(x,y,t)+$$

$$+k^*\cdot(\tilde{C}^1(x,y,t))^{a_1}(\tilde{C}^2(x,y,t))^{a_2}=\tilde{T}_t(x,y,t), \qquad (2)$$

$$\tilde{C}^i\Big|_{L_*}=\tilde{C}^i_*\left(M,t\right),\ \tilde{C}\ \Big|_{L^*}=\tilde{C}^{i*}\left(M,t\right),\ \tilde{C}^i(x,y,0)=\tilde{C}^{i0}_0\left(x,y\right),$$

$$\tilde{T}\Big|_{L_*}=\tilde{T}_*\left(M,t\right),\ \tilde{T}\Big|_{L^*}=\tilde{T}^*\left(M,t\right),\ \tilde{T}(x,y,0)=\tilde{T}^0_0\left(x,y\right), \qquad (3)$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\Big|_{L_*}=\varphi_*,\ \varphi\Big|_{L^*}=\varphi^*, \qquad (4)$$

де $\tilde{C}^i(x,y,t)$ ($i=\overline{1,3}$) – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x,y) в момент часу t, $\tilde{T}(x,y,t)$ – температура середовища, M – біжуча точка відповідної кривої, $D_i(\tilde{T})=s_i(\tilde{T})\cdot\varepsilon$ – коефіцієнти дифузії ($s_i(\tilde{T})$ – задані дійсні функції), $D_4=s_4\cdot\varepsilon$ – коефіцієнт термодифузії, $\tilde{a}_j=a_j\cdot\varepsilon$ ($j=\overline{1,2}$), $\tilde{a}_3=-a_3\cdot\varepsilon$, $k(\tilde{T})$ – функція швидкості хімічної реакції, $k^*=\tilde{k}\cdot\varepsilon$, $\tilde{k}$ – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції, ε ($\varepsilon>0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості [6], $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)}>v_*>>\varepsilon$, $\tilde{C}^i_*\left(M,t\right)$, $\tilde{C}^{i*}\left(M,t\right)$, $\tilde{C}^{i0}_0\left(x,y\right)$, $\tilde{T}_*\left(M,t\right)$, $\tilde{T}^*\left(M,t\right)$, $\tilde{T}^0_0\left(x,y\right)$ – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв'язку із заданою точністю) між собою на ребрах області G функції.

Вважаємо, що задача (4) є розв'язаною [8], зокрема знайдено поле швидкості $\left(v_x(x,y),v_y(x,y)\right)$ та отримано динамічну сітку [10]. Здійснивши заміну змінних $x=x\left(\varphi,\psi\right)$, $y=y\left(\varphi,\psi\right)$ у рівняннях (1) – (2) та умовах (3), приходимо до відповідної задачі для області G_w [11]:

$$D_i(T)v^2(\varphi,\psi)\left(C^i_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+C^i_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\right)+v^2(\varphi,\psi)(D_{i\varphi}(T)C^i_\varphi(\varphi,\psi,t)+$$

$$+D_{i\psi}(T)C^i_{\psi}(\varphi,\psi,t))-v^2_{\varphi}(\varphi,\psi)C^i_{\varphi}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-k(T)\cdot\tilde{a}_i\cdot(C^1(x,y,t))^{a_1}(C^2(x,y,t))^{a_2}=C^i_t(\varphi,\psi,t),\ i=\overline{1,3} \tag{5}$$

$$D_4v^2(\varphi,\psi)\Big(T_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+T_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\Big)-v^2_{\varphi}(\varphi,\psi)T_{\varphi}(\varphi,\psi,t)+$$

$$+k^*\cdot(C^1(x,y,t))^{a_1}(C^2(x,y,t))^{a_2}=T_t(\varphi,\psi,t), \tag{6}$$

$$C^i\Big|_{\varphi=\varphi_*}=C^i_*(\psi,t),\ C^i\Big|_{\varphi=\varphi^*}=C^{i*}(\psi,t),\ C^i\Big|_{t=0}=C^{i0}{}_0(\varphi,\psi),$$

$$T\Big|_{\varphi=\varphi_*}=T_*(\psi,t),\ T\Big|_{\varphi=\varphi^*}=T^*(\psi,t),\ T\Big|_{t=0}=T^0_0(\varphi,\psi), \tag{7}$$

де $C^i\left(\varphi,\psi,t\right)=\tilde{C}^i(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $T\left(\varphi,\psi,t\right)=\tilde{T}(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$ та інші функції ($C^i_*,C^{i*},C^{i0}{}_0,T_*,T^*,T^0_0$) інтерпретуються аналогічно.

