Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 7 (16)

Рівне-2010

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.
Бейко І.В.
Бомба А.Я. *(головний редактор)*
Булавацький В.М.
Бурак Я.Й.
Власюк А.П.
Войтович М.М.
Гаращенко Ф.Г.
Гарбарчук В.І.
Джунь Й.В.
Каштан С.С.
Климюк Ю.Є. *(технічний секретар)*
Кратко М.І.
Кузьменко А.П.
Кундрат М.М.
Ляшенко І.М.
Недашковський М.О.
Новіков О.М.
Петрівський Я.Б.
Пономаренко Л.А.
Пригорницький Д.О. *(секретар)*
Присяжнюк І.М.
Савула Я.Г.
Свідзинський А.В.
Скопецький В.В. *(консультант)*
Сяський А.О.
Турбал Ю.В.
Чикрій А.О.
Шваб'юк В.І.
Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 3 від 29 жовтня 2010 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@gmail.com.

ISBN 966-7281-02-8
© РДГУ, 2010

Зміст

Пам'яті Скопецького Василя Васильовича 5

Бігун Я. Й., Левицька О. І., Сергєєва Л. М. *Побудова просторової структури для моделі поширення епідемії зі змінним коефіцієнтом ліквідації* 8

Бомба А. Я., Пеньковський С. О., Савюк Є. В. *Метод фіктивної фільтрації моделювання одного класу квазіідеальних процесів руху рідин* 20

Бомба А. Я., Теребус А. В. *Комплексно спряжені многочлени і крайові задачі на конформні відображення* 30

Бомба А. Я., Шпортько О. В., Шпортько Л. В. *Використання статичного арифметичного кодування у растровому графічному форматі PNG* 43

Булавацький В. М. *Математичне моделювання процесу консолідації деформівних пористих середовищ за умов підземного вилуговування* 59

Климюк Ю. Є. *Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової задачі моделювання процесу видалення залишкових катіонів алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища* 71

Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. *Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу двозв'язних областей* 84

Климюк Ю. Є., Сівак В. М. *Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища* 93

Кузьменко А. П., Гладка О. М. *До розв'язування початково-крайової задачі для параболічного рівняння методом прямих* 110

Мусурівський В. І. *Про оцінку параметрів динамічної тралової системи* 116

Петрик М.Р. *Математичне моделювання та аналіз умов і параметрів масопереносу в двовимірних неоднорідних середовищах* 124

Рогаль І. В. *Застосування методу прямих до розв'язування крайових задач конвективної дифузії солей або гіпсів, що залягають у фільтраційному потоці у вигляді включення* .. 147

Романюк В. В. *Зведення 15 випадків розв'язку однієї строго опукло-вгнутої неперервної антагоністичної гри до шести перших розв'язків*..... 168

Сафоник А. П. *Математичне моделювання динамічного режиму магнітного фільтра на основі передатної функції* ... 193

Сяський А. О., Шинкарчук Н. В. *Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска* 199

Фурсачик О. А. *Числово–асимптотичне наближення розв'язків одного класу обернених сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія»* 210

Шпортько О. В., Шпортько Л. В. *Підвищення ефективності стиснення зображень у форматі PNG за допомогою їх розбиття на блоки однорідних рядків*..... 217

Янчук П. С. *Застосування квазіспектральних поліномів до розв'язування задачі Коші* 242

Янчук П. С., Собко В. Г. *Квазіспектральні поліноми на базисі поліномів Чебишова* 260

Ярощак С. В. *Один метод математичного моделювання еволюції границі розділу різнокольорових рідин у неоднорідному пласті*..... 281

УДК 517.95

Климюк Ю. Є.

ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИДАЛЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ КАТІОНІВ АЛЮМІНІЮ ПРИ ФІЛЬТРУВАННІ ЧЕРЕЗ ОКИСЛЮВАЛЬНО-ВІДНОВНІ ЗАВАНТАЖЕННЯ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЗМІНИ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩА

У роботі запропонована просторова математична модель процесу видалення залишкових катіонів алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження для фільтра, що має форму криволінійного паралелепіпеда. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі, що описується системою нелінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін» для криволінійного паралелепіпеда, обмеженого чотирма поверхнями течії і двома еквіпотенціальними поверхнями.

Вступ. Для очищення природних вод від колоїдних і дисперсованих частинок методом контактної коагуляції як коагулянт найчастіше застосовують алюміній сульфат $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$. Після введення коагулянту у фільтруюче середовище відбувається коагуляція, що спричиняє прискорення адсорбції колоїдних і завислих частинок у кілька разів, ніж при звичайній коагуляції у вільному об'ємі. При цьому утворюються заряджені колоїдні частинки нерозчинного алюміній гідроксиду $Al(OH)_3$, йони гідрогену H^+, зайва кількість яких приводить до сповільнення подальшого гідролізу (утворення $Al(OH)_3$) і нагромадженню катіонів Al^{3+} [1-3]. Видалення з фільтруючої води кристалів $Al(OH)_3$ відбувається шляхом адсорбції їх на поверхні зерен і осідання в порах завантаження, а йонів гідрогену H^+ шляхом фільтрування води через завантаження, що мають окислювально-відновні властивості і у яких функцію нейтралізації водню виконує активний метал [4].

© Ю. Є. Климюк, 2010

У цій роботі запропонована просторова математична модель процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через завантаження з окислювально-відновними властивостями для фільтра, що має форму криволінійного паралелепіпеда. Математична модель складається з рівняння руху води через відповідну фільтраційну область і, в припущенні достатньої кількості активного металу, з рівнянь матеріального балансу, записаних щодо концентрацій катіонів Al^{3+} та алюміній гідроксиду $Al(OH)_3$ у воді і у фільтруючому завантаженні та з врахуванням зміни пористості середовища. Аналогічно [5-6] побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної просторової сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін», що ґрунтується на переході від заданої криволінійної фізичної області, обмеженої поверхнями течії і еквіпотенціальними поверхнями, до відповідної області комплексного потенціалу.

Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$, $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_1(x,y,z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_2(x,y,z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z : f_3(x,y,z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z : f_4(x,y,z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x,y,z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z : f_6(x,y,z) = 0\}$ (рис. 1), розглянемо таку модельну задачу:

$$\vec{v} = grad\ \varphi,\ div\ \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \tag{2}$$

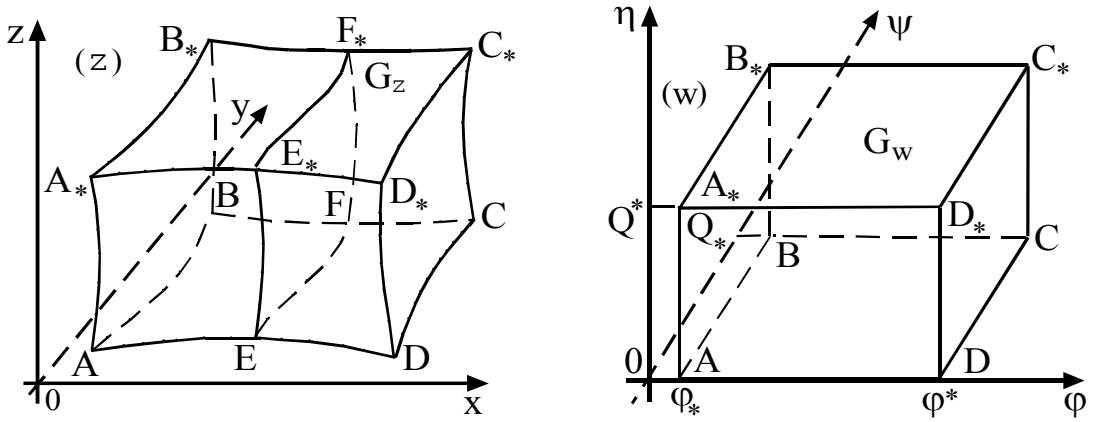
$$\begin{cases} (\sigma \cdot C_1)'_t = div\,(D_1 \cdot grad\ C_1) - \vec{v} \cdot grad\ C_1 - K \cdot C_1, \\ (\sigma \cdot C_2)'_t = div\,(D_2 \cdot grad\ C_2) - \vec{v} \cdot grad\ C_2 + K \cdot C_1 - \alpha \cdot C_2 + \beta \cdot C_3, \\ (\sigma \cdot C_3)'_t = \alpha \cdot C_2 - \beta \cdot C_3,\ \sigma'_t = -\lambda \cdot C_3, \end{cases} \tag{3}$$

$$C_j\Big|_{ABB_*A_*} = c_j^*(M,t),\ \frac{\partial C_j}{\partial \vec{n}}\Big|_{CDD_*C_*} = 0,$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \ (j = 1,2),$$

$$C_j(x,y,z,0) = c_j^0(x,y,z) \ (j = 1,2,3),\ \sigma(x,y,z,0) = \sigma^0(x,y,z), \quad (4)$$

де $\varphi = -\kappa \cdot h$ – потенціал фільтрування ($0 < \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty$), κ – коефіцієнт фільтрації, h – напір, $\vec{v}$ – вектор швидкості фільтрування ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} > v_* >> 0$), $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C_1 = C_1(x,y,z,t)$ і $C_2 = C_2(x,y,z,t)$ – відповідно концентрації катіонів Al^{3+} та алюміній гідроксиду $Al(OH)_3$ у воді, що фільтрується, а $C_3 = C_3(x,y,z,t)$ – концентрація $Al(OH)_3$, адсорбованого на зернах завантаження; $\sigma = \sigma(x,y,z,t)$ – активна пористість середовища, $\sigma^0(x,y,z)$ – активна пористість середовища у початковий момент часу, $D_j = k_j \cdot \varepsilon$ ($j = 1,2$) – коефіцієнти дифузії катіонів Al^{3+} і $Al(OH)_3$ у воді, k_j ($j = 1,2$) – задані додатні дійсні числа, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), K – константа швидкості реакції гідролізу (перехід Al^{3+} в $Al(OH)_3$), $\alpha = \alpha(x,y,z,t)$ і $\beta = \varepsilon \cdot \overline{\beta}(x,y,z,t)$ – функції, які характеризують відповідно обсяги адсорбованих і десорбованих за одиницю часу домішкових частинок, $\lambda = \varepsilon \cdot \overline{\lambda}(x,y,z,t)$ – функція, яка характеризує швидкість зміни активної пористості середовища, $c_j^*(M,t)$ ($j = 1,2$), $c_j^0(x,y,z)$ ($j = 1,2,3$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G, M – довільна точка поверхні ABB_*A_*.



а) *б)*

Рис. 1. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Припустимо, що задача (1) – (2) на знаходження просторового аналогу конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) [7], де $G_w = \{(\varphi,\psi,\eta):\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*,\ 0 \le \psi \le Q_*,\ 0 \le \eta \le Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу, є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}$ і фільтраційну витрату $Q_* \cdot Q^* = Q = \int\limits_{EFF_*E_*} \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds$.

Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi,\eta)$, $y = y(\varphi,\psi,\eta)$, $z = z(\varphi,\psi,\eta)$ у системі (3) та умовах (4), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0,\infty)$:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}\cdot c_{1t}' + \tilde{\sigma}_t'\cdot c_1 = \varepsilon\cdot k_1\cdot\left(\tilde{v}^2\cdot c_{1\varphi\varphi}'' + b_1\cdot c_{1\psi\psi}'' + b_2\cdot c_{1\eta\eta}'' + d_1\cdot c_{1\psi}' + d_2\cdot c_{1\eta}'\right) - \\ -v^2\cdot c_{1\varphi}' - K\cdot c_1,\ \tilde{\sigma}\cdot c_{2t}' + \tilde{\sigma}_t'\cdot c_2 = \varepsilon\cdot k_2\cdot\left(\tilde{v}^2\cdot c_{2\varphi\varphi}'' + b_1\cdot c_{2\psi\psi}'' + b_2\cdot c_{2\eta\eta}'' + \right. \\ \left. + d_1\cdot c_{2\psi}' + d_2\cdot c_{2\eta}'\right) - v^2\cdot c_{2\varphi}' + K\cdot c_1 - \tilde{\alpha}\cdot c_2 + \varepsilon\cdot\tilde{\beta}\cdot c_3,\ \tilde{\sigma}\cdot c_{3t}' + \tilde{\sigma}_t'\cdot c_3 = \\ = \tilde{\alpha}\cdot c_2 - \varepsilon\cdot\tilde{\beta}\cdot c_3,\ \tilde{\sigma}_t' = -\varepsilon\cdot\tilde{\lambda}\cdot c_3, \end{cases} \quad (5)$$

$$c_j(\varphi_*,\psi,\eta,t) = \tilde{c}_j^*(\psi,\eta,t),\ c_{j\varphi}'(\varphi^*,\psi,\eta,t) = 0,\ c_{j\psi}'(\varphi,0,\eta,t) =$$

$$= c_{j\psi}'(\varphi,Q_*,\eta,t) = c_{j\eta}'(\varphi,\psi,0,t) = c_{j\eta}'(\varphi,\psi,Q^*,t) = 0\ (j=1,2),$$

$$c_j(\varphi,\psi,\eta,0) = c_j^0(\varphi,\psi,\eta)\ (j=1,2,3),\ \tilde{\sigma}(\varphi,\psi,\eta,0) = \tilde{\sigma}^0(\varphi,\psi,\eta), \quad (6)$$

де $c_j = c_j(\varphi,\psi,\eta,t) = C_j\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right)$ $(j = 1,2,3)$,

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi,\psi,\eta,t) = \sigma\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right),$$

$$\tilde{c}_j^* = \tilde{c}_j^*(\psi,\eta,t) = c_j^*\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right) \ (j = 1,2),$$

$$\tilde{c}_j^0 = \tilde{c}_j^0(\varphi,\psi,\eta) = c_j^0\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\right) \ (j = 1,2,3),$$

$$\tilde{\sigma}^0 = \tilde{\sigma}^0(\varphi,\psi,\eta) = \sigma^0\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\right),$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\varphi,\psi,\eta,t) = \alpha\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right),$$

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\varphi,\psi,\eta,t) = \overline{\beta}\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right),$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\varphi,\psi,\eta,t) = \overline{\lambda}\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right)$$

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(\varphi,\psi,\eta) = \tilde{\nu}\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\right),$$

$$b_1 = b_1(\varphi,\psi,\eta) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2, \ b_2 = b_2(\varphi,\psi,\eta) = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2,$$

$d_1 = d_1(\varphi,\psi,\eta) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''$, $d_2 = d_2(\varphi,\psi,\eta) = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}''$ [5, 6].

Числове розв'язання. Розв'язок задачі (5) – (6) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів [6]:

$$c_j = c_{j,0} + \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i c_{j,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i P_{j,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \breve{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{\tilde{P}}_{j,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\widehat{P}_{j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\widehat{\widehat{P}}_{j,i} + R_j^{n+1} \ (j = \overline{1,3}), \qquad (7)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\tilde{\sigma}_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i p_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \breve{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{\tilde{p}}_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\widehat{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\widehat{\widehat{p}}_i + r_{n+1}, \qquad (8)$$

де $c_{j,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\sigma}_i(\varphi,\psi,\eta,t)$ $(i = 0,n)$ – члени регулярної частини асимптотики; $P_{j,i}(\xi,\psi,\eta,t)$, $p_i(\xi,\psi,\eta,t)$ $(i = \overline{0,n+1})$ – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтру), $\breve{P}_{j,i}(\tilde{\xi},\psi,\eta,t)$, $\breve{p}_i(\tilde{\xi},\psi,\eta,t)$ $(i = \overline{0,n+1})$ – в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на

вході у фільтр), а $\tilde{P}_{j,i}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{j,i}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\hat{P}_{j,i}(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t)$, $\hat{\tilde{P}}_{j,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ та $\tilde{p}_i(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)$, $\tilde{\tilde{p}}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\hat{p}_i(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t)$, $\hat{\tilde{p}}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ $(i=\overline{0,2n+1})$ – відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\eta=0$, $\eta=Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтру), $R_j^{n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ і $r_{n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ – залишкові члени, $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\xi}=\dfrac{\varphi-\varphi_*}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi}=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}}=\dfrac{Q_*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta}=\dfrac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}}=\dfrac{Q^*-\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – розтяги відповідних змінних.

