

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 11 (20)**

**Рівне-2014**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".  
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Мартинюк П.М. ( <i>науковий секретар</i> )
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новаковські А.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Власюк А.П.	Петрівський Я.Б.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О.
Гаращенко Ф.Г.	Присяжнюк І.М.
Гарбарчук В.І.	Савула Я.Г.
Джунь Й.В.	Свідзинський А.В.
Каштан С.С.	<u>Скопечкий В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Сяський А.О.
Кратко М.І.	Турбал Ю.В.
Кузьменко А.П.	Чикрій А.О.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.
Ляшенко І.М.	Ярошак С.В. ( <i>науковий секретар</i> )

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 10 від 28 травня 2015 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (19 – 22 лютого 2015 року, Рівне).

### *ОРГАНІЗАТОРИ*

Міністерство освіти і науки України  
Рівненський державний гуманітарний університет  
Національний університет водного господарства та природокористування  
Міжнародний економіко-гуманітарний університет  
ім. акад. С. Дем'янчука  
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна  
Київський національний університет ім. Т. Шевченка  
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України  
Наукове товариство ім. Т. Шевченка  
Інститут механіки і прикладної інформатики  
Університет Казимира Великого в Бидгощі (Польща)

### *ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ*

- Сергієнко І.В. – співголова
- Кушнір Р.М. – співголова
- Ляшко С.І. – співголова
- Бомба А.Я. – заступник голови
- Власюк А.П.
- Базилевич Р.П.
- Буй Д.Б.
- Булавацький В.М.
- Воробель Р.А.
- Гандель Ю.В.
- Гаращенко Ф.Г.
- Грищенко О.Ю.
- Кузьменко А.П.
- Куссуль Н.М.
- Мартинюк П.М.
- Міщенко В.О.
- Наконечний О.Г.
- Турбал Ю.В.
- Чапля Є.Я.
- Чикрій А.О.
- Цешко М.
- Кубік Ю.

## Зміст

**ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА В. С. МИХАЛЕВИЧА** ..... 6

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

**Бомба А. Я., Крока Л. Л.** Числові методи квазіконформних відображень розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів..... 24

**Вовк О. М.** Термопружний стан термочутливих півпросторів за дії миттєвого джерела тепла на межі контакту..... 34

**Герус А. В., Мартинюк П. М., Чеховська Н. В.** Чисельне розв'язання одновимірної задачі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактної суфозії ґрунтів..... 45

**Журавчак Л. М., Крук О. С.** Математичне моделювання процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах з нелінійною поведінкою матеріалів зон ..... 55

**Каплун А. В., Крива Н. Р., Цимбалюк Л. І.** Двоперіодична задача про пластичне відшаровування жорсткого волокна ромбічного перерізу..... 68

**Кот В. В.** Математичне моделювання контактної взаємодії ортотропної пластинки з круговим отвором і круглого диска через систему двох тонких пружних ребер ..... 76

**Присяжнюк О. В.** Сингулярно збурені процеси багатоконпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в нанопористих середовищах з врахуванням терморезиму ..... 87

**Шупіков О. М., Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В., Долгополова Н. В., Свет Є. В.** Моделювання термопружного стану багатошарового оскління під впливом нестационарних температурних полів ..... 100

**Ярошак С. В.** Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термо-гравітаційного дренажу..... 117

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

**Бричак А. А., Ванін В. А.** Применение метода конечных элемен-

- тов с разрывными базисными функциями к решению задач газовой динамики..... 129
- Грицько Б. Є.** Чисельно-аналітичний підхід до розв'язування задач теорії потенціалу в кусково-однорідних об'єктах з урахуванням умов неідеального контакту..... 143
- Сапужак О. Я., Сироєжко О. В.** Використання методу граничних елементів у задачах електророзвідки постійним струмом..... 156

