Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Рівне-2012

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmvspm@ukr.net.

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

УДК 517.95

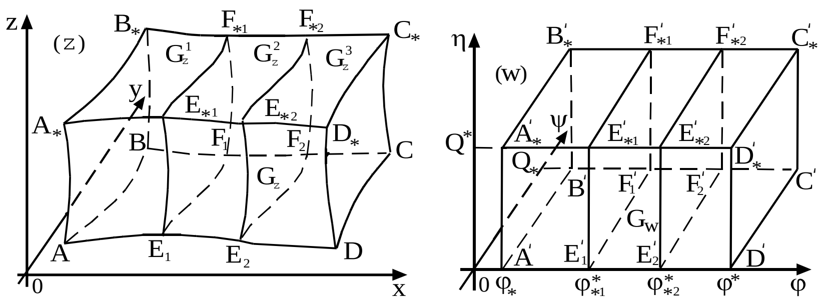
Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У БАГАТОШАРОВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У роботі запропонована математична модель для прогнозування процесу поширення забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищах – модельних областях, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі.

Вступ. При дослідженні просторових процесів поширення забруднюючих речовин у ізотропних насичених пористих середовищах – модельних областях, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, виникає чимало труднощів, пов'язаних із повздовжніми і поперечними викривленостями області, в якій шукається розв'язок, та складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач. Тому у рівняннях конвективної дифузії, граничних та початкових умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу, що суттєво спрощує запис задачі та її розв'язання [1 – 3].

У [4] відповідну методику поширено на випадок модельних областей, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії. У цій роботі нами відповідну методику перенесено на випадок відповідних багатошарових кусково-однорідних модельних областей.



а) *б)*

Рис. 1. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б) при $p=3$

Загальна постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$ ($z=(x,y,z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x,y,z)=0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x,y,z)=0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x,y,z)=0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x,y,z)=0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x,y,z)=0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x,y,z)=0\}$ та розділений еквіпотенціальними поверхнями $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{z: f_{*s}(x,y,z)=0\}$ ($s=\overline{1,p-1}$) на p підобластей $G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$, $G_z^s = E_sF_sF_{s+1}E_{s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$ ($s=\overline{2,p-2}$), $G_z^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*(p-1)}F_{*(p-1)}C_*D_*$ (рис. 1 а), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої речовини із врахуванням нерівномірного і змінного в часі розподілу величини її концентрації на ділянці входу ABB_*A_* фільтраційної течії, як відсутності, так і наявності інтенсивного відводу рідини на виході CDD_*C_*, додаткових джерел на водонепроникних ділянках ADD_*A_*, BCC_*B_*, $ABCD$ і $A_*B_*C_*D_*$ фільтраційної області, що описується рівняннями:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi\ ,\ div\, \vec{v} = 0\ , \tag{1}$$

$$div\left(D \cdot grad\ C \right) - \vec{v} \cdot grad\ C = \sigma \cdot C_t' \tag{2}$$

за наступних крайових умов:

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0\ , \tag{3}$$

$$C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{ABB_*A_*} = c_*\left(M, t\right)\ , \tag{4}$$

$$C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{CDD_*C_*} = c^*\left(M, t\right) \tag{5}$$

або

$$\frac{\partial C\left(x, y, z, t\right)}{\partial \vec{n}}\Big|_{CDD_*C_*} = 0\ , \tag{6}$$

$$C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{ADD_*A_*} = c_{**}\left(M, t\right),\ C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{BCC_*B_*} = c^{**}\left(M, t\right),$$

$$C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{ABCD} = c_{***}\left(M, t\right),\ C\left(x, y, z, t\right)\Big|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{***}\left(M, t\right) \tag{7}$$

або

$$\frac{\partial C\left(x, y, z, t\right)}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0\ , \tag{8}$$

початкової умови

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0\left(x, y, z\right) \tag{9}$$

і умов узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{z : f_{*s}(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$):

$$\varphi\,\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \varphi\,\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*\ \ (s = \overline{1, p-1}), \tag{10}$$

$$\kappa_s \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} \quad (s=\overline{1,p-1}), \qquad (11)$$

$$C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} \quad (s=\overline{1,p-1}), \qquad (12)$$

$$D_s \cdot C'_{\vec{n}} + v_n^s \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_{\vec{n}} + v_n^s \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} \quad (s=\overline{1,p-1}), \qquad (13)$$

де φ – фільтраційний потенціал, $0<\varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty$, φ_* і φ^* – довільні дійсні додатні числа, φ^*_{*s} – невідомі значення фільтраційного потенціалу на відповідних поверхнях розділу $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ $(s=\overline{1,p-1})$, $0<\varphi_* < \varphi^*_{*1} < \varphi^*_{*2} < \ldots < \varphi^*_{*p-1} < \varphi^* < \infty$, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації, $|\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2(x,y,z)+v_y^2(x,y,z)+v_z^2(x,y,z)} > v_* >> 0$, κ – коефіцієнт фільтрації, $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, \ (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^1, \\ \kappa_2, \ (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^2, \\ \ldots \\ \kappa_p, \ (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^p, \end{cases}$ κ_s – довільні дійсні додатні числа $(s=\overline{1,p})$, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C=C(x,y,z,t)$ – концентрація забруднюючої речовини у фільтраційній течії в точці (x,y,z) у момент часу t, $D = \begin{cases} D_1, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^1, \\ D_2, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^2, \\ \ldots \\ D_p, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^p \end{cases}$ – коефіцієнт дифузії, $D_s = \varepsilon \cdot d_s$ $(s=\overline{1,p})$, d_s – довільні дійсні додатні числа $(s=\overline{1,p})$, ε – малий параметр $(\varepsilon>0)$, $\sigma = \begin{cases} \sigma_1, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^1, \\ \sigma_2, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^2, \\ \ldots \\ \sigma_p, (x,y,z)\in G_{\mathrm{z}}^p \end{cases}$ –

