

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 10 (19)

Рівне-2013

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	Скопецький В.В. (<i>консультант</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	Новаковські А.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № від листопада 2013 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (22 – 23 лютого 2013 року, РДГУ-НУВГП).

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ

- **Сергієнко І.В.** – голова організаційного комітету
- **Дейнека В.С.** – голова програмного комітету
- **Кушнір Р.М.** – співголова
- **Бомба А.Я.** – заступник голови
- **Власюк А.П.** – заступник голови
- **Базилевич Р.П.**
- **Булавацький В.М.**
- **Воробель Р.А.**
- **Гарашенко Ф.Г.**
- **Куссуль Н.М.**
- **Литвин О.М.**
- **Ляшко С.І.**
- **Нагірний Т.С.**
- **Наконечний О.Г.**
- **Петрівський Я.Б.**
- **Провотар О.І.**
- **Савула Я.Г.**
- **Сяський А.О.**
- **Тадєєв П.О.**
- **Чапля Є.Я.**
- **Чернуха О.Ю.**
- **Чикрій А.О.**

Зміст

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

<i>Бомба А. Я., Сінчук А. М. Метод комплексного аналізу дослідження процесу багатофазної фільтрації у випадку площадного заводнення за умов гідророзриву.....</i>	<i>6</i>
<i>Власюк А. П., Дроздовський Т. А. Математичне моделювання впливу масопереносу на зміну напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при наявності еволюціонуючої каверни.....</i>	<i>21</i>
<i>Давидок А. Є., Чернуха О. Ю. Моделювання потоків маси у двофазній шаруватій смугі з ймовірною приповерхневою неоднорідністю за нульової початкової концентрації.....</i>	<i>38</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах.....</i>	<i>49</i>
<i>Присяжнюк І. М., Крока Л. Л. Математичне моделювання одного класу процесів конвективного масопереносу в багатозв'язних областях з керуванням.....</i>	<i>66</i>
<i>Мічута О. Р. Математичне моделювання консолідації ґрунтів із врахуванням неізотермічних умов та впливу багатокомпонентних хімічних розчинів в одновимірному випадку.....</i>	<i>75</i>
<i>Dushkin V. D. Electromagnetic waves scattering of on a multilayer shielded periodic system of impedance tapes.....</i>	<i>87</i>
<i>Golenia J., Zverkova T. S., Prykarpatsky A. K. On some generalizations of the boole transformation and their ergodic properties.....</i>	<i>97</i>

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

<i>Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами.....</i>	<i>105</i>
<i>Власюк А. П., Багнюк О. М. Знаходження невідомих параметрів джерела забруднення в одновимірних нестационарних задачах масопереносу.....</i>	<i>117</i>
<i>Громадченко Т. В., Мартинюк П. М. Порівняння чисельних</i>	

<i>розв'язків задачі вологоперенесення методами скінченних елементів та радіальних базисних функцій</i>	128
Лукашів Т. О., Ясинський В. К. <i>Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням</i>	140
Мартинюк П. М. <i>Структури даних та порівняння наближених розв'язків крайових задач сітковими і безсітковими методами</i>	152
Турбал Ю. В., Турбал М. Ю. <i>Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл</i>	167
Янчук П. С. <i>Поліноміальна апроксимація розв'язків крайової задачі Стокса</i>	172
Яцук Ю. О. <i>Дослідження апостеріорного оцінювача похибки скінченно-елементних апроксимацій, основанийого на методі граничних елементів</i>	185
Косолап А. И. <i>Максимизация нормы вектора на выпуклом множестве</i>	199
Пашко А. А. <i>Оценка точности моделирования однородных и изотропных случайных полей на сфере в нормах пространств Орлича</i>	209

КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

Базилевич Р. П., Кузь Б. О., Кутельмах Р. К., Базилевич Л. В. <i>Методологія та алгоритми розв'язування задачі комівояжера великої розмірності</i>	227
Власюк А. П., Остапчук О. П. <i>Числове моделювання локалізації радіонуклідів за допомогою дрен-вловлювачів при плоско-вертикальній напірній фільтрації</i>	235
Іванова О. А. <i>Застосування атомарного узагальненого ряду тейлора до розв'язання задачі коші для звичайних диференціальних рівнянь</i>	246
Никонов О. Я., Мацій О. Б. <i>Подход к решению симметричной задачи коммивояжера</i>	253
Lavreniuk A. M., Lavreniuk M. S. <i>Selection algorithm of GPU in GPU cluster and grid for optimization computing</i>	258

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Бомба А. Я., Сінчук А. М.

