Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 10 (19)

Рівне-2013

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № від листопада 2013 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@ukr.net.

ISBN 966-7281-02-8

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (22 – 23 лютого 2013 року, РДГУ-НУВГП).

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ

- **Сергієнко І.В.** – голова організаційного комітету
- **Дейнека В.С.** – голова програмного комітету
- **Кушнір Р.М.** – співголова
- **Бомба А.Я.** – заступник голови
- **Власюк А.П.** – заступник голови
- **Базилевич Р.П.**
- **Булавацький В.М.**
- **Воробель Р.А.**
- **Гаращенко Ф.Г.**
- **Куссуль Н.М.**
- **Литвин О.М.**
- **Ляшко С.І.**
- **Нагірний Т.С.**
- **Наконечний О.Г.**
- **Петрівський Я.Б.**
- **Провотар О.І.**
- **Савула Я.Г.**
- **Сяський А.О.**
- **Тадеєв П.О.**
- **Чапля Є.Я.**
- **Чернуха О.Ю.**
- **Чикрій А.О.**

Зміст

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 519.63

Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИН У ОДНОГО КЛАСУ ДВОШАРОВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ НАСИЧЕНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розроблено підхід до математичного моделювання просторових процесів фільтрації рідин у двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах на прикладі модельних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякою заданою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, що характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації. При цьому у відповідному алгоритмі числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення двошарових кусково-однорідних двозв'язних областей із розрізом на відповідні прямокутні паралелепіпеди отримано вирази для знаходження значень фільтраційного потенціалу на поверхні розділу підобластей, повної фільтраційної витрати, розрахунку поля швидкостей та деяких інших характеристик процесу. Наведено результати числових розрахунків.

Вступ. У [7] запропонований і теоретично обґрунтований метод конформних відображень для розв'язування плоских задач усталеної фільтрації. Цей метод використовували та розвивали далі чимало вчених [8]. Для розв'язування двовимірних стаціонарних задач фільтрації в неоднорідних ізотропних та анізотропних насичених пористих середовищах розроблений і успішно використовується метод квазіконформних відображень [1]. При цьому розв'язування задач фільтрації в найбільш повному обсязі зводиться до побудови гідродинамічної сітки руху, складеної із еквіпотенціальних ліній та ліній течії, обчислення поля швидкостей та величин різного роду перетоків тощо.

У [2 – 5] розроблено числові алгоритми розв'язання обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів конформних відображень одно- та двозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, на відповідні прямокутні паралелепіпеди. У [6] алгоритм, описаний в [2], адаптовано до знаходження просторових аналогів конформних відображень криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди. У цій роботі алгоритм, описаний в [3], по аналогії з [6] модифікований на випадок знаходження просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякою фіксованою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, із розрізом на відповідні прямокутні паралелепіпеди. Ці алгоритми дозволять будувати просторові гідродинамічні сітки і на їх основі розрахувати поля швидкостей руху рідин та інші характеристики процесу у відповідних двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах.

Постановка задачі. Нехай маємо деяку двошарову кусково-однорідну двозв'язну криволінійну область $G_{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{z}=(x,y,z)$), обмежену двома еквіпотенціальними гладкими поверхнями $S_* = \{\mathbf{z}: f_*(x,y,z)=0\}$, $S^* = \{\mathbf{z}:$ $f^*(x,y,z)=0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{\mathbf{z}:\ f_{**}(x,y,z)=0\}$, $S^{**} = \{\mathbf{z}:\ f^{**}(x,y,z)=0\}$ та розділену заданою еквіпотенціальною поверхнею $S_*^* = \{\mathbf{z}:\ f_*^*(x,y,z)=0\}$ на дві підобласті $G_{\mathbf{z}-}$ і $G_{\mathbf{z}+}$ (рис. 1). Для області $G_{\mathbf{z}}$ розглянемо модельну задачу, яка описує процес фільтрації рідини у відповідному двошаровому кусково-однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi\ ,\ div\,\vec{v} = 0\ ; \tag{1}$$

$$\varphi\Big|_{S_*} = \varphi_*\ ,\ \varphi\Big|_{S^*} = \varphi^*\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{S_{**}\cup S^{**}} = 0\ , \tag{2}$$

$$\varphi\Big|_{S_{*-}^*} = \varphi\Big|_{S_{*+}^*} = \varphi_*^*\ ,\ \kappa_1 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{S_{*-}^*} = \kappa_2 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{S_{*+}^*}\ , \tag{3}$$

де $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ і $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – відповідно вектор і потенціал швидкості фільтрації, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} > v_* >> 0$, $0 < \varphi_* \le \varphi \le$ $\le \varphi^* < \infty$, φ_*^* – невідоме значення фільтраційного потенціалу на поверхні S_*^*, $\varphi_* < \varphi_*^* < \varphi^*$, κ – коефіцієнт фільтрації, $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x,y,z) \in G_{z-}, \\ \kappa_2, & (x,y,z) \in G_{z+}, \end{cases}$

v_*, φ_*, φ^*, κ_1 і κ_2 – деякі дійсні додатні числа, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, (3) – умови узгодженості на еквіпотенціальній поверхні S_*^*.

