Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 8 (17)

Рівне-2011

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 25 листопада 2011 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Хроніка

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Ярощак С. В.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОХФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В ПРОСТОРОВО ВИКРИВЛЕНИХ НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища сформовано задачу двофазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах, та побудовано підхід до її розв'язання.

Вступ. При дослідженні характеристик фільтраційних процесів, що змінюються в результаті руху флюїдів (нафти, газу і води), які насичують пористі пласти, досить часто приходиться мати справу із складними по своїй структурі системами диференціальних рівнянь в частинних похідних (рівняння яких характеризуються сукупністю параметрів, розподілених в просторі і часі), що вимагає побудови якісних методів їх розв'язання.

Так, в роботах [2–4] нами запропоновано методику розв'язання нестаціонарних задач багатофазної фільтрації (коли фільтраційний процес, породжений серіями нагнітальних та експлуатаційних свердловин, проходить в досить тонких пластах постійної товщини), яка базується на ідеях методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу. Проте, при розробці нафтогазових родовищ приходиться мати справу з просторово викривленими пластами змінної потужності, де окрім складності, пов'язаної з проектуванням розстановки свердловин та дослідженням їх взаємодії, виникає також необхідність врахування перетоків між пропластками і величин відбору з кожного із них.

У цій роботі поширено розроблену в [2–4] методику дослідження фільтраційних процесів на випадок просторово-викривлених нафтогазових пластів та побудовано підхід до розв'язання відповідних нелінійних задач багатофазної фільтрації.

Побудова моделі двохфазної фільтрації в просторово викривленому пласті. При побудові математичних моделей процесів, що відбуваються в нафтогазових пластах, досить часто, вдається ввести апроксимацію тривимірної фільтраційної течії фільтрацією по стаціонарним поверхням струму [5, 6]. Для цього відносно пласта (деякої області $G_{(x,y,z)} = A_* B_* C_* D_* A^* B^* C^* D^*$) введемо криволінійну (ортогональну) систему координат ξ, η, ζ (див., рис. 1), підошву $A_* B_* C_* D_*$ і крівлю $A^* B^* C^* D^*$ якого представимо у вигляді відповідних координатних поверхонь $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\zeta = \zeta_2 = const$.

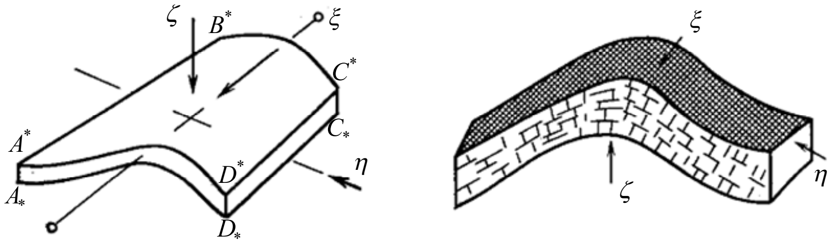

Рис. 1. Викривлений пласт змінної потужності в ортогональній системі координат ξ, η, ζ

Плоску область зміни (ξ,η) позначимо як $G_z = ABCD$ та далі вважатимемо, що рух частинок здійснюється по поверхнях $\zeta = const$. На основі міркувань, закладених у [3, 4, 6], закон Дарсі та рівняння нерозривності течії для кожної з рідин в ортогональній системі координат (ξ,η,ζ), запишемо у вигляді:

$$\vec{\upsilon}_1 = (\upsilon_{1\xi}, \upsilon_{1\eta}) = \left(\frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1 H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1 H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right),$$

$$\vec{\upsilon}_2 = (\upsilon_{2\xi}, \upsilon_{2\eta}) = \left(\frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2 H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2 H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right),$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial (H_2 H_3 \upsilon_{l\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 H_3 \upsilon_{l\eta})}{\partial \eta} + \sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial s_l}{\partial t} \right) d\zeta = 0\,,\ l = 1,2\,,$$

