Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 7 (16)

Рівне-2010

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 3 від 29 жовтня 2010 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

УДК 517.54:519.63

Бомба А. Я., Теребус А. В.

КОМПЛЕКСНО СПРЯЖЕНІ МНОГОЧЛЕНИ І КРАЙОВІ ЗАДАЧІ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Розглядається задача моделювання ідеальної течії у криволінійній чотирикутній області (пласті), обмеженій двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями. Її розв'язання зводиться до прямого або оберненого конформного відображення внутрішності відповідного чотирикутника на внутрішність прямокутника, ширина якого є невідомою і шукається в процесі розв'язку задачі. Комплексний потенціал та обернена до нього характеристична функція течії шукаються у вигляді многочленів комплексної змінної. Одержані співвідношення у вигляді систем нелінійних алгебраїчних рівнянь із локалізованою нелінійністю для знаходження коефіцієнтів функції потенціалу та комплексно-спряженої до нього функції течії, а також компонент характеристичної функції течії.

Вступ. У роботі [1] запропоновано загальний підхід до многочленного наближення розв'язків крайових задач на конформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники (при відповідності кутових точок) – математичних моделей плоских ідеальних полів у однорідних середовищах, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Як відомо, комплексний потенціал відповідної течії, а також обернена до нього характеристична функція течії є аналітичними функціями. Отже, представлення їх у вигляді многочленів комплексної змінної фізичної області або області комплексного потенціалу автоматично забезпечує розв'язок відповідної системи Коші-Рімана. Залишається коефіцієнти цих многочленів підібрати так, щоб виконувались ще й крайові умови.

У цій роботі одержано співвідношення у вигляді систем нелінійних алгебраїчних рівнянь із локалізованою нелінійністю для знаходження коефіцієнтів функції потенціалу та комплексно-спряженої до нього функції течії, а також компонент характеристичної функції течії.

1. Розглянемо спочатку задачу на знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу поля швидкості ідеальної течії [1]) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області $G_z = ABCD \quad (z = x + iy)$, обмеженій чотирма взаємно-ортогональними гладкими кривими $AB = \{z\colon y = f_1(x)\}$, $BC = \{z\colon y = f_2(x)\}$, $CD = \{z\colon y = f_3(x)\}$, $DA = \{z\colon y = f_4(x)\}$, при умовах: $\varphi\big|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi\big|_{CD} = \varphi^*$, $\left.\dfrac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|_{BC} = 0$, $\left.\dfrac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|_{DA} = 0$, де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $f_1(x) = \sum_{s=0}^{m_1} a_s x^s$, $f_2(x) = \sum_{s=0}^{m_2} b_s x^s$, $f_3(x) = \sum_{s=0}^{m_3} c_s x^s$, $f_4(x) = \sum_{s=0}^{m_4} d_s x^s$, $m_1, m_2, m_3, m_4 \in N$, $a_s, b_s, c_s, d_s \in R$.

Ввівши гармонічну функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$) і замінивши дві останні рівності на умови: $\psi\big|_{BC} = Q$, $\psi\big|_{AD} = 0$, де Q – повна витрата (невідомий параметр), дану задачу замінюємо більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \; = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ при відповідності чотирьох кутових точок [2]:

$$\partial\varphi(x, y)/\partial x = \partial\psi(x, y)/\partial y\,,\ \partial\varphi(x, y)/\partial y = -\partial\psi(x, y)/\partial x\,;$$

$$\varphi\big|_{y=f_1(x)} = \varphi_*\,,\ \varphi\big|_{y=f_3(x)} = \varphi^*\,,\ \psi\big|_{y=f_2(x)} = Q\,,\ \psi\big|_{y=f_4(x)} = 0\,.$$

Згідно з теоремою Рунге (про можливість наближення гармонічної функції з будь-якою точністю лінійними комбінаціями гармонічних многочленів) [3] функції $\varphi=\varphi\left(x,y\right)$ і $\psi=\psi\left(x,y\right)$ знаходитимемо у вигляді поліномів m -го степеня:

$$\varphi=\varphi\left(x,y\right)=\sum_{n=0}^{m}\varphi_n(x,y)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k,k}^{(n)}x^k y^{n-k}\,, \tag{1}$$

$$\psi=\psi\left(x,y\right)=\sum_{n=0}^{m}\psi_n(x,y)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\beta_{n-k,k}^{(n)}x^k y^{n-k}\,,\ m\in N\,. \tag{2}$$