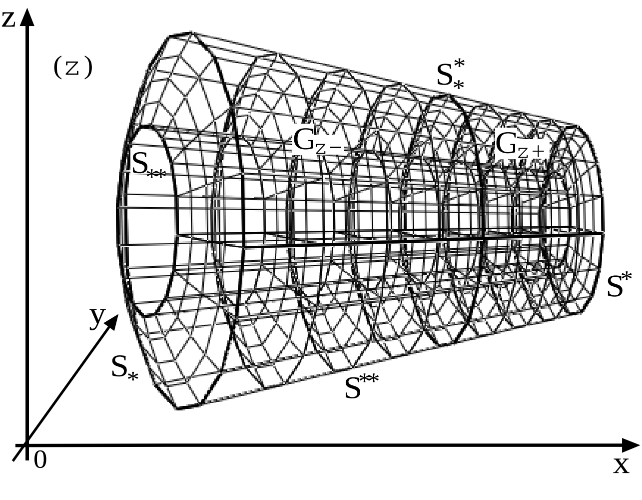

Рис. 1. Просторова фізична область $G_{\mathbf{z}}$

Шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (1) – (3) зводиться до розв'язування в однозв'язній області $G_{\mathbf{z}} \setminus \Gamma$ – криволінійному паралелепіпеді $ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_*(x,y,z)=0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f^*(x,y,z)=0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x,y,z)=0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x,y,z)=0\}$, $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z: \widehat{f}(x,y,z)=0\}$ і розділеному деякою фіксованою еквіпотенціальною поверхнею $EFF_*E_* = \{z: f_*^*(x,y,z)=0\}$ на дві підобласті $G_{\mathbf{z-}} \setminus \Gamma_- = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{\mathbf{z+}} \setminus \Gamma_+ = EFCDE_*F_*C_*D_*$ ($\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$, $\Gamma_- = AEE_*A_*BFF_*B_*$, $\Gamma_+ = EDD_*E_*FCC_*F_*$), які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умови непроникності вздовж поверхні розрізу $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0$ (рис. 2) наступної задачі:

$$\begin{cases} \vec{v} = \kappa \cdot grad\, \varphi,\ div\, \vec{v} = 0; \\ \varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \\ \varphi\Big|_{EFF_*E_{*-}} = \varphi\Big|_{EFF_*E_{*+}} = \varphi_*^*,\ \kappa_1 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{EFF_*E_{*-}} = \kappa_2 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{EFF_*E_{*+}}. \end{cases} \quad (4)$$

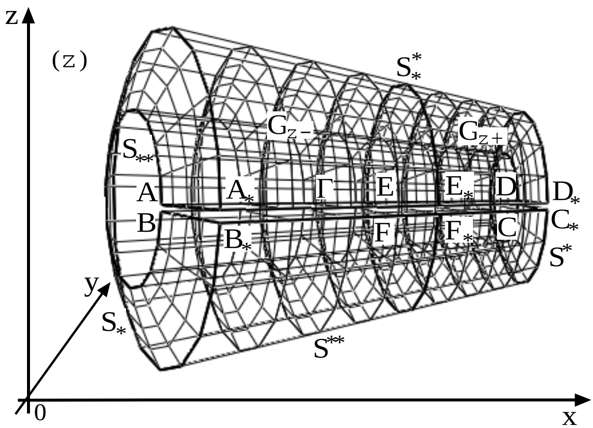

Рис. 2. Просторова фізична область $G_{\mathbf{z}}$ з розрізом Γ

Тоді, аналогічно [6], ввівши функції $\psi = \psi\left(x, y, z\right)$, $\eta = \eta\left(x, y, z\right)$ (просторово комплексно спряжені із функцією $\varphi = \varphi\left(x, y, z\right)$) такі, що $grad\,\varphi = \kappa \cdot grad\,\psi \times grad\,\eta$ [9], задачу (4) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_z \setminus \Gamma$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \left\{ w = \left(\varphi, \psi, \eta\right): \quad \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \quad 0 \le \psi \le Q_*, \; 0 \le \eta \le Q^* \right\}$ (рис. 3), де φ_*^*, Q_*, Q^* – невідомі величини:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \;\; \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x; \;\; \varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \\ \psi\Big|_{ADD_*A_*} = 0, \psi\Big|_{BCC_*B_*} = Q_*, \eta\Big|_{ABCD} = 0, \eta\Big|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*, \\ \varphi\,\Big|_{EFF_*E_{*-}} = \varphi\,\Big|_{EFF_*E_{*+}} = \varphi_*^*, \kappa_1 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{EFF_*E_{*-}} = \kappa_2 \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{EFF_*E_{*+}}. \end{cases} \tag{5}$$

