

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Рівне-2012

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> (<i>консультант</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

Зміст

- Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.** Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах..... 5
- Бомба А. Я., Сінчук А. М.** Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву..... 22
- Булавацький В. М.** Геоінформаційна математична модель для вивчення нерівноважних неізотермічних консолідаційних процесів..... 34
- Гладка О. М.** Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень..... 45
- Климюк Ю. Є.** Побудова алгоритму числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей..... 59
- Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.** Числове розв'язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні 74
- Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.** Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах 102
- Конет І. М.** Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених

кусково-однорідних циліндрах	117
Романюк В. В. Твердження щодо позаграничних компонент у нерегулярній оптимальній стратегії проектувальника для будівельної опорної конструкції з N опорами в умовах $N-1$ ідентичної часткової невизначеності стиснень.....	135
Присяжнюк І. М., Крока Л. Л. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у тризв'язній області	149
Присяжнюк О. В. Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях	162
Черненко В. П. Нестационарні повздожні хвилі в спадково-пружному стрижні при тепловому ударі	176
Шпортько О. В., Шпортько Л. В. Аналіз взаємовпливу модифікації формату PNG.....	182
Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона.....	189
Ярощак С. В. Один метод врахування впливу тріщини ГРП на процес фільтрації у елементах площового заводнення.....	208

УДК 517.95

Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У роботі запропонована математична модель для прогнозування процесу поширення забруднюючих речовин у ізотропних насичених пористих однорідних середовищах – двозв'язних модельних областях, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі.

Вступ. При дослідженні просторових процесів поширення забруднюючих речовин у ізотропних насичених пористих середовищах виникає чимало труднощів, пов'язаних із викривленостями області, в якій шукається розв'язок, та складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач. Одна із ефективних методик розв'язування сингулярно збурених задач типу «фільтрація-конвекція-дифузія» у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними при фільтрації водних розчинів у пористих середовищах – модельних областях, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, полягає у наступному: поетапній фіксації характеристик і складових процесу та середовища; розв'язанні задачі фільтрації з використанням просторових аналогів конформних відображень області комплексного потенціалу на фізичну область (що включає побудову гідродинамічної сітки, поля швидкостей, обчислення величин різних перетоків тощо) [4]; переході у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області просторового комплексного потенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпе-

чує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелюванні обчислень; розв'язанні сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія” з використанням числово-асимптотичних методів [2].

У цій роботі нами відповідну методику на основі [5], де отримано алгоритм числового розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії, із розрізом на прямокутні паралелепіеди, перенесено на випадок відповідних двозв'язних модельних областей.

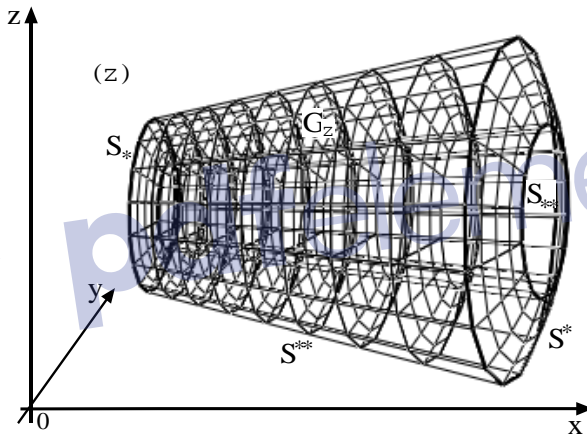


Рис. 1. Просторова фізична область G_z

Загальна постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), G_z – двозв'язна область, обмежена гладкими, ортогональними між собою по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $S_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$, $S^* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{z : f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $S^{**} = \{z : f^{**}(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої

речовини із врахуванням нерівномірного і змінного в часі розподілу величини її концентрації на ділянці входу S_* фільтраційної течії, як відсутності, так і наявності інтенсивного відводу рідини на виході S^* , додаткових джерел на водонепроникних ділянках S_{**} і S^{**} фільтраційної області, що описується рівняннями:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div} (D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C = \sigma \cdot C'_t \quad (2)$$

за наступних крайових умов:

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0, \quad (3)$$

$$C(x, y, z, t)|_{S_*} = c_*(M, t), \quad (4)$$

$$C(x, y, z, t)|_{S^*} = c^*(M, t) \quad (5)$$

або

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}}|_{S^*} = 0, \quad (6)$$

$$C(x, y, z, t)|_{S_{**}} = c_{**}(M, t), \quad C(x, y, z, t)|_{S^{**}} = c^{**}(M, t) \quad (7)$$

або

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}}|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0, \quad (8)$$

початкової умови

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z), \quad (9)$$

де φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, φ_* і φ^* – довільні дійсні додатні числа), $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), κ – коефіцієнт фільтрації (довільне дійсне додатне число), \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C = C(x, y, z, t)$ – концентрація забруднюючої речови-

ни у фільтраційній течії в точці (x, y, z) у момент часу t , D – коефіцієнт дифузії, $D = \varepsilon \cdot d$, d – довільне дійсне додатне число, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), σ – коефіцієнт пористості, $0 < \sigma < 1$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_0^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G [1, 6], M – довільна точка відповідної поверхні.

