

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

**Рівне-2012**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

## **Зміст**

- Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.** Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах..... 5
- Бомба А. Я., Сінчук А. М.** Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву..... 22
- Булавацький В. М.** Геоінформаційна математична модель для вивчення нерівноважних неізотермічних консолідаційних процесів..... 34
- Гладка О. М.** Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень..... 45
- Климюк Ю. Є.** Побудова алгоритму числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей..... 59
- Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.** Числове розв'язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні ..... 74
- Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.** Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах ..... 102
- Конет І. М.** Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених

кусково-однорідних циліндрах .....	117
<b>Романюк В. В.</b> Твердження щодо позаграничних компонент у нерегулярній оптимальній стратегії проектувальника для будівельної опорної конструкції з $N$ опорами в умовах $N-1$ ідентичної часткової невизначеності стиснень.....	135
<b>Присяжнюк І. М., Крока Л. Л.</b> Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у тризв'язній області .....	149
<b>Присяжнюк О. В.</b> Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях .....	162
<b>Черненко В. П.</b> Нестационарні повздожні хвилі в спадково-пружному стрижні при тепловому ударі .....	176
<b>Шпортько О. В., Шпортько Л. В.</b> Аналіз взаємовпливу модифікації формату PNG.....	182
<b>Янчук П. С.</b> Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона.....	189
<b>Ярощак С. В.</b> Один метод врахування впливу тріщини ГРП на процес фільтрації у елементах площового заводнення.....	208

УДК 517.955; 519.673

**Присяжнюк І. М., Крока Л. Л.**

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ТРИЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

*Отримано асимптотичне розв'язання розв'язку сингулярно збуреної задачі типу "конвекція-дифузія" у трьохзв'язній області. Особливістю запропонованого алгоритму є необхідність побудови процедури згладжування негладкостей регулярної його складової вздовж лінії розділу течії. Наведено результати числових досліджень.*

**Вступ.** Асимптотичні методи розв'язування сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (ребрових) точках, описані в [1-2]. Результати цих досліджень знайшли подальше успішне застосування та розвиток у роботах [3-5], де відповідні алгоритми модифіковано стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях. Ті ж алгоритми успішно застосовано і до розв'язування таких задач в багатозв'язних областях [6-8].

Проте не завжди (для випадку  $n$ -зв'язних областей,  $n > 2$ ) отримані функції залежності концентрації забруднюючої речовини від координат та часу є достатньо узгодженими поблизу ліній розділу течії. У такому випадку необхідно провести певним чином процедуру згладження негладкостей вздовж характерних ліній розділу течії. У статті мова йде про асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії у спеціально заданій тризв'язній області та наведено результати числових експериментів.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес конвективно-дифузійного масопереносу в тризв'язній області (пористому пласті)  $G_z$ , обмеженій трьома

замкнутими гладкими контурами  $L^*$ ,  $L_0$ ,  $L^*$  скінченої комплексної площини ( $z$ ) (рис. 1):

$$\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) - v_x u_x - v_y u_y = u_t, \quad (1)$$

$$u|_{L_0} = u_0^*(P, t), u|_{L^*} = u_*(P, t), u|_{L^*} = u^*(P, t), u|_{t=0} = u_0^0(x, y), \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = 0, \varphi|_{L_0} = \varphi_0, \varphi|_{L^*} = \varphi_*, \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \int_{L_i} -v_y dx + v_x dy = Q_i, \quad (3)$$

де  $i = \overline{1, 2}$ ,  $0 < Q_i < \infty$ ,  $P$  – біжуча точка відповідної ділянки границі даної області ( $P \in (L^* \cup L_0)$ ),  $z = x + iy \in G_z$ ,  $0 < t < T$ ,  $\varepsilon$  – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр),  $\varphi_0, \varphi_*$  – задані значення потенціалу  $\varphi(x, y)$  на граничних екіпотенціальних лініях,  $(v_x, v_y) = grad(\varphi)$ ,  $u_*, u_0^*, u_0^0$  – задані достатньо гладкі та певним чином узгоджені функції.

