

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

**Рівне-2012**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".  
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

## **Зміст**

- Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.** Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах..... 5
- Бомба А. Я., Сінчук А. М.** Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву..... 22
- Булавацький В. М.** Геоінформаційна математична модель для вивчення нерівноважних неізотермічних консолідаційних процесів..... 34
- Гладка О. М.** Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень..... 45
- Климюк Ю. Є.** Побудова алгоритму числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей..... 59
- Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.** Числове розв'язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні ..... 74
- Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.** Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах ..... 102
- Конет І. М.** Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених

кусково-однорідних циліндрах .....	117
<b>Романюк В. В.</b> Твердження щодо позаграничних компонент у нерегулярній оптимальній стратегії проектувальника для будівельної опорної конструкції з $N$ опорами в умовах $N-1$ ідентичної часткової невизначеності стиснень....	135
<b>Присяжнюк І. М., Крока Л. Л.</b> Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у тризв'язній області .....	149
<b>Присяжнюк О. В.</b> Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях .....	162
<b>Черненко В. П.</b> Нестационарні повздовжні хвилі в спадково-пружному стрижні при тепловому ударі .....	176
<b>Шпортько О. В., Шпортько Л. В.</b> Аналіз взаємовпливу модифікації формату PNG.....	182
<b>Янчук П. С.</b> Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона.....	189
<b>Ярощак С. В.</b> Один метод врахування впливу тріщини ГРП на процес фільтрації у елементах площового заводнення....	208

УДК 517.95

**Климюк Ю. Є.**

**ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ АНАЛОГІВ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КУСКОВО-КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБЛАСТЕЙ**

*Побудовано алгоритм числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення одного класу кусково-однорідних областей – криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими екіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди.*

**Вступ.** У [1] запропонований числовий алгоритм розв'язання обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів конформних відображень криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, на відповідні прямокутні. У [2] відповідний алгоритм адаптований для однозв'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії. В [3, 4] область застосування алгоритму розширено на випадки двозв'язних областей, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями та двома поверхнями течії і лише двома екіпотенціальними поверхнями. У [5] відповідний алгоритм адаптовано для знаходження просторових аналогів кусково-конформних відображень двошарових кусково-однорідних областей – криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома екіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою екіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди. У цій роботі його поширено на випадок одного класу багат шарових кусково-однорідних областей.

**Загальна постановка задачі.** Для багатоплощинної кусково-однорідної області, яка є криволінійним паралелепіпедом  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  ( $z = (x, y, z)$ ), обмеженим гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома еквіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  і чотирма поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  та розділеним еквіпотенціальними поверхнями  $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{z: f_{*s}(x, y, z) = 0\}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) на  $p$  підобластей  $G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$ ,  $G_z^s = E_sF_sF_{*s+1}E_{*s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),  $G_z^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*(p-1)}F_{*(p-1)}C_*D_*$  (рис. 1 а), розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s}} = \varphi|_{E_sF_sF_{*s+1}E_{*s+1}} = \varphi_{*s}^*, \quad \kappa_s \cdot \varphi'_n \Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_n \Big|_{E_sF_sF_{*s+1}E_{*s+1}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (3)$$

де  $\varphi$  – потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ),  $\varphi_*$  і  $\varphi^*$  – довільні дійсні додатні числа,  $\varphi_{*s}^*$  – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу  $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* < \varphi^* < \infty$ ,  $\kappa$  – коефіцієнт, що характеризує область  $G_z$ ,  $\kappa = \kappa_s = \text{const}$  при  $(x, y, z) \in G_z^s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості ( $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$ ),  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, (3) – умови узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях  $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ).

