

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

**Рівне-2012**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".  
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Власюк А.П.	Присяжнюк І.М.
Войтович М.М.	Савула Я.Г.
Гарашенко Ф.Г.	Свідзинський А.В.
Гарбарчук В.І.	<u>Скопецький В.В.</u> ( <i>консультант</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С.	Турбал Ю.В.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Янчук П.С.
Кундрат М.М.	

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 30 листопада 2012 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444. E-mail: vmspm@ukr.net.

## **Зміст**

- Абрамович О. В., Климюк Ю. Є.** Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних пористих середовищах..... 5
- Бомба А. Я., Сінчук А. М.** Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву..... 22
- Булавацький В. М.** Геоінформаційна математична модель для вивчення нерівноважних неізотермічних консолідаційних процесів..... 34
- Гладка О. М.** Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволінійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень..... 45
- Климюк Ю. Є.** Побудова алгоритму числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей..... 59
- Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.** Числове розв'язування обернених крайових задач на знаходження просторових аналогів квазіконформних відображень криволінійних паралелепіпедів на прямокутні ..... 74
- Климюк Ю. Є., Рожко Р. А.** Математичне моделювання одного класу просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у пористих середовищах ..... 102
- Конет І. М.** Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених

кусково-однорідних циліндрах .....	117
<b>Романюк В. В.</b> Твердження щодо позаграничних компонент у нерегулярній оптимальній стратегії проектувальника для будівельної опорної конструкції з $N$ опорами в умовах $N-1$ ідентичної часткової невизначеності стиснень.....	135
<b>Присяжнюк І. М., Крока Л. Л.</b> Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у тризв'язній області .....	149
<b>Присяжнюк О. В.</b> Числово-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» для наносередовищ у чотирикутних криволінійних областях .....	162
<b>Черненко В. П.</b> Нестационарні повздожні хвилі в спадково-пружному стрижні при тепловому ударі .....	176
<b>Шпортько О. В., Шпортько Л. В.</b> Аналіз взаємовпливу модифікації формату PNG.....	182
<b>Янчук П. С.</b> Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона.....	189
<b>Ярощак С. В.</b> Один метод врахування впливу тріщини ГРП на процес фільтрації у елементах площового заводнення.....	208

УДК 517.955; 519.673

**Присяжнюк О. В.**

**ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ  
СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ТИПУ «КОНВЕКЦІЯ -ДИФУЗІЯ»  
ДЛЯ НАНОСЕРЕДОВИЩ У ЧОТИРИКУТНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ  
ОБЛАСТЯХ**

*Одержано розв'язки класу сингулярно збурених задач типу "конвекція-дифузія" у чотирикутних криволінійних областях у випадку, коли пористе середовище, в якому протікає процес, являє собою систему мікропористих частинок. Наведені результати чисельних розрахунків.*

**Вступ.** У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій виникла необхідність у розробці і застосуванні нових методів і підходів до моделювання процесів масопереносу в неоднорідних нанопористих середовищах з метою дослідження їхньої внутрішньої кінетики. Відповідні середовища представляються у вигляді системи мікропористих частинок та системи міжчастинкових порожнин (макропор) і відповідно до цього масоперенос розглядається як складна система, що враховує взаємозв'язки між внутрішніми градієнтами концентрацій всередині частинок та зовнішніми градієнтами міжчастинкового простору.

В працях [1-2] розглянуто проблеми математичного моделювання масопереносу різної природи в пористих середовищах без урахування внутрішньої структури пористих частинок. У роботах [3-5] використано лінійні і нелінійні моделі, які побудовані на частковому врахуванні дифузії в частинках або на інтегральному підході і не враховують структуру середовища. Масоперенос забрудненої речовини в кристалічних середовищах частинок мікропористої структури розглянуто в працях [6-7]. Актуальним залишається питання математичного моделювання процесів масопереносу в різнопористих середовищах у випадку перевагування одних складових процесу над іншими, що приводить до появи

малого параметра при відповідних членах рівняння. В даній роботі змодельовано сингулярно збурений процес однокомпонентної конвективної дифузії в плоскому наносередовищі з урахуванням масообміну між мікропористими частинками та міжчастинковим простором у випадку превалювання конвективних складових процесу над іншими.

**Постановка задачі.** В області  $G=G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$ , де  $G_z=ABCD$  – однозв’язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими  $AB=\{z=x+iy: f_1(x, y)=0\}$ ,  $BC=\{z: f_2(x, y)=0\}$ ,  $CD=\{z: f_3(x, y)=0\}$ ,  $DA=\{z: f_4(x, y)=0\}$  (рис.1) розглядається наступна модельна задача процесу однокомпонентного конвективно-дифузійного масопереносу в наносередовищі частинок мікропористої структури:

$$\sigma_1 \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = \varepsilon D_* \left( \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} - v_y \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} - \varepsilon D_* \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (1)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = \varepsilon D_* \left( \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\tilde{c}(t, x, y) \Big|_{t=0} = \tilde{c}_0^0(x, y), \quad \tilde{q}(t, r, x, y) \Big|_{r=0} = \varepsilon \tilde{q}_0^0(r, x, y), \quad (3)$$

$$\tilde{c} \Big|_{AB} = \tilde{c}_*(t, M), \quad \frac{\partial \tilde{c}(t, M)}{\partial n} \Big|_{CD} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{c}(t, M)}{\partial n} \Big|_{BC} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{c}(t, M)}{\partial n} \Big|_{AD} = 0,$$

$$\tilde{q}(t, r, x, y) \Big|_{r=R} = k \cdot \tilde{c}(t, x, y), \quad \frac{\partial \tilde{q}(t, r, x, y)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi \Big|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CD} = \varphi^*,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{DA} = 0, \quad Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy. \quad (5)$$

