

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 11 (20)

Рівне-2014

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Мартинюк П.М. (<i>науковий секретар</i>)
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новаковські А.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Власюк А.П.	Петрівський Я.Б.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О.
Гаращенко Ф.Г.	Присяжнюк І.М.
Гарбарчук В.І.	Савула Я.Г.
Джунь Й.В.	Свідзинський А.В.
Каштан С.С.	<u>Скопечкий В.В.</u> (<i>консультант</i>)
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Сяський А.О.
Кратко М.І.	Турбал Ю.В.
Кузьменко А.П.	Чикрій А.О.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.
Ляшенко І.М.	Ярошак С.В. (<i>науковий секретар</i>)

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 10 від 28 травня 2015 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

У цьому випуску друкуються статті, підготовлені на основі матеріалів Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (19 – 22 лютого 2015 року, Рівне).

ОРГАНІЗАТОРИ

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Національний університет водного господарства та природокористування
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. С. Дем'янчука
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Наукове товариство ім. Т. Шевченка
Інститут механіки і прикладної інформатики
Університет Казимира Великого в Бидгощі (Польща)

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ

- Сергієнко І.В. – співголова
- Кушнір Р.М. – співголова
- Ляшко С.І. – співголова
- Бомба А.Я. – заступник голови
- Власюк А.П.
- Базилевич Р.П.
- Буй Д.Б.
- Булавацький В.М.
- Воробель Р.А.
- Гандель Ю.В.
- Гаращенко Ф.Г.
- Грищенко О.Ю.
- Кузьменко А.П.
- Куссуль Н.М.
- Мартинюк П.М.
- Міщенко В.О.
- Наконечний О.Г.
- Турбал Ю.В.
- Чапля Є.Я.
- Чикрій А.О.
- Цешко М.
- Кубік Ю.

Зміст

ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА В. С. МИХАЛЕВИЧА 6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Бомба А. Я., Крока Л. Л. Числові методи квазіконформних відображень розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів..... 24

Вовк О. М. Термопружний стан термочутливих півпросторів за дії миттєвого джерела тепла на межі контакту..... 34

Герус А. В., Мартинюк П. М., Чеховська Н. В. Чисельне розв'язання одновимірної задачі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактної суфозії ґрунтів..... 45

Журавчак Л. М., Крук О. С. Математичне моделювання процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах з нелінійною поведінкою матеріалів зон 55

Каплун А. В., Крива Н. Р., Цимбалюк Л. І. Двоперіодична задача про пластичне відшаровування жорсткого волокна ромбічного перерізу..... 68

Кот В. В. Математичне моделювання контактної взаємодії ортотропної пластинки з круговим отвором і круглого диска через систему двох тонких пружних ребер 76

Присяжнюк О. В. Сингулярно збурені процеси багатокomпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в нанопористих середовищах з врахуванням терморезиму 87

Шупіков О. М., Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В., Долгополова Н. В., Свет Є. В. Моделювання термопружного стану багатошарового оскління під впливом нестационарних температурних полів 100

Ярошак С. В. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термо-гравітаційного дренажу..... 117

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

Бричак А. А., Ванін В. А. Применение метода конечных элемен-

тов с разрывными базисными функциями к решению задач газовой динамики..... 129

Грицько Б. Є. Чисельно-аналітичний підхід до розв'язування задач теорії потенціалу в кусково-однорідних об'єктах з урахуванням умов неідеального контакту..... 143

Сапужак О. Я., Сироєжко О. В. Використання методу граничних елементів у задачах електророзвідки постійним струмом..... 156

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Бахрушин В. Є., Ігнахіна М. О., Назаренко О. О. Перевірка адекватності нелінійних регресійних моделей засобами мови R 167

Буй Д. Б., Пузікова А. В. Аксиоматика багатозначних залежностей табличних баз даних: коректність, повнота, критерій повноти 175

Варламова Н. В., Гахов А. В., Мищенко В. О. Успешность программной диверсности в разработке систем и персональные характеристики разработчика: концептуальная модель 194

Шпортько О. В. Використання альтернативних стиснутих блоків для кожного блоку даних у форматі PNG..... 213

Jarynowski A. Which activation function of cooperation describes human behavior?..... 229

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Яроцак С. В.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗРОБКИ РОДОВИЩ НАФТИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕРМО- ГРАВІТАЦІЙНОГО ДРЕНАЖУ

***Анотація.** У роботі розвинуто розроблені методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу.*

***Ключові слова:** математичне моделювання, неізотермічна фільтрація, квазіконформні відображення.*

Вступ. У процесі видобутку нафти середньої та високої в'язкості (наприклад, природних бітумів) ефективними, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технології нагнітання в пласт різних робочих агентів – теплоносіїв, при цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними.