коефіцієнт пористості, $0 < \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_p \le 1$, $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_{**}(M,t)$, $c^{**}(M,t)$, $c_{***}(M,t)$, $c^{***}(M,t)$, $c_0^0(x,y,z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G [1, 5], M – довільна точка відповідної поверхні, v_n^s – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$).

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x,y,z)$, $\eta = \eta(x,y,z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x,y,z)$) таких, що $\kappa \cdot grad\,\varphi = grad\,\psi \times grad\,\eta$ [6] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi\big|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta\big|_{ABCD} = 0$, $\eta\big|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, задача (1), (3), (10), (11) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області $G_{\mathbf{z}}$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_{\mathbf{w}} = \left\{\mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta): \;\; \varphi_* < \varphi < \varphi^*,\;\; 0 < \psi < Q_*,\;\; 0 < \eta < Q^*\right\}$ (рис. 1 б), де φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_*, Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата [2]. Припустимо, що ця задача є розв'язаною [7], зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v}$ і параметри φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_*, Q^*, Q. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi,\eta)$, $y = y(\varphi,\psi,\eta)$, $z = z(\varphi,\psi,\eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4) – (9), (12), (13) отримаємо відповідну "дифузійну задачу" для області $G_{\mathrm{w}} \times (0,\infty)$:

$$D \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{\eta} \right) - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} = \sigma \cdot c'_t , \quad (14)$$

$$c(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \quad (15)$$

$$c(\varphi^*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}^*(\psi, \eta, t) \quad (16)$$

або

$$c'_{\varphi}\left(\varphi^{*},\psi,\eta,t\right)=0, \tag{17}$$

$$c(\varphi,0,\eta,t)=\tilde{c}_{**}\left(\varphi,\eta,t\right),\ c(\varphi,Q_{*},\eta,t)=\tilde{c}^{**}\left(\varphi,\eta,t\right),$$

$$c(\varphi,\psi,0,t)=\tilde{c}_{***}\left(\varphi,\psi,t\right),\ c(\varphi,\psi,Q^{*},t)=\tilde{c}^{***}\left(\varphi,\psi,t\right) \tag{18}$$

або

$$c'_{\psi}(\varphi,0,\eta,t)=c'_{\psi}(\varphi,Q_{*},\eta,t)=c'_{\eta}(\varphi,\psi,0,t)=c'_{\eta}(\varphi,\psi,Q^{*},t)=0, \tag{19}$$

$$c\left(\varphi,\psi,\eta,0\right)=c_{0}^{0}\left(\varphi,\psi,\eta\right), \tag{20}$$

$$c\left(\varphi^{*}_{*s-},\psi,\eta,t\right)=c\left(\varphi^{*}_{*s+},\psi,\eta,t\right)\ \ (s=\overline{1,p-1}),$$

$$D_{s}\cdot c'_{\varphi}\left(\varphi^{*}_{*s-},\psi,\eta,t\right)+\kappa_{s}\cdot c\left(\varphi^{*}_{*s-},\psi,\eta,t\right)=$$

$$=D_{s+1}\cdot c'_{\varphi}\left(\varphi^{*}_{*s+},\psi,\eta,t\right)+\kappa_{s+1}\cdot c\left(\varphi^{*}_{*s+},\psi,\eta,t\right)\ \ (s=\overline{1,p-1}), \tag{21}$$

де $$c=c\left(\varphi,\psi,\eta,t\right)=C\left(x\left(\varphi,\psi,\eta\right),y\left(\varphi,\psi,\eta\right),z\left(\varphi,\psi,\eta\right),t\right),$$

$$\tilde{c}_{*}\left(\psi,\eta,t\right)=c_{*}\left(x\left(\varphi_{*},\psi,\eta\right),y\left(\varphi_{*},\psi,\eta\right),z\left(\varphi_{*},\psi,\eta\right),t\right),$$

$$\tilde{c}^{*}\left(\psi,\eta,t\right)=c^{*}\left(x\left(\varphi^{*},\psi,\eta\right),y\left(\varphi^{*},\psi,\eta\right),z\left(\varphi^{*},\psi,\eta\right),t\right)$$

$$\tilde{c}_{**}\left(\varphi,\eta,t\right)=c_{**}\left(x\left(\varphi,0,\eta\right),y\left(\varphi,0,\eta\right),z\left(\varphi,0,\eta\right),t\right),$$

$$\tilde{c}^{**}\left(\varphi,\eta,t\right)=c^{**}\left(x\left(\varphi,Q_{*},\eta\right),y\left(\varphi,Q_{*},\eta\right),z\left(\varphi,Q_{*},\eta\right),t\right),$$

