Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 11 (20)

Рівне-2014

“Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика” публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

“Волынский математический вестник. Серия прикладная математика”.
The “Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series”.

Редакційна колегія

Барановський С.В.
Бейко І.В.
Бомба А.Я. *(головний редактор)*
Булавацький В.М.
Власюк А.П.
Войтович М.М.
Гаращенко Ф.Г.
Гарбарчук В.І.
Джунь Й.В.
Каштан С.С.
Климюк Ю.Є. *(технічний секретар)*
Кратко М.І.
Кузьменко А.П.
Кундрат М.М.
Ляшенко І.М.
Мартинюк П.М. *(науковий секретар)*
Недашковський М.О.
Новаковскі А.
Новіков О.М.
Петрівський Я.Б.
Пригорницький Д.О.
Присяжнюк І.М.
Савула Я.Г.
Свідзинський А.В.
Скопецький В.В. *(консультант)*
Сяський А.О.
Турбал Ю.В.
Чикрій А.О.
Янчук П.С.
Ярощак С.В. *(науковий секретар)*

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 10 від 28 травня 2015 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@ukr.net.

ISBN 966-7281-02-8
© РДГУ, 2014

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (19 – 22 лютого 2015 року, Рівне).

ОРГАНІЗАТОРИ

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Національний університет водного господарства та природокористування
Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янчука
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Наукове товариство ім. Т. Шевченка
Інститут механіки і прикладної інформатики
Університет Казимира Великого в Бидгощі (Польща)

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ

- Сергієнко І.В. – співголова
- Кушнір Р.М. – співголова
- Ляшко С.І. – співголова
- Бомба А.Я. – заступник голови
- Власюк А.П.
- Базилевич Р.П.
- Буй Д.Б.
- Булавацький В.М.
- Воробель Р.А.
- Гандель Ю.В.
- Гаращенко Ф.Г.
- Грищенко О.Ю.
- Кузьменко А.П.
- Куссуль Н.М.
- Мартинюк П.М.
- Міщенко В.О.
- Наконечний О.Г.
- Турбал Ю.В.
- Чапля Є.Я.
- Чикрій А.О.
- Цєшко М.
- Кубік Ю.

Зміст

ПАМ`ЯТІ АКАДЕМІКА В. С. МИХАЛЕВИЧА *6*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Бомба А. Я., Крока Л. Л. *Числові методи квазіконформних відображень розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів* *24*

Вовк О. М. *Термопружний стан термочутливих півпросторів за дії миттєвого джерела тепла на межі контакту* *34*

Герус А. В., Мартинюк П. М., Чеховська Н. В. *Чисельне розв'язання одновимірної задачі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактної суфозії ґрунтів* *45*

Журавчак Л. М., Крук О. С. *Математичне моделювання процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах з нелінійною поведінкою матеріалів зон* *55*

Каплун А. В., Крива Н. Р., Цимбалюк Л. І. *Двоперіодична задача про пластичне відшаровування жорсткого волокна ромбічного перерізу* *68*

Кот В. В. *Математичне моделювання контактної взаємодії ортотропної пластинки з круговим отвором і круглого диска через систему двох тонких пружних ребер* *76*

Присяжнюк О. В. *Сингулярно збурені процеси багатокомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в нанопористих середовищах з врахуванням терморежиму* *87*

Шупіков О. М., Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В., Долгополова Н. В., Свєт Є. В. *Моделювання термопружного стану багатошарового оскління під впливом нестаціонарних температурних полів* *100*

Ярощак С. В. *Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термо-гравітаційного дренажу* *117*

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

Бричак А. А., Ванин В. А. *Применение метода конечных элемен-*

тов с разрывными базисными функциями к решению задач газовой динамики *129*

Грицько Б. Є. *Чисельно-аналітичний підхід до розв'язування задач теорії потенціалу в кусково-однорідних об'єктах з урахуванням умов неідеального контакту* *143*