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ У ВИПАДКУ ПЛОЩАДНОГО ЗАВОДНЕННЯ ЗА УМОВ ГІДРОРОЗРИВУ

В рамках теорії Баклея-Леверетта, модифіковано комплексний підхід, що оснований на ідеях методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, до розв'язання нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації в елементах площадного заводнення на випадок ідентифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву. Проведено відповідні числові розрахунки перерозподілу квазіпотенціалу швидкості у пласті із паралельним розрахунком інших характеристик, зокрема, фільтраційних витрат, поля насиченості тощо, встановлено особливості протікання процесу витіснення для керування ним шляхом оптимізації його параметрів.

Вступ. На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, у роботах [1-3] розроблено алгоритм числового розв'язування нелінійних крайових задач двофазної фільтрації типу Баклея-Леверетта в елементах площадного заводнення. У зв'язку із погіршенням колекторських властивостей середовища в процесі розкриття пласта та його розробки, що є однією із основних причин зменшення об'ємів відбору вуглеводнів [4-5], доцільно використовувати гідравлічний розрив пласта (ГРП), в наслідок якого розширяється область впливу свердловин і формується зв'язок із зонами підвищеної проникності.

У даній роботі, в рамках теорії Баклея-Леверетта, модифіковано комплексний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації в елементах площадного заводнення на випадок ідентифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву пласта, який до-

звляє передбачити характеристики пластової системи при різних умовах впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в призабійних зонах.

Постановка задачі. Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації у горизонтальному пласті-колекторі, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово двоякосиметрично розміщеними прямолінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП (рис. 1а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами. З огляду на симетрію розміщення свердловин у пласті \tilde{G}_z маємо можливість виділити елемент $G_z \in \tilde{G}_z$, що містить n_* нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну з відповідними тріщинами та симетричними їх частинами (рис. 1б, де $d = 2n_*(r^0 + a)$ – відстань між лініями розділу елементів симетрії, r^0 – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами, a_λ, b_λ – відповідні півосі еліпсів, що моделюють тріщини ГРП, $\lambda = 1, 2, 3, \dots, n_* = 3$).

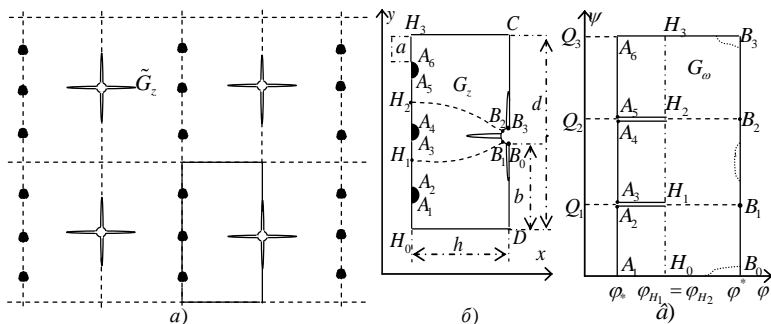


Рис.1. Схематичне зображення розробки пласта (а) з виділеним елементом симетрії ((●) – нагнітальна, (○) – експлуатаційна свердловини), відповідна фізична область (б) та область комплексного квазіпотенціалу (в)

Закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно

квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ – тиск в точці (x, y) в момент часу t , \tilde{p} – деяке характерне його значення), згідно з [1-3] представимо у вигляді:

$$\bar{v}_l = \frac{kk_1}{\mu_l} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\bar{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де $s = s_l(x, y, t)$, \bar{v}_l , μ_l – насиченість пласта, вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -ї фази; $k_1 = s^2$, $k_2 = (1-s)^2$ – відносні фазові про-

никності ($s = s_2$); σ , $k = k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, (x, y) \in G_z^\lambda, \\ k_*, (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_\lambda G_z^\lambda, \end{cases}$ – коефіцієнти

пористості та абсолютної проникності ґрунту,

$G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left((x-x_0)/a_\lambda \right)^2 + \left((y-y_0)/b_\lambda \right)^2 \leq 1 \right\}$ – ділянка пласта, що

відповідає тріщині з індексом λ ($k_\lambda = \text{const}$), $\lambda = 1, 2, 3, \dots$. Звідси, з