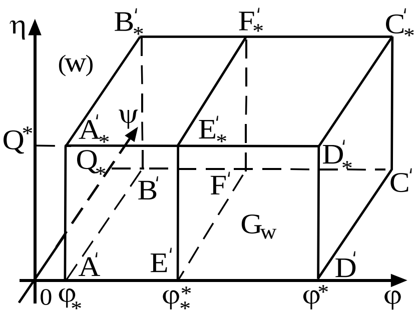

Рис. 3. Просторова область комплексного потенціалу G_w

У випадку, коли функція $\widehat{f}(x, y, z)$, яка визначає розріз, є наперед відомою, обернена до (5) задача на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $G_w \to G_z \setminus \Gamma$ (при невідомих значеннях параметрів φ_*^*, Q_*, Q^*) має вигляд:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa\cdot(y'_\psi\cdot z'_\eta - z'_\psi\cdot y'_\eta),\ y'_\varphi = \kappa\cdot(z'_\psi\cdot x'_\eta - x'_\psi\cdot z'_\eta),\ z'_\varphi = \kappa\cdot(x'_\psi\cdot y'_\eta - y'_\psi\cdot x'_\eta), \\ f_*\left(x(\varphi_*,\psi,\eta), y(\varphi_*,\psi,\eta), z(\varphi_*,\psi,\eta)\right) = 0, \\ f^*\left(x\left(\varphi^*,\psi,\eta\right), y\left(\varphi^*,\psi,\eta\right), z\left(\varphi^*,\psi,\eta\right)\right) = 0, \\ \widehat{f}\left(x(\varphi,0,\eta), y(\varphi,0,\eta), z(\varphi,0,\eta)\right) = 0, \\ \widehat{f}\left(x(\varphi,Q_*,\eta), y(\varphi,Q_*,\eta), z(\varphi,Q_*,\eta)\right) = 0, \\ f_{**}\left(x(\varphi,\psi,0), y(\varphi,\psi,0), z(\varphi,\psi,0)\right) = 0, \\ f^{**}\left(x\left(\varphi,\psi,Q^*\right), y\left(\varphi,\psi,Q^*\right), z\left(\varphi,\psi,Q^*\right)\right) = 0, \\ f_*^*\left(x\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right), y\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right), z\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)\right) = 0, \\ \kappa_1\cdot\lim\limits_{\varphi\to\varphi_*^*+0}\sqrt{x'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + y'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + z'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)} = \\ = \kappa_2\cdot\lim\limits_{\varphi\to\varphi_*^*-0}\sqrt{x'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + y'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + z'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)} \end{cases} \tag{6}$$

і розв’язується аналогічно [3]. У протилежному випадку система (6) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa\cdot(y'_\psi\cdot z'_\eta - z'_\psi\cdot y'_\eta),\ y'_\varphi = \kappa\cdot(z'_\psi\cdot x'_\eta - x'_\psi\cdot z'_\eta),\ z'_\varphi = \kappa\cdot(x'_\psi\cdot y'_\eta - y'_\psi\cdot x'_\eta), \\ f_*\left(x(\varphi_*,\psi,\eta), y(\varphi_*,\psi,\eta), z(\varphi_*,\psi,\eta)\right) = 0, \\ f^*\left(x\left(\varphi^*,\psi,\eta\right), y\left(\varphi^*,\psi,\eta\right), z\left(\varphi^*,\psi,\eta\right)\right) = 0, \\ x(\varphi,0,\eta) = x(\varphi,Q_*,\eta),\ y(\varphi,0,\eta) = y(\varphi,Q_*,\eta), z(\varphi,0,\eta) = z(\varphi,Q_*,\eta), \\ \lim\limits_{\psi\to 0+0} x_\psi = \lim\limits_{\psi\to Q_*-0} x_\psi,\ \lim\limits_{\psi\to 0+0} y_\psi = \lim\limits_{\psi\to Q_*-0} y_\psi,\ \lim\limits_{\psi\to 0+0} z_\psi = \lim\limits_{\psi\to Q_*-0} z_\psi, \\ f_{**}\left(x(\varphi,\psi,0), y(\varphi,\psi,0), z(\varphi,\psi,0)\right) = 0, \\ f^{**}\left(x\left(\varphi,\psi,Q^*\right), y\left(\varphi,\psi,Q^*\right), z\left(\varphi,\psi,Q^*\right)\right) = 0, \\ f_*^*\left(x\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right), y\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right), z\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)\right) = 0, \\ \kappa_1\cdot\lim\limits_{\varphi\to\varphi_*^*+0}\sqrt{x'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + y'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + z'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)} = \\ = \kappa_2\cdot\lim\limits_{\varphi\to\varphi_*^*-0}\sqrt{x'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + y'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right) + z'^2_\varphi\left(\varphi_*^*,\psi,\eta\right)}. \end{cases} \tag{7}$$

