

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 10 (19)**

**Рівне-2013**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".  
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	Новаковські А.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № від листопада 2013 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (22 – 23 лютого 2013 року, РДГУ-НУВГП).

### ***ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ***

- **Сергієнко І.В.** – голова організаційного комітету
- **Дейнека В.С.** – голова програмного комітету
- **Кушнір Р.М.** – співголова
- **Бомба А.Я.** – заступник голови
- **Власюк А.П.** – заступник голови
- **Базилевич Р.П.**
- **Булавацький В.М.**
- **Воробель Р.А.**
- **Гаращенко Ф.Г.**
- **Куссуль Н.М.**
- **Литвин О.М.**
- **Ляшко С.І.**
- **Нагірний Т.С.**
- **Наконечний О.Г.**
- **Петрівський Я.Б.**
- **Провотар О.І.**
- **Савула Я.Г.**
- **Сяський А.О.**
- **Тадєєв П.О.**
- **Чапля Є.Я.**
- **Чернуха О.Ю.**
- **Чикрій А.О.**

## Зміст

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

<i>Бомба А. Я., Сінчук А. М. Метод комплексного аналізу дослідження процесу багатофазної фільтрації у випадку площадного заводнення за умов гідророзриву.....</i>	<i>6</i>
<i>Власюк А. П., Дроздовський Т. А. Математичне моделювання впливу масопереносу на зміну напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при наявності еволюціонуючої каверни.....</i>	<i>21</i>
<i>Давидок А. Є., Чернуха О. Ю. Моделювання потоків маси у двофазній шаруватій смугі з ймовірною приповерхневою неоднорідністю за нульової початкової концентрації.....</i>	<i>38</i>
<i>Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах.....</i>	<i>49</i>
<i>Присяжнюк І. М., Крока Л. Л. Математичне моделювання одного класу процесів конвективного масопереносу в багатозв'язних областях з керуванням.....</i>	<i>66</i>
<i>Мічута О. Р. Математичне моделювання консолідації ґрунтів із врахуванням неізотермічних умов та впливу багатокомпонентних хімічних розчинів в одновимірному випадку.....</i>	<i>75</i>
<i>Dushkin V. D. Electromagnetic waves scattering of on a multilayer shielded periodic system of impedance tapes.....</i>	<i>87</i>
<i>Golenia J., Zverkova T. S., Prykarpatsky A. K. On some generalizations of the boole transformation and their ergodic properties.....</i>	<i>97</i>

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

<i>Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами.....</i>	<i>105</i>
<i>Власюк А. П., Багнюк О. М. Знаходження невідомих параметрів джерела забруднення в одновимірних нестационарних задачах масопереносу.....</i>	<i>117</i>
<i>Громадченко Т. В., Мартинюк П. М. Порівняння чисельних</i>	

<i>розв'язків задачі вологоперенесення методами скінченних елементів та радіальних базисних функцій</i> .....	128
<b>Лукашів Т. О., Ясинський В. К.</b> <i>Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням</i> .....	140
<b>Мартинюк П. М.</b> <i>Структури даних та порівняння наближених розв'язків крайових задач сітковими і безсітковими методами</i> ....	152
<b>Турбал Ю. В., Турбал М. Ю.</b> <i>Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл</i> .....	167
<b>Янчук П. С.</b> <i>Поліноміальна апроксимація розв'язків крайової задачі Стокса</i> .....	172
<b>Яцук Ю. О.</b> <i>Дослідження апостеріорного оцінювача похибки скінченно-елементних апроксимацій, основанийого на методі граничних елементів</i> .....	185
<b>Косолап А. И.</b> <i>Максимизация нормы вектора на выпуклом множестве</i> .....	199
<b>Пашко А. А.</b> <i>Оценка точности моделирования однородных и изотропных случайных полей на сфере в нормах пространств Орлича</i> .....	209

### КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

<b>Базилевич Р. П., Кузь Б. О., Кутельмах Р. К., Базилевич Л. В.</b> <i>Методологія та алгоритми розв'язування задачі комівояжера великої розмірності</i> .....	227
<b>Власюк А. П., Остапчук О. П.</b> <i>Числове моделювання локалізації радіонуклідів за допомогою дрен-вловлювачів при плоско-вертикальній напірній фільтрації</i> .....	235
<b>Іванова О. А.</b> <i>Застосування атомарного узагальненого ряду тейлора до розв'язання задачі коші для звичайних диференціальних рівнянь</i> .....	246
<b>Никонов О. Я., Мацій О. Б.</b> <i>Подход к решению симметричной задачи коммивояжера</i> .....	253
<b>Lavreniuk A. M., Lavreniuk M. S.</b> <i>Selection algorithm of GPU in GPU cluster and grid for optimization computing</i> .....	258

УДК 519.63.001.57

**Бомба А.Я., Гладка О.М., Кузьменко А.П.**

## СИНТЕЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

*На основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень розроблено конструктивний підхід до розв'язання модельних крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму у криволінійних, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, областях із вільною (невідомою) ділянкою границі. Запропоновану методику продемонстровано на прикладі розрахунку характерних параметрів фільтрації у ґрунтовій греблі без проміжка височування.*

**Вступ.** У роботах [1-3] для побудови динамічної сітки потенціальних і квазіпотенціальних процесів руху, розрахунку полів швидкостей з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат тощо) був розроблений конструктивний підхід на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень. У даній роботі цей підхід поширений нами на розв'язання крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з кривими депресії (вільними межами).

У статті наведена загальна постановка модельної крайової задачі для криволінійної чотирикутної області, обмеженої лініями течії і еквіпотенціальними лініями із вільною межею, та проілюстровано її застосування до задачі, що моделює процес фільтрації у ґрунтовій греблі, у якій, на відміну від традиційних постановок таких задач, замість проміжка височування є непроникна ділянка (лінія течії). Розв'язування задачі зводиться до обернення конформного відображення даної фізичної області на відповідну область комплексного потенціалу, що є прямокутником з невідомою висотою (повною витратою). При цьому, вузли динамічної сітки розраховуються за формулами сумарних зображень, які

дозволяють на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних вузлів сумарно, і, отже, пришвидшити досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій. В результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема розрахунку вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомої ділянки границі області і координат точки перетину її із заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці, обчислення повної витрати.

**Постановка задачі.** Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у криволінійній області  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), яка (аналогічно до [4, 5]) обмежена гладкими кривими:  $AB = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ ,  $B_0C = \{z : f^*(x, y) = 0, y_C \leq y \leq y_*\}$ ,  $CD = \{z : f^*(x, y) = 0, y \leq y_C\}$ ,  $DA = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ ,  $BB_0$  – вільна (невідома) межа (крива депресії),  $y_B, y_C$  – задані ординати точок  $B$  і  $C$  відповідно,  $y_*$  – шукана ордината точки  $B_0$  (рис. 1).

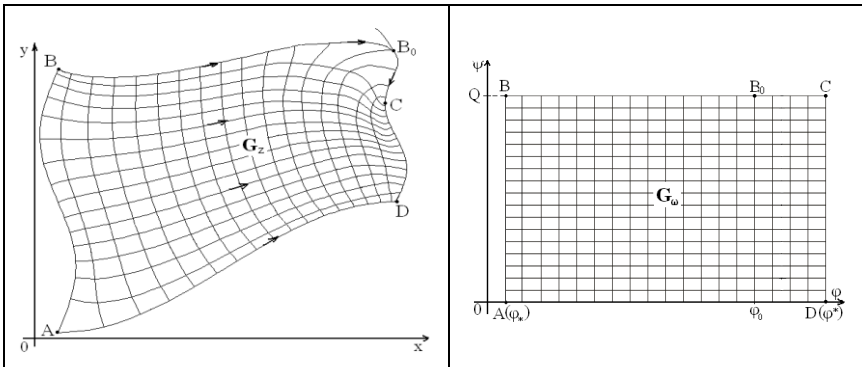


Рис. 1. Схема області фільтрації  $G_z$  і відповідна їй область комплексного потенціалу