Тут  $\tilde{c}(t, x, y)$  – концентрація розчинної речовини у міжчастинковому

просторі в точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\tilde{q}(t, r, x, y)$  – концентрація розчинної речовини в точці  $r$  мікрочастинки з координатами  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $M$ ,  $n$  – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої,  $\varphi, v_x, v_y$  – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в міжчастинковому середовищі  $G_z$ ,  $R$  – радіус наночастинки.  $\sigma_1, \sigma_2$  - коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища.

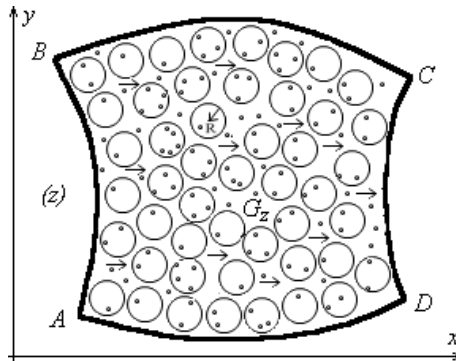


Рис.1. Фізична область  $G_z$

Коефіцієнти  $\varepsilon D^*$  та  $\varepsilon D_*$  відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масопереносу в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а коефіцієнт  $\varepsilon D_*^*$  характеризує вплив внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий,  $\varepsilon$  – малий параметр ( $v(x, y) > v_* \gg \varepsilon > 0$ ).

Рівняння (1) описує масоперенос у міжчастинковому просторі і містить у правій частині функцію впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в міжчастинковому просторі. В (2) відображено внутрішньочастинковий масоперенос з поточною концентрацією  $\tilde{q}(t, r, x, y)$ ,

що пов'язана з концентрацією в міжчастинковому просторі  $\tilde{c}(t, x, y)$  п'ятою з крайових умов (4) - умовою рівноваги на поверхні частинок [6], де  $k > 0$  - константа адсорбційної рівноваги. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3)-(4) є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач дифузії в нанопористому середовищі досліджено зокрема в [7].

Припустивши, що задача фільтрації (5) розв'язана [3], здійснюємо заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  у рівняннях (1)-(2) та умовах (3)-(4) і приходимо до відповідної задачі для області комплексного потенціалу  $G_w$  :

$$\sigma_1 c_t = \varepsilon D_* v^2(\varphi, \psi) (c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) c_\varphi - \varepsilon D_*^* q_r \Big|_{r=R}, \quad (6)$$

$$\sigma_2 q_t = \varepsilon D^* \left( q_{rr} + \frac{2}{r} q_r \right), \quad (7)$$

$$c(t, \varphi, \psi) \Big|_{t=0} = c_0^0(\varphi, \psi), \quad q(t, r, \varphi, \psi) \Big|_{t=0} = \varepsilon q_0^0(r, \varphi, \psi), \quad (8)$$

$$c(t, \varphi_*, \psi) = c_*(t, \psi), \quad \frac{\partial c(t, \varphi, \psi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0,$$

$$\frac{\partial c(t, \varphi, \psi)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\theta_*} = 0, \quad \frac{\partial c(t, \varphi, \psi)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\theta^*} = 0,$$

$$q(t, r, \varphi, \psi) \Big|_{r=R} = k \cdot c(t, \varphi, \psi), \quad \frac{\partial q(t, r, \varphi, \psi)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (9)$$

Розв'язок останньої одержано у вигляді асимптотичних рядів [2]:

$$\begin{aligned} c(t, z) = & c_0(t, \varphi, \psi) + \varepsilon c_1(t, \varphi, \psi) + \dots + \varepsilon^n c_n(t, \varphi, \psi) + \ddot{I}_0(t, \xi, \psi) + \\ & + \varepsilon \ddot{I}_1(t, \xi, \psi) + \dots + \varepsilon^{n+1} \ddot{I}_{n+1}(t, \xi, \psi) + P_0(t, \varphi, \mu) + \\ & + \varepsilon^{1/2} P_{1/2}(t, \varphi, \mu) + \varepsilon P_1(t, \varphi, \mu) + \dots + \varepsilon^{j/2} P_{j/2}(t, \varphi, \mu) + \dots + \varepsilon^{n+1} P_{n+1}(t, \varphi, \mu) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\tilde{A}_0(t, \varphi, \eta) + \varepsilon^{1/2} \tilde{A}_{1/2}(t, \varphi, \eta) + \varepsilon \tilde{A}_1(t, \varphi, \eta) \dots + \varepsilon^{j/2} \tilde{A}_{j/2}(t, \varphi, \eta) + \dots + \\
 & + \varepsilon^{n+1} \tilde{A}_{n+1}(t, \varphi, \eta) + R_n^1(t, \varphi, \psi, \varepsilon), \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q(t, r, \varphi, \psi) = & q_0(t, r, \varphi, \psi) + \varepsilon q_1(t, r, \varphi, \psi) + \dots + \varepsilon^n q_n(t, r, \varphi, \psi) + \\
 & + F_0(t, \rho, \varphi, \psi) + \varepsilon^{1/2} F_{1/2}(t, \rho, \varphi, \psi) + \varepsilon F_1(t, \rho, \varphi, \psi) + \dots + \\
 & + \varepsilon^{j/2} F_{j/2}(t, \rho, \varphi, \psi) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_{n+1}(t, \rho, \varphi, \psi) + R_n^2(t, r, \varphi, \psi, \varepsilon), \tag{11}
 \end{aligned}$$

де  $c_i(t, \varphi, \psi)$ ,  $q_i(t, r, \varphi, \psi)$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – члени відповідних регулярних частин асимптотики,  $\tilde{I}_l(t, \xi, \psi)$  ( $l = \overline{0, n+1}$ ) – функції типу примежового шару в околі  $\varphi = \varphi^*$  (поправки на виході фільтраційної течії із даного пласта  $G_z$ ),  $P_{j/2}(t, \varphi, \mu)$ ,  $\tilde{A}_{j/2}(t, \varphi, \eta)$ ,  $F_{j/2}(t, \rho, \varphi, \psi)$  ( $j = \overline{0, 2(n+1)}$ ) – функції типу примежового шару відповідно в околах  $\psi = \theta_*$  та  $\psi = \theta^*$  (відповідно поправки на лініях течії  $BC$  та  $AD$ ),  $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\mu = (\psi - \theta_*) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ ,  $\eta = (\theta^* - \psi) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ ,  $\rho = (R - r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$  – відповідні регуляризуючі перетворення.  $R_n^1$ ,  $R_n^2$  – залишкові члени.

Підставляючи (10), (11) в (6)-(9), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  [3] отримуємо для кожного  $i = \overline{0, n}$  такі задачі:

$$\begin{cases} \sigma_2 q_{i_t}(t, r, \varphi, \psi) = g_i^1(t, r, \varphi, \psi), \\ q_i(0, r, \varphi, \psi) = h_i^1(r, \varphi, \psi), \end{cases}$$

де  $g_0^1(t, r, \varphi, \psi) = 0$ ,  $h_0^1(r, \varphi, \psi) = 0$ ,  $g_1^1(t, r, \varphi, \psi) = D^*(q_{0rr}(t, r, \varphi, \psi) - 2q_{0r}(t, r, \varphi, \psi)/r)$ ,  $h_1^1(r, \varphi, \psi) = q_0^0$ ,  $g_i^1(t, r, \varphi, \psi) = D^*(q_{i-1rr}(t, r, \varphi, \psi) - 2q_{i-1r}(t, r, \varphi, \psi)/r)$ ,  $h_i^1(r, \varphi, \psi) = 0$  ( $i = \overline{2, n}$ );

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot c_{i_\varphi}(t, \varphi, \psi) + \sigma_1 c_{i_t}(t, \varphi, \psi) = g_i^2(t, \varphi, \psi), \\ c_i(0, \varphi, \psi) = w_i^1(\varphi, \psi), \quad c_i(t, 0, \psi) = w_i^2(t, \psi), \end{cases}$$

$$g_0^2(t, \varphi, \psi) = 0, \quad w_0^1(\varphi, \psi) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad w_0^2(t, \psi) = c_*(t, \psi),$$

$$g_i^2(t, \varphi, \psi) = D_* v^2(\varphi, \psi) (c_{i-1\varphi\varphi}(t, \varphi, \psi) + c_{i-1\psi\psi}(t, \varphi, \psi)) - D_*(q_{i-1r}(t, R, \varphi, \psi) +$$

$$+ F_{i-1r}(t, R, \varphi, \psi) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_{i-\frac{1}{2}r}(t, R, \varphi, \psi)), \quad w_i^1(\varphi, \psi) = 0, \quad w_i^2(t, \psi) = 0$$

$(i = \overline{1, n}).$

Враховавши співвідношення  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (-\frac{1}{\varepsilon}), \quad \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$  та