Однією із таких технологій є термогравітаційний дренаж (у випадку нагнітання пару – парогравітаційний дренаж, SAGD [1]), при застосуванні якої на висоті 4-6 метрів, одна над одною, буриться пара паралельних горизонтальних свердловин – нагнітальна та експлуатаційна (див. рис. 1а). Через нагнітальну свердловину в пласт вводиться теплоносіє, який прогріває зону навколо свердловин тим самим покращуючи реологічні властивості пластового флюїду, що сприяє процесу його відтоку до експлуатаційної свердловини.

У роботі розвинуто розроблені методи [2-4] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу [1]. На основі методів квазіконформних відо-

бражень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв’язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, зон прогріву тощо.

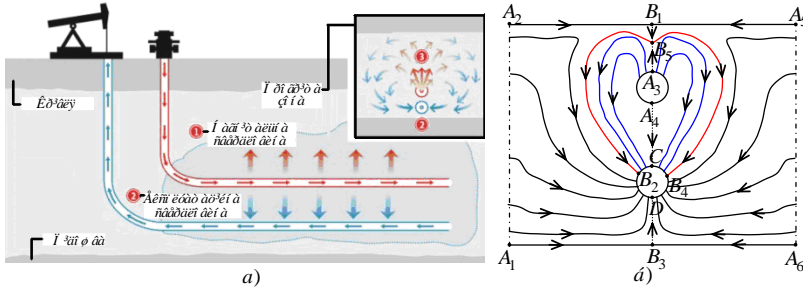


Рис. 1. Схема роботи термогравітаційного дренажу (а) та поперечний переріз пласта (б)

Загальна постановка задачі. Розглянемо двовимірну задачу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) з використанням технології термогравітаційного дренажу. Вважається, що динамічні в’язкості фаз змінюється зі зміною температури, рух рідини – повільний та відбувається без фазових переходів.

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t)$, згідно з [2, 5, 6] представимо у вигляді:

$$\vec{v}_l = \frac{kk_l(s)}{\mu_l(T)} \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \vec{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де \vec{v}_l , $\mu_l(T)$ – вектор швидкості та коефіцієнт в’язкості для l -тої фази, $T(x, y, t)$ – температура; $k(x, y)$ – коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту; $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); σ – коефіцієнт пористості ґрунту; $s_l(x, y, t)$ – насиченість пористого середовища відповідною фазою в точці $(x, y) \in \tilde{G}_z$ у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини вимірюються в одиницях СІ), \tilde{G}_z – об-

ласть поперечного перерізу пласта (рис. 1б). В зв'язку з існуючою симетрією області \tilde{G}_z , для спрощення викладок розглядатимемо елемент G_z ($z = x + iy$), що містить половину нагнітальної та половину експлуатаційної свердловини, при $B_1 = B_5$ (рис. 2).

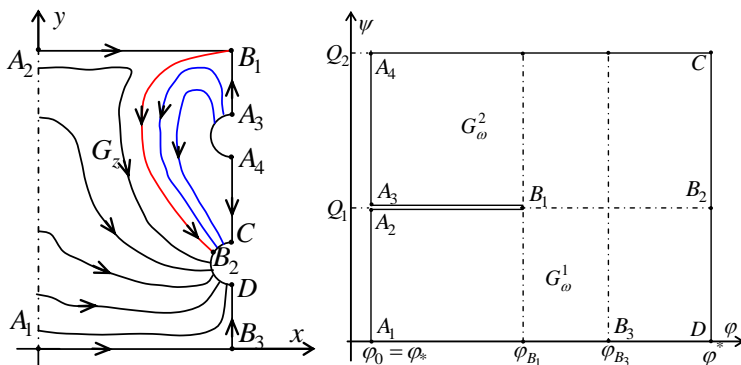


Рис. 2. Елемент поперечного перерізу пласта та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

З урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s, T) \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} f(s, T) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T)k_2(s)}{\mu_2(T)k_1(s) + \mu_1(T)k_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{kk_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{kk_2(s)}{\mu_2(T)}.$$