Як і раніше, процес фільтрації описуватимемо рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$  (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$  [6], де  $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  – швидкість фільтрації,  $\kappa$  – коефіцієнт провідності,  $\varphi$  – потенціал поля, такий, що  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BB_0C} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{DA} = 0, \quad n - \text{зовнішня нормаль до відповідної ділянки}$$

границі даної області,  $\varphi|_{BB_0} = \Phi(y)$ , де  $\Phi(y)$  - монотонно зростаюча (спадна) функція,  $\Phi(y_B) = \varphi_*$ ,  $\Phi(y_*) = \varphi^*$ .

Задача на конформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  ( $\psi = \psi(x, y)$  - функція течії комплексно спряжена до  $\varphi = \varphi(x, y)$ ) з невідомим параметром - повною витратою  $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$  має вигляд [4, 5]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{BB_0} = \Phi(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BB_0C} = Q. \quad (2)$$

Для забезпечення виконання умов Коші-Рімана (1) (аналогічно до [4, 5]) запишемо умови ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області  $AB, AD, CD, B_0C$  і  $BB_0$  (останнє рівняння - це умова ортогональності ліній динамічної сітки, в якому не використовується рівняння самої границі):

$$\begin{cases} \text{grad } \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad } f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad } f^*(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad } f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } f^*(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Обернена до (1) - (3) задача на конформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$  має вигляд:



$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f^*(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad y(\varphi, Q) = \Phi^{-1}(\varphi), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*^*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  у дивергентній формі (аналогі рівнянь Лапласа при  $\kappa = 1$ ) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Зокрема, проілюструємо запропонований підхід на прикладі прогнозування фільтрації у ґрунтовій греблі. На відміну від традиційних постановок задачі фільтрації через ґрунтову греблю тут замість проміжка височування є абсолютно непроникна ділянка границі:  $B_0C$  – лінія течії (див. рис. 1, 2). Відповідна фізична область фільтрації  $\tilde{G}_z$  ( $z = x + iy$ ) (аналогічно до [4]) задана таким чином:

$$AB = \left\{ z : f_*(x, y) = m_1 y - x = 0, 0 \leq y \leq H_* \right\}$$

$$B_0C = \left\{ z : f^*(x, y) = m_2 y + x - L = 0, y_* \leq y \leq H^* \right\},$$

$$CD = \left\{ z : f^*(x, y) = m_2 y + x - L = 0, H^* \leq y \leq 0 \right\}, \quad AD = \left\{ z : f_*(x, y) = \right.$$

$= y = 0, 0 \leq x \leq L\}$ ,  $BB_0$  – вільна (невідома) межа (крива депресії),  $AD$  – непроникна основа греблі,  $H_G$  та  $H_*$ ,  $H^*$  – відповідно висота греблі та напори на ній,  $b$  – ширина гребеня,  $m_1 = l_1/H_G$  та  $m_2 = l_2/H_G$  – коефіцієнти закладання верхового та низового відкосів,  $L = l_1 + b + l_2$  – загальна ширина греблі,  $y_*$  – шукана ордината точки  $B_0$  (див. рис. 2).