Алгоритм розв'язання задачі і числові розрахунки. В області G_w, аналогічно [3], будуємо кусково-рівномірну ортогональну сітку $G_w^\gamma =$

$$=\left\{\left(\varphi_i,\psi_j,\eta_k\right):\ \varphi_i=\begin{cases}\varphi_*+\Delta\varphi_1\cdot i,\ i=\overline{0,n_1},\\ \varphi_*^*+\Delta\varphi_2\cdot(i-n_1),\ i=\overline{n_1+1,n+1};\end{cases}\ \psi_j=\Delta\psi\cdot j,\ \ j=\overline{0,m+1};\right.$$

$$\eta_k=\Delta\eta\cdot k,\quad k=\overline{0,l+1};\quad \Delta\varphi_1=\frac{\varphi_*^*-\varphi_*}{n_1},\quad \Delta\varphi_2=\frac{\varphi^*-\varphi_*^*}{n_2+1},\quad \Delta\psi=\frac{Q_*}{m+1},$$

$$\left.\Delta\eta=\frac{Q^*}{l+1},\ \ \gamma_s=\frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi\cdot\Delta\eta}\ (s=1,2)\right\},$$ де $n=n_1+n_2$, m, $l\in N$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi_s$ ($s=1,2$), $\Delta\psi$, $\Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ, ψ та η. Через $x_{i,j,k}=x(\varphi_i,\psi_j,\eta_k)$, $y_{i,j,k}=y(\varphi_i,\psi_j,\eta_k)$, $z_{i,j,k}=z(\varphi_i,\psi_j,\eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів сітки у $G_z\setminus\Gamma$.

Для числової побудови просторового аналогу кусково-конформного відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область $G_{\mathbf{z}}\setminus\Gamma$ (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги перших трьох рівнянь системи (7) у рівномірній сітковій області $G_{\mathbf{w}}^\gamma$ через ліві та праві різницеві схеми:

$$\begin{cases}x_{i,j,k}=x_{i-1,j,k}+\frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\Big(\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)-\\ -\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)\Big),\\ y_{i,j,k}=y_{i-1,j,k}+\frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\Big(\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)-\\ -\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)\Big),\\ z_{i,j,k}=z_{i-1,j,k}+\frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\Big(\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)-\\ -\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\Big),\\ i=\overline{1,n_1-1},\ s=1,\ i=\overline{n_1+1,n},\ s=2,\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,l},\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\left(\left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\right) - \right. \\ \left. -\left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\right)\right), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\left(\left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\right) - \right. \\ \left. -\left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\right)\right), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4}\cdot\kappa_s\cdot\gamma_s\left(\left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}\right) - \right. \\ \left. -\left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}\right)\left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}\right)\right), \\ i = \overline{1, n_1 - 1},\ \mathrm{s} = 1,\ i = \overline{n_1 + 1, n},\ \mathrm{s} = 2,\ j = \overline{1, m},\ k = \overline{1, l}. \end{cases} \tag{9}$$

Крайові умови, які визначають фізичну область $G_z \setminus \Gamma$, апроксимуємо точково-різницевими рівняннями:

$$\begin{cases} f_*\left(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}\right) = 0,\ f^*\left(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}\right) = 0, \\ f_{**}\left(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}\right) = 0,\ f^{**}\left(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}\right) = 0, \\ x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k},\ y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k},\ z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k},\ y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k},\ i = \overline{0, n+1},\ j = \overline{0, m+1},\ k = \overline{0, l+1}. \end{cases} \tag{12}$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв’язку пригpаничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, які у сітковій області G_w^γ записуються такими числово-аналітичними різницевими рівняннями:

$$\frac{f'_{*x}\left(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}\right)}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} = \frac{f'_{*y}\left(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}\right)}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{*z}\left(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}\right)}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}};$$