де $s_1(M,t)$, $s_2(M,t)$ відповідно насиченості пористого середовища нафтою та водою в деякій біжучій точці M пласта у момент часу t ($s_1+s_2=1$), σ, k – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту, $\tilde{k}_1=\tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2=\tilde{k}_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s=s_2$); $\vec{\upsilon}_l$, μ_l – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l– тої фази, $H_1=\sqrt{x_\xi^2+y_\xi^2+z_\xi^2}$, $H_2=\sqrt{x_\eta^2+y_\eta^2+z_\eta^2}$, $H_3=\sqrt{x_\zeta^2+y_\zeta^2+z_\zeta^2}$ – параметри Ламе, $x=x(\xi,\eta,\zeta)$, $y=y(\xi,\eta,\zeta)$, $z=z(\xi,\eta,\zeta)$ – задані неперервно-диференційовані функції, що пов'язують фізичні декартові координати з введеними криволінійними (ξ,η,ζ).

Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\vec{\upsilon}=(\upsilon_\xi,\upsilon_\eta)=\bar{k}(s)\left(\frac{\varphi_\xi}{H_1},\frac{\varphi_\eta}{H_2}\right), \tag{1}$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left(\frac{\partial(H_2H_3\upsilon_\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_1H_3\upsilon_\eta)}{\partial\eta}\right)d\zeta=0, \tag{2}$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left(\frac{\partial(H_2H_3f(s)\upsilon_\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_1H_3f(s)\upsilon_\eta)}{\partial\eta}+\sigma H_1H_2H_3\frac{\partial s}{\partial t}\right)d\zeta=0, \tag{3}$$

де $\bar{k}(s)=\dfrac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1}+\dfrac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}$, $f(s)=\dfrac{\mu_1\tilde{k}_2(s)}{\mu_2\tilde{k}_1(s)+\mu_1\tilde{k}_2(s)}$.

Підставляючи (1) в (2) – (3) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання отримаємо систему диференціальних рівняння, яка при відповідних крайових та початкових умовах описує процес витіснення у викривленому пласті змінної товщини

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(K_2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=0, \tag{4}$$

$$K_3\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(K_4\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(K_5\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=0, \tag{5}$$

де $K_1(\xi,\eta)=\displaystyle\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\bar{k}(s)H_2H_3}{H_1}d\zeta$, $K_2(\xi,\eta)=\displaystyle\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\bar{k}(s)H_1H_3}{H_2}d\zeta$,

$K_3(\xi,\eta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\sigma H_1 H_2 H_3 d\zeta$, $K_4(\xi,\eta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\overline{k}(s)f(s)H_2H_3}{H_1}d\zeta$,

$K_5(\xi,\eta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\overline{k}(s)f(s)H_1H_3}{H_2}d\zeta$ – характеристичні коефіцієнти, що відповідають за збереження інформації про геометрію та фільтраційні властивості пласта. Для запису граничних умов представимо рівняння підошви і крівлі пласта та решти обмежуючих фільтраційну область поверхонь в координатах (ξ,η,ζ) наступним чином:

$A_*B_*C_*D_*=\{(\xi,\eta,\zeta):\zeta=\zeta_*\}$, $A^*B^*C^*D^*=\left\{(\xi,\eta,\zeta):\zeta=\zeta^*\right\}$,

$A_*A^*B^*B_*=\{(\xi,\eta,\zeta):f_*(\xi,\eta)=0\}$, $C_*C^*D^*D_*=\left\{(\xi,\eta,\zeta):f^*(\xi,\eta)=0\right\}$,

$A_*D_*A^*D^*=\{(\xi,\eta,\zeta):g_*(\xi,\eta)=0\}$, $B_*C_*C^*B^*=\left\{(\xi,\eta,\zeta):g^*(\xi,\eta)=0\right\}$.

Тоді відповідні граничні та початкові умови матимуть вигляд:

$\varphi\big|_{f_*(\xi,\eta)=0}=\varphi_*$, $\varphi\big|_{f^*(\xi,\eta)=0}=\varphi^*$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{g_*(\xi,\eta)=0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{g^*(\xi,\eta)=0}=0$,

$s\big|_{f_*(\xi,\eta)=0}=s_*$, $s\big|_{t=0}=\tilde{s}(\xi,\eta,\zeta)$.

