

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Рівне-2012

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> (<i>консультант</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

Зміст

- Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.** Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах..... 5
- Бомба А. Я., Сінчук А. М.** Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву..... 22
- Булавацький В. М.** Геоінформаційна математична модель для вивчення нерівноважних неізотермічних консолідаційних процесів..... 34
- Гладка О. М.** Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень..... 45
- Климюк Ю. Є.** Побудова алгоритму числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей..... 59
- Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.** Числове розв'язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні 74
- Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.** Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах 102
- Конет І. М.** Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених

кусково-однорідних циліндрах	117
Романюк В. В. Твердження щодо позаграничних компонент у нерегулярній оптимальній стратегії проектувальника для будівельної опорної конструкції з N опорами в умовах $N-1$ ідентичної часткової невизначеності стиснень.....	135
Присяжнюк І. М., Крока Л. Л. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у тризв'язній області	149
Присяжнюк О. В. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях	162
Черненко В. П. Нестационарні повздожні хвилі в спадково-пружному стрижні при тепловому ударі	176
Шпортько О. В., Шпортько Л. В. Аналіз взаємовпливу модифікації формату PNG.....	182
Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона.....	189
Ярощак С. В. Один метод врахування впливу тріщини ГРП на процес фільтрації у елементах площового заводнення.....	208

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Бомба А. Я., Сінчук А. М.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У ЗОНАЛЬНО НЕОДНОРІДНОМУ ПЛАСТІ З УРАХУВАННЯМ ТРІЩИН ГІДРОРОЗРИВУ

На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу, запропоновано числовий алгоритм визначення притоку пластової рідини до свердловини, зокрема, часу повного її обводнення, при наявності тріщин гідророзриву у горизонтальному зонально неоднорідному пласті. На конкретному прикладі проаналізовано вплив просторового розміщення експлуатаційної свердловини на значення характерних фільтраційних параметрів.

Вступ. Гідравлічний розрив пласта (ГРП) є одним із найефективніших методів підвищення нафтовіддачі та інтенсифікації процесу витіснення. За рахунок створення тріщин утворюються високопровідні канали для надходження флюїду в свердловину, що дозволяє значно пришвидшити процес та збільшити значення фільтраційної витрати [1]. Значною мірою на характер протікання процесу витіснення впливає просторове розміщення свердловин у випадку зонально неоднорідного середовища (існування у пласті певних високо- або низькопроникних зон неоднорідностей) [2].

У цій роботі пропонується алгоритм розв'язання обернених крайових задач визначення притоку пластової рідини до свердловини, змінюючи її просторове розміщення (зокрема, час повного обводнення експлуатаційної свердловини), при наявності тріщин ГРП із застосуванням методології поетапної фіксації характеристик процесу і середовища у зонально неоднорідному пласті.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу на знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу,

частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема час повного обводнення експлуатаційної свердловини) при наявності тріщин ГРП із урахуванням неоднорідності пористого середовища [4] в пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому контуром живлення та контуром експлуатаційної свердловини (рис. 1).

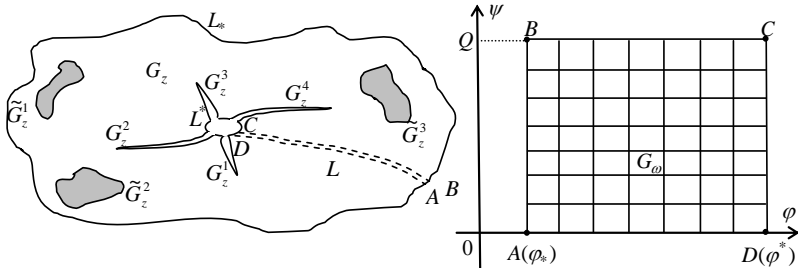


Рис. 1. Горизонтальний пласт після процедури ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Для математичної постановки задачі запишемо рівняння нерозривності $div \vec{v} = 0$ та рівняння руху $\vec{v} = k \cdot grad \varphi$ [7-8] відносно квазіпотенціалу швидкості ($\varphi = \varphi(x, y)$), де k – коефіцієнт провідності середовища, який представимо у вигляді:

$$k(x, y) = \begin{cases} k_l, & (x, y) \in G_z^l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{k}_p, & (x, y) \in \tilde{G}_z^p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l G_z^l \setminus \bigcup_p \tilde{G}_z^p; \end{cases}$$

де G_z^l , \tilde{G}_z^p – ділянки пласта, що відповідають l -ій тріщині та p -ій зоні неоднорідності, відповідно.