$$\frac{f_x^{*\prime}\left(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}\right)}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} = \frac{f_y^{*\prime}\left(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}\right)}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f_z^{*\prime}\left(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}\right)}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}};$$

$$\frac{f'_{**x}\left(x_{i,j,0},y_{i,j,0},z_{i,j,0}\right)}{x_{i,j,1}-x_{i,j,0}}=\frac{f'_{**y}\left(x_{i,j,0},y_{i,j,0},z_{i,j,0}\right)}{y_{i,j,1}-y_{i,j,0}}=\frac{f'_{**z}\left(x_{i,j,0},y_{i,j,0},z_{i,j,0}\right)}{z_{i,j,1}-z_{i,j,0}};$$

$$\frac{f_x^{**\prime}\left(x_{i,j,l+1},y_{i,j,l+1},z_{i,j,l+1}\right)}{x_{i,j,l}-x_{i,j,l+1}}=\frac{f_y^{**\prime}\left(x_{i,j,l+1},y_{i,j,l+1},z_{i,j,l+1}\right)}{y_{i,j,l}-y_{i,j,l+1}}=\frac{f_z^{**\prime}\left(x_{i,j,l+1},y_{i,j,l+1},z_{i,j,l+1}\right)}{z_{i,j,l}-z_{i,j,l+1}},$$

$$i=\overline{0,n+1},\ j=\overline{0,m+1},\ k=\overline{0,l+1}. \tag{13}$$

Координати вузлів на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_* уточнюємо, використовуючи наступні різницеві рівняння:

$$\kappa_1\cdot\Delta\varphi_2\cdot\sqrt{\left(x_{n_1+1,j,k}-x_{n_1,j,k}\right)^2+\left(y_{n_1+1,j,k}-y_{n_1,j,k}\right)^2+\left(z_{n_1+1,j,k}-z_{n_1,j,k}\right)^2}=$$

$$=\kappa_2\cdot\Delta\varphi_1\cdot\sqrt{\left(x_{n_1,j,k}-x_{n_1-1,j,k}\right)^2+\left(y_{n_1,j,k}-y_{n_1-1,j,k}\right)^2+\left(z_{n_1,j,k}-z_{n_1-1,j,k}\right)^2}, \tag{14}$$

$$f_*^*\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)=0,\quad j=\overline{0,m+1},\ k=\overline{0,l+1} \tag{15}$$

та

$$\frac{f'^*_{*x}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{x_{n_1,j,k}-x_{n_1-1,j,k}}=\frac{f'^*_{*y}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{y_{n_1,j,k}-y_{n_1-1,j,k}}=$$

$$=\frac{f'^*_{*z}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{z_{n_1,j,k}-z_{n_1-1,j,k}},\ j=\overline{0,m+1},\ k=\overline{0,l+1}, \tag{16}$$

або

$$\frac{f'^*_{*x}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{x_{n_1,j,k}-x_{n_1+1,j,k}}=\frac{f'^*_{*y}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{y_{n_1,j,k}-y_{n_1+1,j,k}}=$$

$$=\frac{f'^*_{*z}\left(x_{n_1,j,k},y_{n_1,j,k},z_{n_1,j,k}\right)}{z_{n_1,j,k}-z_{n_1+1,j,k}},\ j=\overline{0,m+1},\ k=\overline{0,l+1}. \tag{17}$$

Інваріанти відображення γ_s ($s=1,2$) криволінійних паралелепіпедів $G_{\mathbf{z-}}$ і $G_{\mathbf{z+}}$ є невідомими і визначаються в процесі розрахунку аналогічно [6]. Формули для наближеного знаходження даних величин мають вигляд:

$$\gamma_1=\frac{\kappa_1}{n_1\left(m+1\right)\left(l+1\right)}\sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l}\gamma_{i,j,k},\ \gamma_2=\frac{\kappa_2}{\left(n_2+1\right)\left(m+1\right)\left(l+1\right)}\sum_{i,j,k=0}^{n_2,m,l}\gamma_{n_1+i,j,k}, \tag{18}$$

де $$\gamma_{i,j,k}=4\Bigg(\sqrt{\left(x_{i+1,j,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k}-z_{i,j,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k}-x_{i,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k}-y_{i,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k}-z_{i,j+1,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1}-x_{i,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k+1}-y_{i,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k+1}-z_{i,j,k+1}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k+1}\right)^2}\Bigg)/$$
$$/\Bigg(\Bigg(\sqrt{\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k}-z_{i+1,j,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j,k+1}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j,k+1}\right)^2}\Bigg)\times$$
$$\times\Bigg(\sqrt{\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k+1}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k+1}-z_{i+1,j,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j+1,k}\right)^2}\Bigg)\Bigg).$$