В результаті підстановки (1) та (2) у рівняння Лапласа та виконання процедури прирівнювання членів при однакових степенях x та y , матимемо системи рівнянь для знаходження $\alpha_{n-k,k}^{(n)}$ та $\beta_{n-k,k}^{(n)}$:

$$\begin{cases}(n-k)(n-k-1)\alpha_{n-k,k}^{(n)}+(k+2)(k+1)\alpha_{n-k-2,k+2}^{(n)}=0,\\ k=\overline{0,n},\ \ n=\overline{2,m};\end{cases}$$

$$\begin{cases}(n-k)(n-k-1)\beta_{n-k,k}^{(n)}+(k+2)(k+1)\beta_{n-k-2,k+2}^{(n)}=0,\\ k=\overline{0,n},\ \ n=\overline{2,m}\end{cases}$$

($\alpha_{0,0}^{(0)}$, $\alpha_{1,0}^{(1)}$, $\alpha_{0,1}^{(1)}$, $\beta_{0,0}^{(0)}$, $\beta_{1,0}^{(1)}$, $\beta_{0,1}^{(1)}$ – довільні), а в результаті їх розв’язання та підстановки відповідних значень у (1) та (2) матимемо:

$$\varphi\left(x,y\right)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\alpha_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}y^{2k}+\beta_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}\right), \tag{3}$$

$$\psi\left(x,y\right)=\beta_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\alpha_n'\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}y^{2k}+\beta_n'\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}\right), \tag{4}$$

α_n, α'_n, β_n, β'_n – довільні дійсні числа.

Врахувавши, що функції $\varphi = \varphi(x, y)$ та $\psi = \psi(x, y)$ є не тільки гармонічними, але й комплексно-спряженими (тобто задовольняють систему Коші-Рімана), замість (4) отримаємо дещо вужчий клас гармонічних поліномів, а саме:

$$\psi(x,y) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\beta_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k+1} C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} + \alpha_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1} \right). \quad (5)$$

Зауважимо, що формули (3), (5) можна одержати шляхом виділення дійсної та уявної частин аналітичної функції: $\overline{\varpi}(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n =$

$$= \sum_{n=0}^{m} (\alpha_n + i\beta_n)(x + iy)^n .$$

В результаті підстановки (3), (5) у крайові умови (2) матимемо:

$$\varphi_* = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\alpha_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left((-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} \left(\sum_{s=0}^{m_1} a_s x^s \right)^{2k} \right) + \beta_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \Bigg((-1)^k \times \right.$$

$$\left. \times C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} \left(\sum_{s=0}^{m_1} a_s x^s \right)^{2k+1} \Bigg) \right), \quad \varphi^* = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\alpha_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Bigg((-1)^k \times \right.$$

$$\left. \times C_n^{2k} x^{n-2k} \left(\sum_{s=0}^{m_3} c_s x^s \right)^{2k} \Bigg) + \beta_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left((-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} \left(\sum_{s=0}^{m_3} c_s x^s \right)^{2k+1} \right) \right),$$

$$Q=\beta_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\beta_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left((-1)^{k+1}C_n^{2k}x^{n-2k}\left(\sum_{s=0}^{m_2}b_sx^s\right)^{2k}\right)+\alpha_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left((-1)^k\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}\left(\sum_{s=0}^{m_2}b_sx^s\right)^{2k+1}\right)\right),\ 0=\beta_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\beta_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left((-1)^{k+1}C_n^{2k}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times x^{n-2k}\left(\sum_{s=0}^{m_4}d_sx^s\right)^{2k}\right)+\alpha_n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left((-1)^kC_n^{2k+1}x^{n-2k-1}\left(\sum_{s=0}^{m_4}d_sx^s\right)^{2k+1}\right)\right).$$

В результаті піднесення до степеня, виконання стандартних процедур «перегрупування членів» та прирівнювання при однакових степенях x та y матимемо системи для знаходження невідомих коефіцієнтів α_n, β_n:

$\varphi_*=\alpha_0+\sum_{i=0}^{mm_1}\sum_{n=1}^{m}\left((-1)^n\gamma_na_0^n\right)$, де $\gamma_n=\alpha_n$ при $n=2k$, $\gamma_n=\beta_n$ при $n=2k+1$;

$$0=\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k}\ldots\sum_{k_2=0}^{2k-k_0}\sum_{k_{m_1-1}=0}^{n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2\ldots-k_{m_1-2}}\left(\alpha_n(-1)^kC_n^{2k}a_0^{k_0}a_1^{i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_1}sk_s}a_2^{k_2}\cdot\ldots\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times a_{m_1}^{n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2\ldots-k_{m_1-2}}\overline{P_{2k}}\left(k_0,i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_1}sk_s,\ldots,n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2\ldots-k_{m_1-2}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k+1}\cdot\sum_{k_2=0}^{2k+1-k_0}\sum_{k_{m_1-1}=0}^{n+1-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2...-k_{m_1-2}}\Bigg(\beta_n(-1)^k C_n^{2k+1}a_0^{k_0}a_1^{i-n+2k-1-\sum\limits_{s=2}^{m_1}sk_s}\times$$

$$\times a_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_{m_1-1}^{k_{m_1-1}}a_{m_1}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2...-k_{m_1-2}}\overline{P_{2k+1}}\Bigg(k_0,i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_1}sk_s,k_2...,n-$$

$$-k_0-i+1+\sum_{s=2}^{m_1}sk_s-k_2...-k_{m_1-2}\Bigg)\Bigg)\Bigg),\ i=\overline{0,mm_1}\ .$$

$\varphi^*=\alpha_0+\sum\limits_{i=0}^{mm_3}\sum\limits_{n=1}^{m}\left((-1)^n\gamma_n c_0^n\right)$, де $\gamma_n=\alpha_n$ при $n=2k$, $\gamma_n=\beta_n$ при $n=2k+1$;

$$0=\sum_{n=1}^{m}\Bigg(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k}\ldots\sum_{k_2=0}^{2k-k_0}\sum_{k_{m_3-1}=0}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}}\Bigg(\alpha_n(-1)^k C_n^{2k}c_0^{k_0}c_1^{i-n+2k-\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s}c_2^{k_2}\cdot\ldots\times$$

$$\times c_{m_3}^{n-k_0-i+s\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}}\overline{P_{2k}}\Bigg(k_0,i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_3}sk_s,...,n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}\Bigg)\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k+1}\cdot\sum_{k_2=0}^{2k+1-k_0}\sum_{k_{m_3-1}=0}^{n+1-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}}\Bigg(\beta_n(-1)^k C_n^{2k+1}c_0^{k_0}c_1^{i-n+2k-1-\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s}c_2^{k_2}\cdot\ldots\times$$

$$\times c_{m_3}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}}\times\overline{P_{2k+1}}\Bigg(k_0,i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_3}sk_s,k_2...,n-k_0-i+1+$$

$$+\sum_{s=2}^{m_3}sk_s-k_2...-k_{m_3-2}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg),\ i=\overline{0,mm_3}\ ;$$

$Q=\beta_0+\sum\limits_{i=0}^{mm_2}\sum\limits_{n=1}^{m}\left((-1)^n\gamma_n b_0^n\right)$, де $\gamma_n=-\beta_n$ при $n=2k$, $\gamma_n=\alpha_n$ при $n=2k+1$;

$$0=\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k}\ldots\sum_{k_2=0}^{2k-k_0}\sum_{k_{m_2-1}=0}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}}\left(\beta_n(-1)^{k+1}C_n^{2k}b_0^{k_0}b_1^{i-n+2k-\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s}b_2^{k_2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ldots\cdot b_{m_2}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}}\overline{P_{2k}}\left(k_0,i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_2}sk_s,\ldots,n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k+1}\cdot\sum_{k_2=0}^{2k+1-k_0}\sum_{k_{m_2-1}=0}^{n+1-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}}\left(\alpha_n(-1)^kC_n^{2k+1}b_0^{k_0}b_1^{i-n+2k-1-\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s}\times\right.$$

$$\times b_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot b_{m_2-1}^{k_{m_2-1}}b_{m_2}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}}\overline{P_{2k+1}}\left(k_0,i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_2}sk_s,k_2\ldots,n-k_0-\right.$$

$$\left.\left.\left.-i+1+\sum_{s=2}^{m_2}sk_s-k_2\ldots-k_{m_2-2}\right)\right)\right),\ i=\overline{0,mm_2};$$