$$\tilde{c}_{***}\left(\varphi,\psi,t\right)=c_{***}\left(x\left(\varphi,\psi,0\right),y\left(\varphi,\psi,0\right),z\left(\varphi,\psi,0\right),t\right),$$

$$\tilde{c}^{***}\left(\varphi,\psi,t\right)=c^{***}\left(x\left(\varphi,\psi,Q^{*}\right),y\left(\varphi,\psi,Q^{*}\right),z\left(\varphi,\psi,Q^{*}\right),t\right),$$

$$\tilde{c}_{0}^{0}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=c_{0}^{0}\left(x\left(\varphi,\psi,\eta\right),y\left(\varphi,\psi,\eta\right),z\left(\varphi,\psi,\eta\right)\right),$$

$$\tilde{v}=\tilde{v}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=v\left(x\left(\varphi,\psi,\eta\right),y\left(\varphi,\psi,\eta\right),z\left(\varphi,\psi,\eta\right)\right),$$

$$b_{1,1}=b_{1,1}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=\psi'^{2}_{x}+\psi'^{2}_{y}+\psi'^{2}_{z},\ b_{1,2}=b_{1,2}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=\eta'^{2}_{x}+\eta'^{2}_{y}+\eta'^{2}_{z},$$

$$b_{2,1}=b_{2,1}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=\psi''_{xx}+\psi''_{yy}+\psi''_{zz},\ b_{2,2}=b_{2,2}\left(\varphi,\psi,\eta\right)=\eta''_{xx}+\eta''_{yy}+\eta''_{zz}\ \ [2].$$

Алгоритм розв'язання задачі. Аналогічно до [4] асимптотичне наближення розв'язку $c(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{cases} c_1(\varphi,\psi,\eta,t), & \varphi_* < \varphi < \varphi^*_{*1}, \\ c_2(\varphi,\psi,\eta,t), & \varphi^*_{*1} < \varphi < \varphi^*_{*2}, \\ \ldots \\ c_p(\varphi,\psi,\eta,t), & \varphi^*_{*(p-1)} < \varphi < \varphi^* \end{cases}$ задачі (14) – (21) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів:

$$c_1=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{1,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{\widehat{P}}_{1,i}$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\breve{P}}_{1,i}+R_{1,n+1}, \qquad (22)$$

$$c_s=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{s,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{P}_{s,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde{P}}_{s,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{P}_{1,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{\widehat{P}}_{1,i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{P}_{s,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\breve{P}}_{s,i}+R_{s,n+1}\,(s=\overline{2,p-1}), \qquad (23)$$

$$c_p=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{p,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde{P}}_{p,i}+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot P_{p,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{H}_{p,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\widehat{H}_{p,i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{P}_{p,i}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\breve{P}}_{p,i}+R_{p,n+1}, \qquad (24)$$

де $c_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_s,\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p-1}$, $i=\overline{0,n+1}$), $\tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{s-1},\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{2,p}$, $i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi=\varphi^*_{*s}$ ($s=\overline{1,p-1}$) (поправки в околі поверхонь $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ ($s=\overline{1,p-1}$) розділу підобластей $G^s_{\mathbf{z}}$ ($s=\overline{1,p-1}$)), $P_{p,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\widehat{\widehat{P}}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\breve{P}_{s,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\breve{\breve{P}}_{s,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$, що враховують вплив "бічних джерел забруднень", $\tilde{\phi}_s = \dfrac{\varphi^*_{*s} - \varphi}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p-1}$), $\tilde{\tilde{\phi}}_s = \dfrac{\varphi - \varphi^*_{*s}}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p-1}$), $\tilde{\varphi} = \dfrac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \dfrac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \dfrac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \dfrac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = \overline{1, p}$) – залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму [1]).

У результаті підстановки (22) – (24) в (14) – (21) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержимо задачі для знаходження головних частин $c_{s,0}$ ($s = \overline{1, p}$) розв'язку і поправок $c_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, n}$):

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,0)\,\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,0)\,t} = 0, \\ c_{1,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta),\ c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,i)\,\varphi} + \sigma_1 \cdot c'_{(1,i)\,t} = g_{1,i}, \\ c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0,\ c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0\ (i = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(s,0)\,\varphi} + \sigma_s \cdot c'_{(s,0)\,t} = 0,\ c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta), \\ c_{s,0}(\varphi^*_{*(s-1)}, \psi, \eta, t) = c_{s-1,0}(\varphi^*_{*(s-1)}, \psi, \eta, t)\ (s = \overline{2, p}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa_s} \cdot c'_{(2,i)\,\varphi} + \sigma_s \cdot c'_{(s,i)\,t} = g_{s,i}, \\ c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0,\ c_{s,i}(\varphi^*_{*(s-1)}, \psi, \eta, t) = c_{s-1,i}(\varphi^*_{*(s-1)}, \psi, \eta, t)\ (s = \overline{2, p},\ i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

де $$g_{s,i} = d_s \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_s^2} \cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(s,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(s,i-1)\eta} \right)$$

($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, n}$).