розклавши функцію  $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$  в ряд Тейлора в околі  $\varphi = \varphi^*$  [2], одержимо рівняння із відповідними умовами для визначення  $\check{I}_l (l = \overline{0, n+1})$ :

$$\begin{cases} D_* \check{I}_{l\xi\xi}(t, \xi, \psi) + \check{I}_{l\xi}(t, \xi, \psi) = g_l^3(t, \xi, \psi), \\ \check{I}_{l\xi}(t, 0, \psi) = v_l(t, \psi), \check{I}_l(t, \xi, \psi) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$g_0^3(t, \xi, \psi) = 0, \quad v_0(t, \psi) = -c_{0\xi}(t, \varphi^*, \psi), \quad g_1^3(t, \xi, \psi) = \frac{\sigma_1 \check{I}_{0r}}{v^2(\varphi^*, \psi)}, \quad v_1(t, \psi) = -c_{l\xi}(t, \varphi^*, \psi)$$

$$(l = \overline{1, n}), \quad v_{n+1}(t) = 0, \quad g_l^3(t, \xi, \psi) = \frac{1}{v^2(\varphi^*, \psi)} (\sigma_1 \check{I}_{l-1r}(t, \xi, \psi) + D_* \times$$

$$\times \check{I}_{l-2\psi\psi}(t, \xi, \psi) + \sum_{s=1}^l \frac{(-1)^s}{ii!} (v^2(\varphi^*, \psi))^{(s)} \xi^s (\check{I}_{l-s\xi\xi}(t, \xi, \psi) + \check{I}_{l-s\xi}(t, \xi, \psi)))$$

при  $l = \overline{2, n+1}$ .

Аналогічно отримуємо задачі для поправок  $P_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \mu)$ ,

$$\tilde{A}_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \eta) \text{ та } F_{\frac{j}{2}}(t, \rho, \varphi, \psi) (j = \overline{0, (2n+2)}):$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 P_{\frac{j}{2}t} (t, \varphi, \mu) - v^2(\varphi, \theta_*) (D_* P_{\frac{j}{2}\mu\mu} (t, \varphi, \mu) - P_{\frac{j}{2}\varphi} (t, \varphi, \mu)) = \gamma_{\frac{j}{2}}^2(t, \varphi, \mu), \\ P_{\frac{j}{2}} (0, \varphi, \mu) = 0, P_{\frac{j}{2}\mu} (t, \varphi, \theta_*) = \mathcal{G}_{\frac{j}{2}}^2(t, \varphi), P_{\frac{j}{2}} (t, \varphi, \mu) \Big|_{\mu \rightarrow \infty} = 0, \end{array} \right.$$

де  $\mathcal{G}_{\frac{j}{2}}^2(t, \varphi) = \begin{cases} -(c_{\frac{j}{2}\psi} (t, \varphi, \theta_*) + \ddot{I}_{\frac{j}{2}\psi} (t, \varphi, \theta_*)), \ddot{y}\hat{e}\hat{u} \hat{i} j \ddot{i} \hat{a}\hat{d}\hat{i} \hat{a}; \\ 0, \ddot{y}\hat{e}\hat{u} \hat{i} j \ddot{i} \hat{a}\hat{i} \hat{a}\hat{d}\hat{i} \hat{a}; \end{cases}$

$$\mathcal{G}_{n+1}^2(t, \varphi) = -\ddot{I}_{(n+1)\psi} (t, \varphi, \theta_*), \quad \gamma_0^2(t, \varphi, \mu) = 0, \quad \gamma_{\frac{j}{2}}^2(t, \varphi, \mu) = 2v(\varphi, \theta_*) \times$$

$$\times v'(\varphi, \theta_*) \mu P_{0\varphi}(t, \varphi, \mu), \quad \gamma_{\frac{j}{2}}^2(t, \varphi, \mu) = D_* v^2(\varphi, \theta_*) P_{\frac{j-2}{2}\varphi\varphi} (t, \varphi, \mu) +$$

$$+ \sum_{s=1}^j (-1)^s (v^2(\varphi, \theta_*))^{(s)} \mu^s (D_* P_{\frac{j-2-s}{2}\varphi\varphi} (t, \varphi, \mu) - P_{\frac{j-i}{2}\varphi} (t, \varphi, \mu)) \quad (j = \overline{2, (2n+2)});$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \tilde{A}_{\frac{j}{2}t} (t, \varphi, \eta) - v^2(\varphi, \theta^*) (D_* \tilde{A}_{\frac{j}{2}\eta\eta} (t, \varphi, \eta) - \tilde{A}_{\frac{j}{2}\varphi} (t, \varphi, \eta)) = \gamma_{\frac{j}{2}}^3(t, \varphi, \eta), \\ \tilde{A}_{\frac{j}{2}} (0, \varphi, \eta) = 0, \tilde{A}_{\frac{j}{2}\eta} (t, \varphi, \theta^*) = \mathcal{G}_{\frac{j}{2}}^3(t, \varphi), \tilde{A}_{\frac{j}{2}} (t, \varphi, \eta) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \end{array} \right.$$