В результаті підстановки (7), (8) у (5), (6) і виконання стандартної процедури "прирівнювання" коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержимо такі задачі для знаходження $c_{j,i}$, $\tilde{\sigma}_i$ ($j=\overline{1,3}$, $i=0,n$) та $P_{j,i}$, p_i ($j=\overline{1,3}$, $i=\overline{0,n+1}$):

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{1,0t}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot c_{1,0}+\tilde{v}^2\cdot c'_{1,0\varphi}+K\cdot c_{1,0}=g_{1,0},\ \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{2,0t}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot c_{2,0}+ \\ +\tilde{v}^2\cdot c'_{2,0\varphi}+\tilde{\alpha}\cdot c_{2,0}=g_{2,0},\ \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{3,0t}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot c_{3,0}=g_{3,0},\ \tilde{\sigma}'_{0t}=g_{4,0}; \\ c_{j,0}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=\tilde{c}_j^*(\psi,\eta,t)\ (j=1,2),\ c_{j,0}(\varphi,\psi,\eta,0)= \\ =\tilde{c}_j^0(\varphi,\psi,\eta)\ (j=\overline{1,3}),\ \tilde{\sigma}_0\left(\varphi,\psi,\eta,0\right)=\tilde{\sigma}^0\left(\varphi,\psi,\eta\right), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{1,i\,t}+\tilde{\sigma}'_{0\,t}\cdot c_{1,i}+\tilde{v}^2\cdot c'_{1,i\,\varphi}+K\cdot c_{1,i}=g_{1,i},\ \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{2,i\,t}+\tilde{\sigma}'_{0\,t}\cdot c_{2,i}+ \\ +\tilde{v}^2\cdot c'_{2,i\,\varphi}-\tilde{\alpha}\cdot c_{2,i}=g_{2,i},\ \tilde{\sigma}_0\cdot c'_{3,i\,t}+\tilde{\sigma}'_{0\,t}\cdot c_{3,i}=g_{3,i},\ \tilde{\sigma}_{i\,t}=g_{4,i}; \\ c_{j,i}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=0\ (j=1,2),\ c_{j,i}(\varphi,\psi,\eta,0)=0\ (j=\overline{1,3}), \\ \tilde{\sigma}_i\left(\varphi,\psi,\eta,0\right)=0\ (i=\overline{1,n}), \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} k_j\cdot P''_{j,i\,\xi\xi}+P'_{j,i\,\xi}=q_{j,i}\ (j=1,2),\left(\sigma_0+p_0\right)P'_{3,i\,t}+ \\ +\left(\sigma'_{0\,t}+p'_{0\,t}\right)\cdot P_{3,i}=q_{3,i},\ p'_{i\,t}=q_{4,i};\ c'_{j,i\,\varphi}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)+ \\ +P'_{j,i\,\xi}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0\ (j=1,2),\ P_{j,i}\left(\xi,\psi,\eta,t\right)\underset{\xi\to\infty}{\to}0\ (j=1,2), \\ P_{3,i}\left(\xi,\psi,\eta,0\right)=0,\ p_i\left(\xi,\psi,\eta,0\right)=0\ (i=\overline{0,n}), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} k_j \cdot P''_{(j,n+1)\,\xi\xi} + P''_{(j,n+1)\,\xi} = q_{j,n+1}\ (j=1,2), (\sigma_0 + p_0) P'_{(3,n+1)\,t} + \left(\sigma'_{0\,t} + \right. \\ \left. + p'_{0\,t}\right) P_{3,n+1} = q_{3,n+1};\ p'_{n+1\,t} = q_{4,n+1};\ P'_{(j,n+1)\,\xi}(0,\psi,\eta,t) = 0\ (j=1,2), \\ P_{j,n+1}(\xi,\psi,\eta,t) \underset{\xi\to\infty}{\to} 0\ (j=1,2),\ P_{3,n+1}(\xi,\psi,\eta,0) = 0,\ p_{n+1}(\xi,\psi,\eta,0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

де $g_{1,i} = I(i,1)\cdot\left(k_1\cdot\left(\tilde{v}^2\cdot c''_{(1,i-1)\,\varphi\varphi} + b_1\cdot c''_{(1,i-1)\,\psi\psi} + b_2\cdot c''_{(1,i-1)\,\eta\eta} + d_1\cdot c'_{(1,i-1)\,\psi} + d_2\times\right.\right.$

$\left.\left.\times c'_{(1,i-1)\,\eta}\right) - \sum_{l=0}^{i-1}\left(\sigma_{l+1}\cdot c'_{(1,i-1-l)\,t} + \sigma'_{(l+1)\,t}\cdot c_{1,i-1-l}\right)\right)$, $g_{2,i} = K\cdot c_{1,i} + I(i,1)\cdot\left(k_2\cdot\left(\tilde{v}^2\cdot c''_{(2,i-1)\,\varphi\varphi} + \right.\right.$

$+ b_1\cdot c''_{(2,i-1)\,\psi\psi} + b_2\cdot c''_{(2,i-1)\,\eta\eta} + d_1\cdot c'_{(2,i-1)\,\psi} + d_2\cdot c'_{(2,i-1)\,\eta}\left.\right) + \tilde{\beta}\cdot c_{3,i-1} - \sum_{l=0}^{i-1}\left(\sigma_{l+1}\cdot c'_{(2,i-1-l)\,t} + \right.$

$\left.\left.+\sigma'_{(l+1)\,t}\cdot c_{2,i-1-l}\right)\right)$, $g_{3,i} = \tilde{\alpha}\cdot c_{2,i} - I(i,1)\cdot\left(\tilde{\beta}\cdot c_{3,i-1} + \sum_{l=0}^{i-1}\left(\sigma_{l+1}\cdot c'_{(3,i-1-l)\,t} + \sigma'_{(l+1)\,t}\cdot c_{3,i-1-l}\right)\right)$,

$g_{4,i} = -I(i,1)\cdot\tilde{\lambda}\cdot c_{3,i-1}$ $(i=\overline{0,n})$, $q_{1,i} = \tilde{v}^{-2}(\varphi^*,\psi,\eta)\cdot\left(I(i,1)\cdot\left(\sum_{l=0}^{i-1}\left(p_l\cdot P'_{(1,i-l-1)\,t} + \right.\right.\right.$