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{1,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{ll}\tilde{c}_*(\psi,\eta,t-f_1(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge f_1(\varphi,\psi,\eta),\\ \tilde{c}_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t< f_1(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$c_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{ll}\kappa_1\cdot\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{g_{1,i}(s,\psi,\eta,f_1(s,\psi,\eta)+t-f_1(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}_1^2(s,\psi,\eta)}ds, & t\ge f_1(\varphi,\psi,\eta),\\ \int\limits_0^t\dfrac{g_{1,i}(f_1^{-1}(s+f_1(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\sigma_1}ds, & t< f_1(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$c_{s,0}(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{ll}c_{s-1,0}(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta,t-f_s(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge f_s(\varphi,\psi,\eta),\\ \tilde{c}_0^0(f_s^{-1}(f_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t< f_s(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$c_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{ll}h_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t), & t\ge f_s(\varphi,\psi,\eta),\\ \int\limits_0^t\dfrac{g_{s,i}(f_s^{-1}(s+f_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\sigma_s}ds, & t< f_s(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$h_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\kappa_s\cdot\int\limits_{\varphi^*_{*(s-1)}}^{\varphi}\frac{g_{s,i}(\hat{\varphi},\psi,\eta,f_s(\hat{\varphi},\psi,\eta)+t-f_s(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}_s^2(\hat{\varphi},\psi,\eta)}d\hat{\varphi}+$$

$$+c_{s-1,i}(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta,t)\ \ (s=\overline{2,p}),$$

де $f_1(\varphi,\psi,\eta)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{\kappa_1\cdot\sigma_1\cdot ds}{\tilde{v}_1^2(s,\psi,\eta)}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки $\left(x(\varphi_*,\psi,\eta),y(\varphi_*,\psi,\eta),z(\varphi_*,\psi,\eta)\right)\in ABB_*A_*$ до точки $\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),\ z(\varphi,\psi,\eta)\right)\in G_{\mathbf{z}}^1$ вздовж відповідної лінії течії, а $f_s(\varphi,\psi,\eta)=\int\limits_{\varphi^*_{*(s-1)}}^{\varphi}\dfrac{\kappa_s\cdot\sigma_s\cdot ds}{\tilde{v}_s^2(s,\psi,\eta)}$ – від точки $\left(x(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta),y(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta),\right.$ $\left.z(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta)\right)\in E_{s-1}F_{s-1}F_{*(s-1)}E_{*(s-1)}$ до точки $\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),\right.$ $\left.z(\varphi,\psi,\eta)\right)\in G_{\mathbf{z}}^s$ $(s=\overline{2,p})$, f_s^{-1}– функції, обернені відповідно до f_s $(s=\overline{1,p})$ відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi,\psi,\eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Для знаходження примежових функцій $P_{p,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ у випадку відсутності інтенсивного відводу рідини (крайова умова (14)) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,0)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_p \cdot P'_{(p,0)\,\tilde{\varphi}} = 0, \\ P_{p,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ P_{p,0}\left(0,\psi,\eta,t\right) = \tilde{c}^*\left(\psi,\eta,t\right) - c_{p,0}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,i)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_p \cdot P'_{(p,i)\,\tilde{\varphi}} = q_i \ \ (i=\overline{1,n}), \\ P_{p,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ P_{p,i}\left(0,\psi,\eta,t\right) = -c_{p,i}(\varphi^*,\psi,\eta,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p \cdot P''_{(p,n+1)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_p \cdot P'_{(p,n+1)\,\tilde{\varphi}} = q_{n+1}, \\ P_{p,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ P_{p,n+1}\left(0,\psi,\eta,t\right) = 0, \end{cases}$$

де $q_i = \dfrac{\kappa_p^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*,\psi,\eta)} \cdot \left(\sigma_p \cdot P'_{(p,i-1)\,t} - \sum\limits_{k=1}^{i} \left(d_p \cdot \dfrac{V_k}{\kappa_p^2} \cdot P''_{(p,i-k)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \dfrac{V_k}{\kappa_p} \cdot P'_{(p,i-k)\,\tilde{\varphi}} \right) - I(i,2) \times \right.$

$\left. \times d_p \cdot \sum\limits_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\,\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\,\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(p,i-2-k)\,\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(p,i-2-k)\,\eta} \right) \right)$

$(i=\overline{1,n+1})$, V_k, $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{2,2}(\varphi^*-\varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$, $I(a,b) = \begin{cases} 1, & ÿêù î\ \ a \ge b, \\ 0, & ÿêù î\ \ a < b. \end{cases}$

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{p,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right) = \frac{d_p}{\kappa_p}\left(\tilde{c}^*\left(\psi,\eta,t\right) - c_{p,0}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\right) \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\tilde{\varphi}},$$

$$P_{p,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_p}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\hat{\varphi}}q_i(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}-c_{p,i}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\ (i=\overline{1,n}),$$

$$P_{p,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_p}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\hat{\varphi}}q_{n+1}(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}\ .$$