урахуванням сумарної швидкості $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div}\bar{v} = 0, \quad \bar{v} = \bar{k}(s) \cdot \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi^*, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_*} = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*,$$

$$s|_{L_g} = s^*, \quad s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y),$$

де $f(s) = \frac{\mu_1 k_2(s)}{\mu_2 k_1(s) + \mu_1 k_2(s)}$, $\bar{k}(s) = \frac{kk_1(s)}{\mu_1} + \frac{kk_2(s)}{\mu_2}$, $L_g = \{z = x + iy :$

$$x = r^0 \cos(\tau), \quad y = r^0 \sin(\tau) + (2g-1)(a+r^0), \quad 3\pi/2 \leq \tau \leq 5\pi/2 \} =$$

$$= \{z : f_g(x, y) = 0, \quad g = \overline{1, n_*}\}, \quad L^* = \{z = x + iy : x = r^0 \cos(\tau) + h,$$

$$y = r^0 \sin(\tau) + d/2, \quad \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2 \} = \{z : f^*(x, y) = 0\}, \quad L_* =$$

$$= \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2} A_{2u-1}, \quad A_{2u-2} A_{2u-1} = \{z = x + iy : x = 0, 2(u-1)(a+r^0) - a \leq y \leq$$

$$\leq 2(u-1)(a+r^0)+a\}, \quad \underline{L} = A_1H_0 \cup H_0D \cup DB_0 = \{z: f(x, y) = 0\}, \quad \bar{L} = \\ = A_{2n^*}H_{n^*} \cup H_{n^*}C \cup CB_{2n^*+1} = \{z: \check{f}(x, y) = 0\}, \quad A_1H_0 = \{z: x = 0, \quad 0 \leq y \leq \\ \leq a\}, \quad H_0D = \{z: y = 0, \quad 0 \leq x \leq h\}, \quad DB_0 = \{z: x = h, \quad 0 \leq y \leq d/2\}, \\ A_{2n^*}H_{n^*} = \{z: x = 0, \quad d-a \leq y \leq d\}, \quad H_{n^*}C = \{z: 0 \leq x \leq h, \quad y = d\}, \\ CB_{2n^*+1} = \{z: x = h, \quad d/2 \leq y \leq d\}.$$

Аналогічно, як у [1,6], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну

область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n^*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n^*-1} \bar{L}_g$:

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \quad (1)$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L_g^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_g} = 0, \quad \psi|_{\bar{L}_g} = Q_{n^*}, \quad \psi|_{L_g^*} = Q_{g-1},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s^*, \quad s|_{t=0} = \check{s}(x, y), \quad (2)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_g = \{\omega: \varphi^* < \varphi < \varphi^*, \quad Q_{g-1} < \psi < Q_g, \quad Q_0 = 0\}$, $\bar{L}_g = \{\omega: \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \quad \psi = Q_g\}$, $Q_g - Q_{g-1} = \iint_{L_g} -v_y dx + v_x dy -$

невідомі сумарні фільтраційні витрати з нагнітальних свердловин, а

$Q = \sum_{g=1}^{n^*} (Q_g - Q_{g-1}) = Q_{n^*}$ – сумарна витрата на експлуатаційній свердловині. При цьому значення відбору нафти визначається за формулою:

$$Q^* = \iint_{L^*} (1 - f(s)) \cdot (-v_y dx + v_x dy) \approx \\ \approx (1 - f(\bar{s})) \cdot \iint_{L^*} -v_y dx + v_x dy = (1 - f(\bar{s})) \cdot Q_{n^*},$$

де \bar{s} – деяке усереднене значення насиченостей на контурі L^* .

Обернуто до (1) крайову задачу квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також (як наслідок) рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3)$$

$$\tilde{f}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_{n^*}), y(\varphi, Q_{n^*})) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$f_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}},$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_{n^*}, \quad g = \overline{2, n^*}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (5)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (3) і формули для обчислення компонент сумарної швидкості

$$v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

задачу для насиченості (2) пере-

пишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\nu^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (7)$$

де рівняння (6) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут входить як параметр. Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі – подання його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно. Спочатку за фіксованим розподілом насиченості s , аналогічно до [1-3], розв'язуємо задачу квазіконформного відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри. Потім за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (6) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукання поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроектованого розміщення свердловин. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти (зокрема, максимізувати її відбір за умов мінімізації об'єму нагнітання води) [1-3,6]. Значний вплив на значення відбору вуглеводнів зумовлює розміщення тріщин гідророзриву на експлуатаційній свердловині. При цьому виникає потреба розв'язання більш ширших задач, коли приходить встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло б ті чи інші критерії. Так, на підставі розглянутої вище загальної постановки задачі керування процесом оптимізації ви-