Аналогічно до [5], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз L області G_z

вздовж лінії розділу течії, що визначаються точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, поставлена вище задача зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus L$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\begin{aligned} k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ [\varphi]_{\partial G_z^l, \partial \tilde{G}_z^p} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_z^l, \partial \tilde{G}_z^p} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $Q = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ – невідома витрата, $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$,

$[\bullet]_{\partial G_z^l}$, $[\bullet]_{\partial \tilde{G}_z^p}$ – стрибок заданої функції на ∂G_z^l , $\partial \tilde{G}_z^p$ відповідно.

Границя Γ_t , положення якої в початковий момент часу $t = t_0$ є відомим $s(x, y, t_0) = \tilde{s}(x, y) \equiv 0$ (зокрема, можна прийняти $\Gamma_{t=t_0} = L_*$), визначається наступним рівнянням з відповідними умовами [4]:

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} s = 0, \quad s|_{L_*} = 1, \quad s(x, y, t)|_{t=t_0} = 0 \quad (2)$$

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї [3], яка, включаючи рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин відповідної характеристичної функції течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ (виконання яких вимагатимемо і на розрізі, що «роздвоюється» при переході від області G_z до G_ω), запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} k \cdot y_\psi = x_\varphi, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ k \cdot x_\psi = -y_\varphi, & J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (5)$$

$$\left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\bar{U}, \bar{n}) \right]_{\partial G_\omega^l, \partial \tilde{G}_\omega^p} = 0, \quad \text{àà } l, p = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (7)$$

де f_* , f^* – задані функції, що характеризують контури області G_z відповідно L_* , L^* , запис яких може бути представлено як у неявній так і у параметричній формі: $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{z : x = x_*(\tau), y = y_*(\tau)\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{z : x = x^*(\tau), y = y^*(\tau)\}$, де $\alpha^* \leq \tau \leq \beta^*$.

Використавши відповідні формули переходу [3] $J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{y_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{x_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3) і формули для}$$

обчислення компонент швидкості $v_x = \frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$,

задачу (2) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (8)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0, \quad (9)$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

де отримане диференціальне рівняння в частинних похідних є фактично просторово-одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Інтегруючи відповідне (8) характеристичне диференціальне рівняння $\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}$, знайдемо час t проходження частинкою шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ вздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$:

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi}, \quad (10)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, σ - пористість ґрунту (вважатимемо, що пористість обчислюється за формулою $\sigma = ak$, де a – деяке додатне дійсне число). Використовуючи (6), знаходимо положення лінії розділу $\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної свердловини, відповідно $\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$, $\Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$.

Алгоритм числового розв’язання. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \Delta\psi, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\Delta\psi = Q/m$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ , $\Delta\varphi/\Delta\psi = \gamma$ – квазіконформний інваріант, $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу.

Різницеві аналоги рівнянь (7), крайових умов (4), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) запишемо відповідно у вигляді [9]:

$$\begin{cases} \gamma^2(k_{i,j+1/2}(x_{i,j+1}-x_{i,j})-k_{i,j-1/2}(x_{i,j}-x_{i,j-1}))+ \\ + (x_{i+1,j}-x_{i,j})/k_{i+1/2,j}-(x_{i,j}-x_{i,j-1})/k_{i-1/2,j}=0, \\ \gamma^2(k_{i,j+1/2}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-k_{i,j-1/2}(y_{i,j}-y_{i,j-1}))+ \\ + (y_{i+1,j}-y_{i,j})/k_{i+1/2,j}-(y_{i,j}-y_{i,j-1})/k_{i-1/2,j}=0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j})=0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j})=0, j=\overline{0,m}, \\ x_{i,0}=x_{i,m}, y_{i,0}=y_{i,m}, i=\overline{0,n}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})+(4y_{1,j}-3y_{0,j}-y_{2,j})\times \\ \times (y_{0,j+1}-y_{0,j-1})=0, (3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})+ \\ +(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-4y_{n-1,j})(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})=0, j=\overline{0,m-1}; \end{cases} \quad (13)$$

де $x_{i,j}=x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}=y(\varphi_i, \psi_j)$, $k_{i,j\pm 1/2}=k\left(\frac{x_{i,j\pm 1}+x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1}+y_{i,j}}{2}\right)$,

$$k_{i\pm 1/2,j}=k\left(\frac{x_{i\pm 1,j}+x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j}+y_{i,j}}{2}\right).$$

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q=\frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ – одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників [2] двох областей:

$$\gamma=\frac{1}{mn}\sum_{i,j=0}^{n-1,m-1}\frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}}\frac{\alpha_{i,j}+\alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j}+\beta_{i+1,j}}, \quad (14)$$

де $\alpha_{i,j}=\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i,j})^2}$, $\beta_{i,j}=\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2+(y_{i,j+1}-y_{i,j})^2}$.