Сапужак О. Я., Сироєжко О. В. *Використання методу граничних елементів у задачах електророзвідки постійним струмом* *156*

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Бахрушин В. Є., Ігнахіна М. О., Назаренко О. О. *Перевірка адекватності нелінійних регресійних моделей засобами мови R* *167*

Буй Д. Б., Пузікова А. В. *Аксіоматика багатозначних залежностей табличних баз даних: коректність, повнота, критерій повноти* *175*

Варламова Н. В., Гахов А. В., Мищенко В. О. *Успешность программной диверсности в разработке систем и персональные характеристики разработчика: концептуальная модель* *194*

Шпортько О. В. *Використання альтернативних стиснутих блоків для кожного блоку даних у форматі PNG* *213*

Jarynowski A. *Which activation function of cooperation describes human behavior?* *229*

УДК 519.6

Бомба А.Я., Крока Л.Л.

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КВАЗІКОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КОЕФІЦІЄНТА ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОВІДНОСТІ ЗА ДАНИМИ ТОМОГРАФІЇ ПРИКЛАДЕНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Анотація. *На основі числового методу квазіконформних відображень запропоновано алгоритм реконструкції коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів.*

Ключові слова: *томографія прикладених потенціалів, квазіконформні відображення, регуляризація, ідентифікація.*

Вступ. Важливою проблемою скринінгу (зокрема і в онкології) є компроміс між інформативністю скринінгових досліджень та потенційною небезпекою для організму пацієнта від використання інвазивних засобів. Крім того, будь-якому методу притаманні свої обмеження, а конструкція й особливості функціонування більшості традиційних технічних засобів спричиняють низку обмежень, пов'язаних зі станом здоров'я пацієнта та його антропометричними даними (наявність металевих протезів, кардіостимуляторів, надмірна вага тощо часто стають причиною відмови від томографії) [1]. Альтернативним засобом скринінгу є томографія прикладених потенціалів (ТПП або електроімпедансна томографія) [1], яка в якості зондуючого агента використовує електричний струм. Діагностична цінність методу зумовлена тим, що різні біологічні тканини характеризуються діапазоном характерних значень електричних властивостей [2]. Зокрема, доброякісні та злоякісні новоутворення мають аномально-високу провідність, що дозволяє їх локалізувати. Попри явні переваги методу та те, що перші роботи присвячені практичним схемам розв'язання відповідних задач реконструкції, були опубліковані ще у 80-х роках XX ст. [3], на даний час зображення, одержані за

© А. Я. Бомба, Л. Л. Крока, 2015

даними ТПП, ще не володіють високою роздільною здатністю, що в свою чергу уповільнює впровадження ТПП у медичну практику, та вимагає розробки нових і вдосконалення існуючих методів опрацювання експериментальних даних.

Математична модель ТПП. Нехай G – двовимірна область, що відповідає деякому томографічному перерізу, обмежена гладкою замкненою кривою $\partial G=\{(x,y):x=x(\tau),y=y(\tau)\}$, де $x(\tau),y(\tau)$ – L-періодичні визначені функції, $0<L<\infty$.

Припустимо, що для томографічного перерізу G було проведено $p\in N$ експериментів, $G_z^{(p)}$ (див. рис. 1, а) – відповідні їм фізичні поля, для яких A_pB_p, C_pD_p – контактні поверхні $\left(A_p,B_p,C_p,D_p\in\partial G\right)$. Інжекцією струму через G керуватимемо через набір $\left\{\tau_1^p,\ \tau_2^p,\tau_3^p,\tau_4^p\right\}$, де $A_p=\left(x\left(\tau_1^p\right),y\left(\tau_1^p\right)\right)$, $B_p=\left(x\left(\tau_2^p\right),y\left(\tau_2^p\right)\right)$, $C_p=\left(x\left(\tau_3^p\right),y\left(\tau_3^p\right)\right)$, $D_p=\left(x\left(\tau_4^p\right),y\left(\tau_4^p\right)\right)$. Зокрема, $0<\left|\tau_s^{p-1}-\tau_s^p\right|<L$, де $s=\overline{1,4}$. Відповідні границі для кожного експерименту позначатимемо через $\partial G^{(p)}$.