$\mathcal{G}_{\frac{j}{2}}^3(t, \varphi) = \begin{cases} -(c_{\frac{j}{2}\psi} (t, \varphi, \theta^*) + \ddot{I}_{\frac{j}{2}\psi} (t, \varphi, \theta^*)), \ddot{y}\hat{e}\hat{u} \hat{i} j \ddot{i} \hat{a}\hat{d}\hat{i} \hat{a}; \\ 0, \ddot{y}\hat{e}\hat{u} \hat{i} j \ddot{i} \hat{a}\hat{i} \hat{a}\hat{d}\hat{i} \hat{a}; \end{cases}$

$$\mathcal{G}_{n+1}^3(t, \varphi) = -\ddot{I}_{(n+1)\psi} (t, \varphi, \theta^*), \quad \gamma_0^3(t, \varphi, \eta) = 0, \quad \gamma_{\frac{j}{2}}^3(t, \varphi, \eta) = 2v(\varphi, \theta^*) \times$$

$$\times v'(\varphi, \theta^*) \mu \tilde{A}_{0\varphi}(t, \varphi, \eta), \quad \gamma_{\frac{j}{2}}^3(t, \varphi, \eta) = D_* v^2(\varphi, \theta^*) \tilde{A}_{\frac{j-2}{2}\varphi\varphi} (t, \varphi, \eta) +$$

$$+ \sum_{s=1}^j (-1)^s (v^2(\varphi, \theta^*))^{(s)} \eta^s (D_* \tilde{A}_{\frac{j-2-s}{2}\varphi\varphi} (t, \varphi, \eta) - \tilde{A}_{\frac{j-s}{2}\varphi} (t, \varphi, \eta)) \quad (j = \overline{2, (2n+2)});$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 F_{\frac{j}{2}t} (t, \rho, \varphi, \psi) = D^* F_{\frac{j}{2}\rho\rho} (t, \rho, \varphi, \psi) + \gamma_{\frac{j}{2}}^1(t, \rho, \varphi, \psi), \\ F_{\frac{j}{2}} (0, \rho, \varphi, \psi) = 0, F_{\frac{j}{2}} (t, 0, \varphi, \psi) = \mathcal{G}_{\frac{j}{2}}^1(t, \rho, \varphi, \psi), F_{\frac{j}{2}\rho} (t, \rho, \varphi, \psi) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{array} \right.$$

де  $\gamma_0^1(t, \rho, \varphi, \psi) = 0$ ,  $\gamma_j^1(t, \rho, \varphi, \psi) = -\frac{2}{\rho} F_{\frac{j-1}{2}}(t, \rho, \varphi, \psi)$  ( $j = \overline{1, (2n+2)}$ ),

$$g_{\frac{j}{2}}^1(t, \varphi, \psi) = \begin{cases} k(c_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi) + \check{I}_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi) + P_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi) + \check{A}_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi)), & \check{y} \hat{e} \hat{u} \hat{i} \hat{j} \hat{i} \hat{a} \hat{d} \hat{i} \hat{a}; \\ k(P_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi) + \check{A}_{\frac{j}{2}}(t, \varphi, \psi)), & \check{y} \hat{e} \hat{u} \hat{i} \hat{j} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{d} \hat{i} \hat{a}; \end{cases}$$

$$g_{n+1}^1(t, \varphi, \psi) = k(\check{I}_{n+1}(t, \varphi, \psi) + P_{n+1}(t, \varphi, \psi) + \check{A}_{n+1}(t, \varphi, \psi)).$$

Особливістю застосування асимптотичного методу в даному випадку є те, що розв'язувати наведені вище задачі потрібно поетапно. Для  $i = \overline{0, n}$  на  $i$ -тому кроці знаходимо  $c_i(t, \varphi, \psi)$ ,  $q_i(t, r, \varphi, \psi)$ ,  $\check{I}_i(t, \xi, \psi)$ ,  $P_i(t, \varphi, \mu)$ ,  $P_{i+\frac{1}{2}}(t, \varphi, \mu)$ ,  $\check{A}_i(t, \varphi, \eta)$ ,  $\check{A}_{i+\frac{1}{2}}(t, \varphi, \eta)$ ,  $F_i(t, \rho, \varphi, \psi)$ ,  $F_{i+\frac{1}{2}}(t, \rho, \varphi, \psi)$ . На останньому  $n+1$ -му кроці знаходяться поправки  $\check{I}_{n+1}(t, \xi, \psi)$ ,  $P_{n+1}(t, \varphi, \mu)$ ,  $\check{A}_{n+1}(t, \varphi, \eta)$ ,  $F_{n+1}(t, \rho, \varphi, \psi)$ .

Так, наприклад, при  $n=1$  отримуємо:

$$q_0(t, r, \varphi, \psi) = 0, \quad q_1(t, r, \varphi, \psi) = q_0^0(r, \varphi, \psi);$$

$$c_0(t, \varphi, \psi) = \begin{cases} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - \frac{t}{\sigma_1}), \psi), & t < \sigma_1 f(\varphi, \psi), \\ c_*(\psi, \frac{t}{\sigma_1} - f(\varphi, \psi)), & t \geq \sigma_1 f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$c_1(t, \varphi, \psi) = \begin{cases} \int_0^t g_1^2(\tilde{t}, f^{-1}(f(\varphi, \psi) - \frac{t}{\sigma_1} + \frac{\tilde{t}}{\sigma_1}), \psi) d\tilde{t}, & t < \sigma_1 f(\varphi, \psi), \\ \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_1^2(\sigma_1 f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - \sigma_1 f(\varphi, \psi), \tilde{\varphi}, \psi)}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq \sigma_1 f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де  $f(\varphi, \psi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v(\tilde{\varphi}, \psi)}$ ,  $f^{-1}(\varphi, \psi)$  – функція, обернена до функції