### **ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ**

- Бахрушин В. Є., Ігнахіна М. О., Назаренко О. О.** Перевірка адекватності нелінійних регресійних моделей засобами мови R ..... 167
- Буй Д. Б., Пузікова А. В.** Аксиоматика багатозначних залежностей табличних баз даних: коректність, повнота, критерій повноти ..... 175
- Варламова Н. В., Гахов А. В., Мищенко В. О.** Успешность программной диверсности в разработке систем и персональные характеристики разработчика: концептуальная модель ..... 194
- Шпортько О. В.** Використання альтернативних стиснутих блоків для кожного блоку даних у форматі PNG..... 213
- Jarynowski A.** Which activation function of cooperation describes human behavior?..... 229

УДК 539.3

**Кот В. В.**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ  
ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І  
КРУГЛОГО ДИСКА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ДВОХ ТОНКИХ ПРУЖНИХ  
РЕБЕР**

***Анотація.** Побудовано математичну модель задачі розрахунку згинальних напружень у складеній кусково-однорідній ортотропній пластинці з системою двох міжфазних ребер жорсткості. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь задачі здійснено методом механічних квадратур і колокації. Розглянуто числовий приклад.*

***Ключові слова.** Ортотропна пластинка, пружний диск, напружено-деформований стан, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, часткове сполучення.*

**Вступ.** Пластинки як складові елементи деталей машин і споруд широко використовуються в сучасних галузях інженерної практики [1]. Через конструктивні чи технологічні міркування вони можуть містити кругові включення з іншого матеріалу. Досить часто між пластинкою і включенням наявний деякий проміжний шар у вигляді міжфазного сполучувального ребра (системи сполучувальних ребер). При дії на таку конструкцію згинальних навантажень на межі поділу її матеріалів виникають зони високої концентрації напружень. Їх наявність може призвести до передчасного руйнування пластинчастої конструкції і всього механізму в цілому. Тому виникає потреба в математичному моделюванні впливу зовнішнього згинального навантаження, фізико-геометричних параметрів кусково-однорідної пластинки на її напружено-деформований стан.

Математичні моделі задач розрахунку силових і згинальних напружень у кусково-однорідних пластинах, в яких відсутнє міжфазне

ребро, а диск і пластинка безпосередньо спаяні між собою на частині спільного контуру, побудовані в роботах [2-3]. Розрахунок та аналіз напружено-деформованого стану в кусково-однорідних пластинках з симетричним міжфазним ребром жорсткості наведено в [4, 5] для випадку двостороннього згину і в [6] – для плоского напруженого стану. Слід зазначити, що у [5] враховано контакт між диском і пластинкою при дії зовнішнього навантаження. Задача визначення напружено-деформованого стану в кусково-однорідній ортотропній пластинці з системою міжфазних сполучувальних ребер загального положення змінної жорсткості на згин і кручення за дії згинального навантаження, прикладеного на нескінченності або в центрі диска в науковій літературі не розглядалася.

**Постановка задачі. Система інтегральних рівнянь.** Нехай в круговий отвір радіусом  $R=1$  нескінченної ортотропної пластинки товщиною  $2h$  без зазору і натягу вставлено круглий ізотропний диск такої ж товщини. На ділянках  $L_1 = [\alpha_0, \beta_0]$  і  $L_2 = [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi]$  диск і пластинка сполучені між собою системою двох тонких пружних ребер. Систему декартових  $(x, y)$  і полярних  $(\rho, \lambda)$  координат у спільній серединній площині кусково-однорідної пластинки так, як показано на рис. 1. При дослідженні будемо вважати, що на нескінченності пластинка згинається

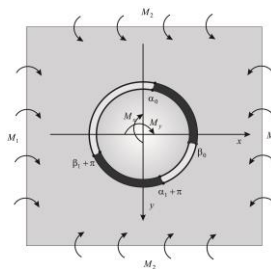


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

рівномірно розподіленими моментами  $M_1$  та  $M_2$ , які діють у напрямках координатних осей, а в центрі диска діє зосереджена пара сил із компонентами  $(M_x, M_y)$ . Головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки співпадають із напрямками координатних осей. Контакт між дис-

ком і пластинкою відсутній.