$+ p'_{l\,t}\cdot P_{1,i-l-1} + \tilde{\sigma}_l\cdot P'_{(1,i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t}\cdot P_{1,i-l-1} + p_l\cdot c'_{(1,i-l-1)\,t} + p'_{l\,t}\cdot c_{1,i-l-1}\left.\right) + K\cdot P_{(1,i-1)} + $

$\left.+\sum_{l=1}^{i} V_{*l}\left(P'_{(1,i-l)\,\xi} - k_1\cdot P''_{(1,i-l)\,\xi\xi}\right)\right) - I(i,2)\cdot k_1\cdot\sum_{l=0}^{i-2}\left(B_{1*\,l}\cdot P''_{(1,i-2-l)\,\psi\psi} + B_{2*\,l}\cdot P''_{(1,i-2-l)\,\eta\eta} + \right.$

$\left.\left.+ D_{1*\,l}\cdot P'_{(1,i-2-l)\,\psi} + D_{2*\,l}\cdot P'_{(1,i-2-l)\,\eta}\right)\right)$, $q_{2,i} = \tilde{v}^{-2}(\varphi^*,\psi,\eta)\cdot\left(I(i,1)\cdot\left(\sum_{l=0}^{i-1}\left(p_l\cdot P'_{(2,i-l-1)\,t} + \right.\right.\right.$

$+ p'_{l\,t}\cdot P_{2,i-l-1} + \tilde{\sigma}_l\cdot P'_{(2,i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t}\cdot P_{2,i-l-1} + p_l\cdot c'_{(2,i-l-1)\,t} + p'_{l\,t}\cdot c_{2,i-l-1}\left.\right) - K\cdot P_{(1,i-1)} + $

$\left.+\sum_{l=1}^{i} V_{*l}\left(P'_{(2,i-l)\,\xi} - k_2\cdot P''_{(2,i-l)\,\xi\xi}\right) - \sum_{l=0}^{i}\tilde{\alpha}_{*l}\cdot P_{2,i-l}\right) - I(i,2)\cdot\left(\sum_{l=0}^{i-1}\tilde{\beta}_{*l}\cdot P_{3,i-l-1} + k_2\times\right.$

$\left.\left.\times\sum_{l=0}^{i-2}\left(B_{1*\,l}\cdot P''_{(2,i-2-l)\,\psi\psi} + B_{2*\,l}\cdot P''_{(2,i-2-l)\,\eta\eta} + D_{1*\,l}\cdot P'_{(2,i-2-l)\,\psi} + D_{2*\,l}\cdot P'_{(2,i-2-l)\,\eta}\right)\right)\right)$,

$q_{3,i} = \sum_{l=0}^{i}\tilde{\alpha}_{*l}\cdot P_{2,i-l} - I(i,1)\cdot\sum_{l=0}^{i-1}\left(\tilde{\beta}_{*l}\cdot P_{3,i-l-1} + p_{l+1}\cdot P'_{(3,i-l-1)\,t} + p'_{(l+1)\,t}\cdot P_{3,i-l-1} + \tilde{\sigma}_l\times\right.$

$\left.\times P'_{(3,i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{(l+1)\,t}\cdot P_{3,i-l-1} + p_{l+1}\cdot c'_{(3,i-l-1)\,t} + p'_{(l+1)\,t}\cdot c_{3,i-l-1}\right)$, $q_{4,i} = -I(i,1)\times$

$\times\sum_{l=0}^{i-1}\tilde{\lambda}_{*l}\cdot P_{3,i-l-1}$ $(i=\overline{0,n+1})$, V_{*l}, B_{1*l}, B_{2*l}, D_{1*l}, D_{2*l}, $\tilde{\alpha}_{*l}$, $\tilde{\beta}_{*l}$, $\tilde{\lambda}_{*l}$ – коефіцієнти при l-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $b_1(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $b_2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $d_1(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $d_2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $\tilde{\alpha}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\beta}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\lambda}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\eta,t)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$, $I(a,b)=\begin{cases}1, & \text{якщо } a\ge b,\\ 0, & \text{якщо } a<b.\end{cases}$

У результаті послідовного розв'язання (9) – (12) матимемо [6, 8]:

$$\tilde{\sigma}_0(\varphi,\psi,\eta,t)=\tilde{\sigma}^0(\varphi,\psi,\eta),$$

$$c_{1,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases}\tilde{c}_1^*(\psi,\eta,t-f(\varphi,\psi,\eta))\cdot e^{-\tilde{g}_1(\varphi,\psi,\eta,t)}, & t\ge f(\varphi,\psi,\eta),\\ \tilde{c}_1^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta)\cdot e^{-\tilde{g}_2(\varphi,\psi,\eta,t)}, & t<f(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{2,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases}e^{-\tilde{g}_3(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\left(\tilde{g}_4(\varphi,\psi,\eta,t)+\tilde{c}_2^*(\psi,\eta,t-f(\varphi,\psi,\eta))\right), & t\ge f(\varphi,\psi,\eta),\\ e^{-\tilde{g}_5(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\left(\tilde{g}_6(\varphi,\psi,\eta,t)+\tilde{c}_2^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta)\right), & t<f(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{3,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t g_{3,0}(\varphi,\psi,\eta,s)ds+\tilde{c}_3^0(\varphi,\psi,\eta);$$

$$\tilde{\sigma}_i(\varphi,\psi,\eta,t)=-\int_0^t g_{4,i}(\varphi,\psi,\eta,s)ds,$$