$Q=\beta_0+\sum\limits_{i=0}^{mm_4}\sum\limits_{n=1}^{m}\left((-1)^n\gamma_n d_0^n\right)$, де $\gamma_n=-\beta_n$ при $n=2k$, $\gamma_n=\alpha_n$ при $n=2k+1$;

$$0=\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k}\ldots\sum_{k_2=0}^{2k-k_0}\sum_{k_{m_4-1}=0}^{n-k_0-i+\sum\limits_{s=2}^{m_4}sk_s-k_2\ldots-k_{m_4-2}}\left(\beta_n(-1)^{k+1}C_n^{2k}d_0^{k_0}d_1^{i-n+2k-\sum\limits_{s=2}^{m_4}sk_s}d_2^{k_2}\times\right.\right.$$

$$\times ...\cdot d_{m_4}^{\,n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_4} sk_s - k_2 ... - k_{m_4-2}} \overline{P_{2k}}\left(k_0, i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_4} sk_s, ..., n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_2} sk_s - k_2 ... - k_{m_4-2}\right)\Bigg)\times$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{k_0=0}^{2k+1}\cdot\sum_{k_2=0}^{2k+1-k_0} \sum_{k_{m_4-1}=0}^{n+1-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_4} sk_s - k_2...-k_{m_4-2}} \Bigg(\alpha_n (-1)^k C_n^{2k+1} d_0^{k_0} d_1^{\,i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_4} sk_s} d_2^{k_2}\cdot ...\times$$

$$\times d_{m_4-1}^{k_{m_4-1}} d_{m_4}^{\,n-k_0-i+\sum_{s=2}^{m_4} sk_s - k_2...-k_{m_4-2}} \overline{P_{2k+1}}\Bigg(k_0, i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_4} sk_s, k_2 ..., n-k_0-i+$$

$$+1+\sum_{s=2}^{m_4} sk_s - k_2 ... - k_{m_4-2}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg),\; i=\overline{0, mm_4}\,,$$

де $\overline{P}_m(r_1, r_2, ..., r_k) = \dfrac{m!}{r_1 !\, r_2 ! ... r_k !}$ – кількість перестановок з повторенням.

При цьому, у кожній із «однорідних» рівностей при сумуванні беруть участь лише ті доданки, коли $i-n+2k-\sum_{s=2}^{m_l} sk_s \geq 0$ – у «перших сумах», $i-n+2k-1-\sum_{s=2}^{m_l} sk_s \geq 0$ – у «других сумах» ($l=\overline{1,4}$).

2. Обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + \mathrm{i}\, y(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q запишемо у вигляді:

$$\partial x/\partial\varphi = \partial y/\partial\psi\,,\quad \partial x/\partial\psi = -\partial y/\partial\varphi\,,\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega\,,$$

$$\begin{cases} y(\varphi_*,\psi) = f_1\left(x(\varphi_*,\psi)\right), & y(\varphi^*,\psi) = f_3\left(x(\varphi^*,\psi)\right), & 0\leq\psi\leq Q, \\ y(\varphi,Q) = f_2\left(x(\varphi,Q)\right), & y(\varphi,0) = f_4\left(x(\varphi,0)\right), & \varphi_*\leq\varphi\leq\varphi^*. \end{cases} \tag{6}$$

Комплексно-спряжені гармонічні функції $x = x(\varphi,\psi)$ та $y = y(\varphi,\psi)$ аналогічно до (3), (5) представимо у вигляді:

$$x(\varphi,\psi)=\tilde{\alpha}_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}\tilde{\alpha}_n\varphi^{n-2k}\psi^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}\tilde{\beta}_n\varphi^{n-2k-1}\psi^{2k+1}\right), \quad (7)$$

$$y(\varphi,\psi)=\tilde{\beta}_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{k+1} C_n^{2k}\tilde{\beta}_n\varphi^{n-2k}\psi^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}\tilde{\alpha}_n\varphi^{n-2k-1}\psi^{2k+1}\right). \quad (8)$$

В результаті врахування крайових умов (6), перегрупування членів у відповідних сумах, піднесення до степеня (при цьому, наприклад, для першої із цих крайових умов маємо: $\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=k}^{m}B_1(k,n)\psi^k =$

$$=\sum_{s=0}^{m_1}\sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_m\le s\\ k_0+\dots+k_m=s}}\left(\overline{P}_s(k_0,\dots,k_m)\left(\sum_{n=0}^{m}A_1(0,n)\right)^{k_0}\times\dots\times\left(\sum_{n=m}^{m}A_1(m,n)\right)^{k_m}\psi^{\sum_{l=0}^{m}lk_l}\right))$$