Розв'язок задачі передбачає побудову її математичної моделі, а також визначення компонент напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки і в диску.

Моделюючи сполучувальні ребра пружними лініями сталої жорсткості на згин  $g_1$  і кручення  $g_2$ , граничні умови задачі на підставі [5, 8, 9] запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{1}{g_1} \left[ f_2(t)(\sin^2 t + \frac{g_1}{g_2} \cos^2 t) + f_1(t)(1 - \frac{g_1}{g_2}) \sin t \cos t \right] dt - \\ &- \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{1}{g_1} \left[ f_2^{(1)}(t)(\sin^2 t + \frac{g_1}{g_2} \cos^2 t) + f_1^{(1)}(t)(1 - \frac{g_1}{g_2}) \sin t \cos t \right] dt + a_1^*; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{1}{g_1} \left[ f_2(t)(\frac{g_1}{g_2} - 1) \sin t \cos t - f_1(t)(\cos^2 t + \frac{g_1}{g_2} \sin^2 t) \right] dt - \quad (1) \\ &- \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{1}{g_1} \left[ f_2^{(1)}(t)(\frac{g_1}{g_2} - 1) \sin t \cos t - f_1^{(1)}(t)(\cos^2 t + \frac{g_1}{g_2} \sin^2 t) \right] dt + b_1^*; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial y}; \\ \lambda &\in [\alpha_0; \beta_0] \cup [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_{\rho} + iP\} e^{it} dt = \begin{cases} f_1^0 + if_2^0, & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, & \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; \\ f_1^{(1)} + if_2^{(1)} &= i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_{\rho}^{(1)} + iP^{(1)}\} e^{it} dt = \begin{cases} f_{11}^{(1)} + if_{12}^{(1)}, & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ f_{21}^{(1)} + if_{22}^{(1)}, & \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; \\ g_1 + ig_2 &= \begin{cases} g_1^0 + ig_2^0, & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2, & \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}, \quad a_1^*, b_1^* - \text{дійсні сталі. } M_{\rho}, P - \end{aligned}$$

контактні моменти на контурі отвору пластинки. Тут і надалі величини з індексом (1) мають для диска той же самий зміст, що й відповідні величини без індексу для пластинки. Решту позначень наведено в [9].

Величини  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial w_1}{\partial y}$  на контурі  $\gamma$  визначаються за



формулами [3, 4, 8], які при заданому навантаженні приймають вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) f_1(\lambda) - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{\prime(0)}(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \right. \\ \left. - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + R_0(\lambda) \right\} + a_0^*; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) f_2(\lambda) + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \left( \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{\prime(0)}(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) + Q_0(\lambda) \right\} + b_0^*; \lambda \in [\alpha_0, \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi];$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{k_1}{3 + \nu_1} \left\{ (1 + \nu_1) f_1^{(1)}(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{12}^{\prime(1)}(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{22}^{\prime(1)}(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + R_0^{(1)}(\lambda) \right\} + a_0^{(1)}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{k_1}{3 + \nu_1} \left[ (1 + \nu_1) f_2^{(1)}(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{11}^{\prime(1)}(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{21}^{\prime(1)}(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + Q_0^{(1)}(\lambda) \right] + b_0^{(1)},$$

де  $a_0^*$ ,  $b_0^*$ ,  $a_0^{(1)}$ ,  $b_0^{(1)}$  – дійсні сталі;  $\tilde{t} = t - \pi$ ;  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{22}$  – корені характеристичного рівняння [10];  $\tilde{\Delta}_1 = (\beta_{11} + \beta_{22})(\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x)(\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x)$ ;

$$R_0(\lambda) = -\tilde{C}_1(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \sin \lambda - \\ - \frac{M_1(\beta_{11} + \beta_{22})}{\tilde{\Delta}_1} (\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}_1) \cos \lambda - \frac{M_2\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})}{\tilde{\Delta}_1} \tilde{\Delta}_2 \cos \lambda;$$