Підхід до розв'язання сформованої задачі двохфазної фільтрації. Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$K_1\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\ K_2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \tag{6}$$

при виконанні яких рівняння (4) перетворюється на тотожну рівність. Система (6) визначає деяку функцію $\omega=\omega(z)=\varphi+i\psi$, яка при виконанні умов:

$$\varphi\Big|_{f_*(\xi,\eta)=0}=\varphi_*,\ \varphi\Big|_{f^*(\xi,\eta)=0}=\varphi^*,\ \psi\Big|_{g_*(\xi,\eta)=0}=0,\ \psi\Big|_{g^*(\xi,\eta)=0}=Q \tag{7}$$

здійснює квазіконформне відображення [1] фізичної області фільтрації на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega=\{\omega:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q\}$, де Q – невідома фільтраційна витрата.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (6) – (7) на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z отримаємо у вигляді:

$$K_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi},\ K_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi},\ (\varphi, \psi) \in G_\omega \tag{8}$$

$$\begin{gathered} f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0,\ f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0,\ 0 \le \psi \le Q, \\ g_*(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0,\ g^*(\xi(\varphi, Q), \eta(\varphi, Q)) = 0,\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \end{gathered} \tag{9}$$

зокрема, як наслідок (4) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left(K_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{K_1}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial \psi}\left(K_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{K_2}\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\right) = 0\ . \tag{10}$$

Використавши відповідні формули переходу, $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \psi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}$, $J = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi}\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$ умови (8) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості $\upsilon_\xi = \frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi) H_1}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}$, $\upsilon_\eta = -\frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi) H_2}\frac{\partial \xi}{\partial \psi}$, задачу для насиченості запишемо так:

$$\begin{gathered} K_3 J \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{K_4}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right) - K_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{K_5}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\right)\right) + \\ + \frac{\partial \xi}{\partial \psi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{K_5}{J}\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\right) + K_2 \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{K_4}{J}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)\right) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} s(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi), \zeta(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \\ s(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi))\ . \end{gathered} \qquad (12),$$

При цьому, якщо $\frac{\partial f(s)}{\partial \zeta} = 0$, то рівняння (11) має вигляд [3,4]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\upsilon^2}{\sigma \bar{k}}\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \varphi}, \tag{13}$$

і є просторово одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі (представлення його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно). А саме, за фіксованим розподілом насиченості s розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ, витрату та інші невідомі фільтраційні параметри; за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (11) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини на границі $B_*C_*C^*B^*$.

Аналогічно, як в роботах [1-4], алгоритм знаходження розв'язку оберненої нелінійної диференціальної задачі, що описує процес витіснення, будується шляхом поетапної параметризації величини квазіконформного інваріанту, граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації.

Висновок. Розроблений в роботі підхід з великою ефективністю можна використовувати при розв'язанні різного роду задач розробки нафтових родовищ, зокрема, при розв'язанні задач проектування, аналізу, контролю та регулювання, а також оптимізації процесів розробки продуктивних площ.

1. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. *Бомба А. Я.* Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10. – С. 34–40.
3. *Бомба А. Я.* Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35) – С. 31–35.
4. *Бомба А.Я.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Обчислювальна та прикладна математика. – 2010. – №2. – С. 3–13.
5. *Бомба А. Я.* Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів / А. Я. Бомба, А. В. Теребус // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №4. – С. 9–16.
6. *Толпаев В. А.* Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / В. А. Толпаев. – Ставрополь. – 2004. – 38 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: yaroschak@mail.ru

Надійшла 01.07.2011

Ярощак С. В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО ИСКРИВЛЕННЫХ НЕФТЕГАЗОВЫХ ПЛАСТАХ // *На основе идей методов квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик процесса и среды сформировано задачу двухфазной фильтрации в пространственно искривленных нефтегазовых пластах, и построено подход к её решению.*

Yaroschak S. V. SIMULATION OF TWO-PHASE FILTRATION IN THE CURVATURE OF OIL-BEARING FORMATIONS // *Based on the ideas of methods of quasiconformal mappings and phase characteristics of the process of fixation and protection of sfor, the deformed two-phase filtration task in spatially curved and gas reservoirs, and constructed an approach to address them.*