Асимптотика розв'язку. Розв'язок (C^1,C^2,C^3,T), задачі (5) – (7) у випадку $a_i=1\ \ (i=\overline{1,3})$ з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів [12]:

$$C^i\left(\varphi,\psi,t\right)=C^i_0\left(\varphi,\psi,t\right)+\varepsilon^1C^i_1\left(\varphi,\psi,t\right)+\sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j\Pi^i_j\left(\xi,\psi,t\right)+R^i_2, \tag{8}$$

$$T\left(\varphi,\psi,t\right)=T_0\left(\varphi,\psi,t\right)+\varepsilon^1T_1\left(\varphi,\psi,t\right)+\sum_{j=0}^{2}\varepsilon^jE_j\left(\xi,\psi,t\right)+R^4_2, \tag{9}$$

де $i=\overline{1,3}$, $R^l_2\left(\varphi,\psi,t,\varepsilon\right)$, $l=\overline{1,4}$, – залишкові члени; $C^i_j\left(\varphi,\psi,t\right)$, $T_j\left(\varphi,\psi,t\right)$ ($j=\overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: C^i_0, T_0 – розв'язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу); C^i_1, T_1 – відповідні поправки, що враховують вплив дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\Pi^i_j\left(\xi,\psi,t\right)$, $E_j\left(\xi,\psi,t\right)$ ($j=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$; $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення [5]. При цьому вимагатимемо, щоб функції $s_i(T)$ та $k(T)$ дозволяла розклад в ряд за степенями ε у вигляді:

$$s_i(T)=I_0^i(T_0)+\varepsilon I_1^i(T_0,T_1)+J_0^i(T_0,T_1,E_0)+\varepsilon J_1^i(T_0,T_1,E_0,E_1)+$$
$$+\varepsilon^2 J_2^i(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2)+S^i(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2,R_2^4,\varepsilon), \quad (10)$$
$$k(\tilde{T})=G_0(T_0)+\varepsilon G_1(T_0,T_1)+M_0(T_0,T_1,E_0)+\varepsilon M_1(T_0,T_1,E_0,E_1)+$$
$$+\varepsilon^2 M_2(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2)+F(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2,R_2^4,\varepsilon), \quad (11)$$

де $I_0^i(\bullet),I_1^i(\bullet),J_j^i(\bullet),S^i(\bullet),G_0(\bullet),G_1(\bullet),M_j(\bullet),F(\bullet)\ (j=\overline{0,2})$ – неперервні функції своїх аргументів.

Аналогічно до [5 – 8], для знаходження функцій C_j^i, T_j ($j=\overline{0,1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot C_{j\varphi}^i(\varphi,\psi,t)+C_{jt}^i(\varphi,\psi,t)=g_j^i(\varphi,\psi,t), \\ C_j^i(\varphi,\psi,0)=h_j^i(\varphi,\psi),\ C_j^i(\varphi_*,\psi,t)=b_j^i(\psi,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot T_{j\varphi}(\varphi,\psi,t)+T_{jt}(\varphi,\psi,t)=g_j^4(\varphi,\psi,t), \\ T_j(\varphi,\psi,0)=h_j^4(\varphi,\psi),\ T_j(\varphi_*,\psi,t)=b_j^4(\psi,t), \end{cases}$$

де $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{0,1}$, $g_0^m(\varphi,\psi,t)=0$, $h_1^m(\varphi,\psi)=0$, $b_1^m(\psi,t)=0$, $m=\overline{1,4}$, $h_0^i(\varphi,\psi)=C^{i0}{}_0(\varphi,\psi)$, $h_0^4(\varphi,\psi)=T_0^0(\varphi,\psi)$, $b_0^i(\psi,t)=C_*^i(\psi,t)$, $b_0^4(\psi,t)=T_*(\psi,t)$, $g_1^i(\varphi,\psi,t)=I_0^i(T_0)v^2(\varphi,\psi)\left(C_{0\varphi\varphi}^i(\varphi,\psi,t)+C_{0\psi\psi}^i(\varphi,\psi,t)\right)-$
$-\alpha_i G_0(T_0)C_0^1(\varphi,\psi,t)\times C_0^2(\varphi,\psi,t)+v^2(\varphi,\psi)(I_{0\varphi}^i(T_0)C_{0\varphi}^i(\varphi,\psi,t)+$
$+I_{0\psi}^i(T_0)C_{0\psi}^i(\varphi,\psi,t))$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\alpha_3=-1$, $g_1^4(\varphi,\psi,t)=s_4 v^2(\varphi,\psi)\times$
$\times\left(T_{0\varphi\varphi}(\xi,\psi,t)+T_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t)\right)+k^* C_0^1(\varphi,\psi,t)C_0^2(\varphi,\psi,t)$.