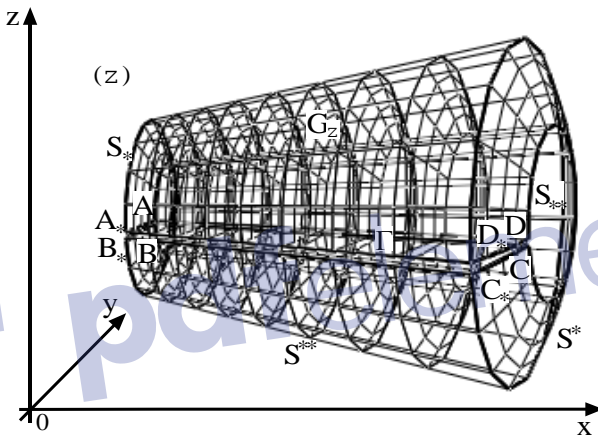


Рис. 2. Просторова фізична область G_z з розрізом Γ

Шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (1) – (9) зводиться до розв’язування в області $\tilde{G} = \tilde{G}_z \times (0, \infty)$, $\tilde{G}_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (однорозв’язна область $G_z \setminus \Gamma$) – криволінійний паралелепіпед, обмежений двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$,

$CDD_*C_* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z: \hat{f}(x, y, z) = 0\}$, які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (рис. 2), задачі, що описується рівняннями (1), (2) за початкової умови (9) і крайових умов (3) – (8) з додаванням умов непроникності вздовж розрізу $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0$ та умов “склеювання” $C(x, y, z, t)\Big|_{ADD_*A_*} = C(x, y, z, t)\Big|_{BCC_*B_*}$, $\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{ADD_*A_*} =$
 $= \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{BCC_*B_*}$ або переписавши

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \quad (10)$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ABB_*A_*} = c_*(M, t), \quad (11)$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{CDD_*C_*} = c^*(M, t) \quad (12)$$

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad (13)$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ABCD} = c_{**}(M, t), \quad C(x, y, z, t)\Big|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{**}(M, t) \quad (14)$$

або

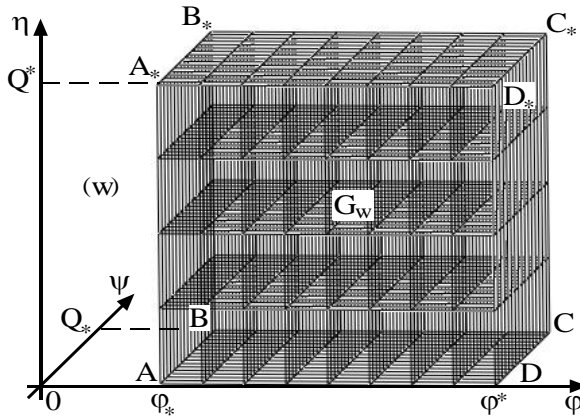
$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (15)$$

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z) \quad (16)$$

і

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ADD_*A_*} = C(x, y, z, t)\Big|_{BCC_*B_*},$$

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{ADD_*A_*} = \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial\vec{n}}\Big|_{BCC_*B_*}. \quad (17)$$

Рис. 3. Просторова область комплексного потенціалу G_w

Далі, аналогічно [2], шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\phi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \phi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [7], і заміною останніх чотирьох з граничних умов (12) на умови: $\psi|_{ADD, A_*} = 0$, $\psi|_{BCC, B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A, D, C, B_*} = Q^*$, задача (1), (10) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{\mathbf{w} = (\phi, \psi, \eta) : \phi_* < \phi < \phi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ (рис. 3), де Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата [4]. Один із алгоритмів числового розв’язання цієї задачі наведений у [5], зокрема, у цій роботі наведені формули для знаходження поля швидкостей \bar{v} і параметрів Q_* , Q^* , Q . Здійснивши заміну змінних $x = x(\phi, \psi, \eta)$, $y = y(\phi, \psi, \eta)$, $z = z(\phi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (11) – (17) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$D \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{\eta} \right) - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} = \sigma \cdot c'_i, \quad (18)$$

$$c(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \quad (19)$$

$$c(\varphi^*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}^*(\psi, \eta, t) \quad (20)$$