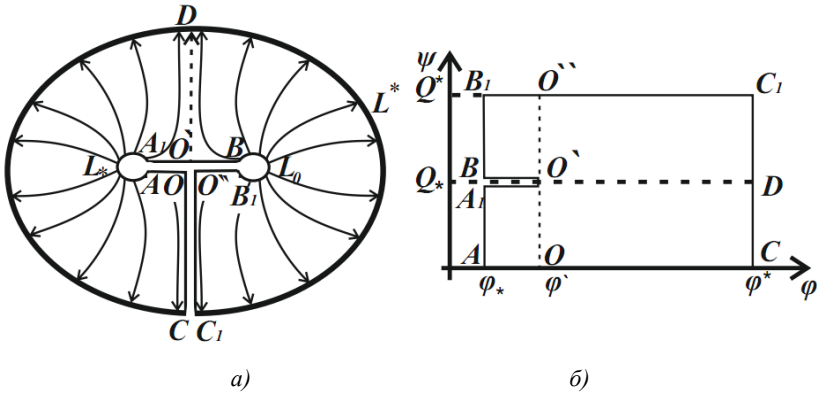


Рис. 1. Фізична область  $G_z$ , область комплексного потенціалу  $G_w$

Розглянемо випадок  $\varphi_0 = \varphi_*$  (тоді  $Q_{AA_1} = Q_{BB_1} = Q_*$ ). Фізична область фільтрації  $G_z$ , на фоні якої відбувається конвективно-дифузійне перенесення частинок, зображена на рис. 1, а). На рис. 1, б) зображено

відповідну область комплексного потенціалу  $G_\omega$ , де  $\omega = \varphi + i\psi$ ,  $\psi = \psi(x, y)$  – функція течії (комплексно спряжена до функції  $\varphi = \varphi(x, y)$ ). Припустимо, що задача (3), з використанням конформного відображення  $G_z \mapsto G_\omega$  (або  $G_\omega \mapsto G_z$ ), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  [5, 10]. Тоді, шляхом переходу від змінних  $(x, y)$  фізичної області  $G_z$  до змінних  $(\varphi, \psi)$  області комплексного потенціалу  $G_\omega$ , задачу (1)-(2) зведемо до відповідної задачі [9]:

$$\begin{aligned} \varepsilon v^2(\varphi, \psi) c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi} - v^2(\varphi, \psi) c_{\varphi t} = c_t, \quad (\varphi, \psi, t) \in G_\omega \times (0, \infty) = \Omega, \\ c(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t), & 0 < \psi \leq Q_*, \quad \varphi \in L_*, \quad t \in (0, T), \\ c_0^*(\psi, t), & Q_* < \psi \leq Q^*, \quad \varphi \in L_0, \quad t \in (0, T), \end{cases} \\ c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \\ c|_{AO} = c|_{A_1O}, \quad c|_{BO} = c|_{B_1O}, \quad c|_{CO} = c|_{C_1O}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) = \vec{v} \vec{v} = v_x^2 + v_y^2, \quad \text{де } c(\varphi, \psi, t) = u(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), \\ c_*(\psi, t) = u_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t), \quad (x, y) \in L_*, \\ c_0^*(\psi, t) = u_0^*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t), \quad (x, y) \in L_0, \\ c_0^0(\varphi, \psi) = u_0^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)). \end{aligned}$$

**Розв’язок задачі.** Розв’язок задачі (4) шукатимемо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \left( c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i \right) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{I}_i(\xi, \psi, t) + r_n(\varphi, \psi, t, \xi, \varepsilon), \quad (5)$$

де  $c_i(\varphi, \psi, t)$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярної частини асимптотики:  $c_0$  – розв’язок відповідної виродженої задачі (задачі конвективного переносу);  $c_1, \dots, c_n$  – поправки, що враховують вплив дифузії,  $\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{I}_i(\xi, \psi, t)$  –

функція типу примежевого шару в околі  $\varphi = \varphi_*$ , яка використовується для врахування дифузійних процесів вздовж границі виходу фільтраційного потоку,  $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi^* - \varphi)$ ,  $r_n(\varphi, \psi, t, \xi, \varepsilon)$  – залишковий член.