У результаті їх розв'язання маємо:

$$C_0^i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} C^i{}_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\ge f(\varphi,\psi), \\ C^{i0}{}_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t),\ t<f(\varphi,\psi), \quad i=\overline{1,3} \end{cases}$$

$$T_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} T_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\ge f(\varphi,\psi), \\ T_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t),\ t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$C_1^i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot g_1^i(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_0^t g_1^i(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$T_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot g_1^4(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_0^t g_1^4(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}\left(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)d\tilde{\varphi}$, $f^{-1}\left(\varphi,\psi\right)$ – функція, обернена до функції $f\left(\varphi,\psi\right)$ стосовно змінної φ.

Функції $\Pi=\sum\limits_{j=0}^{2}\Pi_j^i\varepsilon^j$ ($i=\overline{1,3}$), $E=\sum\limits_{j=0}^{2}E_j\varepsilon^j$ призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ [12]. Таким чином повинні виконуватись умови: $\left(C^i+\Pi^i\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=C^{i*}+O\left(\varepsilon^2\right)$ ($i=\overline{1,3}$), $\left(T+E\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=T^*+O\left(\varepsilon^2\right)$. Зауважимо, що на відміну від розглянутих аналогічних функцій в роботах [9-12] ці функції знаходимо в результаті почергового розв'язку наступних задач:

$$\begin{cases}s_4\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\left(E_{j\xi\xi}(\xi,\psi,t)\right)+v^2(\varphi^*,\psi)E_{j\xi}(\xi,\psi,t)=\sigma_j^4(\xi,\psi,t),\\ E_j\left(0,\psi,t\right)=q_j^4\left(\psi,t\right),\\ E_j(\xi,\psi,t)\to 0\ \ при\ \xi\to\infty,\end{cases}$$

$$\begin{cases}J_0^i(T_0,T_1,E_0)\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{j\xi\xi}^i(\xi,\psi,t)+v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{j\xi}^i(\xi,\psi,t)=\sigma_j^i(\xi,\psi,t),\\ \Pi_j^i\left(0,\psi,t\right)=q_j^i\left(\psi,t\right),\\ \Pi_j^i(\xi,\psi,t)\to 0\ \ при\ \xi\to\infty,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{0,2},\end{cases}$$

де $q_0^i(\psi,t)=C^{i*}\left(\psi,t\right)-C_0^i\left(\varphi^*,\psi,t\right)$, $q_0^4(\psi,t)=T^*\left(\psi,t\right)-T_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)$, $q_1^i(\psi,t)=-C_1^i\left(\varphi^*,\psi,t\right)$, $q_1^4(\psi,t)=-T_1\left(\varphi^*,\psi,t\right)$, $q_2^m(\psi,t)=0$, $\sigma_0^4(\xi,\psi,t)=0$, $\sigma_0^i(\xi,\psi,t)=v^2(\varphi^*,\psi)J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t)$, $i=\overline{1,3}$,