або

$$c'_{\varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \quad (21)$$

$$c(\varphi, \psi, 0, t) = \tilde{c}_{**}(\varphi, \psi, t), \quad c(\varphi, \psi, Q^*, t) = \tilde{c}^{**}(\varphi, \psi, t) \quad (22)$$

або

$$c'_{\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c'_{\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \quad (23)$$

i

$$c(\varphi, 0, \eta, t) = c(\varphi, Q^*, \eta, t), \quad c'_{\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c'_{\psi}(\varphi, Q^*, \eta, t), \quad (24)$$

$$c(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (25)$$

де

$$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_*(\psi, \eta, t) = c_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}^*(\psi, \eta, t) = c^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta), t)$$

$$\tilde{c}_{**}(\varphi, \psi, t) = c_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0), t),$$

$$\tilde{c}^{**}(\varphi, \psi, t) = c^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*), t),$$

$$\tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta) = c_0^0(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\varphi, \psi, \eta) = v(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2, \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2,$$

$$b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \quad b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}'' \quad [2].$$

Алгоритм розв'язання задачі. Асимптотичне наближення розв'язку $c(\varphi, \psi, \eta, t)$ задачі (18) – (25) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді такого ряду [2]:

$$c = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot P_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{H}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{H}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{H}}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\hat{H}}_i + R_{n+1}, \quad (26)$$

де $c_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\tilde{H}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{H}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\hat{H}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$,

що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишковий член (його оцінка встановлюється на основі принципу максимуму [1]).

У результаті підстановки (26) в (18) – (25) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо задачі для знаходження головної частини c_0 розв'язку і поправок c_i ($i = \overline{1, n}$):

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\nu}^2}{\kappa} \cdot c'_{0\varphi} + \sigma \cdot c'_{0t} = 0, \\ c_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \\ \frac{\tilde{\nu}^2}{\kappa} \cdot c'_{i\varphi} + \sigma \cdot c'_{it} = g_i, \\ c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$$\text{де } g_i = d \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(i-1)\eta} \right)$$

($i = \overline{1, n}$).

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - f(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{c}_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi, \eta), \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t g_i(f^{-1}(\hat{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, & t < f(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \psi, \eta) = \kappa \cdot \sigma \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідною части-

ною шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in \tilde{G}_z$ вздовж відповідної лінії течії, f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Для знаходження примезових функцій $P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ у випадку відсутності інтенсивного відводу рідини (крайова умова (20)) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d \cdot P''_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{0\tilde{\varphi}} = 0, \\ P_0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_0(0, \psi, \eta, t) = \tilde{c}^*(\psi, \eta, t) - c_0(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot P''_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{i\tilde{\varphi}} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_i(0, \psi, \eta, t) = -c_i(\varphi^*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot P''_{(n+1)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{(n+1)\tilde{\varphi}} = q_{n+1}, \\ P_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_{n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } q_i = \frac{\kappa^2}{\tilde{\nu}^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma \cdot P'_{(i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d \cdot \frac{V_k}{\kappa^2} \cdot P''_{(i-k)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \frac{V_k}{\kappa} \cdot P'_{(i-k)\tilde{\varphi}} \right) - I(i, 2) \times \right. \\ \left. \times d \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(i-2-k)\eta} \right) \right)$$

($i = \overline{1, n+1}$), V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{\nu}^2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, $I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$

У результаті їх послідовного розв’язання матимемо:

$$P_0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{d}{\kappa} \cdot \left(\tilde{c}^*(\psi, \eta, t) - c_0(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}},$$

$$P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} - c_i(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi}.$$

У випадку ж врахування інтенсивного відводу рідини (крайова умова (21)) для знаходження функцій $P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d \cdot P''_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{0\tilde{\varphi}} = 0, \\ P_0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \rightarrow 0, P'_{0\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{0\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot P''_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{i\tilde{\varphi}} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \rightarrow 0, P'_{i\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{i\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot P''_{(n+1)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{(n+1)\tilde{\varphi}} = q_{n+1}, \\ P_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \rightarrow 0, P'_{(n+1)\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases}$$

У результаті ж їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$P_0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{d}{\kappa} \cdot c'_{0\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}},$$

$$P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} - c'_{i\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) \right) d\tilde{\varphi} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa}{d}\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi}.$$