$$Q_0(\lambda) = \tilde{C}_1(\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x + \beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})) \cos \lambda -$$

$$-\frac{M_1(\beta_{11} + \beta_{22})}{\tilde{\Delta}_1} \beta_{11} \beta_{22} \tilde{\Delta}_2 \sin \lambda - \frac{M_2 \beta_{11} \beta_{22} (\beta_{11} + \beta_{22})}{\tilde{\Delta}_1} (\beta_{11} \beta_{22} \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}_1) \sin \lambda ;$$

$$\tilde{\Delta} = \beta_{11} \beta_{22} (\beta_{11} + \beta_{22})^2 - (\beta_{11} \beta_{22} + \nu_x)^2 ;$$

$$R_0^{(1)}(\lambda) = \frac{M_x}{2\pi} (1 + \nu_1) \lambda - \frac{1 - \nu_1}{2\pi} (M_x \sin 2\lambda - M_y \cos 2\lambda) + \hat{\alpha}_1 \cos \lambda + \hat{\beta}_1 \sin \lambda ;$$

$$Q_0^{(1)}(\lambda) = \frac{M_y}{2\pi} (1 + \nu_1) \lambda + \frac{1 - \nu_1}{2\pi} (M_y \sin 2\lambda + M_x \cos 2\lambda) + \hat{\alpha}_1 \sin \lambda - \hat{\beta}_1 \cos \lambda ;$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1 - \nu_1}{1 + \nu_1} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} (f_1^{(1)'} \sin t - f_2^{(1)'} \cos t) dt ; \quad \hat{\beta}_1 = \frac{1 - \nu_1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} (f_1^{(1)'} \cos t + f_2^{(1)'} \sin t) dt ;$$

$$\tilde{\Delta}_2 = (\beta_{11}^2 - \nu_x)(\beta_{22}^2 - \nu_x). \text{ Решта позначень такі ж як і в [4, 8].}$$

Підставляючи (2) і (3) у граничні умови задачі (1), отримаємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) з логарифмічними ядрами для визначення функцій  $f_1^0, f_2^0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, f_{11}', f_{12}', f_{21}', f_{22}'$