У даній роботі під моделлю шунта для ТПП (shunt model) [4] розглядатимемо задачу на відшукання функції $\varphi=\varphi(x,y)$ за умови ідентифікації коефіцієнта електричної провідності (КЕП) $\sigma=\sigma(x,y)$:

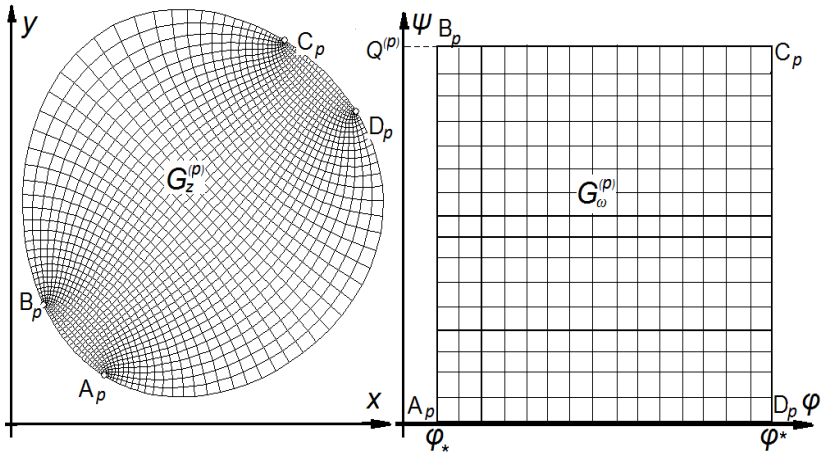
$$div\left(\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\right)=0,\quad (x,y)\in G\,, \tag{1}$$

$$\varphi^{(p)}\Big|_{\partial G^{(p)}}=f_p(x,y),\quad \sigma\cdot\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial n}\Big|_{\partial G^{(p)}}=g^{(p)}\left(x,y\right). \tag{2}$$

Тут $p=\overline{0,p}$; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі;

$$f_p(x,y)=\begin{cases}\varphi_*^{(p)},\ (x,y)\in A_pB_p,\\ \overline{\varphi}^{(p)}(x,y),\ (x,y)\in B_pC_p,\\ \varphi^{*(p)},\ (x,y)\in C_pD_p,\\ \underline{\varphi}^{(p)}(x,y),\ (x,y)\in A_pD_p;\end{cases}\qquad g_p(x,y)=\begin{cases}\underline{q}^{(p)}(x,y),\ (x,y)\in A_pB_p,\\ 0,\ (x,y)\in B_pC_p,\\ \overline{q}^{(p)}(x,y),\ (x,y)\in C_pD_p,\\ 0,\ (x,y)\in A_pD_p;\end{cases}$$

$\overline{\varphi}_p(x,y)$, $\underline{\varphi}_p(x,y)$, $\overline{q}(x,y)$, $\underline{q}(x,y)$ – визначені неперервні монотонні функції $\Big(\varphi_{p*}\le\underline{\varphi}^{(p)}(x,y)\le\varphi_p^{\ *}$, $\underline{\varphi}^{(p)}(x(\tau_{A_p}),y(\tau_{A_p}))=\varphi_{p*}$, $\underline{\varphi}^{(p)}(x(\tau_{D_p}),y(\tau_{D_p}))=\varphi^*_{\ p}$; $\varphi_{p*}\le\overline{\varphi}^{(p)}(x,y)\le\varphi_p^{\ *}$, $\overline{\varphi}^{(p)}(x(\tau_{B_p}),y(\tau_{B_p}))=\varphi_{p*}\Big)$.