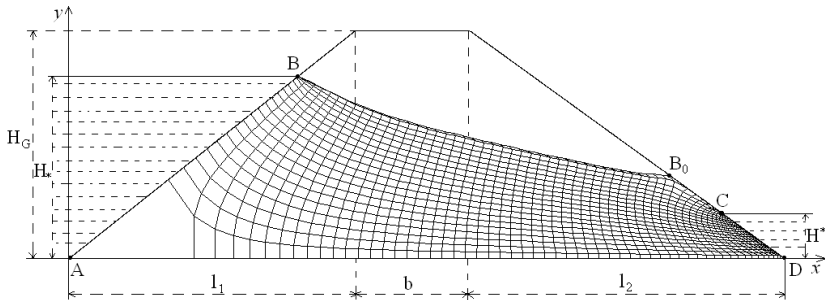


Рис. 2. Схема області фільтрації  $\tilde{G}_z$  і розрахована динамічна сітка

Процес фільтрації, як зазначено вище, описуємо рівняннями  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$ ,  $\text{div } \vec{v} = 0$  [4, 5], де  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації, який для зручності покладемо  $\kappa = 1$ ;  $h = h(x, y)$  – напір в точці  $(x, y)$ , такий що  $h|_{AB} = H_*$ ,  $h|_{CD} = H^*$ ,  $h|_{BB_0} = y$ ;  $\varphi = -\kappa \tilde{h} = -\tilde{h}$  – потенціал поля

$$\left( \tilde{h} = \frac{h - H^*}{H^* - H_*} \right), \quad \text{тоді} \quad \varphi|_{AB} = \varphi_* = 0, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^* = 1, \quad \varphi|_{BB_0} = \frac{H^* - y}{H^* - H_*},$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BB_0C} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{DA} = 0.$$

Задача (1) – (3) на конформне відображення області  $\tilde{G}_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $\tilde{G}_\omega$  з невідомою витратою  $Q$  має вигляд:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (7)$$

$$\varphi|_{AB}=0, \quad \varphi|_{CD}=1, \quad \varphi|_{BB_0}=-y, \quad \psi|_{AD}=0, \quad \psi|_{BC}=Q; \quad (8)$$

$$\begin{cases} \text{grad} \psi(x(0, \psi), y(0, \psi)) \cdot \text{grad}(m_1 y(0, \psi) - x(0, \psi)) = 0, \\ \text{grad} \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad} y(\varphi, 0) = 0, \\ \text{grad} \psi(x(1, \psi), y(1, \psi)) \cdot \text{grad}(m_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - L) = 0, \\ \text{grad} \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad}(m_2 y(\varphi, Q) + x(\varphi, Q) - L) = 0, \\ \text{grad} \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad} \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0; \end{cases} \quad (9)$$

а відповідна їй обернена задача запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_\omega, \\ m_1 y(0, \psi) - x(0, \psi) = 0, \\ m_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - L = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \\ y(\varphi, Q) = H_* + (H^* - H_*)(1 - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ m_2 y(\varphi, Q) + x(\varphi, Q) - L = 0, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq 1; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \left( m_1 \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \left( m_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=1} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \\ \left( m_2 \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Ця задача зводиться до розв'язування в  $\tilde{G}_\omega$  рівнянь Лапласа  $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$ ,  $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$  при заданих крайових умовах (10) та умовах ортогональності (11).

**Різницева задача.** Різницевий аналог поставленої задачі у рівномірній сітковій області  $\tilde{G}_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta_\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad \psi_j = \Delta_\psi \cdot j,$

$j = \overline{0, n+1}; \quad \Delta_\varphi = \frac{1}{m+1}, \quad \Delta_\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi}, \quad m, n \in \mathbf{N}\}$  запишемо у

вигляді [4,7]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1 + \gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (12)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ;

$$\begin{cases} m_1 y_{0,j} - x_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ m_2 y_{m+1,j} + x_{m+1,j} - L = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ y_{i,n+1} = H_* + (H_* - H_*)(1 - \varphi_i), \quad i = \overline{0, m_* - 1}, \\ m_2 y_{i,n+1} + x_{i,n+1} - L = 0, \quad i = \overline{m_*, m+1}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} (y_{1,j} - y_{0,j}) + m_1(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ (y_{m,j} - y_{m+1,j}) - m_2(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ x_{i,1} - x_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ (x_{i+1,n+1} - x_{i,n+1})(y_{i+1,n+1} - y_{i,n+1}) + \\ + (x_{i,n} - x_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m_* - 1}, \\ (y_{i,n} - y_{i,n+1}) - m_2(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{m_*, m+1}. \end{cases} \quad (14)$$