У випадку ж врахування інтенсивного відводу рідини (крайова умова (15)) для знаходження функцій $P_{p,i}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_p\cdot P''_{(p,0)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_p\cdot P'_{(p,0)\,\tilde{\varphi}}=0, \\ P_{p,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P'_{(p,0)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)=-c'_{(p,0)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p\cdot P''_{(p,i)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_p\cdot P'_{(p,i)\,\tilde{\varphi}}=q_i\ \ (i=\overline{1,n}), \\ P_{p,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P'_{(p,i)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)=-c'_{(p,i)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_p\cdot P''_{(p,n+1)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa_p\cdot P'_{(p,n+1)\,\tilde{\varphi}}=q_{n+1}, \\ P_{p,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ P'_{(p,n+1)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0. \end{cases}$$

У результаті ж їх послідовного розв’язання отримаємо:

$$P_{p,0}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{d_p}{\kappa_p}c'_{p,0\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)\cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\tilde{\varphi}}\ ,$$

$$P_{p,i}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(\frac{1}{d_p}\cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\hat{\varphi}}q_i(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}-c'_{p,i\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)\right)d\hat{\varphi}\ \ (i=\overline{1,n}),$$

$$P_{p,n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_p}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\hat{\varphi}}q_{n+1}(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}\ .$$

Для знаходження функцій $\tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_s,\psi,\eta,t)$ $(s=\overline{1,p-1},\ i=\overline{0,n+1})$, $\tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{s-1},\psi,\eta,t)$ $(s=\overline{2,p}\ ,\ i=\overline{0,n+1})$ отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases} d_s \cdot \tilde{P}''_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s} = 0,\ d_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s\tilde{\tilde{\phi}}_s} - \kappa_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s} = 0, \\ \tilde{P}_{s,0}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\phi}_s \to \infty}{\to} 0,\ \tilde{\tilde{P}}_{s+1,0}(\tilde{\tilde{\phi}}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\tilde{\phi}}_s \to \infty}{\to} 0, \\ c_{s,0}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \tilde{P}_{s,0}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) = c_{s+1,0}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}_{s+1,0}\left(0_+, \psi, \eta, t\right), \\ -d_s \cdot \left(c'_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \tilde{P}'_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-, \psi, \eta, t\right)\right) + \kappa_s \cdot \left(c_{s,0}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \right. \\ \left. + \tilde{P}_{s,0}\left(0_-, \psi, \eta, t\right)\right) = d_{s+1} \cdot \left(c'_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+, \psi, \eta, t\right)\right) + \\ + \kappa_{s+1} \cdot \left(c_{s+1,0}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}_{s+1,0}\left(0_+, \psi, \eta, t\right)\right) (s = 1, p-1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_s \cdot \tilde{P}''_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s} = \hat{q}_{s,i},\ d_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s\tilde{\tilde{\phi}}_s} - \kappa_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s} = \hat{\hat{q}}_{s,i}, \\ \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\phi}_s \to \infty}{\to} 0,\ \tilde{\tilde{P}}_{s+1,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\tilde{\phi}}_s \to \infty}{\to} 0, \\ c_{s,i}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \tilde{P}_{s,i}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) = c_{s+1,i}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}_{s+1,i}\left(0_+, \psi, \eta, t\right), \\ -d_s \cdot \left(c'_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \tilde{P}'_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-, \psi, \eta, t\right)\right) + \kappa_s \cdot \left(c_{s,i}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \right. \\ \left. + \tilde{P}_{s,i}\left(0_-, \psi, \eta, t\right)\right) = d_{s+1} \cdot \left(c'_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+, \psi, \eta, t\right)\right) + \\ + \kappa_{s+1} \cdot \left(c_{s+1,i}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \tilde{\tilde{P}}_{s+1,i}\left(0_+, \psi, \eta, t\right)\right) (s = \overline{1, p-1},\ i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_s \cdot \tilde{P}''_{(s,n+1)\,\tilde{\phi}_s\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,n+1)\,\tilde{\phi}_s} = \hat{q}_{s,n+1},\ d_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,n+1)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s\tilde{\tilde{\phi}}_s} - \kappa_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,n+1)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s} = \\ = \hat{\hat{q}}_{s,n+1},\ \tilde{P}_{s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\phi}_s \to \infty}{\to} 0,\ \tilde{\tilde{P}}_{s+1,n+1}(\tilde{\tilde{\phi}}_s, \psi, \eta, t) \underset{\tilde{\tilde{\phi}}_s \to \infty}{\to} 0,\ \tilde{P}_{s,n+1}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) = \\ = \tilde{\tilde{P}}_{s,n+1}\left(0_+, \psi, \eta, t\right),\ -d_s \cdot \tilde{P}'_{(s,n+1)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) + \kappa_s \cdot \tilde{P}_{s,n+1}\left(0_-, \psi, \eta, t\right) = \\ = d_{s+1} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,n+1)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) + \kappa_{s+1} \cdot \tilde{P}_{s+1,n+1}\left(0_+, \psi, \eta, t\right) (s = \overline{1, p-1}), \end{cases}$$