Невідомі величини φ_*^*, Q аналогічно [6] знаходяться за формулами:

$$\varphi_*^*=\frac{n_1\cdot\gamma_1\cdot\varphi^*+\left(n_2+1\right)\cdot\gamma_2\cdot\varphi_*}{n_1\cdot\gamma_1+\left(n_2+1\right)\cdot\gamma_2}, \qquad (19)$$

$$Q=\Delta\varphi_1\cdot\frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_1}\ \text{(або}\ Q=\Delta\varphi_2\cdot\frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_2}\text{)}, \qquad (20)$$

а величини Q_*, Q^* відповідно за наступними формулами:

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q\cdot(m+1)}{\tilde{\gamma}\cdot(l+1)}},\ Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}\cdot Q\cdot(l+1)}{m+1}}, \tag{21}$$

де
$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{i,j,k} = \Bigg(&\sqrt{\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k+1}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k+1}-z_{i+1,j,k}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j+1,k}\right)^2}\Bigg)/\\
/\Bigg(&\sqrt{\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j,k}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k}-z_{i+1,j,k}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j,k+1}\right)^2}+\\
&+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j,k+1}\right)^2}\Bigg).\end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (10) – (21) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин γ_s ($s=1,2$), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної кусково-рівномірної сітки у вихідній області G_z^{γ}. А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_w^{γ} (n_1, n_2, m та l), параметр ε, що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)}\right)$, $j=\overline{0,m+1}$, $k=\overline{0,l+1}$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n_1-1}$, $k=\overline{0,l+1}$, $\left(x_{n_1+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1 i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}\right)$,

$i=\overline{1,n_2}$, $k=\overline{0,l+1}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)},y_{i,j,0}^{(0)},z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)},y_{i,j,l+1}^{(0)},z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n_1-1}$, $j=\overline{1,m}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)},y_{i,j,0}^{(0)},z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,j,l+1}^{(0)},y_{n_1+i,j,l+1}^{(0)},z_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n_2}$, $j=\overline{1,m}$ і вузлів поверхні розділу $\left(x_{n_1,j,k}^{(0)},y_{n_1,j,k}^{(0)},z_{n_1,j,k}^{(0)}\right)$, $j=\overline{0,m+1}$, $k=\overline{0,l+1}$ (так, щоб виконувались рівності відповідно (12) і (15)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів обох областей $\left(x_{i,j,k}^{(0)},y_{i,j,k}^{(0)},z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n_1-1}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ і $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(0)},y_{n_1+i,j,k}^{(0)},z_{n_1+i,j,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n_2}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$, за формулами (18) знаходимо початкові наближення $\gamma_s^{(0)}=\gamma_s\left(x_{i,j,k}^{(0)},y_{i,j,k}^{(0)},z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ інваріантів відображення γ_s ($s=1,2$). Уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(g)},y_{i,j,k}^{(g)},z_{i,j,k}^{(g)}\right)$, $i=\overline{1,n_1-1}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ і $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(g)},y_{n_1+i,j,k}^{(g)},z_{n_1+i,j,k}^{(g)}\right)$, $i=\overline{1,n_2}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ проводимо на основі почергового розв'язання систем (10) і (11) із використанням значень з попереднього кроку ітерації g ($g=0,1,\ldots$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (12) і (13), координати вузлів поверхні розділу на основі рівнянь (14), (15) та почергового використання (16) і (17). Потім знаходимо нові наближення γ_s ($s=1,2$) за формулами (18), величин φ_*^*, Q, Q_* і Q^* – за формулами (19) – (21) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і величин φ_*^*, Q відносно кроку ітерації відповідно

$$\max_{x_{i,j,k},\,y_{i,j,k},\,z_{i,j,k}\in\partial G_z}\left(\left|x_{i,j,k}{}^{(g+1)}-x_{i,j,k}{}^{(g)}\right|,\left|y_{i,j,k}{}^{(g+1)}-y_{i,j,k}{}^{(g)}\right|,\right.$$
$$\left.\left|z_{i,j,k}{}^{(g+1)}-z_{i,j,k}{}^{(g)}\right|\right)<\varepsilon\,,\ \left|\varphi_*^{*(g+1)}-\varphi_*^{*(g)}\right|<\varepsilon\,,\ \left|Q^{(g+1)}-Q^{(g)}\right|<\varepsilon\,. \quad (22)$$

Якщо умови (22) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів обчислюємо нев'язку перших трьох рівнянь системи (8)

$\delta=\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}$, де $\delta_1=\max\limits_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq n_1}}^{n,m,l}\left|\left((x_{i+1,j,k}-x_{i-1,j,k})-\frac{\kappa_s\cdot\gamma_s}{2}\cdot\left((y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k})\times\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.\times(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1})-(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1})\right)\right)\right|$, $\delta_2=\max\limits_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq n_1}}^{n,m,l}\left|\left((y_{i+1,j,k}-y_{i-1,j,k})-\right.\right.$