$\sigma_1^i(\xi,\psi,t)=\Pi_{0t}^i(\xi,\psi,t)-(I_1^i(T_0,T_1)+J_1^i(T_0,T_1,E_0,E_1))\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\Pi_{0\xi\xi}^i(\xi,\psi,t)-$
$-v^2(\varphi^*,\psi)(J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{1\xi}^i(\xi,\psi,t)+J_{1\xi}^i(T_0,T_1,E_0,E_1)\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t))+$
$+2v(\varphi^*,\psi)v'(\varphi^*,\psi)\xi J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t)$, $\sigma_2^i(\xi,\psi,t)=\Pi_{1t}^i(\xi,\psi,t)+$
$+2v^{-1}(\varphi^*,\psi)v_\xi(\varphi^*,\psi)\xi\Pi_{0t}^i(\xi,\psi,t)-I_0^i(T_0)v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{0\psi\psi}^i(\xi,\psi,t)-$
$-(I_1^i(T_0,T_1)+J_1^i(T_0,T_1,E_0,E_1))v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\Pi_{1\xi\xi}^i(\xi,\psi,t)-J_2^i(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2)\times$
$\times v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\Pi_{0\xi\xi}^i(\xi,\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)\cdot(J_{1\xi}^i(T_0,T_1,E_0,E_1)\Pi_{1\xi}^i(\xi,\psi,t)+$
$+J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{2\xi}^i(\xi,\psi,t)+J_{2\xi}^i(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2)\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t)+$
$+J_{0\psi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{0\psi}^i(\xi,\psi,t))+2v(\varphi^*,\psi)\cdot v'(\varphi^*,\psi)\cdot\xi(J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\Pi_{1\xi}^i+$
$+J_{1\xi}^i(T_0,T_1,E_0,E_1)\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t))-((v'(\varphi^*,\psi))^2+v''(\varphi^*,\psi))J_{0\xi}^i(T_0,T_1,E_0)\times$
$\times\Pi_{0\xi}^i(\xi,\psi,t)+\alpha_iM_0(T_0,T_1,E_0)\tau(\xi,\psi,t)$, $\sigma_1^4(\xi,\psi,t)=E_{0t}(\xi,\psi,t)$,
$\sigma_2^4(\xi,\psi,t)=E_{1t}(\xi,\psi,t)+2v^{-1}(\varphi^*,\psi)v(\varphi^*,\psi)_\xi\xi E_{0t}(\xi,\psi,t)-s_4v^2(\varphi^*,\psi)\times$
$\times E_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t)-k^*\tau(\xi,\psi,t)$, $\tau(\xi,\psi,t)=C_0^1(\varphi,\psi,t)\Pi_0^2(\xi,\psi,t)+C_0^2(\varphi,\psi,t)\times$
$\times\Pi_0^1(\xi,\psi,t)+\Pi_0^1(\xi,\psi,t)\Pi_0^2(\xi,\psi,t)$.

Залишкові члени оцінюємо з наступних задач:

$$\begin{cases}\varepsilon S^i(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2,R_2^4,\varepsilon)v^2(\varphi,\psi)\left(R^i_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^i_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\right)+\\ +v^2(\varphi,\psi)(S^i{}_\varphi(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2,R_2^4,\varepsilon)R_{2\varphi}^i(\varphi,\psi,t)+\\ +S^i{}_\psi(T_0,T_1,E_0,E_1,E_2,R_2^4,\varepsilon)R_{2\psi}^i(\varphi,\psi,t))-v^2(\varphi,\psi)R^i_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)-\\ -\varepsilon\cdot\alpha_ik(R_2^4\left(\varphi,\psi,t,\varepsilon\right))\prod\limits_{m=1}^{2}R_2^m(\varphi,\psi,t)=R^i_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,\\ R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0\ \ (i=\overline{1,3}),\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\, s_4\, v^2(\varphi,\psi)\Big(R^4_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^4_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\Big)-v^2(\varphi,\psi)R^4_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)+ \\ +\varepsilon\cdot k\prod\limits_{m=1}^{2} R_2^m(\varphi,\psi,t)=R^4_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_4(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2, \\ R_2^4(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^4(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^4(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0, \end{cases}$$

де $b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (8) - (9), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$. Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (1) - (2), та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^*\times 0$, $L_*\times 0$. області $G=G_z\times[0,T]$, де $[0,T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ ($i=\overline{1,4}$, $(\varphi,\psi,t)\in G$).

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку розглянутого вище процесу на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\times\ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-2.7$, $\varphi^*=-1.5$ [12].

На рис. 2 зображено розподіли концентрацій $C^1(\varphi,\psi,t)$, $C^2(\varphi,\psi,t)$, $C^3(\varphi,\psi,t)$ розчинних речовин при:

$C^{10}_0(\varphi,\psi)=0.1+(1/50)\cdot\exp(-\psi/2)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$,

$C^{20}_0(\varphi,\psi)=0.15-(1/10)\cdot\cos(\psi)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$,

$C^{30}_0(\varphi,\psi)=0.01+(1/50)\sin^2(\psi)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $T_0^0(\varphi,\psi)=10$,

$C^1_*(\psi,t)=0.1+(1/50)\cdot\exp(-\psi/2)\cdot\exp(-t)/3$,

$C_*^2(\psi,t)=0.15-(1/10)\cdot(\exp(-t)/3)\cdot\cos(\psi)$, $T^*(\varphi,\psi)=10$,