Здійснивши підстановку (4) в (5) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $\varepsilon$ , для знаходження функцій  $c_i(\varphi, \psi, t)$  приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi)c_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0t}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t), & 0 < \psi \leq Q_*, \varphi \in L_*, t \in (0, T), \\ c_0^*(\psi, t), & Q_* < \psi \leq Q^*, \varphi \in L_0, t \in (0, T), \end{cases} \\ c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \varphi \in (\varphi_1, \infty), \psi \in (0, Q_*), \\ \begin{cases} v^2(\varphi, \psi)c_{i\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{it}(\varphi, \psi, t) = g_i(\varphi, \psi, t), \\ g_i(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)\left(\frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \psi^2}\right), (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ c_i(\varphi_*, \psi, t) = 0, t \in (0, T), \psi \in (0, Q_*), \\ c_i(\varphi, \psi, 0) = 0, \varphi \in (\varphi_*, T), \psi \in (0, Q_*). \end{cases} \end{cases}$$

В результаті їх розв’язання маємо:

$$c_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ c_0^*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases} (\varphi, \psi) \in G_{\omega(1)}, \\ c_0^2(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases} (\varphi, \psi) \in G_{\omega(2)}, \end{cases}$$

$$c_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\bar{\varphi}, \psi, f^{-1}(f(\bar{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)))}{v^2(\bar{\varphi}, \psi)} d\bar{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g_i(f^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t + \bar{t}), \psi, \bar{t}) d\bar{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$



де  $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$  – час проходження виділеної частинки вздовж

лінії течії  $\psi = \tilde{\psi}$ , від точки  $(\varphi_0, \tilde{\psi})$  до точки  $(\varphi, \tilde{\psi})$ ,  $f^{-1}$  – функція обернена до  $f$  стосовно змінної  $\varphi$  (така функція існує, оскільки підінтегральна функція  $\frac{1}{v^2}$  – неперервно диференційована, обмежена, додат-

ньо визначена),  $g_i(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left( \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial \psi^2} \right)$ ,  $(\varphi, \psi) \in G_{\omega}$ ,

$$G_{\omega} = G_{\omega(1)} \cup G_{\omega(2)}, G_{\omega(1)} = \left\{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \infty, Q_* < \psi \leq Q^* \right\},$$

$$G_{\omega(2)} = \left\{ (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_* \right\}.$$

Функція  $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i$  усуває нев'язки, внесені побудованою регулярною частиною  $c = \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^i$  в околі границі виходу фільтраційного потоку  $\varphi = \varphi^*$  (а саме, повинна виконуватись умова:

$$c + \Pi|_{\varphi=\varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^{N+1})).$$
 Знайдемо  $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i$  аналогічно роботі [6].

Всюди в області  $\Omega^* = \Omega \setminus (\Omega_0 \times (0, T))$ , де  $\Omega_0$  – об'єднання довільних околів точок  $O, O', O''$  – образів точки  $O \in G_z$  (де швидкість перетворюється в нуль), має місце така оцінка залишкового члена асимптотичного ряду (5):

$$\left| r_n(\varphi, \psi, t, \xi, \varepsilon) \right| = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{6}$$

Дійсно, в результаті проведеної процедури прирівнювання при однокових степенях  $\varepsilon$ , для оцінки  $r_n$  маємо:

$$\varepsilon \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot (r_{n\varphi\varphi} + r_{n\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) \cdot r_{n\varphi} = r_{nt} + \varepsilon^{n+1} \cdot p(\varphi, \psi, \xi, t) + h(\varphi, \psi, \xi, t, \varepsilon);$$

$$r_n(\varphi_0, \psi, t, \xi, \varepsilon) = 0, r_n(\varphi, \psi, 0, \xi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), r_n(\varphi_*, \psi, t, \xi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Тут,  $p(\varphi, \psi, \xi, t)$ ,  $h(\varphi, \psi, t, \xi, \varepsilon)$  – функції, що виражається через відомі члени ряду (5). На основі принципу максимуму для параболічних рівнянь, приходимо до оцінки (6) [5].