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\kappa \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = \text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \eta(x, y, z)$  [6], і заміною

останньої з граничних умов (2) на умови:  $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*$ , задачу (1) – (3) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$ ,  $0 \leq \psi \leq Q_*$ ,  $0 \leq \eta \leq Q^*\}$  (рис. 1 б), де  $\varphi_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі параметри:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \quad \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x; \quad \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \\ \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \quad \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \quad \eta|_{ADCB} = 0, \quad \eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*, \\ \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \varphi_{*s}, \quad \kappa_s \cdot \varphi'_{\bar{n}}|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \\ = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_{\bar{n}}|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, \quad s = \overline{1, p-1}. \end{array} \right. \quad (4)$$

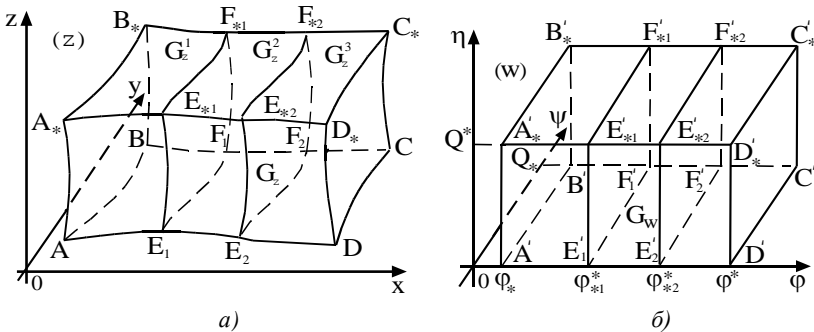


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б) при  $p = 3$

Відповідний просторовий аналог оберненої до (4) крайової задачі на кусково-конформне відображення  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{w})$  області  $G_w$  на  $G_z$  при невідомих значеннях параметрів  $\varphi_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), \quad y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), \\
 z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta), \\
 f_1(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\
 f_2(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\
 f_3(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\
 f_4(x(\varphi, \varrho_*, \eta), y(\varphi, \varrho_*, \eta), z(\varphi, \varrho_*, \eta)) = 0, \\
 f_5(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\
 f_6(x(\varphi, \psi, \varrho^*), y(\varphi, \psi, \varrho^*), z(\varphi, \psi, \varrho^*)) = 0, \\
 f_{*s}(x(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta)) = 0, \\
 f_{*s}(x(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta)) = 0, \\
 \kappa_s \cdot \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta)} = \\
 = \kappa_{s+1} \cdot \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta)}, \\
 x(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta) = x(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta), \quad y(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta) = y(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta), \\
 z(\varphi_{*s-}^*, \psi, \eta) = z(\varphi_{*s+}^*, \psi, \eta), \quad s = \overline{1, p-1}.
 \end{array} \right. \quad (5)$$

**Різницевий аналог задачі та алгоритм числового розв'язання.** Аналогічно [1 – 5] в області  $G_{\mathbf{w}}$  вводимо рівномірну ортогональну сітку:

$$G_{\mathbf{w}}^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i, & i = \overline{0, n_1}, \\ \varphi_{*1}^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1), & i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ \varphi_{*s}^* + \Delta\varphi_{s+1} \cdot (i - \sum_{r=1}^j n_r), & i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r}, \quad s = \overline{2, p-2}, \\ \varphi_{*(p-1)}^* + \Delta\varphi_p \cdot (i - \sum_{r=1}^{p-1} n_r), & i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n + 1}; \end{cases}$$

$$\psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, m+1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l+1}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_{*1}^* - \varphi_*}{n_1},$$



$$\Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_{*2}^* - \varphi_{*1}^*}{n_2}, \quad \Delta\varphi_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi_{*s-1}^*}{n_s} \quad (s = \overline{3, p-1}), \quad \Delta\varphi_p = \frac{\varphi_{*p}^* - \varphi_{*p-1}^*}{n_p + 1},$$

$$\Delta\psi = \frac{\mathcal{Q}_*}{m+1}, \quad \Delta\eta = \frac{\mathcal{Q}^*}{l+1}, \quad \gamma_s = \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} \quad (s = \overline{1, p}) \left. \vphantom{\Delta\psi} \right\}, \text{ де } n = \sum_{r=1}^p n_r, \quad m, l \in N -$$

параметри розбиття області комплексного потенціалу, а  $\Delta\varphi_s \quad (s = \overline{1, p})$ ,

$\Delta\psi, \Delta\eta$  – кроки сітки відповідно по змінних  $\varphi, \psi$  та  $\eta$  (рис. 1 б).

Через  $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$

позначимо координати відповідних вузлів сітки у  $G_{\mathbf{z}}$ .