$$\begin{aligned} & (\beta_{11} \beta_{22} + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1^0(t) dt - (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) + \\ & + R_0(\lambda) + a_3^* = \int_{\beta_0}^{\lambda} \tilde{N}(t) \{ f_2^0(t) (\sin^2 t + \frac{g_1}{g_2} \cos^2 t) + f_1^0(t) \cos t \sin t (1 - \frac{g_1}{g_2}) \} dt - \\ & - \int_{\beta_0}^{\lambda} \tilde{N}(t) \{ f_{12}(t) (\sin^2 t + \frac{g_1}{g_2} \cos^2 t) + f_{11}(t) (1 - \frac{g_1}{g_2}) \cos t \sin t \} dt ; (\beta_{11} \beta_{22} + \nu_x) \times \\ & \times \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2^0(t) dt + (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{\beta_{11} \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{\beta_{11} \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) + \\ & + Q_0(\lambda) + b_3^* = \int_{\beta_0}^{\lambda} \tilde{N}(t) \{ f_2^0(t) \cos t \sin t (\frac{g_1}{g_2} - 1) - f_1^0(t) (\cos^2 t + \frac{g_1}{g_2} \sin^2 t) \} dt - \\ & - \int_{\beta_0}^{\lambda} \tilde{N}(t) \{ f_{12}^{(1)}(t) \cos t \sin t (\frac{g_1}{g_2} - 1) - f_{11}^{(1)}(t) [\cos^2 t + \frac{g_1}{g_2} \sin^2 t] \} dt ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} - (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) + \\
 & + R_0(\tilde{\lambda} + \pi) + a_4^* = \int_{\beta_0}^{\tilde{\lambda}} \tilde{N}(\tilde{t} + \pi) \{ \tilde{f}_2(\tilde{t}) [\sin^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} \cos^2(\tilde{t} + \pi)] + \\
 & + \tilde{f}_1(\tilde{t}) \cos(\tilde{t} + \pi) \sin(\tilde{t} + \pi) (1 - \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2}) \} d\tilde{t} - \int_{\beta_0}^{\tilde{\lambda}} \tilde{N}(\tilde{t} + \pi) \{ f_{22}^{(1)}(\tilde{t}) [\sin^2(\tilde{t} + \pi) + \\
 & + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} \cos^2(\tilde{t} + \pi)] + f_{21}^{(1)}(\tilde{t}) \cos(\tilde{t} + \pi) \sin(\tilde{t} + \pi) (1 - \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2}) \} d\tilde{t} ; (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \times \\
 & \times \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} + (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt + \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) + \\
 & + Q_0(\tilde{\lambda} + \pi) + b_4^* = \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{N}(\tilde{t} + \pi) \{ \tilde{f}_2(\tilde{t}) \cos(\tilde{t} + \pi) \sin(\tilde{t} + \pi) (\frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} - 1) - \\
 & - \tilde{f}_1(\tilde{t}) [\cos^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} \sin^2(\tilde{t} + \pi)] \} d\tilde{t} - \\
 & - \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{N}(\tilde{t} + \pi) \{ f_{22}^{(1)}(\tilde{t}) \cos(\tilde{t} + \pi) \sin(\tilde{t} + \pi) (\frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} - 1) - \\
 & - f_{21}^{(1)}(\tilde{t}) [\cos^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} \sin^2(\tilde{t} + \pi)] \} d\tilde{t} ; (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1^0(t) dt - \\
 & - (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) - \\
 & - \frac{k_1 \tilde{\Delta}}{k(3 + \nu)} \left[ (1 + \nu_1) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_{11}^{(1)}(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{12}^{(1)}(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{22}^{(1)}(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + R_0^{(1)}(\lambda) \right] + R_0(\lambda) + a_5^* = 0 ; (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2^{0'}(t) dt + (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{0'}(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) - \\
 & - \frac{k_1\tilde{\Delta}}{k(3+\nu_1)} \left[ (1+\nu_1) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_{12}^{(1)'}(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{11}^{(1)'}(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \right. \\
 & - \left. \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{21}^{(1)'}(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + Q_0^{(1)}(\lambda) \right] + Q_0(\lambda) + b_5^* = 0; (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \times \\
 & \times \int_{\alpha_0}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) d\tilde{t} - (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{0'}(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) - \\
 & - \frac{k_1\tilde{\Delta}}{k(3+\nu_1)} \left[ (1+\nu_1) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_{21}^{(1)'}(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{22}^{(1)'}(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \right. \\
 & + \left. \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{22}^{(1)'}(t) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + R_0^{(1)}(\lambda + \pi) \right] + R_0(\lambda + \pi) + a_6^* = 0; (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) \times \\
 & \times \int_{\alpha_0}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} + (\beta_{11} + \beta_{22}) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{0'}(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right) - \\
 & - \frac{k_1\tilde{\Delta}}{k(3+\nu_1)} \left[ (1+\nu_1) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_{22}^{(1)'}(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{11}^{(1)'}(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} dt - \right. \\
 & - \left. \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{21}^{(1)'}(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} + Q_0^{(1)}(\lambda + \pi) \right] + Q_0(\lambda + \pi) + b_6^* = 0.
 \end{aligned}$$

Тут  $\tilde{N}(t) = g_1 \frac{k}{\Delta}$ ;  $a_3^*, a_4^*, a_5^*, a_6^*, b_3^*, b_4^*, b_5^*, b_6^*$  – дійсні сталі.