У випадку недостатньої узгодженості функцій  $c_0^1(\varphi, \psi, t)$ ,  $c_0^2(\varphi, \psi, t)$ , проведемо процедуру згладжування негладкостей вздовж ліній розділу течії.  $\psi_0 = 0(\psi_2 = Q^*)$ ,  $\psi_1 = Q_*$ . Розв’язок такої задачі з точністю  $O(\varepsilon^2)$  шукаємо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \tilde{c}_0(\varphi, \psi, t) + s_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \tilde{c}_1(\varphi, \psi, t) + s_1(\varphi, \psi, t) + \pi(\varphi, \psi, t) + r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon).$$

Тут  $|r_n(\varphi, \psi, t)| = O(\varepsilon^{n+1})$ ,

$$\tilde{c}_0(\varphi, \psi, t) = \overline{c}_0(\varphi, \psi, t) \cdot \Phi(K(\varphi, \psi)) + \frac{\overline{c}_0(\varphi, Q_*, t) + \overline{c}_0(\varphi, 0, t)}{2} \cdot (1 - \Phi(K(\varphi, \psi))),$$

$$\overline{c}_0(\varphi, \psi, t) = c_0^1(\varphi, \psi, t) \frac{(1 - D(\psi(\psi - Q_*)))\Phi(K_1(\varphi, \psi))}{2} +$$

$$+ c_0^2(\varphi, \psi, t) \frac{(1 - D((\psi - Q^*)(\psi - Q_*)))\Phi(K_2(\varphi, \psi))\Phi(K_0(\varphi, \psi))}{2},$$

$$K(\varphi, \psi) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt{\psi^2(\psi - Q_*)^2(\psi - Q^*)^2 + (\varphi^* - \varphi_*)^2},$$

$$K_0(\varphi, \psi) = \frac{\sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + \psi^2} + \sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + \psi^2} - (\varphi - \varphi^*)}{\varepsilon^2},$$

$$K_1(\varphi, \psi) = \frac{\sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + (\psi - Q_*)^2} + \sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + (\psi - Q_*)^2} - (\varphi - \varphi^*)}{\varepsilon^2},$$

$$K_2(\varphi, \psi) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + (\psi - Q^*)^2} + \sqrt{(\varphi - \varphi^*)^2 + (\psi - Q^*)^2} - (\varphi - \varphi^*)),$$

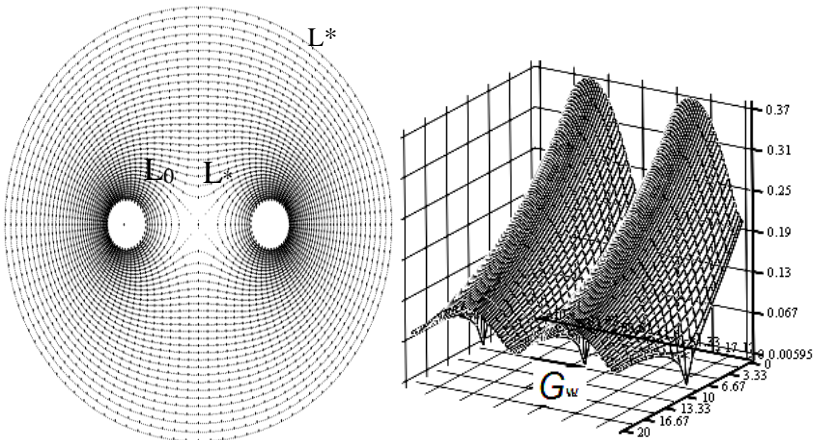
$$\Phi(\delta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\delta e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad D(\theta) = \begin{cases} 1, \theta > 0, \\ -1, \theta \leq 0. \end{cases}$$

Функцію  $s_0(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^2 s_{0i}(\varphi, \psi, t)$  знайдемо розв'язавши за-

дачу:

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot ((\tilde{c}_0 + s_0)_{\varphi\varphi} + (\tilde{c}_0 + s_0)_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) \cdot (\tilde{c}_0 + s_0)_{\varphi} = (\tilde{c}_0 + s_0)_t; \\ \tilde{c}_0 + s_0|_{t>0, \varphi=0} = \begin{cases} c_0^1(\psi, t), Q_* < \psi \leq Q_*^*, t \in (0, T); \\ c_0^2(\psi, t), 0 \leq \psi \leq Q_*, t \in (0, T); \end{cases} \\ \tilde{c}_0 + s_0|_{t=0, \varphi>0} = c_0^0(\varphi, \psi). \end{cases}$$

**Результати числових експериментів.** Наведемо результати числового розрахунку процесу «конвекція-дифузія» на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками  $z_1 = -1$  та  $z_2 = 1$  (витоки однакових інтенсивностей  $Q_* = 2\pi$ ), комплексний потенціал якого –  $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1) \cdot (z - z_2))$ , при  $\varphi_* = -0.05$ ,  $\varphi^* = 2$ .