а) *б)*

Рис. 1. Фізична (а) та відповідна їй область квазікомплексного потенціалу (б)

Увівши функцію течії $\psi=\psi(x,y)$, комплексно спряжену до $\varphi=\varphi(x,y)$, відповідно, перейдемо від (1), (2) до серії більш загальних крайових задач на квазіконформні відображення фізичної області $G_z^{(p)}$ на область комплексного потенціалу $G_\omega^{(p)}$ (рис. 1, б) за умови ідентифікації коефіцієнта електричної провідності (КЕП) $\sigma=\sigma(x,y)$:

$$\sigma\cdot\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial x}=\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial y},\quad \sigma\cdot\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial y}=-\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial x},\qquad (3)$$

$$\varphi^{(p)}\Big|_{A_pB_p}=\varphi_{p*},\varphi^{(p)}\Big|_{C_pD_p}=\varphi_p^{\ *},\ \psi^{(p)}\Big|_{A_pD_p}=0,\ \psi^{(p)}\Big|_{B_pC_p}=Q^{(p)},\quad (4)$$

$$\int\limits_{MN}\sigma\cdot\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial n}=Q^{(p)},M\in A_pC_p,N\in A_pD_p,$$

$$\varphi^{(p)}\Big|_{B_pC_p}=\overline{\varphi}^{(p)}\left(x,y\right),\ \varphi^{(p)}\Big|_{A_pD_p}=\underline{\varphi}^{(p)}\left(x,y\right),\quad (5)$$

$$\psi^{(p)}\Big|_{C_pD_p}=\overline{\psi}^{(p)}\left(x,y\right),\ \psi^{(p)}\Big|_{A_pB_p}=\underline{\psi}^{(p)}\left(x,y\right),\quad (6)$$

де $G_\omega^{(p)}=\{\ (\varphi,\psi):\varphi_{p*}\le\varphi\le\varphi_p^{\ *},\ 0\le\psi\le Q^{(p)}\}$, $\underline{\psi}^{(p)}(L)=\int\limits_{AL}q(x,y),L\in A_pB_p$;

$\overline{\psi}^{(p)}(L)=\int\limits_{CL}q(x,y),L\in C_pD_p$; $0\le\overline{\psi}^{(p)}(x,y)\le Q^{(p)}$, $\overline{\psi}^{(p)}(x(\tau_{A_p}),y(\tau_{A_p}))=0$,

$\overline{\psi}^{(p)}(x(\tau_{B_p}),y(\tau_{B_p}))=Q^{(p)}$; $0\le\underline{\psi}^{(p)}(x,y)\le Q^{(p)}$, $\underline{\psi}^{(p)}(x(\tau_{D_p}),y(\tau_{D_p}))=0$,

$\underline{\psi}^{(p)}(x(\tau_{C_p}),y(\tau_{C_p}))=Q^{(p)}$; $Q^{(p)}$ – потік векторного поля (струм) через контактні поверхні $A_pB_p\ \left(C_pD_p\right)$.

Числовий метод квазіконформних відображень. Специфіка задач реконструкції для ТПП накладає певні вимоги на застосовувані чисельних методів. Для розв'язання прямої задачі ТПП [7] (3), (4) найбільш поширився підхід з використанням методу скінченних елементів, який не задовольняє умову неперервності, чим порушує закон збереження на елементі сітки і області в цілому [8]. Відтак для дискретизації функцій і параметрів математичної моделі ТПП з урахуванням принципу електрогідродинамічної аналогії використаємо метод скінченних різниць, а для відшукання невідомої функції електричного потенціалу $\varphi(x,y)$ – алгоритм чисельного розв'язання крайових задач на квазіконформні відображення областей різної геометричної конфігурації, обмежених лініями течії та еквіквазіпотенціальними лініями [5, 6] (з урахуванням переваг методу, описаних в [6]). Аналогічно згаданим роботам, функції $\varphi=\varphi(x,y)$ та $\psi=\psi(x,y)$ знайдемо в результаті розв'язання відповідних (3)-(6) крайових задач на обернені квазіконформні відображення $G_\omega^{(p)}\to G_z^{(p)}$ відносно $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ згідно алгоритмів, за-