добутку нафти може базуватись на встановленні зв'язку лише двох параметрів, що характеризують відповідно розміщення тріщин ГРП, за умов сталості a та h . Зокрема, ставиться задача підібрати таке значення величин a_λ та b_λ , що характеризують положення тріщин відносно експлуатаційної свердловини, щоб час прориву $t = \tilde{t}$ води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти Q^* були максимальними, а в наступні моменти часу $t > \tilde{t}$ об'єм води в сумарній витраті $Q = Q_1 + Q_2 = \int_{\tilde{L}^*} -v_y dx + v_x dy$ був мінімальним. Важливими також є за-

дачі оптимізації витрат на певному проміжку часу.

Різницевий аналог та алгоритм розв'язання задачі будемо як у [3]. В нашому випадку $b = d/2 - r^0$ (див. рис. 3.9а), при цьому знаходимо величини параметрів $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_3}$, φ_{H_2} . Далі послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 1в. Вузли (φ_i, ψ_j) сіткової області G_ω визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*) / (n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi^* - \varphi_{H_g}) / (n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g, \quad \text{ä ä} \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$\tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad \Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1}) / m_g, \quad m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, n_*},$$

$$Q_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n = n_1^g + n_2^g + 1, \quad m = \sum_{l=1}^{p_0} m_l + n_* - 1, \quad m_l, n_1^g, n_2^g \in N.$$

Рівняння (5) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [7], наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, \quad a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-},$$

$$a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}, \quad a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+}{2},$$

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\psi_- + \Delta\psi_+}{2}, \quad k_n = \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}, \quad k_s = \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}},$$

$$k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω [3]. Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{H_1}$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} f_g(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,m_{g-1}} &= 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_{i,m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, \\ x_{i,m_g} &= 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_{i,m_g} \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ \tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, \quad \tilde{f}_-(x_{i,m_p}, y_{i,m_p}) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad g = \overline{2, n_*}. \end{aligned} \tag{9}$$

Тут, як і в [1-3], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} &(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ &+ (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \\ &(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ &+ (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \tag{10}$$

Невідомі витрати Q_g та значення потенціалу φ_{H_g} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g$, $Q_g = m_g\Delta\psi_g$, де $\Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}$, а γ_l^g

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\bar{m}_1}^{n_1, \bar{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\bar{m}_1}^{n, \bar{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{\overline{k_{i+1/2, j+1/2}}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad g = \overline{1, n_*},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \tag{11}$$

Рівняння (6) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [3] наступним чином:

$$\mathfrak{S}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\overline{\sigma k_{i,j} \Delta\varphi_1^g}} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \tag{12}$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = 1, n_1^g + 1, \quad l = 1, \quad i = n_1^g + 2, n, \quad l = 2,$$

де τ – крок за часом, $s_{i,j}$, $\mathfrak{S}_{i,j}$ – насиченість у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (знаходимо, як у роботі [1]). Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $j = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1^g , n_2^g , m_g , $g = \overline{1, n_*}$, області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (9)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$), за формулами (11) знаходимо наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання

(8) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [1–3], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , Q_* , φ_{H_g} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі ϵ : стабілізація витрат Q_g

($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \epsilon_1$); стабілізація граничних вузлів

($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \epsilon_2$) тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (12) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Числові розрахунки. Вище описаний алгоритм числового розрахунку поставленої задачі реалізуємо у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT при різних значеннях параметрів, які характеризують геометрію області фільтрації за умови, що $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r^0 = 0.2$, $a = 1$, $h = 2.5$, $b = 2.2$, $k_* = 1$, $k_\lambda = 10$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\sigma = 0.5$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $\tau = 0.01$.

I. Проведемо дослідження відповідного процесу витіснення у випадку, коли в елементі симетрії на одну експлуатаційну свердловину припадає дві нагнітальних, змінюючи просторову орієнтацію тріщин ГРП, отримаємо відповідні гідродинамічні сітки при $t = 0$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 10 \times 40 \times 35 \times 35$, зображені на рисунку 2.