а) б)  
Рис. 2. Динамічна сітка  $G_z$  та поле швидкостей в  $G_\omega$

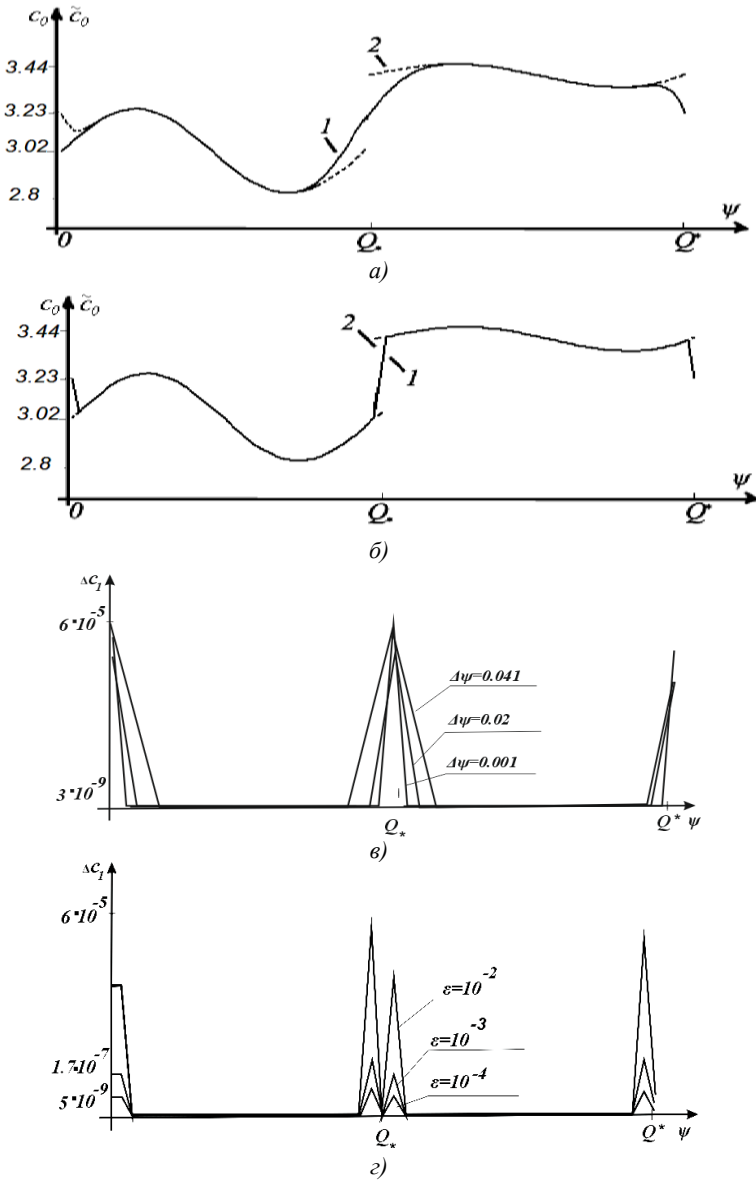
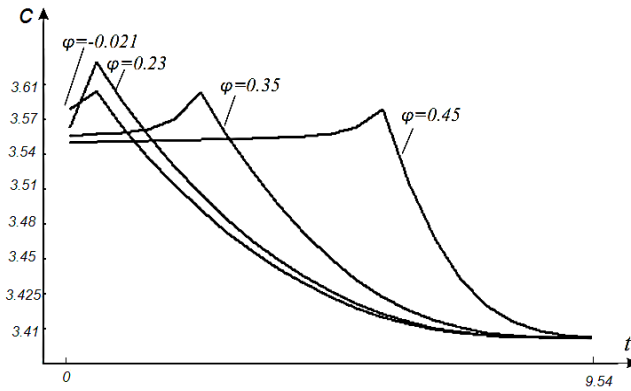
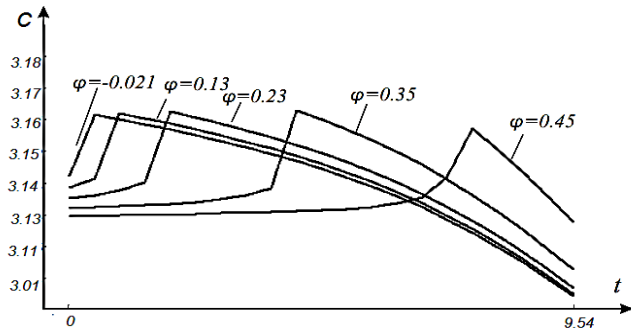