$f(\varphi, \psi)$  стосовно змінної  $\varphi$ ;

$$\begin{aligned} \ddot{I}_0(t, \xi, \psi) &= -D_* c_{0\xi}(t, \varphi^*, \psi) e^{-\frac{\xi}{D_*}}, \\ \ddot{I}_1(t, \xi, \psi) &= (D_* - \xi) \frac{D_* \sigma_1}{v^2(\varphi^*, \psi)} \xi \ddot{I}_{0t}(t, \xi, \psi) - c_1(t, \varphi^*, \psi) e^{-\frac{\xi}{D_*}}, \\ \ddot{I}_2(t, \xi, \psi) &= \left( \frac{D_*^2 \sigma_1^2}{2v^4(\varphi_*, \psi)} + \frac{D_* \sigma_1 v'(\varphi_*, \psi)}{v^3(\varphi_*, \psi)} \right) \xi^2 \ddot{I}_{0t}(t, \xi, \psi) + \\ &+ \left( \frac{D_* \sigma_1}{v^2(\varphi_*, \psi)} c_1(t, \varphi_*, \psi) e^{-\frac{\xi}{D_*}} - \frac{D_*^2 \sigma_1 (D_* \sigma_1 + 2v(\varphi_*, \psi) v'(\varphi_*, \psi))}{v^4(\varphi_*, \psi)} \right) \times \\ &\times \ddot{I}_{0t}(t, \xi, \psi) - \frac{D_*^2}{v^2(\varphi_*, \psi)} \ddot{I}_{0v\psi}(t, \xi, \psi) \xi. \end{aligned}$$

Бокові поправки  $P_{j/2}(t, \varphi, \mu)$ ,  $\tilde{A}_{j/2}(t, \varphi, \eta)$  та  $F_{j/2}(t, \rho, \varphi, \psi)$  ( $j=0, 4$ ) шукаємо за допомогою методу сіток.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{cases} \sigma_1 R_n^1 = \varepsilon D_* R_{n\varphi\varphi}^1 - v(\varphi, \psi) R_{n\varphi}^1 + \varepsilon^{n+1} b_1, \\ \sigma_2 R_n^2 = \varepsilon D^* (R_{nrr}^2 + \frac{2}{r} R_{nr}^2) + \varepsilon^{n+1} b_2, \\ R_n^1|_{t=0} = 0, R_n^1|_{\varphi=0} = 0, \frac{\partial R_n^1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ R_n^2|_{t=0} = 0, R_n^2|_{r=R} = k R_n^1, \frac{\partial R_n^2}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \end{cases}$$

де  $b_1 = b_1(t, \varphi, \psi, \xi, \mu, \eta, r, \varepsilon)$  та  $b_2 = b_2(t, r, \varphi, \psi, \rho, \varepsilon)$  – відомі функції, які є сумою добутків уже відомих членів рядів (10), (11), а також коефіцієнтів при  $\varepsilon$  розкладах функції  $v^2(\varphi, \psi)$  в ряд Тейлора в околах  $\varphi = \varphi^*$ ,  $\psi = \theta_*$  та  $\psi = \theta^*$ . Вимагаючи достатньої гладкості та узгодженості початкових і граничних умов [3], на основі принципу типу максимуму для рівнянь в частинних похідних приходимо до справедливості такого твердження:  $R_n^1(t, \varphi, \psi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ ,  $R_n^2(t, r, \varphi, \psi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ .

Наведемо деякі результати розрахунку описаних вище сингулярно збурених процесів типу “конвекція-дифузія” на ідеальному фільтраційному фоні [3], породженому двома особливими точками  $z_1$  та  $z_2$  (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей  $Q_0=2\pi$ ), комплексний потенціал якого –  $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$ , при фіксованих  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$ ,  $Q$ . Для розрахунків покладемо  $z_1=0$  та  $z_2=4$ ,  $\varphi_*=-1.5$ ,  $\varphi^*=1.5$ ,  $AD=\{z:\psi(x,y)=2\pi/3\}$ ,  $BC=\{z:\psi(x,y)=4\pi/3\}$ .