та прирівнювання членів при однакових степенях φ та ψ одержимо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{b}_n$, $n=\overline{0,m}$:

$$\sum_{n=k}^{m}B_1(k,n)=\sum_{s=0}^{m_1}\sum_{k_0=0}^{s}\sum_{k_2=0}^{s-k_0}\dots\sum_{k_{m-1}=0}^{s-k_0-k_2-\dots-k_{m-2}}\left(\overline{P}_s\left(k_0,k-\sum_{l=2}^{m}lk_l,k_2,\dots,k_{m-1},s-k_0-\right.\right.$$

$$\left.-k+\sum_{l=2}^{m}lk_l-k_2-\dots-k_{m-1}\right)a_s\left(\sum_{n=0}^{m}A_1(0,n)\right)^{k_0}\left(\sum_{n=1}^{m}A_1(1,n)\right)^{k-\sum_{l=2}^{m}lk_l}\times$$

$$\left.\times\dots\times\left(\sum_{n=m-1}^{m}A_1(m-1,n)\right)^{k_{m-1}}\left(\sum_{n=m}^{m}A_1(m,n)\right)^{s-k_0-k+\sum_{l=2}^{m}lk_l-k_2-\dots-k_{m-1}}\right);$$

$$\sum_{n=k}^{m} B_3(k,n) = \sum_{s=0}^{m_3} \sum_{k_0=0}^{s} \sum_{k_2=0}^{s-k_0} \ldots \sum_{k_{m-1}=0}^{s-k_0-k_2-\ldots-k_{m-2}} \Bigg(\overline{P}_s(k_0, k - \sum_{l=2}^{m} lk_l, k_2, \ldots, k_{m-1}, s - k_0 -$$

$$-k + \sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}) c_s \left(\sum_{n=0}^{m} A_3(0,n) \right)^{k_0} \left(\sum_{n=1}^{m} A_3(1,n) \right)^{k - \sum_{l=2}^{m} lk_l} \times$$

$$\times \ldots \times \left(\sum_{n=m-1}^{m} A_3(m-1,n) \right)^{k_{m-1}} \left(\sum_{n=m}^{m} A_3(m,n) \right)^{s-k_0-k+\sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}} \Bigg);$$

$$\sum_{n=k}^{m} B_2(k,n) = \sum_{s=0}^{m_2} \sum_{k_0=0}^{s} \sum_{k_2=0}^{s-k_0} \ldots \sum_{k_{m-1}=0}^{s-k_0-k_2-\ldots-k_{m-2}} \Bigg(\overline{P}_s \Bigg(k_0, k - \sum_{l=2}^{m} lk_l, k_2, \ldots, k_{m-1}, s - k_0 -$$

$$-k + \sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}) b_s \left(\sum_{n=0}^{m} A_2(0,n) \right)^{k_0} \left(\sum_{n=1}^{m} A_2(1,n) \right)^{k - \sum_{l=2}^{m} lk_l} \times$$

$$\times \ldots \times \left(\sum_{n=m-1}^{m} A_2(m-1,n) \right)^{k_{m-1}} \left(\sum_{n=m}^{m} A_2(m,n) \right)^{s-k_0-k+\sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}} \Bigg);$$

$$\sum_{n=k}^{m} B_4(k,n) = \sum_{s=0}^{m_2} \sum_{k_0=0}^{s} \sum_{k_2=0}^{s-k_0} \ldots \sum_{k_{m-1}=0}^{s-k_0-k_2-\ldots-k_{m-2}} \Bigg(\overline{P}_s(k_0, k - \sum_{l=2}^{m} lk_l, k_2, \ldots, k_{m-1}, s -$$

$$-k_0 - k + \sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}) b_s \left(\sum_{n=0}^{m} A_4(0,n) \right)^{k_0} \left(\sum_{n=1}^{m} A_4(1,n) \right)^{k - \sum_{l=2}^{m} lk_l} \times$$

$$\times \ldots \times \left(\sum_{n=m-1}^{m} A_4(m-1,n) \right)^{k_{m-1}} \left(\sum_{n=m}^{m} A_4(m,n) \right)^{s-k_0-k+\sum_{l=2}^{m} lk_l - k_2 - \ldots - k_{m-1}} \Bigg);$$