пропонованих в [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\sigma}\cdot\dfrac{\partial x^{(p)}}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\sigma\cdot\dfrac{\partial x^{(p)}}{\partial\psi}\right)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\sigma}\cdot\dfrac{\partial y^{(p)}}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\sigma\cdot\dfrac{\partial y^{(p)}}{\partial\psi}\right)=0,\ \forall(\varphi,\psi)\in G_{\omega}^{(p)}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x^{(p)}(\varphi_{p*},\psi)=x(\tau), y^{(p)}(\varphi_{p*},\psi)=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_1^p;\tau_2^p\right], \\ x^{(p)}(\varphi,Q^{(p)})=x(\tau), y^{(p)}(\varphi,Q^{(p)})=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_2^p;\tau_3^p\right], \\ x^{(p)}(\varphi_p{}^*,\psi)=x(\tau), y^{(p)}(\varphi_p{}^*,\psi)=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_3^p;\tau_4^p\right], \\ x^{(p)}(\varphi,0)=x(\tau), y^{(p)}(\varphi,0)=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_4^p;\tau_1^p+L\right], \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x'(\tau)\dfrac{\partial y^{(p)}}{\partial\varphi}-y'(\tau)\dfrac{\partial x^{(p)}}{\partial\varphi}=0,\ \tau\in\left[\tau_1^p;\tau_2^p\right]\cup\left[\tau_3^p;\tau_4^p\right], \\ x'(\tau)\dfrac{\partial y^{(p)}}{\partial\psi}-y'(\tau)\dfrac{\partial x^{(p)}}{\partial\psi}=0,\ \tau\in\left[\tau_2^p;\tau_3^p\right]\cup\tau\in\left[\tau_4^p;\tau_1^p+L\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Різницеві аналоги рівнянь (7) (виконання яких вимагаємо лише у внутрішніх точках області $G_{\omega}^{(p)}$) та умов (8)-(9) у відповідній сітковій області $G_{\omega}^{\gamma}=\Big\{\left(\varphi_i,\psi_j\right):\ \varphi_i=\varphi_*+\Delta\varphi\cdot i,\quad i=\overline{0,m+1};$

$\psi_j=\Delta\psi\cdot j,\quad j=\overline{0,n+1};\quad \Delta\varphi=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{m+1},\quad \Delta\psi=\frac{Q^{(p)}}{n+1},\quad \gamma=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi},\quad m,\quad n\in\mathbf{N}\Big\}$ запишемо (у випадку неперервної залежності шуканого коефіцієнта $\kappa\left(\varphi,\psi\right)$ від своїх аргументів) у наступному вигляді:

$$x_{i+1,j}+x_{i-1,j}-2\left(1+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\right)x_{i,j}+\frac{\Delta\varphi}{2}\Big(\gamma\kappa_{i,j}\kappa_{\psi\ i,j}'\left(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}\right)-$$

$$-\frac{\kappa_{\varphi\ i,j}'}{\kappa_{i,j}}\left(x_{i+1,j}-x_{i-1,j}\right)+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\left(x_{i,j-1}+x_{i,j+1}\right)\Big)=0,$$

$$y_{i+1,j}+y_{i-1,j}-2\left(1+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\right)y_{i,j}+\gamma^2\kappa_{i,j}^2\left(y_{i,j-1}+y_{i,j+1}\right)+$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\gamma\kappa_{i,j}\kappa'_{\psi\,i,j}(y_{i,j+1}--y_{i,j-1})-\frac{\kappa'_{\varphi\,i,j}}{\kappa_{i,j}}\left(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}\right)\right)=0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n};$$