$C_*^3(\psi,t)=0.01+(1/50)\sin^2(\psi)\cdot\exp(-t)/3$, $T_*(\varphi,\psi)=10$,

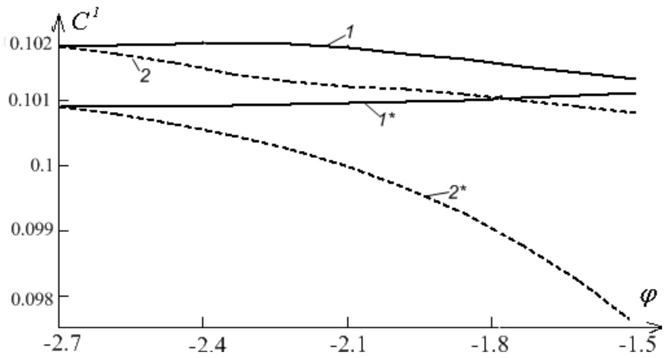
$C^{1*}(\psi,t)=0.1+(1/50)\cdot\exp(-\psi/2)\cdot\exp(-2t)\cdot(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$,

$C^{2*}(\psi,t)=0.15-(1/10)\cdot\cos(\psi)\cdot\exp(-2t)\cdot(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$,

$C^{3*}(\psi,t)=0.01+(1/50)\sin^2(\psi)\cdot\exp(-2t)\cdot(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$.

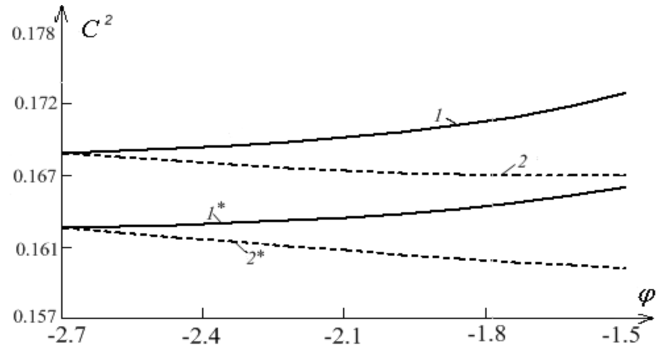
Так, на рис. 2 а зображено регулярні частини C_0^1 та $C_0^1+\varepsilon C_1^1$ при $K(T)=10^2\cdot e^{\frac{T-10}{10}}$ (криві 1-2 та 1*-2* в моменти часу $t=0.03$ та $t=0.74$ відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon=0.01$, $S(T)=10\cdot(1/T)\cdot(1+\exp(T-10))$, $k^*=2$ вздовж лінії $\psi=2.51$. Аналогічно інтерпретуються результати для речовин C^2, C^3 на рис. 2 б) та 2 в).

На рис. 3 зображено регулярні частини C_0^1 (крива 1), $C_0^2+\varepsilon C_1^2$ при $S(T)=\cdot(1/T)\cdot(100+\exp(T-10))$, $S(T)=10\cdot(1/T)\cdot(1+\exp(T-10))$, $S(T)=(1/T)\cdot(1+\exp(T-10))$ (криві 2-4 відповідно) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon=0.01$, $t=0.37$, $K(T)=10^2\cdot e^{\frac{T-10}{10}}$, $k^*=2$, $\psi=2.51$.

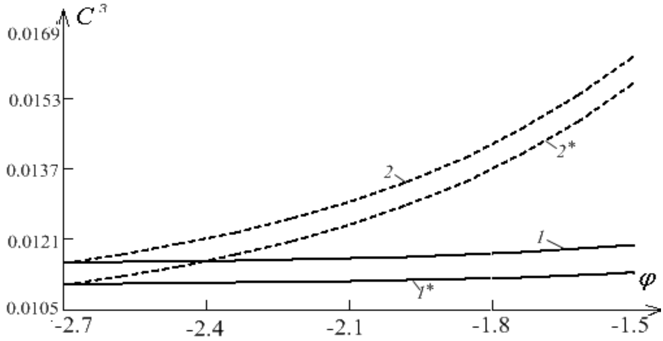


а)

Рис. 2. Вплив дифузії та масообміну на розподіл концентрації розчинних речовин



б)



в)