Згідно з (10) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж j -тої лінії течії від i_* -ї до i^* -ї

еквіпотенціалей: $t_{j(i_*,i^*)}=\sum_{\tilde{i}=i_*}^{i^*}\frac{\sigma k_{\tilde{i},j}\Delta\varphi}{v^2(x(\varphi_{\tilde{i}},\psi_j),y(\varphi_{\tilde{i}},\psi_j))}$, $j=\overline{0,m}$, $i=\overline{0,n}$.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3)–(7) різницевою задачею в загальному випадку, побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (13), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (15), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати

$$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}. \text{ Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів}$$

$(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (12) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (14). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (15), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів.

Визначаємо величину
$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} -$$

зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії, де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (3):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв’язана із необхідною точністю.

Комп’ютерна реалізація алгоритму та числові розрахунки. Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого контуром

свердловини $L^* = \begin{cases} x^*(t) = 0.1 \cos(t) + \tilde{x}^*, \\ y^*(t) = 0.1 \sin(t) + \tilde{y}^*, \end{cases}$ та контуром живлення

$$L_* = \begin{cases} x_*(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(7t)), \\ y_*(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(4t)), \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq t < 2\pi, \quad n \times m = 48 \times 80,$$

$$\varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad \sigma = 0.5, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}, \quad k_l = 8, \quad \tilde{k}_p = 0.4, \quad k_0 = 1,$$

$$G_z^l = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x - \tilde{x}^*}{a_l} \right)^2 + \left(\frac{y - \tilde{y}^*}{b_l} \right)^2 \leq 1 \right\},$$

$$\tilde{G}_z^p = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x - \tilde{x}_p}{\tilde{a}_p} \right)^2 + \left(\frac{y - \tilde{y}_p}{\tilde{b}_p} \right)^2 \leq 1 \right\}, \quad a_l, b_l, \tilde{a}_p, \tilde{b}_p - \text{півосі}$$

еліпсів, що моделюють, відповідно, l -ті тріщини гідророзриву та p -ті зони неоднорідностей, $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ – координати центру експлуатаційної свердловини та тріщин гідророзриву, що відходять з даної свердловини,

$(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p)$ – координати відповідних центрів еліпсів, що моделюють p -ті зони неоднорідностей.

Розглянемо серію випадків (рис. 2) просторового розміщення експлуатаційної свердловини відносно зон неоднорідностей з центрами $(-0,3;0,7)$, $(-0,6;-0,8)$, $(0,8;0,2)$ (де $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0,5$, $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0,4$, $\tilde{a}_3 = 0,4$, $\tilde{b}_3 = 0,5$) з урахуванням тріщин ($a_1 = b_2 = 0,05$, $b_1 = a_2 = 1$), утворених внаслідок процедури ГРП.

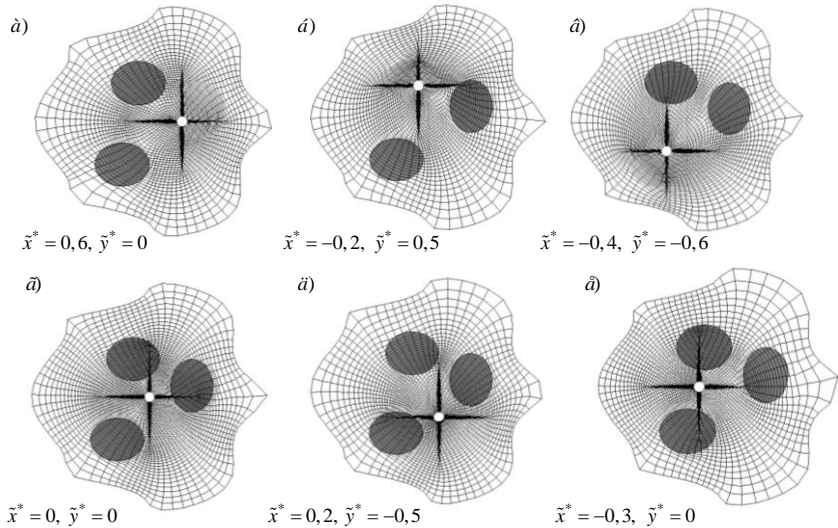


Рис. 2. Гідродинамічні сітки для зонально неоднорідного пласта збуреного тріщинами ГРП

Проведемо порівняння зміни положення границі розділу рідин у різні моменти часу (рис. 3) розробки пласта та встановимо значення фільтраційної витрати, час прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та час повного її обводнення (табл. 1) відносно зон неоднорідностей ґрунту, що дозволить, в свою чергу, передбачити напрямки обводнення і провести відповідні дії щодо уникнення пов'язаних з цим небажаних ефектів.