$$c_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases}e^{-\tilde{g}_1(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{g_{1,i}\left(s,\psi,\eta,f(s,\psi,\eta)-f(\varphi,\psi,\eta)+t\right)}{\tilde{v}^2\left(s,\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_1(s,\psi,\eta,t)}ds, & t\ge f(\varphi,\psi,\eta),\\ e^{-\tilde{g}_2(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_0^t\dfrac{g_{1,i}\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s\right)}{\tilde{\sigma}_0\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_1(\varphi,\psi,\eta,s)}ds, & t<f(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases}e^{-\tilde{g}_3(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{g_{2,i}\left(s,\psi,\eta,f(s,\psi,\eta)-f(\varphi,\psi,\eta)+t\right)}{\tilde{v}^2\left(s,\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_3(s,\psi,\eta,t)}ds, & t\ge f(\varphi,\psi,\eta),\\ e^{-\tilde{g}_5(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_0^t\dfrac{g_{2,i}\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s\right)}{\tilde{\sigma}_0\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_5(\varphi,\psi,\eta,s)}ds, & t<f(\varphi,\psi,\eta),\end{cases}$$

$$c_{3,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t g_{3,i}(\varphi,\psi,\eta,s)ds\quad(i=\overline{1,n});$$

$$p_i(\xi,\psi,\eta,t)=\int_0^t q_{4,i}(\xi,\psi,\eta,s)ds \ \ (i=\overline{0,n+1}),$$

$$P_{j,0}\left(\xi,\psi,\eta,t\right)=k_j\cdot c_{j,0\varphi}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\cdot e^{-\frac{\xi}{k_j}} \ \ (j=\overline{1,2}),$$

$$P_{j,i}\left(\xi,\psi,\eta,t\right)=\int_0^{\xi} e^{-\frac{s}{k_j}}\left(\int_0^s q_{j,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\tilde{s}}{k_j}}d\tilde{s}-c_{j,i\,\varphi}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\right)ds \ \ (j=\overline{1,2},\ i=\overline{1,n}),$$

$$P_{j,n+1}\left(\xi,\psi,\eta,t\right)=\int_0^{\xi} e^{-\frac{s}{k_j}}\left(\int_0^s q_{j,n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\tilde{s}}{k_j}}d\tilde{s}\right)ds \ \ (j=\overline{1,2}),$$

$$P_{3,i}(\xi,\psi,\eta,t)=\int_0^t q_{3,i}(\xi,\psi,\eta,s)ds \ \ (i=\overline{0,n+1}),$$

де $$\tilde{g}_1(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{K}{\tilde{v}^2(\tilde{s},\psi,\eta)}d\tilde{s},$$

$$\tilde{g}_2(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t\frac{K}{\tilde{\sigma}_0\left(f^{-1}(\tilde{s}+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta\right)}d\tilde{s},$$

$$\tilde{g}_3(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{\tilde{\alpha}(s,\psi,\eta,f(\tilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}ds,$$

$$\tilde{g}_4(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{K\cdot c_{1,0}\left(s,\psi,\eta,f(s,\psi,\eta)-f(\varphi,\psi,\eta)+t\right)}{\tilde{v}^2\left(s,\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_3(s,\psi,\eta,t)}ds,$$

$$\tilde{g}_5(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t\frac{\tilde{\alpha}\left(f^{-1}(\tilde{s}+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,\tilde{s}\right)}{\tilde{\sigma}_0\left(f^{-1}(\tilde{s}+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta\right)}d\tilde{s},$$

$$\tilde{g}_6(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t\frac{K\cdot c_{1,0}\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s\right)}{\tilde{\sigma}_0\left(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta\right)}\cdot e^{\tilde{g}_5(\varphi,\psi,\eta,s)}ds,$$

$f(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta})=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{\tilde{\sigma}_0(s,\overline{\psi},\overline{\eta},0)}{\tilde{v}^2(s,\overline{\psi},\overline{\eta})}ds$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки $\left(x(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta}),y(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta}),z(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta})\right)\in ABB_*A_*$ до

точки $\left(x(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta}),\quad y(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta}),z(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta})\right)\in G_z$ вздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi\left(x,y,z\right)=\overline{\psi}$, $0\le\overline{\psi}\le Q_*$, $\eta\left(x,y,z\right)=\overline{\eta}$, $0\le\overline{\eta}\le Q^*$), f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi,\psi,\eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Вирази функцій $\breve{P}_{j,i}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,t\right)$ ($j=\overline{1,3}$), $\breve{p}_i\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,t\right)$ ($i=\overline{0,n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач [6]:

$$\begin{cases} k_j\cdot\breve{P}''_{j,0\,\tilde{\xi}\tilde{\xi}}+\breve{P}'_{j,0\,\tilde{\xi}}=\breve{q}_{j,0}\ (j=1,2),\left(\tilde{\sigma}_0+p_0+\breve{p}_0\right)\cdot\breve{P}'_{3,0\,t}+\left(\tilde{\sigma}'_{0\,t}+p'_{0\,t}+\right.\\ \left.+\breve{p}'_{0\,t}\right)\cdot\breve{P}_{3,0}=\breve{q}_{3,0},\ \breve{p}'_{0\,t}=\breve{q}_{4,0};\ c_{j,0}\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)+P_{j,0}\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)+\\ +\breve{P}_{j,0}\left(0,\psi,\eta,t\right)=\tilde{c}_j^*\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)(j=1,2),\ \breve{P}_{j,0}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\xi}\to\infty}{\to}0\ (j=\overline{1,3}),\\ \breve{P}_{3,0}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0,\ \breve{p}_0\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_j\cdot\breve{P}''_{j,i\,\tilde{\xi}\tilde{\xi}}+\breve{P}'_{j,i\,\tilde{\xi}}=\breve{q}_{j,i}\ (j=1,2),\left(\tilde{\sigma}_0+p_0+\breve{p}_0\right)\cdot\breve{P}'_{3,i\,t}+\left(\tilde{\sigma}'_{0\,t}+p'_{0\,t}+\right.\\ \left.+\breve{p}'_{0\,t}\right)\cdot\breve{P}_{3,i}=\breve{q}_{3,i},\ \breve{p}'_{i\,t}=\breve{q}_{4,i};\ c_{j,i}\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)+P_{j,i}\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)+\\ +\breve{P}_{j,i}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0\ (j=1,2),\ \breve{P}_{j,i}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\xi}\to\infty}{\to}0\ (j=\overline{1,3}),\\ \breve{P}_{3,i}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0,\ \breve{p}_i\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0\ (i=\overline{1,n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_j\cdot\breve{P}''_{(j,n+1)\,\tilde{\xi}\tilde{\xi}}+\breve{P}'_{(j,n+1)\,\tilde{\xi}}=\breve{q}_{j,n+1}\ (j=1,2),\left(\tilde{\sigma}_0+p_0+\breve{p}_0\right)\cdot\breve{P}'_{(3,n+1)\,t}+\\ +\left(\tilde{\sigma}'_{0\,t}+p'_{0\,t}+\breve{p}'_{0\,t}\right)\cdot\breve{P}_{3,n+1}=\breve{q}_{3,n+1},\ \breve{p}'_{n+1\,t}=\breve{q}_{4,n+1};\ P_{j,n+1}\left(\varphi_*,\psi,\eta,t\right)+\\ +\breve{P}_{j,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0\ (j=1,2),\ \breve{P}_{j,n+1}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\xi}\to\infty}{\to}0\ (j=\overline{1,3}),\\ \breve{P}_{3,n+1}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0,\ \breve{p}_{n+1}\left(\tilde{\xi},\psi,\eta,0\right)=0, \end{cases}$$

де $\breve{q}_{1,i}=\tilde{v}^{-2}\left(\varphi_*,\psi,\eta\right)\cdot\left(I(i,1)\cdot\left(\sum_{l=0}^{i-1}\left(\breve{p}_l\cdot\breve{P}'_{(1,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{1,i-l-1}+\breve{p}_l\cdot P'_{(1,i-l-1)\,t}+\right.\right.\right.$

$$\left.\left.\left.+\breve{p}'_{l\,t}\cdot P_{1,i-l-1}+\breve{p}_l\cdot c'_{(1,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{l\,t}\cdot c_{1,i-l-1}+p_l\cdot\breve{P}'_{(1,i-l-1)\,t}+p'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{1,i-l-1}+\tilde{\sigma}_l\cdot\breve{P}'_{(1,i-l-1)\,t}+\right.\right.$$

$$+\tilde{\sigma}'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{1,i-l-1}\Big)+K\cdot\breve{P}_{(1,i-1)}+\sum_{l=1}^{i}\breve{V}_{*l}\left(\breve{P}'_{(1,i-l)\,\tilde{\xi}}-k_1\cdot\breve{P}''_{(1,i-l)\,\tilde{\xi}\tilde{\xi}\tilde{\xi}}\right)\Bigg)-I(i,2)\cdot k_1\cdot\sum_{l=0}^{i-2}\Big(\breve{B}_{1*l}\times$$

$$\times\breve{P}''_{(1,i-2-l)\,\psi\psi}+\breve{B}_{2*l}\cdot\breve{P}''_{(1,i-2-l)\,\eta\eta}+\breve{D}_{1*l}\cdot\breve{P}'_{(1,i-2-l)\,\psi}+\breve{D}_{2*l}\cdot\breve{P}'_{(1,i-2-l)\,\eta}\Big)\Bigg),\ \breve{q}_{2,i}=$$

$$=\tilde{v}^{-2}(\varphi_*,\psi,\eta)\cdot\Bigg(I(i,1)\cdot\Bigg(\sum_{l=0}^{i-1}\Big(\breve{p}_l\cdot\breve{P}'_{(2,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{2,i-l-1}+\breve{p}_l\cdot P'_{(2,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{l\,t}\times$$

$$\times P_{2,i-l-1}+\breve{p}_l\cdot c'_{(2,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{l\,t}\cdot c_{2,i-l-1}+p_l\cdot\breve{P}'_{(2,i-l-1)\,t}+p'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{2,i-l-1}+\tilde{\sigma}_l\cdot\breve{P}'_{(2,i-l-1)\,t}+$$

$$+\tilde{\sigma}'_{l\,t}\cdot\breve{P}_{2,i-l-1}\Big)-K\cdot\breve{P}_{(1,i-1)}+\sum_{l=1}^{i}\breve{V}_{*l}\left(\breve{P}'_{(2,i-l)\,\tilde{\xi}}-k_2\cdot\breve{P}''_{(2,i-l)\,\tilde{\xi}\tilde{\xi}\tilde{\xi}}\right)-\sum_{l=0}^{i}\breve{\alpha}_{*l}\cdot\breve{P}_{2,i-l}\Bigg)-$$

$$-I(i,2)\cdot\Bigg(\sum_{l=0}^{i-1}\breve{\beta}_{*l}\cdot\breve{P}_{3,i-l-1}+k_2\cdot\sum_{l=0}^{i-2}\Big(\breve{B}_{1*l}\cdot\breve{P}''_{(2,i-2-l)\,\psi\psi}+\breve{B}_{2*l}\cdot\breve{P}''_{(2,i-2-l)\,\eta\eta}+\breve{D}_{1*l}\cdot\breve{P}'_{(2,i-2-l)\,\psi}+$$