де $\hat{q}_{s,i} = \dfrac{\kappa_s^2}{\tilde{v}^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_s \cdot \tilde{P}'_{(s,i-1)\,t} - \sum\limits_{k=1}^{i} \left(d_s \cdot \dfrac{\tilde{V}_{s,k}}{\kappa_s^2} \cdot \tilde{P}''_{(s,i-k)\,\tilde{\phi}_s\tilde{\phi}_s} - \dfrac{\tilde{V}_{s,k}}{\kappa_s} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-k)\,\tilde{\phi}_s} \right) - \right.$

$$-I(i,2) \cdot d_s \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,s,k} \cdot \tilde{P}''_{(s,i-2-k)\,\psi\psi} + \tilde{B}_{2,1,s,k} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-2-k)\,\psi} + \tilde{B}_{1,2,s,k} \cdot \tilde{P}''_{(s,i-2-k)\,\eta\eta} + \right.$$

$$+\tilde{B}_{2,2,s,k}\cdot\tilde{P}'_{(s,i-2-k)\,\eta}\Big),\ \hat{\hat{q}}_{s,i}=\frac{\kappa_{s+1}^{2}}{\tilde{v}^{2}(\varphi_{*}^{*},\psi,\eta)}\cdot\left(\sigma_{s+1}\cdot\tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i-1)\,t}-\sum_{k=1}^{i}\left(d_{s+1}\cdot\frac{\tilde{\tilde{V}}_{s,k}}{\kappa_{s+1}^{2}}\cdot\tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,i-k)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s\tilde{\tilde{\phi}}_s}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\tilde{\tilde{V}}_{s,k}}{\kappa_{s+1}}\cdot\tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i-k)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\right)-I(i,2)\cdot d_{s+1}\cdot\sum_{k=0}^{i-2}\Big(\tilde{\tilde{B}}_{1,1,s,k}\cdot\tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,i-2-k)\,\psi\psi}+\tilde{\tilde{B}}_{2,1,s,k}\cdot\tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i-2-k)\,\psi}+$$

$$\left.+\tilde{\tilde{B}}_{1,2,s,k}\cdot\tilde{\tilde{P}}''_{(s+1,i-2-k)\,\eta\eta}+\tilde{\tilde{B}}_{2,2,s,k}\cdot\tilde{\tilde{P}}'_{(s+1,i-2-k)\,\eta}\right)\quad(s=\overline{1,p-1},\quad i=\overline{1,n+1}),\quad \tilde{V}_{s,k},$$

$\tilde{B}_{1,1,s,k}$, $\tilde{B}_{1,2,s,k}$, $\tilde{B}_{2,1,s,k}$, $\tilde{B}_{2,2,s,k}$ ($s=\overline{1,p-1}$) – коефіцієнти при k-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^*-\varepsilon\phi_1,\psi,\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_{*-}^*$, а $\tilde{\tilde{V}}_{s,k}$, $\tilde{\tilde{B}}_{1,1,s,k}$, $\tilde{\tilde{B}}_{1,2,s,k}$, $\tilde{\tilde{B}}_{2,1,s,k}$, $\tilde{\tilde{B}}_{2,2,s,k}$ ($s=\overline{1,p-1}$) – коефіцієнти при k-тих степенях ε в розкладі функцій $\tilde{v}^2(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^*+\varepsilon\phi_2,\psi,\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi_{*+}^*$.

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\tilde{P}_{s,0}\left(\tilde{\phi}_s,\psi,\eta,t\right)=0.5\cdot\kappa_{s+1}^{-1}\Big(d_{s+1}\cdot c'_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)-d_s\cdot c'_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+$$

$$+3\cdot\kappa_{s+1}\cdot c_{s+1,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)-2\cdot\kappa_{s+1}\cdot c_{s,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)-\kappa_s\cdot c_{s,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\Big)\cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_s}\tilde{\phi}_s},$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{s+1,0}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_s,\psi,\eta,t\right)=0.5\cdot\kappa_{s+1}^{-1}\Big(d_{s+1}\cdot c'_{(s+1,0)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)-d_s\cdot c'_{(s,0)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+$$

$$+\kappa_{s+1}\cdot c_{s+1,0}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)-\kappa_s\cdot c_{s,0}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\Big)\cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}}\tilde{\tilde{\phi}}_s}\quad(s=\overline{1,p-1});$$

$$\tilde{P}_{s,i}\left(\tilde{\phi}_s,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_s}\cdot\int_0^{\tilde{\phi}_s}\left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_s}\hat{\varphi}}\cdot\int_0^{\hat{\varphi}}\hat{q}_{s,i}(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_s}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}-\left(\kappa_s+\kappa_{s+1}\right)^{-1}\times$$

$$\times\Big(d_s\cdot c'_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+d_{s+1}\cdot c'_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+\left(\kappa_s+\kappa_{s+1}\right)\cdot c_{s,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\Big),$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{s+1,i}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_s,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_{s+1}}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}}\widehat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\widehat{\varphi}}\widehat{\widehat{q}}_{s,i}(\widehat{\widehat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}}\widehat{\widehat{\varphi}}}d\widehat{\widehat{\varphi}}\right)d\widehat{\varphi}-\left(\kappa_s+\kappa_{s+1}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(d_s\cdot c'_{(s,i)\,\tilde{\phi}_s}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)+d_{s+1}\cdot c'_{(s+1,i)\,\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(0_+,\psi,\eta,t\right)+\left(\kappa_s+\kappa_{s+1}\right)\cdot c_{s,i}\left(0_-,\psi,\eta,t\right)\right)$$