де $k=\overline{0,m}$; $B_1(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\beta}'_n\varphi_*^{n-k}$, $A_1(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\alpha}'_n\varphi_*^{n-k}$, $B_3(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\beta}'_n\left(\varphi^*\right)^{n-k}$, $A_3(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\alpha}'_n\left(\varphi^*\right)^{n-k}$, $B_2(k,n)=$ $=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\beta}'_nQ^{n-k}$, $A_2(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\alpha}'_nQ^{n-k}$, $B_4(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\times$ $\times\tilde{\beta}'_n\left(0\right)^{n-k}$, $A_4(k,n)=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_n^k\tilde{\alpha}'_n\left(0\right)^{n-k}$, $\tilde{\alpha}'_n=\tilde{\alpha}_n$ при $n=2k$, $\tilde{\alpha}'_n=\tilde{\beta}_n$ при $n=2k+1$, $\tilde{\beta}'_n=-\tilde{\beta}_n$ при $n=2k$, $\tilde{\beta}'_n=\tilde{\alpha}_n$ при $n=2k+1$, $n=\overline{1,m}$, $k\in N$, $\tilde{\alpha}'_0=\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\beta}'_0=\tilde{\beta}_0$.

Бачимо, що одержана система алгебраїчних рівнянь є нелінійною, що значно ускладнює процес її розв’язання (не зважаючи на локалізованість нелінійності) в порівнянні з відповідною системою рівнянь для прямої задачі. Зауважимо, що «зменшити нелінійність» можна за рахунок залучення процедур типу колокацій.

Висновки. Одержано системи алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів гармонічних многочленів (комплексних потенціалів), а також комплексно-спряжених до них многочленів (функцій течії) для прямої та оберненої задач на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник. Зазначимо, що, на відміну, від багатьох інших методів, наприклад, варіаційних (де базисні функції, як правило, задовольняють крайові умови, а коефіцієнти підбираються так, щоб виконувалось рівняння), сформовані тут класи гармонічних многочленів є автоматично і комплексно-спряженими (задовольняють не тільки рівняння Лапласа, а й систему Коші-Рімана), а коефіцієнти підбираються так, щоб виконувались ще й крайові умови. При цьому, складність (зокрема, локальна нелінійність) при формуванні відповідної системи алгебраїчних рівнянь породжується, в першу чергу, граничними умовами. Якщо рівняння сторін криволінійного чотирикутника представлені у вигляді многочленів, то нелінійність у багатьох випадках можна «суттєво зменшити».

У **перспективі** досліджень – побудова базису квазігармонічних та квазікомплексно-спряжених до них многочленів, а також, побудова відповідних базисів для просторових аналогів крайових задач на конформні і квазіконформні відображення.

1. *Бомба А. Я.* Про наближений метод конформних відображень розв’язання одного класу крайових задач / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, В. В. Михальчук // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 18-21.
2. *Бомба А. Я.* Про розв’язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 25-36.
3. *Волков Е. А.* Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука. – 1982. – 254 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: terebus@rivne.com
abomba@ukr.net

Надійшла 11.03.2010

Бомба А. Я., Теребус А. В. КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ // *Рассматривается задача моделирования идеального течения в криволинейной четырехугольной области (пласте), ограниченной двумя линиями течения и двумя эквипотенциальными линиями. Ее решение сводится к прямому или обратному конформному отображению внутренности соответственного четырехугольника на внутренность прямоугольника, ширина которого является неизвестной и находится в процессе решения задачи. Комплексный потенциал и обратная к нему характеристическая функция течения находятся в виде многочленов комплексной переменной. Получены соотношения в виде систем нелинейных алгебраических уравнений с локализованной нелинейностью для нахождения коэффициентов функции потенциала и комплексно сопряженной к нему функции течения, а также компонент характеристической функции течения.*

Bomba A. Ja., Terebus A. V. COMPLEX CONJUGATE POLYNOMIALS AND BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR CONFORMAL MAPPINGS // *The problem of modelling the ideal flow in a curvilinear quadrangular area (reservoir) restricted by two stream lines and two equipotential lines is considered. Solving of this problem reduces to a direct or inverse conformal mapping of interiority of corresponding quadrangle onto interiority of rectangle with unknown width. The complex potential and the inverse characteristic stream function are found in form of polynomials of complex variable. Ratios in the form of systems of nonlinear algebraic equations with localized nonlinearity for the finding of unknown coefficients of potential function, complex conjugate to it stream function and components of characteristic stream function are obtained.*