$\left.\left.-\frac{\kappa_s\cdot\gamma_s}{2}\cdot\left((z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1})-(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1})\right)\right)\right|$, $\delta_3=$

$=\max\limits_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq n_1}}^{n,m,l}\left|\left((z_{i+1,j,k}-z_{i-1,j,k})-\frac{\kappa_s\cdot\gamma_s}{2}\cdot\left((x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1})-(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k})\times\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.\times(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1})\right)\right)\right|$, $\quad s=\begin{cases}1,\ i=\overline{1,n_1-1},\\ 2,\ i=\overline{n_1+1,n}.\end{cases}$ Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^{γ} та розв'язуємо задачу заново.

Для одержаних вузлів розрахункової гідродинамічної сітки на основі рівняння руху (1) величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки G_z^{γ} знаходимо за формулою $v_{i,j,k}=\sqrt{v_{x\,i,j,k}^2+v_{y\,i,j,k}^2+v_{z\,i,j,k}^2}$, $i=\overline{1,n_1-1}$, $s=1$; $i=\overline{n_1+1,n}$, $s=2$; $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$, $v_{x\,i,j,k}=2\frac{\kappa_s\cdot\Delta\varphi_s}{J_{i,j,k}}\times$

$\times\left(\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)-\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)\right)$,

$v_{y\,i,j,k}=2\frac{\kappa_s\cdot\Delta\varphi_s}{J_{i,j,k}}\left(\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)-\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-\right.\right.$

$\left.\left.-z_{i,j,k-1}\right)\right)$, $v_{z\,i,j,k}=2\frac{\kappa_s\cdot\Delta\varphi_s}{J_{i,j,k}}\left(\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)-\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\times\right.$

$\left.\times\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\right)$, $J_{i,j,k}=\left(x_{i+1,j,k}-x_{i-1,j,k}\right)\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)+$

$+\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(y_{i+1,j,k}-y_{i-1,j,k}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)+\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1}-\right.$

$\left.-y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i+1,j,k}-z_{i-1,j,k}\right)-\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i+1,j,k}-z_{i-1,j,k}\right)-$

$-\left(x_{i+1,j,k}-x_{i-1,j,k}\right)\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)-\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i+1,j,k}-\right.$ $\left.-y_{i-1,j,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)$. Формули для знаходження величин швидкостей у граничних вузлах і на поверхні розділу отримуються аналогічно [2].

Програмна реалізація алгоритму та числові приклади. Вище описаний алгоритм реалізований у вигляді пакету програм для сучасних багатоядерних ПЕОМ під управлінням ОС Windows, який дозволяє отримувати як числові результати роботи алгоритму, так і візуальне їх представлення у вигляді графіків, рисунків тощо. Для перевірки його коректної роботи проведено числовий експеримент побудови просторового фільтраційного поля для фільтру із двошаровою засипкою, форму якого описано поверхнями $f_*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$, $f^*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $f_{**}(x,y,z)=32.1632\cdot x^2-y^2-z^2$, $f^{**}(x,y,z)=7.5487\cdot x^2-y^2-z^2$ і поверхнею розділу $f_*^*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2.25$. При цьому було побудовано розрахункову динамічну сітку в G_z (рис. 3) при $n_1=n_2=16$, $m=40$, $l=5$ (параметри n_1, n_2, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Крім того, при $\varphi_*=0$, $\varphi^*=4088.6$, $\kappa_1=5.6$ ì /äî áó, $\kappa_2=8.4$ ì /äî áó, ефективних пористостях завантажень $\sigma_1=0.35$ і $\sigma_2=0.25$ знайдено фільтраційну витрату $Q=7.68$ ì ^{3}/ãî ä, величину потенціалу на поверхні розділу $\varphi_*^*=2453.1$, обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ (рис. 4), що відповідають величині середньої швидкості фільтрування води 10 м/год. Нев'язка δ числових розрахунків становить 0.0003.

Висновки і зауваження. Побудовано алгоритм числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення двошарових кусково-однорідних двозв'язних областей, які обмежені двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділені деякою фіксованою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, що характеризуються сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди, зокрема, отримано вирази для знаходження значень потенціалу на відповідній поверхні розділу підобластей, повної фільтраційної витрати, розрахунку поля швидкостей тощо.