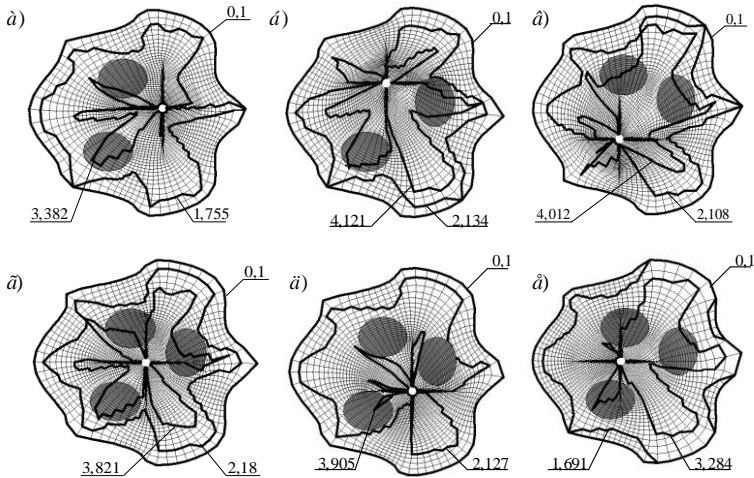


Рис. 3. Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин для різних моментів часу

Таблиця 1. Значення Q , t_{\min} та t_{\max}

	Q	t_{\min}	t_{\max}
a)	2,537	0,59	5,62
á)	2,564	0,45	7,49
â)	2,394	0,18	6,31
ä)	2,692	1,11	4,52
ä)	2,691	0,48	4,69
ä)	2,614	1,12	4,73

В результаті досліджень було помічено, що при розміщенні експлуатаційної свердловини у одній із зон неоднорідностей (рис. 2 a , 2 á , 2 â), на відміну від випадків її розміщення між ними (рис. 2 ä , 2 ä , 2 ä), значення її дебіту значно менше, час повного обводнення – більше, у зв'язку із вищим загальним фільтраційним опором пласта в його привибійній ділянці. Змінюючи просторове розміщення експлуатаційної свердловини, при використанні розробленого алгоритму, вдалося підібрати таке її положення, при якому час розробки пласта є

мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною, що забезпечує оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів.

Висновки. На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу запропоновано числовий алгоритм обчислення притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП скінченної проникності у зонально неоднорідному середовищі, який автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу, частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема час повного обводнення експлуатаційної свердловини). При проведенні числових експериментів, підтверджено, що просування границі розділу значно пришвидшується у випадку, коли свердловина знаходиться між зонами неоднорідностей і це, в свою чергу, призводить до збільшення дебіту експлуатаційної свердловини.

1. *Каневская Р. Д.* Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта / Р. Д. Каневская. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212 с.
2. *Борисов Ю.П.* Эффективность заводнения зонально-неоднородного пласта / Борисов Ю.П., Маслянец Ю.В., Понамарев А.Г. и др. // Нефтепромысловое дело. – М., 1978. – № 6 – С. 24-26.
3. *Бомба А. Я.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
4. *Бомба А. Я.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика, – 2010. – №2 – С. 3–13.
5. *Бомба А. Я.* Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40) С. 32–36.
6. *Бомба А. Я.* Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2012. – Вип.6. – С. 11–26.
7. *Баренблатт Г. И.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик – М. : Недра, 1972. – 288 с.

8. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp.
9. Versteeg H. K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera. - Longman Scientific & Technical. New York, 1995. – 267 pp.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: abomba@ukr.net

sinchuk@mail.ru

Надійшла 24.10.2012

Бомба. А. Я., Синчук А. М. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫТЕСНЕНИЯ В ЗОНАЛЬНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ ТРЕЩИН ГИДРОРАЗРЫВА // *На основе идей методов квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик среды и процесса, предложен числовой алгоритм нахождения притока пластового вещества к скважине, в частности, время полного ее обводнения, при существовании трещин гидроразрыва в горизонтальном зонально неоднородном пласте. На конкретном примере проанализировано влияние пространственного размещения эксплуатационной скважины на значение характерных фильтрационных параметров.*

Bomba A. Ja., Sinchuk A. M. MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR PROCESSES OF DISPLACEMENT IN THE ZONAL HETEROGENEOUS LAYER TAKING INTO ACCOUNT CRACKS OF HYDRAULIC BREAK // *On the basis of ideas of methods of quasi-conformal reflections and stage-by-stage fixing of descriptions of environment and process the numerical algorithm of ischesleniya influx of stratal matter is offered to the mining hole, in particular, time of its complete irrigation, at existence of cracks of hydraulic layer break in a horizontal heterogeneous layer. On a concrete example efficiency of *gidrorazryva* and action of spatial orientation of crack is analysed on the value of lauter expense.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Відповідальний за випуск
Бомба А. Я.

Підписано до друку __. __. 2012 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № _/_.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12