$$(\, s=\overline{1,p-1}\,,\ i=\overline{1,n}\,);$$

$$\tilde{P}_{s,n+1}\left(\tilde{\phi}_s,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_s}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\phi}_s}\left(e^{-\frac{\kappa_s}{d_s}\widehat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\widehat{\varphi}}\widehat{\widehat{q}}_{s,n+1}(\widehat{\widehat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_s}\widehat{\widehat{\varphi}}}d\widehat{\widehat{\varphi}}\right)d\widehat{\varphi}\,,$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{s+1,n+1}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_s,\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_{s+1}}\cdot\int\limits_0^{\tilde{\tilde{\phi}}_s}\left(e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}}\widehat{\varphi}}\cdot\int\limits_0^{\widehat{\varphi}}\widehat{\widehat{q}}_{s,n+1}(\widehat{\widehat{\varphi}},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}}\widehat{\widehat{\varphi}}}d\widehat{\widehat{\varphi}}\right)d\widehat{\varphi}\ \ (\, s=\overline{1,p-1}\,).$$

Функції $\widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,2n+1}$) у випадку наявності додаткових джерел (перша з крайових умов (16)) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_s\cdot b_{1,1}\left(\varphi,0,\eta\right)\cdot\widehat{P}''_{(s,0)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}-\dfrac{\tilde{v}^2\left(\varphi,0,\eta\right)}{\kappa_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,0)\,\varphi}=\sigma_s\cdot\widehat{P}'_{(s,0)\,t}\ \ (s=\overline{1,p}),\\ \widehat{P}_{s,0}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to}0,\ \widehat{P}_{s,0}(\varphi,0,\eta,t)=\tilde{c}_{**}(\varphi,\eta,t)-\widehat{M}_{s,0}(\varphi,\eta,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases} d_s\cdot b_{1,1}\left(\varphi,0,\eta\right)\cdot\widehat{P}''_{(s,i)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}-\dfrac{\tilde{v}^2\left(\varphi,0,\eta\right)}{\kappa_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,i)\,\varphi}=\sigma_s\cdot\widehat{P}'_{(s,i)\,t}-\tilde{M}_{s,i}\ \ (s=\overline{1,p},\,i=\overline{1,2n+1}),\\ \widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to}0,\ \widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,0,\eta,t\right)=\begin{cases}0,\ \text{ÿêù î ³í åï àðí å,}\\ -\widehat{M}_{s,i}\left(\varphi,\eta,t\right),\ \text{ÿêù î ³ï àðí å.}\end{cases}\end{cases}$$

Тут $\widehat{M}_{1,i}(\varphi,\eta,t)=\tilde{n}_{1,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{\tilde{P}}_{1,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)$ $(\, i=\overline{0,2n+1}\,)$, $\widehat{M}_{s,i}(\varphi,\eta,t)=$ $=\tilde{n}_{s,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{P}_{s,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{\tilde{P}}_{s,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)$ $(\, s=\overline{2,p-1}\,, i=\overline{0,2n+1}\,)$,

$\widehat{M}_{p,i}(\varphi,\eta,t)=\tilde{n}_{p,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{P}_{p,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)+P_{p,{}^3-{}^3/2}(\varphi,0,\eta,t)$ $(i=\overline{0,2n+1})$,

$$\tilde{M}_{s,i}=d_s\cdot\left(\sum_{k=1}^{i}B^*_{1,1,s,k}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-k)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}+\sum_{k=0}^{i-1}B^*_{2,1,s,k}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-1-k)\,\tilde{\psi}}+I(i,2)\cdot\sum_{k=0}^{i-2}\left(\frac{V^*_{s,k}}{\kappa_s^2}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-2-k)\,\varphi\varphi}+\right.\right.$$

$$+B^*_{1,2,s,k}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-2-k)\,\eta\eta}+B^*_{2,2,s,k}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-2-k)\,\eta}\Bigg)\Bigg)+\sum_{k=1}^{i}\frac{V^*_{s,k}}{k_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-k)\,\varphi}\quad(s=\overline{1,p}\,,\ i=\overline{1,2n+1}),$$

$V^*_{s,k}$, $B^*_{1,1,s,k}$, $B^*_{1,2,s,k}$, $B^*_{2,1,s,k}$ і $B^*_{2,2,s,k}$ ($s=\overline{1,p}$) – коефіцієнти при k-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{1,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{1,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$, $b_{2,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$ і $b_{2,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi},\eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi=0$.

У випадку відсутності додаткових джерел (перша з крайових умов (17)) функції $\widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_s\cdot b_{1,1}\left(\varphi,0,\eta\right)\cdot\widehat{P}''_{(s,0)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}-\dfrac{\tilde{v}^2\left(\varphi,0,\eta\right)}{\kappa_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,0)\,\varphi}=\sigma_s\cdot\widehat{P}'_{(s,0)\,t}\ (s=\overline{1,p}),\\ \widehat{P}_{s,0}(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \widehat{P}'_{(s,0)\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)=-\widehat{M}_{s,0}(\varphi,\eta,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases} d_s\cdot b_{1,1}\left(\varphi,0,\eta\right)\cdot\widehat{P}''_{(s,i)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}-\dfrac{\tilde{v}^2\left(\varphi,0,\eta\right)}{\kappa_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,i)\,\varphi}=\sigma_s\cdot\widehat{P}'_{(s,i)\,t}-\tilde{M}_{s,i}\ (s=\overline{1,p},\,i=\overline{1,2n+1}),\\ \widehat{P}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \widehat{P}'_{(s,i)\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)=\begin{cases}0,\ \text{ÿêù î ³í åï àðí å},\\ -\widehat{\widehat{M}}_{s,i}\left(\varphi,\eta,t\right),\ \text{ÿêù î ³ï àðí å},\end{cases}\end{cases}$$