Щоб забезпечити сумісність даної системи додаємо до неї умови рівноваги сполучувальних ребер [8]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{0'}(t) dt = 0, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{0'}(t) dt = 0, \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0, \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0, \quad (5)$$

диска [4]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{11}^{(1)'}(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{21}^{(1)'}(\tilde{t})d\tilde{t} = -M_x, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_{12}^{(1)'}(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_{22}^{(1)'}(\tilde{t})d\tilde{t} = -M_y, \quad (6)$$

умову однозначності прогину пластинки [9]

$$-b_1 \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} [-f_1'(t)\cos t + f_2'(t)\sin t]dt - b_2 \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} [f_1'(t)\cos t + f_2'(t)\sin t]dt + b_2 \tilde{C}_1 = 0; \quad (7)$$

$$b_1 = (\beta_{11} + \beta_{22})(1 - \beta_{11}\beta_{22}); \quad b_2 = (\beta_{11} + \beta_{22})(1 - \beta_{11}\beta_{22}) + 2(\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x),$$

та умови зв'язку [8]

$$f_1(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t)dt = 0, \quad f_2(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t)dt = 0. \quad (8)$$

**Наближений розв'язок задачі. Результати числового розрахунку.**

Знаходження точного розв'язку системи (4) – (8), пов'язано із значними математичними труднощами. Для її наближеного розв'язання використано числовий метод механічних квадратур і колокації [4]. Цим методом досліджено вплив ортотропії матеріалу пластинки на розподіл компонент напружено-деформованого стану (НДС) у пластинці. Результати розрахунку при  $\alpha_0 = \alpha_1 = -60^0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 60^0$ ,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $h_0/h = 1$ ,

$$b_l / R_0 = 1/20, \quad \frac{E_0}{\sqrt{E_x E_y}} = 1, \quad \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E_1} = 1, \quad M_1 \neq 0, \quad M_2 = M_x = M_y = 0$$

проілюстровано на рис. 2. Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які їм відповідають на рисунку наведено в таблиці 1.

Таблиця 1  
Характеристики досліджуваних матеріалів і лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках

Матеріал пластинки	$\beta_{11}$	$\beta_{22}$	$\nu_x$	$E_x / E_y$	Лінії
Ізотропний матеріал	1	1	0.30	1	—————
Скло-епоксид	2.271	0.762	0.25	3	-----

графіт-епоксид	6.999	0.714	0.25	25	— · — · — · — · —
Епоксид-скло	0.440	1.310	0.09	1/3	.....
Епоксид-графіт	0.143	1.401	0.01	1/25	— · — · — · —

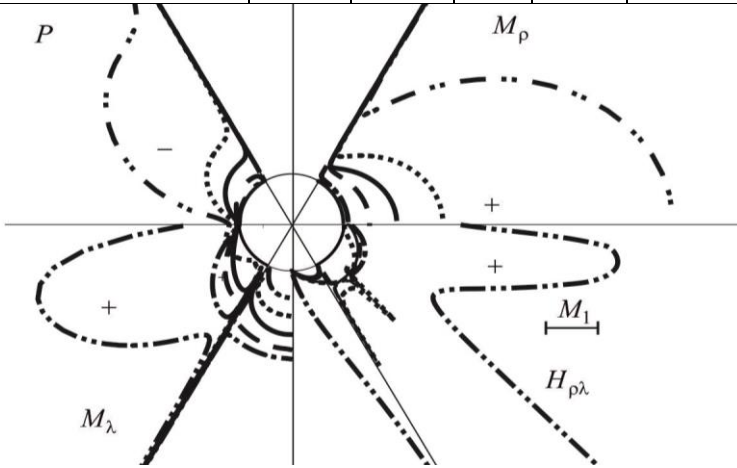


Рис 2. Епюри розподілу компонент НДС на контурі отвору пластинки.