Конформний інваріант  $\gamma$  отримаємо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей [4]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad (15)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Невідому витрату  $Q$  наближено обчислюємо за формулою [4]:

$$Q = \Delta_\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}. \quad (16)$$

**Алгоритм числового розв’язання.** Алгоритм розв’язання різницевої задачі (12) – (16) побудуємо з використанням методу сумарних зображень. Формули сумарних зображень [8-10], що є розв’язками рівнянь

(12), мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right), \quad (17) \\ i &= \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

де елементи матриці  $P = \{p_{j,k}\}_{j,k=1}^n$  обчислюються як

$$p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad \text{а елементи діагональних матриць } \mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n,$$

$$\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n \text{ визначаються із формул } \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1},$$

$$\eta_k = 1 + \gamma^2 (1 - \cos \frac{k\pi}{n+1}). \text{ Системи рівнянь для обчислення } a_k, b_k, c_k, d_k$$

мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} a_k + b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{0,j} - S_k^{(0)}, \\ \mu_k^{m+1} a_k + \nu_k^{m+1} b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{m+1,j} - S_k^{(m+1)}, \quad k = \overline{1, n}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_k + d_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{0,j} - S_k^{*(0)}, \\ \mu_k^{m+1} c_k + \nu_k^{m+1} d_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{m+1,j} - S_k^{*(m+1)}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \right.$$

де  $p_{j,k}^* (j, k = \overline{1, n})$  - елементи матриці  $P^*$ , оберненої до  $P (P \cdot P^* = E)$ ;

$$S_k^{(0)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}),$$

$$S_k^{(m+1)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}),$$

$$S_k^{*(0)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^t}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}),$$

$$S_k^{*(m+1)} = \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{m+1-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

В алгоритмі (аналогічно до [5]) будемо поетапно фіксувати значення параметрів  $\gamma$  (або  $Q$ ), координат граничних та внутрішніх вузлів сітки  $\tilde{G}_\omega^\gamma$ , використовуючи ідеї методу блочної ітерації. Задаємо кількості  $m$  та  $n$  вузлів розбиття сіткової області  $\tilde{G}_\omega^\gamma$ , параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення  $\delta_*$ , початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ . Обчислюємо методом сумарних зображень (11) відповідні початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$  і знаходимо за формулами (9), (10) початкові наближення  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  конформного інваріанта  $\gamma$  та повної витрати  $Q$ .

Далі уточнюємо координати граничних вузлів (7), (8) (даний граничний вузол на  $k$ -ому кроці підправляємо за умов, що фіксованими є навколишні та відповідні приграничні [4]). Нове наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$  ( $k = 0, 1, \dots$  – номер кроку ітерації) знову проводимо за формулами сумарних зображень (11), які, на відміну від сіткових ітераційних методів, дозволяють відразу (за один крок без організації ітераційного процесу) отримати прийнятний розв'язок. Після цього, знову уточнюємо  $\gamma$  та  $Q$ . Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Визначаємо величину  $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$  зміщення вузлів на границі за проведену  $k$ -ту ітерацію; якщо вона більша за  $\varepsilon$ , то перехо-

димо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь конформності  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$  отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де  $\delta_1, \delta_2$  – нев’язки апроксимацій рівнянь (7):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\delta_{i,j}^{(1)}|, \quad \delta_{i,j}^{(1)} = \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1});$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\delta_{i,j}^{(2)}|, \quad \delta_{i,j}^{(2)} = \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}).$$

**Результати розрахунку.** Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при розбитті області фільтрації  $m \times n = 60 \times 20$ , точності наближення  $\varepsilon = 10^{-5}$ , конструктивних параметрах греблі  $H_G = 15\text{ м}$ ,  $H_* = 12\text{ м}$ ,  $H^* = 3\text{ м}$ ,  $b = 8\text{ м}$ ,  $l_1 = 20\text{ м}$ ,  $l_2 = 22\text{ м}$  отримано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 2), знайдено повну фільтраційну витрату  $Q = 0.20277\text{ м}^3/\text{добу}$ , координати точки  $B_0(41.548; 5.763)$  і відповідне їй значення  $\varphi_0 = 0.693$ .