$$+\breve{D}_{2*l}\cdot\breve{P}'_{(2,i-2-l)\,\eta}\Big)\Bigg)\Bigg),\ \breve{q}_{3,i}=\sum_{l=0}^{i}\breve{\alpha}_{*l}\cdot\breve{P}_{2,i-l}-I(i,1)\cdot\sum_{l=0}^{i-1}\Big(\breve{\beta}_{*l}\cdot\breve{P}_{3,i-l-1}+\tilde{\sigma}_{l+1}\cdot\breve{P}'_{(3,i-l-1)\,t}+$$

$$+\tilde{\sigma}'_{(l+1)\,t}\cdot\breve{P}_{3,i-l-1}+p_{l+1}\cdot\breve{P}'_{(3,i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{(l+1)\,t}\cdot\breve{P}_{3,i-l-1}+\breve{p}_{l+1}\cdot\breve{P}'_{(3,i-l-1)\,t}+p'_{(l+1)\,t}\times$$

$$\times\breve{P}_{3,i-l-1}+\breve{p}_{l+1}\cdot u'_{(i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{(l+1)\,t}\cdot u_{i-l-1}+\breve{p}_{l+1}\cdot P'_{(i-l-1)\,t}+\breve{p}'_{(l+1)\,t}\cdot P_{i-l-1}\Big),\ \breve{q}_{4,i}=$$

$$=-I(i,1)\cdot\sum_{l=0}^{i-1}\breve{\lambda}_{*l}\cdot\breve{P}_{3,i-l-1}\quad(i=\overline{0,n+1}),\ \breve{V}_{*l},\ \breve{B}_{1*l},\ \breve{B}_{2*l},\ \breve{D}_{1*l},\breve{D}_{2*l},\ \breve{\alpha}_{*l},\ \breve{\beta}_{*l},$$

$\breve{\lambda}_{*l}$ – коефіцієнти при l-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$, $b_1(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$, $b_2(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$, $d_1(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$, $d_2(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$, $\tilde{\alpha}(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\beta}(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\lambda}(\varphi_*+\varepsilon\breve{\xi},\psi,\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_*$. Задачі для знаходження примежових функцій $\tilde{P}_{j,i}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t)$, $\hat{P}_{j,i}(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t)$, $\hat{\tilde{P}}_{j,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t)$ ($j=\overline{1,3}$, $i=\overline{0,3}$) і $\tilde{p}_i(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)$, $\tilde{\tilde{p}}_i(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t)$, $\hat{p}_i(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t)$, $\hat{\tilde{p}}_i(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t)$ ($i=\overline{0,3}$) будуються аналогічно [5, 6]. Залишкові члени знаходимо аналогічно до [8].

Висновки і зауваження. Запропоновано просторову математичну модель процесу видалення залишкових катіонів алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження для фільтра, що має форму криволінійного паралелепіпеда. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі, що дозволяє проводити дослідження процесу доочищення води від катіонів Al^{3+}, націлених на оптимізацію параметрів (а саме: часу захисної дії завантаження) у випадках переважання масообміну та конвективної складової відповідного процесу над дифузійними, що має місце в переважній більшості конструкцій фільтрувальних установок.

Запропоновану теоретичну модель фільтра, що має форму криволінійного паралелепіпеда, доцільно використовувати для проектування та подальшого виробництва побутових фільтрів із змінними картриджами, оскільки така форма дозволяє більш раціонально використовувати сорбційну ємкість і продовжити термін фільтроциклу.

1. *Кульский Л. А.* Моделирование процесса очистки воды от взвешенных веществ / Л. А. Кульский, В. Е. Терновцев, Ю. С. Сергеев // Химия и технология воды. Т. 9, №1. – 1987. – С. 12-15.
2. *Николадзе Г. И.* Подготовка воды для питьевого и промышленного водоснабжения / Г. И. Николадзе, Д. М. Минц, А. А. Кастальский. – М. : Высшая школа, 1984. – 368 с.
3. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
4. *0бертас И. А.* Исследование процесса удаления алюминия из питьевой воды путем фильтрования / И. А. 0бертас // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып. 14. – К. : Техніка, 1998. – С. 66-67.
5. *Сівак В. М.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія-масообмін" / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, І. М. Присяжнюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист: Збірн. наук. праць. – Вип. 1 (33). – Рівне: НУВГП. – 2006. – С. 108-116.
6. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37-44.
7. *Климюк Ю. Є.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на пря-

мокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.

8. *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А. Я. Бомба // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 4, № 4. – С. 493-496.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 18.08.2010

Климюк Ю. Е. ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА УДАЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ КАТИОНОВ АЛЮМИНИЯ ПРИ ФИЛЬТРОВАНИИ ЧЕРЕЗ ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАГРУЗКИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ // *В работе предложена пространственная математическая модель процесса удаления остаточных катионов алюминия при фильтровании через окислительно-восстановительные загрузки для фильтра, который имеет форму криволинейного параллелепипеда. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи, что описывается системой нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен» для криволинейного параллелепипеда, ограниченного четырьмя поверхностями течения и двумя эквипотенциальными поверхностями.*

Klymyuk Yu. Ye. NUMERICAL-ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTION OF THE SPATIAL MODEL PROBLEM OF RESIDUAL ALUMINIUM'S REMOVAL PROCESS DURING FILTRATION THROUGH OXIDATION-REDUCTION LOADINGS WITH AN ALLOWANCE FOR CHANGE OF ENVIRONMENT'S FILTRATION ATTRIBUTES // *Spatial mathematical model of process of removal of residual aluminum during filtration through oxidation-reduction loadings for the filter which has the form of a curvilinear parallelepiped is offered. The algorithm of numerical asymptotic approximation of the decision of a corresponding modeling problem which is described by system of nonlinear singular indignant differential equations of type "convection-diffusion-mass exchange" for the curvilinear parallelepiped, bounded by the four surfaces of current and two equipotential surfaces, is designed.*