Вважаємо, що на контурах нагнітальної L^* та експлуатаційної L^* свердловин підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо: φ_* та φ^*), а інші ділянки границі області G_z є еквіпотенціальними лініями та лініями течії, вздовж яких, мають місце рівності

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{A_2 B_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{B_1 A_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{A_4 C} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{D B_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{A_1 B_3} = 0,$$

$$\varphi|_{A_1 A_2} = \varphi^0, \quad \text{де } A_1 A_2 = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq h\}, \quad A_2 B_1 = \{z : y = h, 0 \leq x \leq d\},$$

$$B_3 D = \{z : x = d, 0 \leq y \leq a\}, \quad A_4 C = \{z : x = d, a + 2r \leq y \leq h - b - 2r\},$$

$$L_* = \{z : x = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y = r \cdot (\sin(\theta) - 1) + h - b, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\},$$

$$L^* = \{z : x = r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y = r \cdot (\sin(\theta) + 1) + a, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}, \quad h = |A_1 A_2|,$$

$$d = |A_1 B_3|, \quad a = |B_3 D|, \quad b = |A_3 B_1|, \quad B_1 A_3 = \{z : x = d, \quad h - b \leq y \leq h\},$$

$A_1 B_3 = \{z : y = 0, \quad 0 \leq x \leq d\}$; $|\square|$ – відстань між двома точками, r – радіус свердловин. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальній свердловині та контурі живлення позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$ та $s|_{L_*} = s_*$, $s|_{A_1 A_2} = s_0$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, приймемо однотемпературну модель [7, 8], згідно з якою є миттєвою передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння:

$$\frac{\partial C(s)T}{\partial t} + \text{div}[(c_1 \rho_1 \vec{v}_1 + c_2 \rho_2 \vec{v}_2)T] = 0, \quad (3)$$

де $C(s) = \sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3$ – об'ємна теплоємність пористого середовища, c_l , ρ_l ($l = \overline{1,3}$) – питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта. Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води [2]: $\vec{v}_1 = (1-f(s,T)) \cdot \vec{v}$, $\vec{v}_2 = f(s,T) \cdot \vec{v}$ і співвідношення (1), рівняння (3) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \tilde{T}(s)}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \tilde{f}(s,T) = 0, \quad (4)$$

де $\tilde{T}(s) = C(s) \cdot T = (\tilde{\alpha} s + \tilde{\beta}) \cdot T$, $\tilde{f}(s,T) = (\tilde{\alpha} f(s,T) + c_1 \rho_1) \cdot T$,

$\tilde{\alpha} = \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1$, $\tilde{\beta} = \rho_1 c_1 + (\sigma^{-1} - 1) \rho_3 c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (4) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (2) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених в роботах [2, 4, 9] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатофазної фільтрації.

Для відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу $T(x, y, 0) = \tilde{T}(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{A_2 B_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{B_1 A_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{A_4 C} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{D B_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{A_1 B_3} = 0,$$

$$T \Big|_{A_1 A_2} = T^0, \quad T \Big|_{L^*} = T_*. \quad (5)$$

Метод комплексного аналізу. Аналогічно до [2, 3], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу) полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup \bar{L}_1$:

$$\bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi \Big|_{L^*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi \Big|_{A_1 A_2} = \varphi_0,$$

$$\psi \Big|_{A_1 D} = 0, \quad \psi \Big|_{A_2 A_3} = Q_1, \quad \psi \Big|_{A_4 C} = Q_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s \Big|_{L^*} = s_*, \quad s \Big|_{A_1 A_2} = s_0, \quad s \Big|_{t=0} = \bar{s}(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right), \quad T \Big|_{L^*} = T_*, \quad T \Big|_{A_1 A_2} = T_0, \quad T \Big|_{t=0} = \tilde{T}(x, y), \quad (8)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_\omega^1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}$, $G_\omega^2 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\}$, $\bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{B_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}$, $Q_1 = \int_{A_1 A_2} -v_y dx + v_x dy$, $Q_2 - Q_1 = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy$ – невідомі витрати, а Q_2 – сумарна витрата на експлуатаційній свердловині.