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда  $G_{\mathbf{w}}$  на криволінійну область  $G_{\mathbf{z}}$  (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги перших трьох рівнянь (5) у рівномірній сітковій області  $G_{\mathbf{w}}^Y$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad s = 1; \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \quad s = 2; \\ i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1}, \quad s = \overline{3, p-1}; \\ i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n}; \quad s = p, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
 \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
 y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
 \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
 z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{4} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
 \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
 i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; \\
 i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1}, s = 3, p-1; \\
 i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n}; s = p, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
 \end{array} \right. \quad (7)$$

Крайові умови, які визначають область  $G_z$ , запишемо у вигляді системи

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f_1(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f_2(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 f_3(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) = 0, f_4(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\
 f_5(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f_6(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}.
 \end{array} \right. \quad (8)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границь області  $G_z$ , які у сітковій області  $G_w^\gamma$  записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями:

$$\frac{f'_x(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} = \frac{f'_y(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_z(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\
 \frac{f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}},$$

$$\begin{aligned} \frac{f'_{3x} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{f'_{3y} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{f'_{3z} (x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}, \\ \frac{f'_{4x} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{x_{i,m,k} - x_{i,m+1,k}} &= \frac{f'_{4y} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{y_{i,m,k} - y_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4z} (x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{z_{i,m,k} - z_{i,m+1,k}}, \\ \frac{f'_{5x} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{f'_{5y} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{5z} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\ \frac{f'_{6x} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} &= \frac{f'_{6y} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6z} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \end{aligned}$$

$$i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \quad (9)$$

Координати вузлів на еквіпотенціальних поверхнях  $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) уточнюємо, використовуючи наступні різниці рівняння:

$$\begin{aligned} f_{*s} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) &= 0, \quad r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1} \quad (10) \\ \kappa_s \cdot \Delta \varphi_s \cdot \sqrt{(x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k})^2 + (y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k})^2 + (z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k})^2} &= \\ = \kappa_{s+1} \cdot \Delta \varphi_{s+1} \cdot \sqrt{(x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k})^2 + (y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k})^2 + (z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k})^2}, & \\ r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, & \quad (11) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k}} &= \frac{f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k}}, \\ r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1} & \quad (12) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*s x} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k}} &= \frac{f'_{*s y} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k}} = \frac{f'_{*s z} (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k}}, \\ r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. & \quad (13) \end{aligned}$$

Інваріанти відображення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ) є невідомими величинами і визначаються в процесі розрахунку. Формули для їх наближеного знаходження одержимо на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів областей  $G_z$  і  $G_w$ :

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_1}{n_1(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad (14)$$

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_2}{n_2(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_2-1,m,l} \gamma_{n_1+i,j,k}, \quad (15)$$

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{n_s(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_s-1,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad (16)$$

$$\gamma_p = \frac{\kappa_p}{(n_p+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_p,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4 \left( \sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \right) / \\ & / \left( \left( \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & \left. \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right). \end{aligned}$$

Невідомі величини  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) знаходимо за формулами:

$$\varphi_{*1}^* = \frac{n_1 \cdot \gamma_1 \cdot \varphi^* + \left( \sum_{r=2}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (18)$$

$$\varphi_{*2}^* = \frac{\sum_{r=1}^2 (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \varphi^* + \left( \sum_{r=3}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (19)$$

$$\varphi_{*s}^* = \frac{\sum_{r=1}^s (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \varphi^* + \left( \sum_{r=s+1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad s = \overline{3, p-1}, \quad (20)$$

$$\varphi_{*p}^* = \frac{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \varphi^* + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (21)$$

повну фільтраційну витрату  $Q$  за однією з формул:

$$Q = \Delta \varphi_s \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_s}, \quad s = \overline{1, p}, \quad (22)$$

а величини  $Q_s, Q_s^*$  відповідно за формулами:

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q \cdot (m+1)}{\tilde{\gamma} \cdot (l+1)}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} \cdot Q \cdot (l+1)}{m+1}}, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k}, \\ \tilde{\gamma}_{i,j,k} &= \left( \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ &+ \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ &+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ &\left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \right) / \\ &\left( \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ &+ \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ &+ \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ &\left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right). \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (6) – (23) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області  $G_z^y$ . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області  $G_w^y$  ( $n_1, n_2, \dots, n_p, m$  та  $l$ ), параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів  $(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)})$ ,  $(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)})$ ,  $j = \overline{0, m+1}$ ,  $k = \overline{0, l+1}$ ,  $(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)})$ ,  $(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, n_1-1}$ ,  $k = \overline{0, l+1}$ ,

$\left(x_{n_1+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1+i,0,k}^{(0)}\right), \left(x_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}\right), i = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{0, l + 1},$   
 $\left(x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)}\right), \left(x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)}\right), r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, i = \overline{1, n_s - 1},$   
 $k = \overline{0, l + 1}, s = \overline{3, p - 1}, \left(x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)}\right), \left(x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)}\right),$   
 $r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, k = \overline{0, l + 1}, \left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right), \left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right),$   
 $i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, m}, \left(x_{n_1+i,j,0}^{(0)}, y_{n_1+i,j,0}^{(0)}, z_{n_1+i,j,0}^{(0)}\right), \left(x_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}\right),$   
 $i = \overline{1, n_2 - 1}, j = \overline{1, m}, \left(x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)}\right), \left(x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)}\right),$   
 $r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, i = \overline{1, n_s - 1}, j = \overline{1, m}, s = \overline{3, p - 1}, \left(x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)}\right),$   
 $\left(x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)}\right), r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, j = \overline{1, m}$  і вузлів поверхонь  
 розділу  $\left(x_{r,j,k}^{(0)}, y_{r,j,k}^{(0)}, z_{r,j,k}^{(0)}\right), r = \sum_{q=1}^s n_q, j = \overline{0, m + 1}, k = \overline{0, l + 1}, s = \overline{1, p - 1},$   
 (так, щоб виконувались рівності відповідно (8), (10)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів всіх підобластей  $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right),$   
 $i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \left(x_{n_1+i,j,k}^{(0)}, y_{n_1+i,j,k}^{(0)}, z_{n_1+i,j,k}^{(0)}\right), i = \overline{1, n_2 - 1}, j = \overline{1, m},$   
 $k = \overline{1, l}, \left(x_{r+i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)}\right), r = \sum_{q=1}^s n_q, i = \overline{1, n_s - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l},$   
 $s = \overline{1, p - 1}, \left(x_{r+i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)}\right), r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l},$  за  
 формулами (14) – (17) знаходимо початкові наближення  
 $\gamma_s^{(0)} = \gamma_s \left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$  інваріантів відображення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ). Уточнення координат внутрішніх вузлів  $\left(x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)}\right), i = \overline{1, n_1 - 1},$   
 $j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \left(x_{n_1+i,j,k}^{(g)}, y_{n_1+i,j,k}^{(g)}, z_{n_1+i,j,k}^{(g)}\right), i = \overline{1, n_2 - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l},$

$$\left(x_{r+i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)}\right), r = \sum_{q=1}^s n_q, i = \overline{1, n_s - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, s = \overline{1, p - 1},$$

$$\left(x_{r+i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)}\right), r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l} \text{ проводимо на}$$

основі почергового розв'язання систем (6) і (7) із використанням значень з попереднього кроку ітерації  $g$  ( $g = 0, 1, \dots$  – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (8) і (9), координати вузлів поверхонь розділу на основі рівнянь (10) – (11) та почергового використання (12) і (13). Потім знаходимо нові наближення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ) за формулами (14) – (17), величин  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p - 1}$ ),  $Q$ ,  $Q_s$  і  $Q^*$  – за формулами (18) – (23) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і величин  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p - 1}$ ),  $Q$  відносно кроку ітерації відповідно