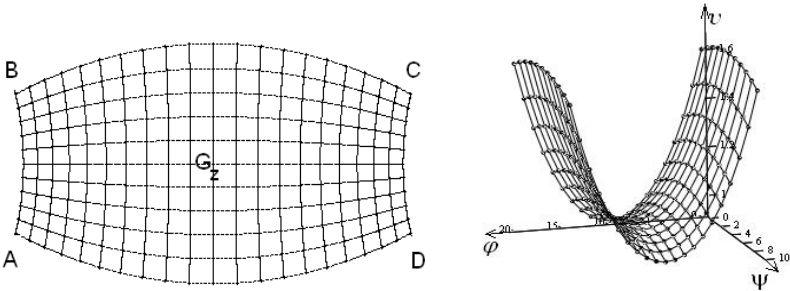


Рис. 2. Динамічна сітка та поле швидкості фільтрації

На рис. 2 зображено динамічну сітку в  $G_z$ :

$$\varphi(x,y)=\bar{\varphi}_i^{\text{df}}=\varphi_*+((\varphi^*-\varphi_*)\cdot i)/20, \quad \psi(x,y)=\bar{\psi}_j^{\text{df}}=(\theta_*\cdot j)/10, \quad i=\overline{0,20},$$

$$j=\overline{0,10} \text{ та величину швидкості фільтрації } v=\left((dz/dw)(\overline{dz/dw})\right)^{-1/2} \text{ у}$$

вузлах  $(\varphi_i, \psi_j)$ .

Обчислення проводились при  $R=10^{-5}$ ,  $T=2$ ,  $K=100$ ,  $\varepsilon=10^{-10}$ ,  $D_*^0=1$ ,  $D_*^1=1$ ,  $D_*^2=0.8$ ,  $\sigma_1=0.7$ ,  $\sigma_2=0.8$ ,  $k=0.8$ ,  $c_0^0(\varphi, \psi)=0.01\psi$ ,

$$c_*(t, \psi)=\begin{cases} 0.02\psi+0.01\psi\cdot\cos(15t+\pi), & t\leq\pi/15, \\ 0.03\psi, & t>\pi/15. \end{cases}$$

$$q_0^0(r, \varphi, \psi)=\frac{R(\sin(\frac{2\pi}{R}(r-\frac{R}{4}))+1)}{100(\varphi+2)}.$$

На рис. 3 а зображено розподіл концентрації  $q(t, r, \varphi, \psi)$  забруднюючої речовини в мікропорі з координатами  $(-0.75, 2.83)$  в моменти часу  $t=0.4$ ,  $t=0.6$ ,  $t=0.8$ ,  $t=1$ ,  $t=1.8$  (криві 1 – 5 відповідно). На рис.3 б зображено розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропорі з координатами  $(-0.3, 3.35)$  при значеннях коефіцієнта пористості  $\sigma_2=0.3$ ,  $\sigma_2=0.5$ ,  $\sigma_2=0.68$ ,  $\sigma_2=0.9$  (криві 1 – 4 відповідно). Розподіл концентрації забруднюючої речовини в момент часу  $t=0.6$  мікропорах з координатами  $(-1.35, 3.14)$ ,  $(-0.9, 2.93)$ ,  $(-0.45, 3.25)$ ,  $(1.35, 3.56)$  (криві 1 – 4 відповідно) зображено на рис.3 в.

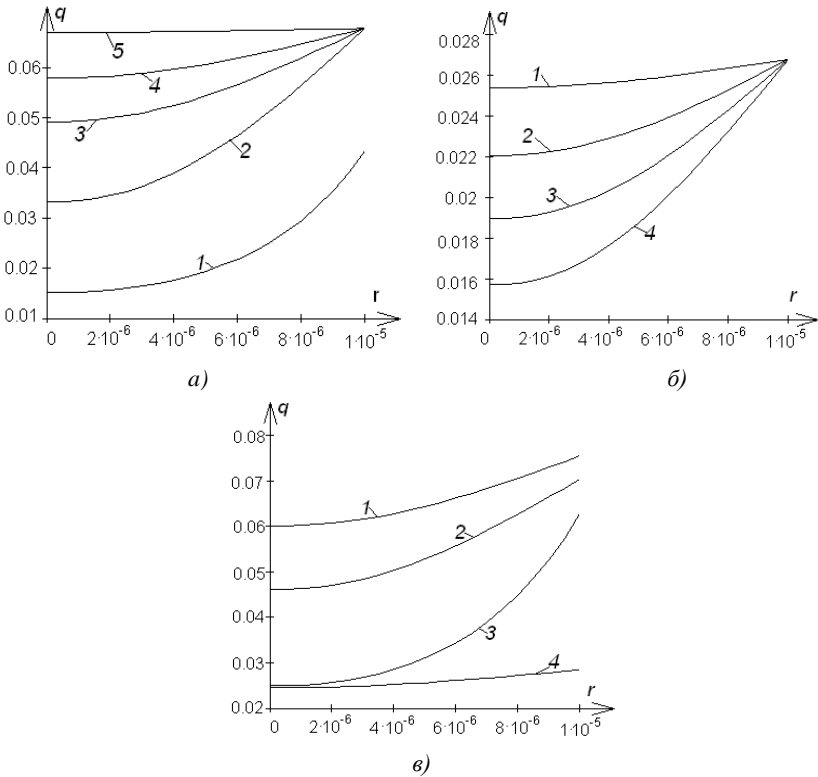


Рис.3. Розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікропорах

Вплив коефіцієнта масообміну  $D_*$  на розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі відображено на рис. 4 а. Так, крива 1 відображає абсолютну величину втрати концентрації забруднюючої речовини  $|\varepsilon c_1(t, \varphi, \psi)|$  вздовж еквіпотенціальної лінії  $\psi=2.93$  при  $D_*^*=0.9$ , а криві 2, 3 при  $D_*^*=0.3$ ,  $D_*^*=0.1$  в момент часу  $t=0.6$ , а криві 1\*, 2\*, 3\* відповідно в момент часу  $t=1.5$ .