Обернену до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi_0, \psi) &= 0, \quad 0 \leq y(\varphi_0, \psi) \leq h, \quad \psi \in [0, Q_1], \\ y_-(\varphi, Q_1) &= h, \quad 0 \leq x_-(\varphi, Q_1) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_{B_1}], \\ x(\varphi, 0) &= d, \quad 0 \leq y(\varphi, 0) \leq a, \quad \varphi \in [\varphi_{B_3}, \varphi^*], \\ x(\varphi, Q_2) &= d, \quad a + 2r \leq y(\varphi, Q_2) \leq h - b - 2r, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \\ x_+(\varphi, Q_1) &= d, \quad h - b \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi_{B_1}], \\ y(\varphi, 0) &= 0, \quad 0 \leq x(\varphi, 0) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_{B_3}], \\ x(\varphi_*, \psi) &= r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y(\varphi_*, \psi) = r \cdot (\sin(\theta) - 1) + h - b, \\ \theta &\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \quad \psi \in [Q_1, Q_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\varphi^*, \psi) &= r \cdot \cos(\theta) + d, \quad y(\varphi^*, \psi) = r \cdot (\sin(\theta) + 1) + a, \\ \theta &\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \quad \psi \in [0, Q_2], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (11)$$

Використавши підхід запропонований в [2, 8] задачі для відшукування насиченості та температури (7)–(8) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\nu^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [Q_1, Q_2],$$

$$s(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi), t) = s_0, \quad \psi \in [0, Q_1],$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\nu^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \psi \in [Q_1, Q_2],$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_0 + \tilde{\beta}) \cdot T_0, \quad \psi \in [0, Q_1],$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) &= (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \tilde{\beta}) \cdot \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \\ \varphi &\in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \end{aligned} \quad (15)$$

де рівняння (12) та (14) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Алгоритм розв'язування відповідної крайової задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних представимо у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури (розв'язуємо задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (12) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (14) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму [2, 3] при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму.

Алгоритм числового розв'язання задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаємо так:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \quad \Delta\varphi_1 = (\varphi_{B_1} - \varphi_*) / (n_1 + 1), \\ \varphi_{B_1} + (i - n_1 - 1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{B_1}) / (n_2 + 1), \end{cases} \\ \psi_j^1 &= j \cdot \Delta\psi_1, \quad j = \overline{0, m_1}, \quad \Delta\psi_1 = Q_1 / m_1, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g, \\ \psi_j^2 &= j \cdot \Delta\psi_2, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1}, \quad \Delta\psi_2 = (Q_2 - Q_1) / m_2, \end{aligned}$$

$n = n_1 + n_2 + 1$, $m = m_1 + m_2 + 1$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in N$. Рівняння (11) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [10] наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } a_e = \frac{(\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)(k_{i,j} + k_{i-1,j})}{4k_{i,j}k_{i-1,j}\Delta\varphi_+}, \quad a_n = \frac{(\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)k_{i,j}k_{i,j+1}}{\Delta\psi_+(k_{i,j} + k_{i,j+1})},$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad a_w = \frac{(\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)(k_{i,j} + k_{i+1,j})}{4k_{i,j}k_{i+1,j}\Delta\varphi_-},$$

$$a_s = \frac{(\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)k_{i,j}k_{i,j-1}}{\Delta\psi_-(k_{i,j} + k_{i,j-1})}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w. \quad \text{Вибір величин}$$

$\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{B_1}$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$.

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} x_{0,j} &= 0, \quad 0 \leq y_{0,j} \leq h, \quad j = \overline{0, m_1}, \\ y_{i, m_1} &= h, \quad 0 \leq x_{i, m_1} \leq d, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ x_{i, 0} &= d, \quad 0 \leq y_{i, 0} \leq a, \quad i = \overline{n_1 + 1, n}, \\ x_{i, m} &= d, \quad a + 2r \leq y_{i, m} \leq h - b - 2r, \quad i = \overline{0, n}, \\ x_{i, m_1 + 1} &= d, \quad h - b \leq y_{i, m_1 + 1} \leq h, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ y_{i, 0} &= 0, \quad 0 \leq x_{i, 0} \leq d, \quad i = \overline{0, n_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут, як і в [2, 9], комплексну спряженість функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) \cdot (x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) \cdot (x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \cdot (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (18)$$

Невідомі витрати Q_g ($g = \overline{1, 2}$) та значення потенціалу φ_{B_1} в точці розгалуження ліній течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$\varphi_{B_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g$, $Q_g = m_g \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}$, де γ_l^g одержуємо на

підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g (n_1 + 1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \quad \tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1. \quad (19)$$

Рівняння (12) та (14) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [2] наступним чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} (f(s_{i,j}, T_{i,j}) - f(s_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (20)$$

$$\hat{T}_{i,j} = T_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} (\tilde{f}(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) - \tilde{f}(\hat{s}_{i-1,j}, T_{i-1,j})), \quad (21)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1 + 1}$, для $l = 1$, $i = \overline{n_1 + 2, n}$, для $l = 2$; τ – крок по часу, $\tilde{f}(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) = (\tilde{\alpha} \cdot f(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) + c_1 \rho_1) \cdot T_{i,j}$, $\hat{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha} \cdot \hat{s}_{i,j} + \tilde{\beta}) \cdot T_{i,j}$, $\hat{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha} \cdot \hat{s}_{i,j} + \tilde{\beta}) \cdot \hat{T}_{i,j}$; $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу, $v_{i,j}$ – швидкість (шукаємо як і в роботі [2]). Граничну та початкову умови для насиченості та температури в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s^0(x_{i,j}, y_{i,j}),$$

$$\hat{T}_{0,j} = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \tilde{T}(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}) + \tilde{\beta}) \cdot T^0(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_ω та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат

граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (17)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів ($x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$) знаходимо за формулами (19) наближення величин γ_i^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (16) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [2-4, 9], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{B_1} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $v_{i,j}$ та поле насиченості $s_{i,j}$ і температури $\tilde{T}_{i,j}$ з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), знаходимо розподіл насиченості $\hat{s}_{i,j}$ у пласті на даному часовому етапі, згідно з (20), та, використовуючи (21), розраховуємо поле температури $\hat{T}_{i,j}$, після чого перераховуємо поле швидкості і потенціалу.

Висновок. У роботі розвинуто методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням технології термогравітаційного дренажу. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат. Цей алгоритм є підґрунтям для розв'язання більш складної задачі, а саме: задачі оцінки динаміки зміни зон прогріву пласта паром, коли мають місце фазові переходи породжені охолодженням та конденсацією пару.

1. *Deutsch C. V.* Guide to SAGD (Steam Assisted Gravity Drainage)

- Reservoir Characterization Using Geostatistics / C. V. Deutsch, J. A. McLennan. Centre for Computational Geostatistics (CCG). – 2005. Guidebook Series, 3. 125 pp.
2. *Бомба А. Я.* Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
 3. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
 4. *Bomba A. Ya.* Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S. V. Yaroschak // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 184, No. 1. – P.56-69.
 5. *Баренблатт Г. И.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 288 с.
 6. *Zhangxin C.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp.
 7. *Чекалюк Э. Б.* Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. – М. : Недра, 1965. – 238 с.
 8. *Bomba A.Ya.* Mathematic modelling of thermodynamic effects in a gas formation well bore zone / А. Ya. Bomba, М. А. Myslyuk, S. V. Yaroschak // Journal of Hydrocarbon Power Engineering. - 2013, Vol. 1, No. 1 – pp. 1–4.
 9. *Бомба А. Я.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика. 2010. – №2. – С. 3–13.
 10. *Versteeg H. K.* An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera. Longman Scientific & Technical. New York, 1995. – 267 pp.

E-mail: yaroschak@mail.ru

Надійшла 23.01.2015

Ярошак С. В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОГО ДРЕНАЖА

Аннотация. В работе развиты разработанные методы комплексного анализа математического моделирования изотермической многофазной фильтрации в случае вытеснения нефти теплоносителем с использованием технологии термогравитационного дренажа.

Ключевые слова: математическое моделирование, неизотермическая фильтрация, квазиконформные отображения.

Yaroschak S.V.

MATHEMATICAL MODELING RESERVOIR ENGINEERING OIL USING STEAM ASSISTED GRAVITY DRAINAGE

Annotation. In this article we developed a complex analysis of the developed methods of mathematical modelling of isothermal multiphase flow in the case of oil displacement using steam assisted gravity drainage.

Keywords: mathematical modelling, non-isothermal filtration, quasiconformal mappings.

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 11 (20)

Відповідальний за випуск
Ярошак С.В.

Підписано до друку 10.10.2013 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 12,7. Тираж 100. Зам. № 146/1.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12