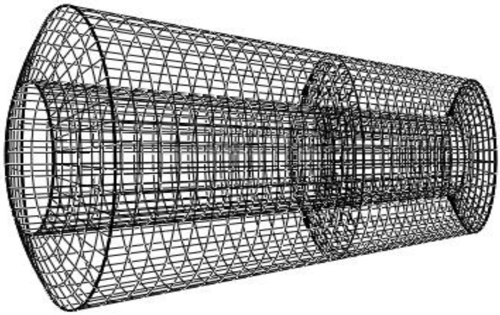

Рис. 3. Розрахована сіткова область G_z

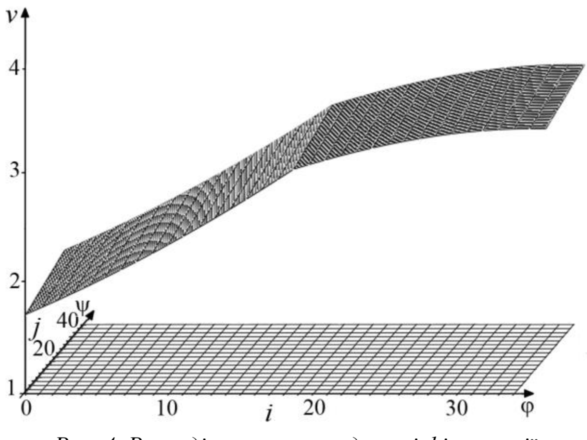

Рис. 4. Розподіл величин швидкості фільтрації вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \overline{\eta}_4$ для області G_z

Аналіз отриманих результатів числового експерименту свідчить про збіжність запропонованого алгоритму та можливість його використання на практиці для отримання розрахункових гідродинамічних сіток. Зокрема, отриманий алгоритм дозволить значно полегшити розв’язання просторових сингулярно збурених задач типу «фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін», що описують процеси масопереносу, фільтрування у двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах завдяки використанню ідеї переходу від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділеної деякою фіксованою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, до відповідної області комплексного потенціалу [10].

1. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
3. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
4. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими еквіпотенціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 84-92.
5. *Климюк Ю. Є.* Числова реалізація аналога методу конформних відображень побудови просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідною засипкою / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 63-75.
6. *Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.* Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 51-62.
7. *Павловский Н. Н.* Движение грунтовых вод. Собр. сочинений: В 2 т. / Н. Н. Павловский. – М.-Л. : Изд- во АН СССР, 1956. – Т. 2, 771 с.
8. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-Кочиной П. Я. – Москва : Наука, 1969. – 546 с.
9. *Рауз. Х.* Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

10. *Сівак В. М.* Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Збірн. наук. праць. – Вип. 34. – Рівне : НУВГП. – 2009. – С. 252-261.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: klimyuk@ukr.net
dmitry@prigornitsky.com

Надійшла 17.03.2013

Климюк Ю. Е., Пригорницкий Д. А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ДВУХСЛОЙНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД // *Разработан подход к математическому моделированию пространственных процессов фильтрации жидкостей в двухслойных кусочно-однородных насыщенных пористых средах на примере модельных областей, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и двумя поверхностями тока, разделенных некоторой заданной эквипотенциальной поверхностью на две подобласти, что характеризируются различными постоянными коэффициентами фильтрации. При этом в соответствующем алгоритме численного решения пространственных аналогов обратных краевых задач на кусочно-конформные отображения двухслойных кусочно-однородных двусвязных областей с разрезом на соответствующие прямоугольные параллелепипеды получены выражения для нахождения значений фильтрационного потенциала на поверхности разделения подобластей, полной фильтрационного расхода, расчета поля скоростей и других характеристик процесса. Приведены результаты численных расчетов.*

Klymyuk Yu. Ye., Prigornitsky D. A. MATHEMATICAL MODELLING SPATIAL PROCESSES FILTRATION FLUID IN ONE CLASS TWO-LAYER PIECEWISE-HOMOGENEOUS SATURATED POROUS MEDIA // *The technique of mathematical modeling of spatial processes filtration fluid in two-layer piecewise homogeneous saturated porous media as an example of model domains, bounded by two equipotential surfaces and two surfaces of current, separated a some specified equipotential surface into two subdomains, which are characterized by different constant coefficients filtration, is developed. This case in the appropriate algorithm for the numerical solution of spatial analogues inverse boundary value problems on piecewise-conformal mappings of two-layer piecewise-homogeneous doubly connected domains with a cut to the appropriate rectangular parallelepipeds, expressions for finding the values of filtration capacity at the surface separation subdomains, full filtration flow, the calculation of the velocity field and other characteristics process is get. The results of numerical calculations are presented.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 10 (19)

Відповідальний за випуск
Бомба А. Я.

Підписано до друку __.__.2013 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № ___/1.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12