$$\begin{cases} x_{0,j}^{(p)}=x(\tau), y_{0,j}^{(p)}=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_1^p;\tau_2^p\right], \\ x_{i,n+1}^{(p)}=x(\tau), y_{i,n+1}^{(p)}=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_2^p;\tau_3^p\right], \\ x_{m+1,j}^{(p)}=x(\tau), y_{m+1,j}^{(p)}=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_3^p;\tau_4^p\right], \\ x_{1,0}^{(p)}=x(\tau), y_{i,0}^{(p)}=y(\tau),\ \tau\in\left[\tau_4^p;\tau_1^p+L\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(p)}{}'(\tau)\left(y_{1,j}^{(p)}-y_{0,j}^{(p)}\right)-y^{(p)}{}'(\tau)\left(x_{1,j}-x_{0,j}^{(p)}\right)=0, \tau\in\left[\tau_1^p;\tau_2^p\right], \\ x^{(p)}{}'(\tau)\left(y_{m,j}^{(p)}-x_{i,m+1}^{(p)}\right)-y^{(p)}{}'(\tau)\left(x_{m,j}-x_{i,m+1}^{(p)}\right)=0,\ \tau\in\left[\tau_3^p;\tau_4^p\right], \\ x'(\tau)\left(y_{i,n}^{(p)}-x_{i,n+1}^{(p)}\right)-y'(\tau)\left(x_{i,n}^{(p)}-x_{i,n+1}^{(p)}\right)=0, \tau\in\left[\tau_2^p;\tau_3^p\right], \\ x'(\tau)\left(y_{i,1}^{(p)}-y_{i,0}^{(p)}\right)-y'(\tau)\left(x_{i,1}^{(p)}-x_{i,0}^{(p)}\right)=0, \tau\in\left[\tau_4^p;\tau_1^p+L\right], \end{cases}$$

де γ - квазіконформний інваріант; $x_{i,j}=x^{(p)}(\varphi_i,\psi_j)$, $y_{i,j}^{(p)}=y^{(p)}(\varphi_i,\psi_j)$, $j=\overline{0,n+1}, i=\overline{0,m+1}.$

Розв’язання кожної з p прямих задач (7)–(9) може бути здійснено аналогічно алгоритмам, запропонованим в [5-6].

Задача реконструкції КЕП за даними ТПП. За умови неперервності на КЕП, реконструкцію $\sigma(x,y)$, $(x,y)\in G$, проведемо шляхом інтерполяції останнього на множині деяких точок $(x_k,y_k)\in G$, $k\in N$ – вузлів інтерполяції. Такими базовими точками можуть бути обрані вузли динамічної сітки, розрахованої в процесі розв’язання прямої задачі ТПП для однієї з областей $\overline{G}_z^{(p)}, p=\overline{1,p}$. Проте зважаючи на особливості реалізації числового методу квазіконформних відображень [6] (нерівномірність розташування вузлів такої сітки та згущення вузлових точок в околах A_p, B_p, C_p, D_p) і наявність апріорної інформації про розподіл КЕП по області томографічного перерізу, очевидно, доцільним буде обрання в якості згаданих вузлів інтерполяції множину базових точок

$W_k\left(x_k, y_k\right)$, $k=\overline{1, m^*}, m^* \in N$. Зауважимо, що початково число m^* обиратимемо залежно від апріорної інформації про розподіл КЕП та залишатимемо за собою можливість його збільшення (наприклад, шляхом додавання нових точок до системи інтерполяційних вузлів W_k в зонах осцилювання інтерполяційного многочлена).

Вихідну некоректну обернену задачу ТПП зведемо до відшукання значень $\sigma_k=\sigma(W_k)$, які мінімізують функціонал [7, 10] :

$$\Phi\left(\sigma(W_k)\right)=\sum_{p=1}^{p}\left(\sum_{i,=1}^{m_1}\left(\varphi_i^{(p)}\left(\sigma\right)-\varphi_i^{(p)}\right)^2+\sum_{i,=1}^{m_2}\left(\psi_i^{(p)}\left(\sigma\right)-\psi_i^{(p)}\right)^2\right)+\gamma\cdot\Omega\left[\sigma\right], \quad (10)$$