Функції $\tilde{H}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) у випадку наявності додаткових джерел (перша з крайових умов (22)) знайдемо, розв'язавши задачу:

$$\begin{cases} d \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \tilde{H}''_{0\tilde{\eta}\tilde{\eta}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{0\tilde{\eta}} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{0t}, \\ \tilde{H}_0(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) \xrightarrow{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{H}_0(\varphi, \psi, 0, t) = \tilde{c}_{**}(\varphi, \psi, t) - \tilde{M}_0(\varphi, \psi, t), \\ \begin{cases} d \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \tilde{H}''_{i\tilde{\eta}\tilde{\eta}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{i\tilde{\eta}} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{it} - \tilde{M}_i \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \\ \tilde{H}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) \xrightarrow{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{H}_i(\varphi, \psi, 0, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ \u0430\u0434\u0456 \u0430,} \\ -\tilde{M}_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ \u0430\u0434\u0456 \u0430.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Тут $\tilde{M}_i(\varphi, \psi, t) = \tilde{n}_{s-1/2}(\varphi, \psi, 0, t) + P_{s-1/2}(\varphi, \psi, 0, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $\tilde{M}_i =$

$$= d \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k}^* \cdot \tilde{H}''_{(i-k)\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,2,k}^* \cdot \tilde{H}'_{(i-1-k)\tilde{\eta}} \right) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k^*}{\kappa^2} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{1,1,k}^* \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\psi\psi} + B_{2,2,k}^* \cdot \tilde{H}'_{(i-2-k)\psi} \right) \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_j^*}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{(i-k)\varphi} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \quad V_k^*, \quad B_{1,1,k}^*,$$

$B_{1,2,k}^*$, $B_{2,1,k}^*$ і $B_{2,2,k}^*$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$ в ряд Тейлора в околі $\eta = 0$.

У випадку відсутності додаткових джерел (перша з крайових умов (23)) функції $\tilde{H}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \tilde{H}''_{0\tilde{\eta}\tilde{\eta}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{0\tilde{\eta}} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{0t}, \\ \tilde{H}_0(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) \xrightarrow{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} 0, \tilde{H}'_{0\psi}(\varphi, \psi, 0, t) = \tilde{c}_{**}(\varphi, \psi, t) - \hat{M}_0(\varphi, \psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) \cdot \tilde{H}''_{i\tilde{\eta}\tilde{\eta}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, \psi, 0)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{i\varphi} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{it} - \tilde{M}_i \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \\ \tilde{H}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) \xrightarrow{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} 0, \tilde{H}_i(\varphi, \psi, 0, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ \u0430\u0434\u0456 \u0430,} \\ -\hat{M}_i(\varphi, \psi, t), \text{ якщо } i \text{ \u0430\u0434\u0456 \u0430,} \end{cases} \end{cases}$$

де $\hat{M}_i(\varphi, \psi, t) = \tilde{n}'_{(s-3/2)\tilde{\eta}}(\varphi, \psi, 0, t) + P'_{(s-3/2)\tilde{\eta}}(\varphi, \psi, 0, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$), $\tilde{M}_i =$

$$= d \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,k}^* \cdot \tilde{H}''_{(i-k)\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(B_{2,2,k}^* \cdot \tilde{H}'_{(i-1-k)\tilde{\eta}} \right) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_k^*}{\kappa^2} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{1,1,k}^* \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\psi\psi} + B_{2,2,k}^* \cdot \tilde{H}'_{(i-2-k)\psi} \right) + \sum_{k=1}^i \frac{V_j^*}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{(i-k)\varphi} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \quad V_k^*, \quad B_{1,1,k}^*, \right.$$

$B_{1,2,k}^*, B_{2,1,k}^*$ і $B_{2,2,k}^*$ – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$, $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$ і $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\eta})$ в ряд Тейлора в околі $\eta = 0$. Задачі для знаходження функцій $\hat{H}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно. У відповідних

задачах рівняння виду $\alpha(\varphi, \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} - \delta(\varphi, \xi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} + q(\varphi, \xi, \mu, t)$

розв'язуються шляхом їх зведення за допомогою заміни $F(s) = F(\varphi, \xi) - t$

до рівнянь із сталими коефіцієнтами $\tilde{\alpha}(s) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} + q_0(s, \mu, t)$, де s –

параметр.