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} & \left( \left| x_{i,j,k}^{(g+1)} - x_{i,j,k}^{(g)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(g+1)} - y_{i,j,k}^{(g)} \right|, \right. \\ & \left. \left| z_{i,j,k}^{(g+1)} - z_{i,j,k}^{(g)} \right| \right) < \varepsilon, \left| \varphi_{*1}^{(g+1)} - \varphi_{*1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \left| \varphi_{*2}^{(g+1)} - \varphi_{*2}^{(g)} \right| < \varepsilon, \dots, \\ & \left| \varphi_{*p-1}^{(g+1)} - \varphi_{*p-1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \left| Q^{(g+1)} - Q^{(g)} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо умови (24) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів сітки обчислюємо нев'язку перших трьох рівнянь

$$\begin{aligned} \text{системи (5)} \quad \delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \text{ де } \delta_1 = & \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1 + n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1}}} \left| \left( (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{K_s \cdot \gamma_s}{2} \cdot ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \right) \right|, \end{aligned}$$



$$\delta_2 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left| \left( (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{2} \cdot ((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right) \right|,$$

$$\delta_3 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left| \left( (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{2} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right) \right|,$$

$$s = \begin{cases} 1, i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \\ \dots \\ p, i = \overline{n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1, n}. \end{cases} \quad \text{Якщо точність отриманого розв'язку}$$

нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки  $G_z^\gamma$  та розв'язуємо задачу заново.

Формули для знаходження величин швидкостей у граничних вузлах і на поверхнях розділу отримуються аналогічно [1].

**Висновки і зауваження.** Побудовано алгоритм числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами, на відповідні прямокутні паралелепіпеди, зокрема, отримано вирази для знаходження значень потенціалу на відповідних поверхнях розділу, повної фільтраційної витрати, розрахунку поля швидкостей тощо.

Отриманий алгоритм є основою для узагальнення методики дослідження процесів масопереносу забруднюючих речовин у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними при фільтрації водних розчинів у пористих середовищах – модельних областях, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома

еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, яка полягає у наступному: поетапній фіксації характеристик і складових процесу та середовища; розв'язанні задачі фільтрації з використанням просторових аналогів конформних відображень області комплексного потенціалу на фізичну область (що включає побудову гідродинамічної сітки, поля швидкостей, обчислення величин різних перетоків тощо); переході у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області просторового комплексного потенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелюванні обчислень; розв'язанні сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія” з використанням числово-асимптотичних методів, – на випадок багатошарових кусково-однорідних середовищ, зокрема, дають змогу проводити подальше теоретичне дослідження підвищення ефективності роботи фільтрів та якіснішого використання засипних матеріалів [7, 8].

1. *Климюк Ю. Є.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
2. *Климюк Ю. Є.* Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71.
3. *Климюк Ю. Є.* Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими еквіпотенціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 84-92.
4. *Климюк Ю. Є.* Числова реалізація аналога методу конформних відображень побудови просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із однорідною засипкою / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 63-75.
5. *Климюк Ю. Є.* Просторові аналоги крайових задач на конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей / Ю. Є.

Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 51-62.

6. Рауз. Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.
7. Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Збірн. наук. праць. – Вип. 34. – Рівне : НУВГП. – 2009. – С. 252-261.
8. Климюк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климюк, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 93-109.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 18.09.2012

**Климюк Ю. Е.** ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АНАЛОГОВ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КУСОЧНО-КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ // *Разработан алгоритм численного решения пространственных аналогов обратных краевых задач на кусочно-конформные отображения одного класса кусочно-однородных областей – криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения, разделенных некоторыми эквипотенциальными поверхностями на несколько подобластей, которые характеризуются разными постоянными коэффициентами, на соответствующие прямоугольные параллелепипеды.*

**Klymyuk Yu. Ye.** CONSTRUCTING OF ALGORITHM OF NUMERICAL SOLUTION OF SPATIAL ANALOGUES OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON PIECEWISE-CONFORMAL MAPPINGS FOR ONE CLASS OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS AREAS // *The algorithm of numerical solution of the spatial analogues of inverse boundary value problems on piecewise-conformal mappings for one class of piecewise-homogeneous areas of the curvilinear parallelepipeds, bounded two equipotential surfaces and four surface currents, separated by some of the equipotential surfaces for several subdomains, which are characterized by different constant coefficients onto the corresponding rectangular parallelepipeds is designed.*

Наукове видання

# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

Відповідальний за випуск  
Бомба А. Я.

Підписано до друку \_\_. \_\_. 2012 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № \_/\_.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12