Прод. рис. 2

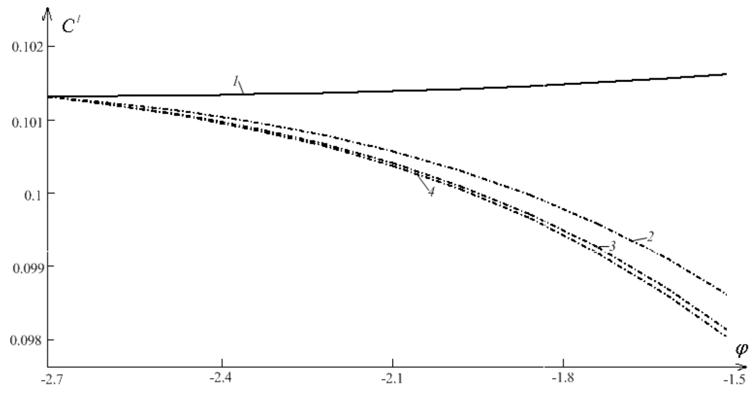


Рис. 3. Вплив коефіцієнта дифузії $\varepsilon \cdot S(T)$ на розподіл концентрації речовини

Висновки і зауваження. Встановлено зв'язок швидкості хімічної реакції речовин та їх дифузії із температурою середовища. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин, що візьмуть участь у реакціях, та температури середовища з метою зменшення концентрації забруднюючої речовини стічних вод. У перспективі – математичне моделювання аналогічних просторових процесів, а також розробка нової методики числового розв'язування такого роду задач у випадку, коли процеси конвекції та масообміну превалюють над дифузійними процесами.

1. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. Я. Люстерник // Успехи математических наук, 1957. – 12, вып. 5. – С. 3-122.
2. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов // М. : Высшая школа, 1980. – 208 с.
3. *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А. Я. Бомба // Укр. мат. журн., 1982. – Т.4, №4. – С. 493-496.
4. *Бомба А. Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса / А. Я. Бомба // В кн. : Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения. – М. : Наука, 1988. – С. 115-120.
5. *Бомба А. Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса. / А. Я. Бомба. – К. : Киевский ун-т, 1986. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 286-Ук86.
6. *Присяжнюк. І. М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозв'язних областях/ І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія "Прикладна математика". – 2003. – Вип. 1. – С. 118-128.
7. *Бомба А. Я.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях / А. Я. Бомба, В. В. Скопецький, И. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2004. – №2. – С. 99-104.
8. *Сівак В. М.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія-масообмін"/ В. М Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, І. М. Присяжнюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист: Збірн. наук. праць. – Вип. 1 (33). – Рівне : НУВГП. – 2006. – С. 108-116.
9. *Присяжнюк І. М.* Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії за умов малого масообміну /

І. М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2005. – Вип. 12. – С. 146-160.

10. *Присяжнюк І. М.* Асимптотичний метод розв'язування одного класу сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія-масообмін" у двозв'язних областях / І. М. Присяжнюк, О. М. Присяжнюк // Вісник ТДТУ.– Т.10, №4. – 2005. – С. 198–205.
11. *Присяжнюк І. М.* Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням малої тимолекулярної реакції забруднюючих речовин / І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк. // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2009. – Вип. 6(15). – С. 122–136.
12. *Присяжнюк І. М.* Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму / І. М. Присяжнюк , О. В. Присяжнюк, А. П. Сафоник // Вісник НУВГП: збірн. наук. праць. – Вип.2 (50). – Рівне, 2010. – С. 229-237.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: igor_pri@mail.ru
romaniv_ol@mail.ru

Надійшла 8.08.2011

Присяжнюк Е. В., Присяжнюк И. М. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ТИПА «КОНВЕКЦИЯ - ДИФФУЗИЯ - МАССООБМЕН - ТЕРМОРЕЖИМ» // *Построен алгоритм асимптотического приближения решения сингулярно возмущенных краевых задач для систем нелинейных уравнений трехкомпонентной конвективной диффузии при условии малого массообмена порожденного двумолекулярной реакцией загрязняющих веществ двух сортов с учетом температурного режима. Поставленную задачу решено для двусвязной области, ограниченной эквипотенциальными линиями. Проведено числовое моделирование и получено графические зависимости концентраций веществ от коэффициентов диффузии и массообмена.*

Prysjazhnjuk E. V., Prysjazhnjuk I. M. ASYMPTOTIC METHOD OF THE DECISION OF NONLINEAR SINGULAR PERTURBATIVE TASKS IS AS «CONVECTION - DIFFUSION - MASS TRANSFER - TEMPERATURE CONDITION» // *An algorithm of asymptotic approaching of solutions singular perturbed boundary value problems for the system of the nonlinear equations of a three-component convective diffusion under condition of a small mass transfer generated by a two molecular reaction of pollutants of three kinds recognition temperature condition is built. Offered task is solved for doubly-connected range, which circumscribed to equipotential lines. A numerical design is conducted and graphic dependences of concentrations of matters are got on the coefficients of diffusion and mass-transfer.*