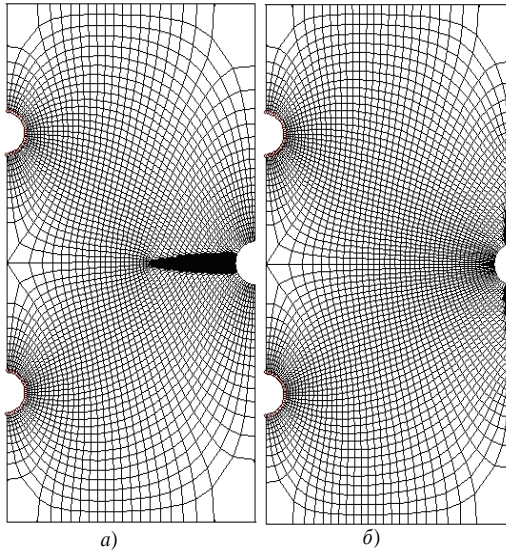


Рис. 2. Гідродинамічні сітки елементів симетрії пласта, коли тріщина ГРП має відповідні параметри: $a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (а), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (б)

Розподіл насиченості у відповідних елементах симетрії площового заводнення пласта, зображених на рисунку 3, у момент часу $t = 4.09$, близький до часу повного обводнення експлуатаційної свердловини, дозволяє проаналізувати процес витіснення та підібрати оптимальне розміщення тріщин. Слід відзначити, що при витісненні у кожному з елементів утворюються застійні зони, які в залежності від просторового розміщення тріщин суттєво відрізняються за площею.

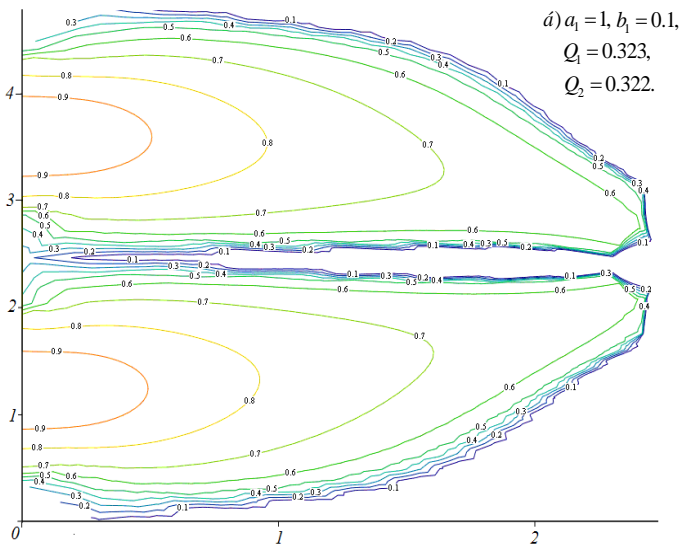
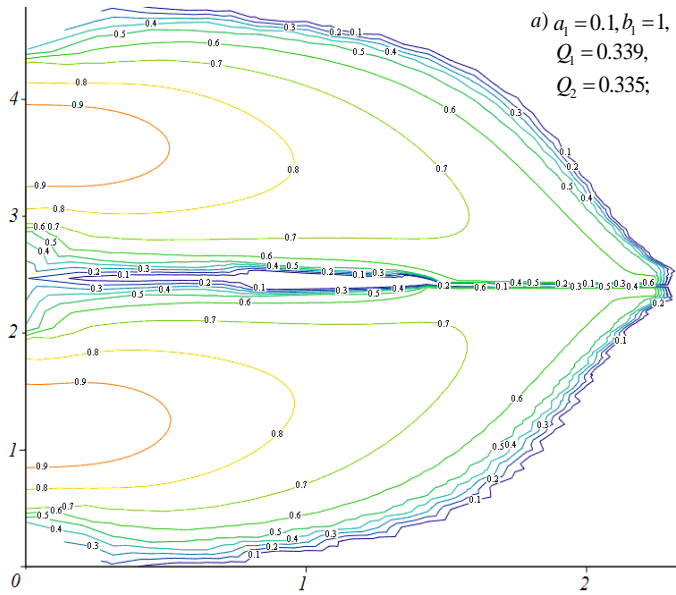


Рис. 3. Поле насиченості в момент часу $t=4.09$
 відповідних елементів симетрії

Залежність від часу сумарної фільтраційної витрати (суцільні лінії) та значення відбору нафти (пунктирними лініями), відповідно у випадках, коли тріщина ГРП має параметри: $a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (а), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (б), що представлена на рисунку 4, доводить ефективність утворення тріщин ГРП вздовж границі елемента симетрії для збільшення зони впливу нагнітальних свердловин, зокрема, спостерігається значний приріст значення витрати на початковому етапі нагнітання води в пласт в наслідок зменшення загального фільтраційного опору у привибійній ділянці.