**Висновки.** Розглянуто новий підхід до побудови розв’язку задачі, про часткове сполучення нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором і круглого пружного диска системою двох тонких пружних ребер. Побудовано математичну модель цієї задачі у вигляді системи СІДР із логарифмічними ядрами. Для її наближеного розв’язку адаптовано чисельно-аналітичний метод механічних квадратур і колокації. В результаті числового експерименту встановлено, що вибором матеріалу, для якого модуль Юнга в напрямку осі  $Ox$  значно більший, ніж в напрямку осі  $Oy$ , можна на суттєво зменшити контактні моменти, що виникають на контурі отвору пластинки. Для матеріалу пластинки епоксид-графіт максимальні згинальні моменти на порядок вищі ніж для інших матеріалів. Тому не рекомендується використовувати цей та інші ортотропні матеріали для яких  $E_x \ll E_y$  у якості елементів кусково-однорідних конструкцій оскільки саме для них згинальні моменти найбільші.

1. *Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. / А. П. Филин. – М.: Наука, 1975. – Т. I. – 832 с
2. *Сяський А.О.* Згин кусково-однорідної пластинки з коловим розрізом, береги якого контактують / А.О. Сяський, К.П. Музичук // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія технічні науки. – 2012. – Вип. 2 (58). – С. 91 – 98.
3. *Сяський А.* Кусково-однорідна ортотропна пластинка з коловим розрізом, береги якого частково контактують при згині / А. Сяський, К. Музичук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2012. – №3 (67). – С.17-25.
4. *Сяський А. А.* Метод коллокации в задачах изгиба кусочно-однородных пластин с круговыми включениями / А. А. Сяський // Теория оболочек и пластин: XIII Всесоюз. конф. (Таллин, сент. 1983 г.). – Таллин: ТПИ, 1983. – С. 177–182.
5. *Сяський А.* Згин зварної пластинчастої конструкції за контакту берегів колового міжфазного розрізу / А. Сяський, К. Музичук, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2013. – №1 (69). – С. 20–30.
6. *Сяський А. А.* Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением / А. А. Сяський, В. А. Сяський // Прикл. механика. –1983. – Т. 19, № 5. – С. 94–99.
7. *Савин Г. Н.* Пластинки и оболочки с ребрами жесткости / Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. – К.: Наук. думка, 1964. – 384 с.
8. *Сяський А. О.* Контактна взаємодія ортотропної пластинки з еліптичним отвором і двох пружних ребер змінної жорсткості/ А. О. Сяський, В. В. Кот // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». – Луцьк. – 2011. – №33. – С. 262–266.
9. *Бережницький Л. Т.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
10. *Лехницький С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький. – М.: Гос-техиздат, 1957. – 464 с.

Рівненський державний гуманітарний університет м. Рівне.  
E-mail: kotpm04@ukr.net

Надійшла 30.01.2015

**Кот В. В.**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ  
ОТВЕРСТИЕМ И КРУГЛОГО ДИСКА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ТОНКИХ УПРУГИХ  
РЕБЕР

***Аннотация.** Построена математическая модель задачи расчета изгибающих напряжений в составной кусочно-однородной ортотропной пластинке с системой двух межфазных ребер жесткости. Приближенное решение системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений задачи осуществлено методом механических квадратур и коллокации. Рассмотрен числовой пример.*

***Ключевые слова:** Ортотропная пластинка, упругий диск, напряженно-деформированное состояние, сингулярные интегро - дифференциальные уравнения, частичное сочленение.*

**Kot V. V.**

MATHEMATICAL MODELING OF CONTACT INTERPLAY BETWEEN THE  
ORTHOTROPIC PLATE WITH CIRCULAR HOLE AND ROUND DISK  
THROUGH A SYSTEM OF TWO THIN ELASTIC RIBS

***Annotation.** The mathematical model of the problem of calculating the bending stresses in compound homogeneous lump plates with system of two interphase stiffeners has been created. Approximate solution of a system of singular integral-differential equations tasks has been performed by mechanical quadrature and collocation. A numerical example has been considered.*

***Keywords:** Orthotropic plate, elastic ribs, stress-strain state, singular integro - differential equations, partial joint.*



Наукове видання

# **ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК**

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 11 (20)**

Відповідальний за випуск  
Ярошак С.В.

Підписано до друку 10.10.2013 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 12,7. Тираж 100. Зам. № 146/1.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12