Для знаходження функцій $\tilde{H}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{H}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) отримасмо такі задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \tilde{H}''_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{0\varphi} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{0t}, \\ d \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \hat{H}''_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \hat{H}'_{0\varphi} = \sigma \cdot \hat{H}'_{0t}, \\ \tilde{H}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \hat{H}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, c_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0} = c_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + P_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_0(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0}, \\ c'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0} = c'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}'_{0\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0}, \\ d \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \tilde{H}''_{i\tilde{\psi}\tilde{\psi}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{i\varphi} = \sigma \cdot \tilde{H}'_{it} - \tilde{M}_i, \\ d \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \hat{H}''_{i\tilde{\psi}\tilde{\psi}} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa} \cdot \hat{H}'_{i\varphi} = \sigma \cdot \hat{H}'_{it} - \tilde{M}_i \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \\ \tilde{H}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \hat{H}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, c_{s-3/2}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P_{s-3/2}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0} = c_{s-3/2}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + P_{s-3/2}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0}, \\ c'_{(s-3/2)\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P'_{(s-3/2)\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0} = c'_{(s-3/2)\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + P'_{(s-3/2)\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \\ + \tilde{\tilde{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \hat{\hat{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) + \tilde{\tilde{H}}'_{i\tilde{\psi}}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \Big|_{\tilde{\psi}=0}. \end{array} \right.$$

Тут $\tilde{M}_i = d \cdot \left(\sum_{k=1}^i \tilde{B}_{1,1,k} \cdot \tilde{H}''_{(i-k)\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{B}_{2,1,k} \cdot \tilde{H}'_{(i-1-k)\tilde{\psi}} + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\tilde{V}_k}{\kappa^2} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + \right. \right.$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{B}_{1,2,k} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\eta} + \tilde{B}_{2,2,k} \cdot \tilde{H}'_{(i-2-k)\eta} \Big) + \sum_{k=1}^i \frac{\tilde{V}_k}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{(i-k)\varphi}, \tilde{M}_i = d \cdot \left(\sum_{k=1}^i \tilde{B}_{1,1,k} \cdot \tilde{H}''_{(i-k)\tilde{\psi}\tilde{\psi}} + \right. \\
& + \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{B}_{2,1,k} \cdot \tilde{H}'_{(i-1-k)\tilde{\psi}} + I(i,2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{\tilde{V}_k}{\kappa^2} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\varphi\varphi} + \tilde{B}_{1,2,k} \cdot \tilde{H}''_{(i-2-k)\eta} + \tilde{B}_{2,2,k} \cdot \tilde{H}'_{(i-2-k)\eta} \right) \Big) + \\
& + \sum_{k=1}^i \frac{\tilde{V}_k}{\kappa} \cdot \tilde{H}'_{(i-k)\varphi} \quad (i = \overline{1, 2n+1}), \text{ де } \tilde{V}_k, \tilde{B}_{1,1,k}, \tilde{B}_{1,2,k}, \tilde{B}_{2,1,k} \text{ і } \tilde{B}_{2,2,k} - \text{коєфіцієнти}
\end{aligned}$$

єнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$, а \hat{V}_k , $\hat{B}_{1,1,k}$, $\hat{B}_{1,2,k}$, $\hat{B}_{2,1,k}$ і $\hat{B}_{2,2,k}$ – коєфіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\tilde{\psi}, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$.

Висновки. Нами у цій роботі для прогнозування процесів поширення забруднюючих речовин у однорідних пористих середовищах розроблено методику розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія” для модельних просторових двоз'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії.

Слід зауважити, що розроблена методика знайде своє застосування і при математичному моделюванні поширення забруднюючих речовин у пористих однорідних середовищах із врахуванням процесів масообміну, сорбції та десорбції, зокрема, при прогнозуванні роботи і проектуванні засипних фільтрів з однорідним завантаженням [3].

1. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
2. Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, В. В. Скопєцький // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37–44.

3. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк, А. П. Сафоник, В. М. Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29–39.
4. Климяк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
5. Климяк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
6. Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: Препринт / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев: 1985. – 16 с.
7. Рауз. Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 20.08.2012

Климяк Ю. Е., Рожко Р. А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ // *В работе предложена математическая модель для прогнозирования процесса распространения загрязняющих веществ в изотропных насыщенных пористых однородных средах – двусвязных модельных областях, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и двумя поверхностями течения. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи.*

Klymyuk Yu. Ye., Rozhko R. A. MATHEMATICAL MODELING OF ONE CLASS SPATIAL SINGULARLY PERTURBED PROCESSES OF MASS TRANSFER OF POLLUTING SUBSTANCES IN POROUS MEDIA // *In this paper a mathematical model to predict the process of distribution of pollutants in isotropic saturated homogeneous porous media of the doubly connected model areas, bounded two equipotential surfaces and two surface flow, is proposed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem is developed.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 9 (18)

Відповідальний за випуск
Бомба А. Я.

Підписано до друку __. __. 2012 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № _/_.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12