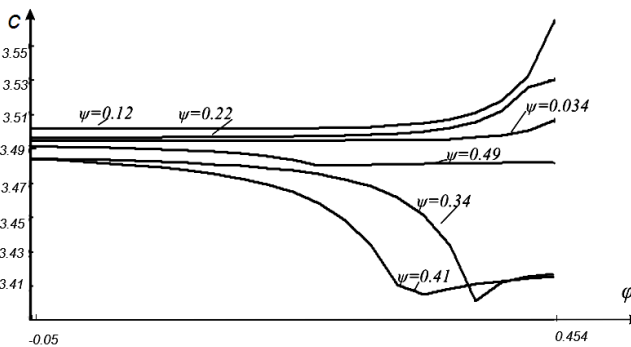
Рис. 3. Ілюстрація процесу ефекту згладження конвективної ( а, б)) та дифузійної ( в, г)) складових



a)  $\psi = -0.03$



б)  $\psi = 0.17$



в)  $t = 25.7$

Рис. 4. Розподіл концентрації розчиненої речовини

При цьому поле швидкостей обчислюється за формулою

$$\vec{v}(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{(z-z_1)+(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Розв'язавши рівняння  $\vec{v}(z)=0$  знайдемо координати точки  $M$  розділу потоків:

$$z_M = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} + i \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Лінії течії та еквіпотенціальні лінії знайдемо розділивши дійсну та уявну частини для  $\vec{v}(z)$ :

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi = & \frac{Q}{2\pi} (\ln \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + i \cdot \arctg \frac{y-y_1}{x-x_1} + iS(x-x_1, y-y_1) + \\ & + \ln \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + i \cdot \arctg \frac{y-y_1}{x-x_1} + iS(x-x_1, y-y_1)), \end{aligned}$$

$$S(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ \pi & \text{при } x < 0, \\ 2\pi & \text{при } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Звідси  $\varphi(x, y) = \frac{Q}{4\pi} \ln(((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2)),$

$$\psi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} (\arctg \frac{y-y_1}{x-x_1} + \arctg \frac{y-y_2}{x-x_2} + S(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2)),$$

$$S = S(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) = S(x-x_1, y-y_1) + S(x-x_2, y-y_2).$$

Відповідну динамічну сітку  $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}_l, \psi(x, y) = \bar{\psi}_j, l = \overline{1, 50}, j = \overline{1, 50}, \bar{\varphi}_l = \varphi_0 + ((\varphi_* - \varphi_0) \cdot l) / 50, \bar{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 50$  зображено на рис.2, а), розподіл величини швидкостей фільтрації в області  $G_\omega$  зображено на рис. 2, б).

Конвективну складову концентрації розчинної речовини до і після проведення згладжування за наступних початкових та граничних умов

$$c_0^0(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0.2 \cdot \sin(2\pi \cdot (\psi + 0.48) / 0.48) \cdot e^{-\varphi/3} + 3, & -4.041 \leq \psi < 0, \\ 0.2 \cdot \sin(2\pi \cdot (\psi + 0.48) / 0.48) \cdot e^{-0.01\varphi} + 3.4, & 0 \leq \psi \leq 4.041, \end{cases}$$

$$c_1^*(\psi, t) = 0.25 \cdot \sin(2\pi \cdot (\psi + 0.48) / 0.48) \cdot e^{-t/3} + 3,$$

$$c_2^*(\psi, t) = 0.25 \cdot \sin(2\pi \cdot (\psi + 0.48) / 0.48) \cdot e^{-0.1t} + 3.4.$$

вздовж еквіпотенціальних ліній зображено на рис. 3. Зокрема на рис. 3, а), б), в) зображено розподіл концентрації розчинної речовини вздовж еквіпотенціальної лінії після згладжування для різних значень  $\varepsilon$  (рис. 3, а) -  $\varepsilon = 0.1$ , рис. 3, б) -  $\varepsilon = 0.01$ ), де 1 – згладжена крива розподілу концентрації розчинної речовини, 2 – відповідна крива до згладжування.