де $\sigma=\sigma(x, y)$ – відповідний інтерполяційний многочлен для КЕП; $\varphi_i^{(p)}(\sigma)=\varphi^{(p)}\left(\sigma(x_i, y_i)\right), i=\overline{1, m_1}$, $\psi_i^{(p)}(\sigma)=\psi^{(p)}\left(\sigma(x_i, y_i)\right), i=\overline{1, m_2}$ – розраховані значення (як розв'язок задачі (7)-(9)), в точках $(x_i, y_i)\in\partial G_\omega^{(p)}$, в яких значення $\varphi_i^{(p)}$ та $\psi_i^{(p)}$ відомі з крайових умов (5)-(6); γ – параметр регуляризації (який в процесі розв'язання шукатимемо згідно з принципом узагальненої нев'язки [10]); $\Omega\left[\sigma\right]=\left(\delta\sigma\right)^2$ – стабілізуючий функціонал.

Для зручності обчислень лінеризуємо оператори $\Lambda_1:\kappa\to\varphi$ та $\Lambda_2:\kappa\to\psi$, знехтувавши членами другого порядку малості ($\overline{\sigma}_j$ – значення КЕП в точці W_j з попередньої ітерації); $R(\delta\sigma)$ – залишковий член розкладу):

$$\varphi^{(p)}(\sigma)=\varphi^{(p)}(\overline{\sigma})+\sum_{k=1}^{m^*}\left(\sigma_k-\overline{\sigma}_k\right)\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial\sigma_k}+R(\delta\sigma), \quad (11)$$

$$\psi^{(p)}(\sigma)=\psi^{(p)}(\overline{\sigma})+\sum_{k=1}^{m^*}\left(\sigma_k-\overline{\sigma}_k\right)\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial\sigma_k}+R(\delta\sigma).$$

Виходячи з необхідної умови існування екстремуму функції багатьох змінних, після підстановки (11) в (10), перейдемо до розв'язання СЛАР відносно $\vec{\sigma}=\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m^*}\right)^T$:

$$A\cdot\vec{\sigma}=B, \quad (12)$$

де $$A_{k,l}=\sum_{p=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\left(\frac{\partial\varphi_i^{(p)}}{\partial\sigma_k}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_i^{(p)}}{\partial\sigma_l}+\sum_{i=1}^{m_2}\left(\frac{\partial\psi_i^{(p)}}{\partial\sigma_k}\right)\cdot\frac{\partial\psi_i^{(p)}}{\partial\sigma_l}\right)+\gamma\cdot\delta_{k,l}\ ,$$

$$B_k=\sum_{p=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\left(\varphi_i^{(p)}-\varphi_i^{(p)}(\overline{\sigma})+\sum_{l=1}^{m^*}\overline{\sigma}_l\frac{\partial\varphi_{i,j}^{(p)}}{\partial\sigma_l}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_{i,j}^{(p)}}{\partial\sigma_k}+\sum_{i=1}^{m_2}\psi_i^{(p)}-\psi_i^{(p)}(\overline{\sigma})+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{m^*}\overline{\sigma}_l\frac{\partial\psi_{i,j}^{(p)}}{\partial\sigma_l}\right)\cdot\frac{\partial\psi_{i,j}^{(p)}}{\partial\sigma_k}\Bigg)+\gamma\cdot\overline{\sigma}_k\ ;\ \delta_{k,l}$$ – символ Кронекера.

Для розв’язання СЛАР (11), яка є щільною з несиметричною матрицею, скористаємось стабілізованим методом біспряжених градієнтів (BiCGStab) [9].