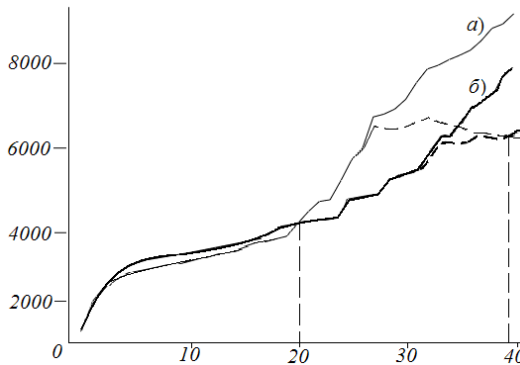


Рис. 4. Графік залежності сумарної витрати від часу у відповідних елементах симетрії

Висновки. На основі ідей методу квазіконформного відображення та поступової фіксації характеристик середовища і процесу, в рамках теорії Бакля-Леверетта, модифіковано комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення у нафтогазових пластах за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом утворення та з урахуванням просторової орієнтації тріщин гідророзриву. Проведено відповідні числові розрахунки перерозподілу квазіпотенціалу швидкості у пласті із паралельним розрахунком інших характеристик, зокрема, фільтраційних витрат, поля насиченості тощо.

З метою забезпечення можливості керування фільтраційним потоком відповідний програмний комплекс модифіковано на випадок існування у пласті тріщин ГРП, що реалізує запропонований підхід та містить як алгоритм вибору, так і алгоритми розв'язання задачі у кожному із конкретних випадків. Відзначимо, що розроблений підхід дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової систем при спеціальних умовах впливу на неї: значення витрат на нагнітальних та експлуатаційних свердловинах, поля квазіпотенціалу та насиченості і положення кривих, що розділяють ділянки впливу згаданих вище криволінійних рядів, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних свердловин та тріщин ГРП.

1. *Бомба А. Я.* Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35) С. 31–35.
2. *Бомба А. Я.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №2. – С. 3–13.
3. *Бомба А. Я.* Системний аналіз та керування процесами двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. 54, №2 – С. 51–61.
4. *Бомба А. Я.* Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40). – С. 32–36.
5. *Бомба А. Я.* Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2012. – Вип.6. – С. 11 – 26.
6. *Бомба А. Я.* Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10. – С. 34–40.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: abomba@ ukr.net

sinchukk@ mail.ru

Надійшла 09.07.2013

Бомба А. Я., Синчук А. М. МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛУЧАЕ ПЛОЩАДНОГО ЗАВОДНЕНИЯ С УЧЕТОМ ГИДРОРАЗРЫВА // *В рамках теории Баклея-Левретта, модифицирован комплексный подход, основанный на идеях метода квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик среды и процесса, к решению нелинейных краевых задач многофазной фильтрации в элементах площадного заводнения на случай идентификации притока пластовой жидкости в скважину при возмущении фильтрационного течения трещинами гидравлического разрыва. Проведены соответствующие числовые расчеты перераспределения квазипотенциала скорости в пласте с параллельным расчетом других характеристик, в частности, фильтрационный расход, поля насыщенности и т.д., установлены особенности протекания процесса вытеснения для управления им путем оптимизации его параметров.*

Bomba A. Ya., Sinchuk A. M. METHOD OF COMPLEX ANALYSIS OF RESEARCH OF PROCESS OF MULTIPHASE FILTRATION IN THE CASE OF AREA FLOODING TAKING INTO ACCOUNT OF HYDRAULIC BREAK // *Within the framework of theory of Bakleya-Leveretta, complex approach, based on the ideas of method of quasi-conformal reflections and stage-by-stage fixing of descriptions of environment and process, is modified, to the decision of nonlinear regional tasks of multiphase filtration in the elements of area flooding in case of authentication of influx of stratal liquid in a mining hole at indignation of lauter flow the cracks of hydraulic break. The corresponding computations of redistribution of quasi-potential of the velocity in the layer with parallel calculation of other characteristics were made, in particular, lauter expense, fields of saturation et cetera, peculiarities of driving process were established for it's control by it's parameters optimization.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 10 (19)

Відповідальний за випуск
Бомба А. Я.

Підписано до друку __. __. 2013 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № ___/1.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12