Розрахунки показують (рис. 3, в)), що навіть при  $\Delta\psi \rightarrow \varepsilon$ , похибка, яка вноситься процедурою згладжування  $\varepsilon$  незначною і побудована функція задовольняє вихідну модельну задачу з необхідною точністю. На рис. 3, з) наведено різницю  $\Delta c_1 = |c_1 - \tilde{c}_1|$  між дифузійною складовою розв'язку до і після проведення згладжування вздовж ліній розділу течії при  $\varphi = 0.304$  в момент часу  $t = 79,695$ .

На рис. 4 подано розподіл концентрації розчинної речовини після згладжування в фіксованих точках з часом (рис. 4, а), б)) та вздовж ліній течії (рис. 4, в)) для наведених вище умов.

**Висновки.** Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язку сингулярно збуреної модельної задачі конвективної дифузії у трив'язній області, який містить процедуру згладжування негладкостей конвективної складової шуканої концентрації розчинної речовини вздовж ліній розділу течії.

Результати числових розрахунків підтверджують ефективність використання згаданої вище процедури, зокрема, що відповідна похибка обчислень має порядок  $\mathcal{E}^n$ .

В залежності від співвідношення заданих значень граничних потенціалів на обмежуючих фізичну область контурах (а, отже, й витрат на них) можливі різні випадки формування течії. Відтак перспективою досліджень є відповідні модифікації та узагальнення алгоритму.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. / М.И. Вишик, Л.Я. Люстерник // Успехи математических наук, 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов - М.: Высшая школа, 1980.- 208с.
3. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А.Я. Бомба // Укр. мат. журн., 1982.- Т.4, №4.-С. 493-496.
4. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” / А.Я. Бомба // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
5. Бомба А.Я. Крайові задачі на конформні відображення для трив'язних областей з потенціалом керування // Доповіді НАН України. / Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. – 2004. – №4. – С. 57-63.
6. Бомба А.Я. Крайові задачі на конформні відображення для трив'язних областей з потенціалом керування // Доповіді НАН України. / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький – 2004. – №4. – С. 57-63.
7. Бомба А.Я., Скопецкий В.В., Присяжнюк І.М. Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях / А.Я. Бомба, В.В. Скопецкий, И.М. Присяжнюк // Компьютерная математика. - 2004. - №2. - С. 99-104.
8. Присяжнюк І.М. Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії за умов малого масообміну / І.М. Присяжнюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика - 2005. - Вип. 12. - С. 146-160.
9. Бомба А.Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія”. Монографія / А.Я. Бомба, С.В. Барановський, І.М. Присяжнюк – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
10. Бомба А.Я., Пригорницький Д.А., Присяжнюк І.М. Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях / А.Я. Бомба, Д.А. Пригорницький, И.М. Присяжнюк // Компьютерная математика. - 2004. - №1. - С. 152-159.
11. Бомба А.Я. Численно-асимптотическое приближение решений одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последствием// Компьютерная математика. / А. Я. Бомба А.Я., И.М. Присяжнюк, Ю.Е. Климюк. - 2005. - №3. - С. 3-12

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне  
E-mail: igor\_pri@mail.ru, l\_kroka@ukr.net

Надійшла 01.03.2012



**Присяжнюк И.М., Крока Л.Л.** МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В ТРИЗВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ // *Получено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи типа " конвекция – диффузия" в трехсвязной области, особенностью которого есть процедура сглаживания негладкостей регулярной его составляющей вдоль линии раздела потока. Приведены результаты числовых исследований.*

**Prysiashniuk I.M., Kroka L.L.** MATHEMATICAL MODELING OF SINGULARLY PERTURBED PROCESS OF CONVECTIVE DIFFUSION IN THREE-COHERENT CURVILINEAR AREA // *Is received the asymptotic decomposition of the decision of the singular indignant task such as " convection-diffusion " in three-coherent area, which feature is procedure of smoothing of the rough members of its regular part along a line of the division of a flow. The results of numerical researches are given.*

Наукове видання

# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

Відповідальний за випуск  
Бомба А. Я.

Підписано до друку \_\_. \_\_. 2012 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № \_/\_.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12