Розв’язання задачі ідентифікації (3)-(6) побудуємо згідно наступного алгоритму. Використовуючи деяке початкове наближення $\sigma_{(0)}$ знаходимо розв’язки відповідних прямих задач (7)-(9) числовим методом квазіконфорних відображень [6] та обчислюємо значення похідних $\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$, після чого сформуємо СЛАР (12). На основі останньої знаходимо уточнене значення КЕП $\sigma_{(1)}$. Поклавши $\sigma_{(0)}=\sigma_{(1)}$, перейдемо до чергового розв’язання прямої задачі ТПП. Серед умов зупинки ітераційного процесу $\left|\sigma_{(t+1)}-\sigma_{(t)}\right|\le\varepsilon_1,\ \ \left|Q_{(t+1)}^{(p)}-Q^{(p)}\right|\le\varepsilon_2,\quad \varepsilon_1,\varepsilon_2\in R_+$.

Побудову інтерполяційного многочлена $\sigma(x,y)$ реалізуємо на взагалі кажучи нерегулярній сітці W_k з використанням ідей білінійної інтерполяції. Точність інтерполяції узгоджуватимемо із заданням параметрів розбиття області та параметрів умови зупинки ітераційного процесу числового алгоритму розв’язання прямих задач [6].

Висновки. Модифіковано модель ТПП з використанням ідей і методів теорії функції комплексної змінної. На основі цього запропоновано новий підхід до розв’язання відповідних прямих задач шляхом використання відомого методу квазіконформних відображень. Використовуючи такий підхід пропонується метод ідентифікації КЕП з використанням ідей регуляризації.

1. Электроимпедансная томография / Я.С. Пеккер, К.С. Бразовский, В.Ю. Усов, М.П. Плотников, О.С. Уманский. - Томск: Изд-воНТЛ, 2004. - 192 с.
2. *Hinz J.* Elektrische Impedanztomographie. Reif für die klinische Routine bei beatmeten Patienten?/ *J. Hinz, G. Hahn, M. Quintel.* // Anaesthesist. — 2008. — №1. — P. 61–69.
3. Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications / Edited by David S . Holder. – Taylor & Francis, 2004 – 464c.
4. *Somersalo E.* Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography / E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson. // SIAM J. Appl. Math. 1992.V. 52. – No 4. – P. 1023–1040.
5. *Бомба А.Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – К.:Наукова думка, – 2007. – 308с.
6. Методи комплексного аналізу: Монографія. / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013 – 415 с.
7. *Шерина Е.С.* Численное моделирование задачи электроимпедансной томографии и исследование подхода на основе метода конечных объемов / Е.С. Шерина, А.В. Старченко // Бюллетень сибирской медицины, 2014. – N 4. – С.156-164.
8. Dong G. The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem /G. Dong, J. Zou, R. Bayford and other // IEEE Trans. Magnetics. 2005. Vol. 41. – No. 5. – P.1468–1471.
9. *Henk A. van der Vorst.* Iterative Krylov Methods for Large Linear System. — Cambridge University Press, 2003. — 221 c
10. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. – 288с

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
E-mail: abomba@ukr.net
l_kroka@ukr.net

Надійшла 04.02.2015

Бомба А. Я., Крока Л. Л.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПО ДАННЫМ ТОМОГРАФИИ ПРИЛОЖЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛОВ

Аннотация. *На основе численного метода квазиконформных отображений предложен алгоритм реконструкции коэффициента электрической проводимости по данным томографии приложенных потенциалов.*

Ключевые слова: *томография приложенных потенциалов, квазиконформные отображения, регуляризация, идентификация.*

Bomba A. Y., Kroka L. L.

NUMERICAL METHODS OF QUASICONFORMAL MAPPINGS FOR SOLVING PROBLEMS OF IDENTIFYING OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT IN AN APPLIED POTENTIAL TOMOGRAPHY

Annotation. *We propose a reconstruction algorithm coefficient of electrical conductivity according to the applied potential tomography on the basis of numerical methods of quasiconformal mappings.*

Keywords: *applied potential tomography, quasiconformal mappings, regularization, identification.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 11 (20)

Відповідальний за випуск
Ярощак С.В.

Підписано до друку 10.10.2013 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 12,7. Тираж 100. Зам. № 146/1.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12