де $\widehat{\widehat{M}}_{1,i}(\varphi,\eta,t)=\tilde{n}_{1,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{\tilde{P}}_{1,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)$ ($i=\overline{0,2n+1}$), $\widehat{\widehat{M}}_{s,i}(\varphi,\eta,t)=$ $=\tilde{n}_{s,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{P}_{s,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{\tilde{P}}_{s,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)$ ($s=\overline{2,p-1}\,,i=\overline{0,2n+1}$), $\widehat{M}_{p,i}(\varphi,\eta,t)=\tilde{n}_{p,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)+\tilde{P}_{p,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)+P_{p,³-³/2\,\tilde{\psi}}(\varphi,0,\eta,t)$ ($i=\overline{0,2n+1}$),

$$\tilde{M}_{s,i}=d_s\cdot\left(\sum_{k=1}^{i}B^*_{1,1,s,k}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-k)\,\tilde{\psi}\tilde{\psi}}+\sum_{k=0}^{i-1}B^*_{2,1,s,k}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-1-k)\,\tilde{\psi}}+I(i,2)\cdot\sum_{k=0}^{i-2}\left(\frac{V^*_{s,k}}{\kappa_s^2}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-2-k)\,\varphi\varphi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B^*_{1,2,s,k}\cdot\widehat{P}''_{(s,i-2-k)\,\eta\eta}+B^*_{2,2,s,k}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-2-k)\,\eta}\right)\right)+\sum_{k=1}^{i}\frac{V^*_{s,k}}{k_s}\cdot\widehat{P}'_{(s,i-k)\,\varphi}\quad(s=\overline{1,p}\,,\ i=\overline{1,2n+1}).$$

Задачі для знаходження функцій $\widehat{\widehat{P}}_{s,i}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\breve{P}_{s,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\breve{\breve{P}}_{s,i}\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,2n+1}$) отримуються аналогічно. У відповідних задачах рівняння виду $\alpha(\varphi,\xi)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}-\delta(\varphi,\xi)\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=\sigma\dfrac{\partial F}{\partial t}+q(\varphi,\xi,\mu,t)$ розв'язуються шляхом їх зведення за допомогою заміни $F(s)=F(\varphi,\xi)-t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $\tilde{\alpha}(s)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}=\sigma\dfrac{\partial F}{\partial t}+q_0(s,\mu,t)$, де s – параметр.

Висновки. Узагальнено, запропоновану в [4], модель для прогнозування процесу поширення забруднюючих речовин на випадок багатошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищах – модельних областей, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії.

Застосована методика "розщеплення" вихідної задачі та конструкція побудови розв'язку шляхом доповнення розв'язку відповідної виродженої задачі різними поправками дозволила вперше отримати розв'язок задачі (1) – (13) в аналітичному вигляді.

Слід зауважити, що такий підхід знаходить своє вагоме застосування також при прогнозуванні роботи і проектуванні багатошарових засипних фільтрів з однорідним завантаження кожного шару.

1. *Бомба А. Я.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
2. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37–44.
3. *Бомба А. Я.* Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 105–113.
4. *Сівак В. М.* Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. О. Шепетько,

Ю. Є. Климюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне: НУВГП, 2011. – С. 37–55.

5. *Лаврик В. И.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев: 1985. – 16 с.
6. *Рауз. Х.* Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.
7. *Климюк Ю. Є.* Побудова алгоритму числового розв'язування просторових аналогів обернених крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей / Ю. Є. Климюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 9 (18). – Рівне : РДГУ, 2012. – С. 59-73.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 20.08.2012

Абрамович О. В., Климюк Ю. Е. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В МНОГОСЛОЙНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ // *В работе предложена математическая модель для прогнозирования процесса распространения загрязняющих веществ в многослойных кусочно-однородных изотропных насыщенных пористых средах - модельных областях, которые имеют форму криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделенных некоторыми эквипотенциальными поверхностями на несколько подобластей, характеризующихся разными коэффициентами фильтрации, пористости и диффузии. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи.*

Abramovich O. V., Klymyuk Yu. Ye. MATHEMATICAL MODELING OF SPATIAL SINGULARLY PERTURBED PROCESSES OF MASS TRANSFER OF POLLUTING SUBSTANCES IN MULTILAYER PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC POROUS MEDIA // *In this paper a mathematical model to predict the process of distribution of pollutants in multi-layer piecewise-homogeneous isotropic saturated porous media of the model areas, which have the form of the curvilinear parallelepipeds, bounded two equipotential surfaces and four surface flow, separated by some of the equipotential surfaces for several subdomains, which are characterized by different coefficients of filtration, porosity and diffusion is proposed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem is developed.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Відповідальний за випуск
Бомба А. Я.

Підписано до друку __.__.2012 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № _/_.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12