**Висновки.** Таким чином, на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень розроблено конструктивний підхід до розв’язання модельних крайових задач для криволінійних областей, обмежених лініями течії і екіпотенціальними лініями, із вільною межею. Побудований алгоритм забезпечує можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки, обчислення повної витрати, знаходження невідомої ділянки границі і координат точки перетину її із заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці. Проведені числові розрахунки характерних параметрів фільтрації у ґрунтовій греблі без проміжка височування.

Поєднання методів комплексного аналізу (обернень конформних відображень) і формул сумарних зображень для наближення внутрішніх вузлів дозволило суттєво покращити існуючі алгоритми розв’язання такого класу задач.

1. *Бомба А.Я.* Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012.– №2. – С. 87–94.
2. *Бомба А.Я.* Синтез числових методів квазиконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012.– №2 (108). – С. 20–31.
3. *Гладка О.М.* Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень / О.М. Гладка // Волинський математичний вісник – 2012. – № 9 (18). – С. 45–58.
4. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький – Київ : Наукова думка, 2007. – 308 с.
5. *Бомба А.Я.* Нелинейные обращения краевых задач на конформные отображения с управлением в граничных условиях / А.Я. Бомба // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 4. – С. 80–90.
6. *Лаврик В.И.* Конформные отображения физико-топологических моделей / В.И. Лаврик, В.П. Фильчакова, А.А. Яшин. – К: Наукова думка. – 1990. – 374с.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616с.
8. *Ляшко И.И.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка. – 1973. – 264 с.
9. *Глуценко А.А.* Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов / А.А. Глуценко, А.П. Кузьменко. // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С.50–56.
10. *Кузьменко А.П.* До розв'язування крайових задач для рівнянь параболічного типу / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації. Збірник праць. – Львів: ФМІ, 2010. – С. 40–43.



Рівненський державний гуманітарний університет,  
Національний університет водного господарства та природокористування,  
Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. С. Дем'янука, м. Рівне

*E-mail:* abomba@ukr.net

viklom@ukr.net

anatoliypk@gmail.com

*Надійшла 15.01.2013*

**Бомба А. Я., Гладкая Е. Н., Кузьменко А. П.** СИНТЕЗ ЧИСЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА И СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ // *На основе синтеза чисельных методов комплексного анализа и суммарных представлений разработан конструктивный подход к решению модельных краевых задач для расчета фильтрационного режима у криволинейных, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями, областях со свободным (неизвестным) участком границы. Предложенную методику продемонстрировано на примере расчета характерных параметров фильтрации в земляной плотине без промежутка высачивания.*

**Bomba A. Ya., Hladka O. M., Kuzmenko A. P.** THE SYNTHESSES OF THE NUMERIC METHODS COMPLEX ANALYSIS AND SUMMARY REPRESENTATIONS FOR DECISION OF THE MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DOMAIN WITH FREE BOUNDARY // *The constructive approach to decision of the model boundary value problems for the calculation the mode of filtration in curvilinear domains bounded by lines of flow and equipotential lines with a free (unknown) border was developed on the basis of syntheses of the numeric methods complex analysis and summary representations. Proposed method was demonstrated for an example the calculation of the characteristic parameters of filtration in an earth dam without gap seepage.*

Наукове видання

# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 10 (19)**

Відповідальний за випуск  
Бомба А. Я.

Підписано до друку \_\_. \_\_. 2013 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № \_\_\_/1.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12