На рис. 4 б показано вплив коефіцієнта пористості  $\sigma_1$ , а саме наведені графіки розподілу концентрації забруднюючої речовини  $c(t, \varphi, \psi)$  вздовж еквіпотенціальної лінії  $\psi=2.93$  при  $\sigma_1=0.1$ ,  $\sigma_1=0.45$ ,  $\sigma_1=0.53$ ,  $\sigma_1=0.62$  (криві 1-4 відповідно).

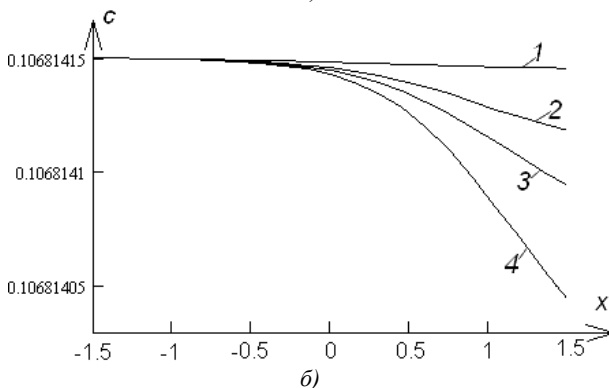
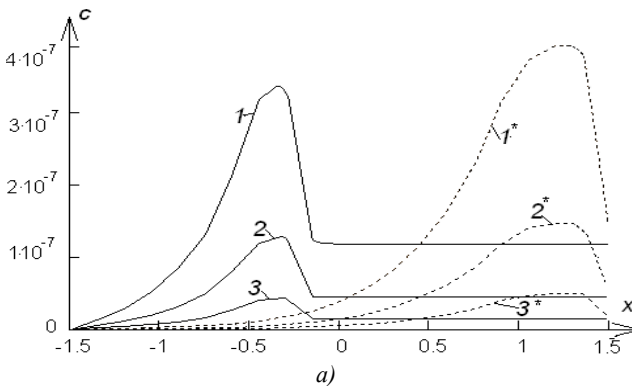


Рис. 4. Розподіл концентрації забруднюючої речовини



**Висновки.** В якості висновку можна відзначити ефективність використання асимптотичного методу розв'язку задач конвективної дифузії в наносередовищах при розв'язанні відповідних плоских задач. В перспективі дослідження такого роду процесів у випадку, коли коефіцієнт, що характеризує вплив внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, не є малим.

1. *Ляшко И.И.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий – Киев: Наук. думка, 1991. – 264с.
2. *Бомба А.Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде / А.Я. Бомба // Укр. матем. журн. – 1982. – Т.4, №4. – С. 493-496.
3. *Бомба А.Я.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» / А.Я. Бомба, С.В. Барановський І.М. Присяжнюк – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
4. *Петрик М. Р.* Математична модель процесу фільтраційного масопереносу неоднорідних середовищ у сферично-конічних необмежених каналах / М. Р. Петрик // Нелинейные задачи математической физики и их применение: 36. науч. пр. – К.: Ін – т. математики НАН України, 1999. – С. 184 – 188.
5. *Власюк А.П.* Чисельне моделювання процесу переносу сольових розчинів в основах гідротехнічних об'єктів / А.П. Власюк, В.О. Самсолюк, П.М. Зінько // Вісник “Кібернетика”. – 2002. – Вип.3. – С. 30-34.
6. *Петрик М.Р.* Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной компетитивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частей / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73-83.
7. *Сергиенко И.В.* Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5-18.

Рівненський державний гуманітарний університет

*E-mail:* lenapris@ukr.net

*Надійшла 01.09.2012*

**Присяжнюк О.В.** ЧИСЕЛЬНО-АССИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ТИПА «КОНВЕКЦИЯ-ДИФУЗИЯ» ДЛЯ НАНОСРЕД В ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ // *Получены решения класса задач типа "кон-*

*векция-диффузия" в четырехугольных криволинейных областях в случае, когда среда, в которой протекает процесс, представляет собой систему микропористых частиц. Приведены результаты численных расчетов.*

**Prysiashniuk O. V.** NUMERIC-ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING OF SINGULAR PERTURBATIVE TASKS SUCH AS «CONVECTION - DIFFUSION» FOR NANOPOROUS ENVIRONMENTS IN QUADRANGULAR CURVILINEAR AREAS // *The solutions of a class of problems such as "convection-diffusion" in curved rectangular regions, where the environment in which the process takes place is a system of microporous particles, are obtained. The results of numerical calculations are given.*

Наукове видання

# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 9 (18)**

Відповідальний за випуск  
Бомба А. Я.

Підписано до друку \_\_. \_\_. 2012 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 11,7. Тираж 100. Зам. № \_/\_.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12