

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 6 (15)**

**Рівне-2009**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"**  
публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. ( <i>консультант</i> )
Каштан С.С.	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2009 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444 . E-mail: [vmvspm@gmail.com](mailto:vmvspm@gmail.com)

## Зміст

<b>Бомба А.Я., Каштан Н.Б.</b> Математичне моделювання процесу руху води із зволожувача в шаруватий ґрунт.....	5
<b>Бомба А.Я., Ярощак С.В.</b> Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху границі розділу різнокольорових рідин.....	20
<b>Булавацький В.М.</b> Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів за складних гідрогеологічних умов .....	36
<b>Гребеннік І.В.</b> Оптимізація деяких класів інтервальних відображень на інтервальній множині перестановок .....	44
<b>Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О.</b> Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди.....	59
<b>Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А.</b> Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановка .....	72
<b>Мандзак Т.І., Савула Я.Г.</b> Застосування експоненційних і поліноміальних апроксимацій у числовому аналізі задач адвекції-дифузії .....	87
<b>Петрик М.Р., Михалик Д.М.</b> Нелінійна модель і аналіз фільтраційного відтиску з урахуванням перетоків між вологомісткими частинками і порами середовища .....	96
<b>Півень В.Ф.</b> Крайові задачі двовимірної фільтрації в анізотропному шарі ґрунту.....	110
<b>Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В.</b> Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням малої тримолекулярної реакції забруднюючих речовин.....	122

<b>Сафоник А.П.</b> Нелінійне математичне моделювання магнітних фільтрів з урахуванням зворотного впливу .....	137
<b>Турбал Ю.В., Клап А.В.</b> Про характер траєкторій малих збурень типу $\delta$ -солітонів для рівнянь газової динаміки галактик .....	144
<b>Фундак Л.І., Цегелик Г.Г.</b> Новий числовий метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь .....	156
<b>Фурсачик О. А.</b> Обернені сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" для двозв'язних областей .....	169
<b>Цегелик Г.Г., Мельничин А.В.</b> Математичне моделювання та оптимізація доступу до інформації індексно-послідовних файлів баз даних .....	179
<b>Янчук П.С.</b> Ряди Фур'є за квазіспектральними системами поліномів .....	197

### Хроніка

<b>Савич В.О., Соколовська О.П.</b> Анатолій Асірович Гольдберг ..	212
--	-----



<b>Каталог статей Волинського математичного вісника з 1994 р. до 2009 р.</b> .....	217
--	-----

УДК 519.632.4.001.57+517.54

**Бомба А. Я., Каштан Н. Б.**

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУХУ ВОДИ ІЗ ЗВОЛОЖУВАЧА В ШАРУВАТИЙ ҐРУНТ

*Побудовано алгоритм числового розв'язування обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення у шаруватих середовищах – криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. На цій основі розв'язано модельну задачу на прикладі роботи зрошувальної системи (системи водопостачання) з урахуванням верхнього родючого шару та «розрихлення» ґрунту, проведено розрахунок поля швидкості фільтрації.*

**Вступ.** Дослідженню фільтраційних, температурних та інших полів присвячено багато наукових і прикладних праць. Це зумовлено, в першу чергу, практичними запитами. Дослідження фільтраційних процесів в різних середовищах має першочергове значення при розгляді проблем екології, проектування та функціонування гідротехнічних і гідромеліоративних споруд, а також оптимізації інших гідросистем. Тому, екологічні проблеми, пов'язані з результатами діяльності людини, які впливають на стан навколишнього середовища, стають усе більш актуальними, поступово займаючи провідне місце серед глобальних питань сучасності.

**Аналіз останніх досліджень.** У роботах [1 – 5] побудовано алгоритми числового обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок тощо в однорідних і неоднорідних, ізотропних та анізотропних середовищах. Зокрема, у роботах [1, 2] подається розв'язання задачі про моделювання відповідних процесів у ізотропних та анізотропних середовищах, а у [3 – 5] – алгоритм розв'язання відповідних задач у середовищах,

схильних до деформацій під дією градієнту потенціалу. Запропонований підхід дозволяє паралельно визначати характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну фільтраційну витрату, градієнти потенціалу та поле швидкості і побудувати гідродинамічну сітку руху.

У цій роботі йдеться про побудову алгоритму та розрахунок процесу руху води (зокрема, поля швидкості фільтрації) із зволожувача в ґрунт на прикладі роботи зрошувальної системи (системи водопостачання) [6] з урахуванням верхнього родючого шару (чорнозему) [7] та «розрихлення» ґрунту.

**Постановка задачі.** Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції  $\varphi = \varphi(x, y)$  (потенціалу) в неоднорідному пористому пласті  $G_z = ABCD$  ( $z = x + iy$ ) – однозв'язній криволінійній чотирикутній області, обмеженій чотирма гладкими кривими  $AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$ ,  $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ ,  $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$ , які в точках  $A, B, C, D$  перетинаються під прямим кутом при умовах:  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0$  (де  $n$

– зовнішня нормаль до відповідної кривої). Шляхом введення гармонічної функції  $\psi = \psi(x, y)$  (функції течії), комплексно спряженої до  $\varphi = \varphi(x, y)$ , і заміною останніх двох граничних умов на умови:  $\psi|_{BC} = Q$ ,  $\psi|_{AD} = 0$  ( $Q$  – невідомий параметр, повна фільтраційна витрата), цю задачу, як відомо [8], зведено до більш загальної задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  області  $G_z$  на відповідну область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  [1 – 4].

Тоді, відповідна обернена крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$  в диференціальній формі запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_{\omega}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки функції  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  задовольняють умови квазі Коші-Рімана (1), то кожна із них є квазігармонічною в області  $G_{\omega}$ , що дозволяє звести цю задачу до розв'язування в  $G_{\omega}$  рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (2) та умовах квазі Коші-Рімана (1) на границі  $\partial G_{\omega}$  області  $G_{\omega}$ , які в деяких випадках зручно замінити на умови ортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області

$$\begin{cases} \text{grad} \psi(x, y) \cdot \text{grad} f_1(x, y) = 0, & (x, y) \in AB, \\ \text{grad} \varphi(x, y) \cdot \text{grad} f_2(x, y) = 0, & (x, y) \in BC, \\ \text{grad} \psi(x, y) \cdot \text{grad} f_3(x, y) = 0, & (x, y) \in CD, \\ \text{grad} \varphi(x, y) \cdot \text{grad} f_4(x, y) = 0, & (x, y) \in DA. \end{cases} \quad (4)$$

**Різницевий аналог** цієї задачі у рівномірній сітковій області  $G_{\omega}^{\gamma} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1}; \right.$

$\left. \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbf{N} \right\}$  запишемо, згідно з [1 –

4, 9], у такому вигляді.

Рівняння (3) (аналог рівнянь Лапласа) для спряжених гармонічних функцій  $x(\varphi, \psi)$  та  $y(\varphi, \psi)$  апроксимуємо, згідно з дев'ятиточковою різницевою симетричною схемою [9], такими різницевими рівняннями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \left( a_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) x_{i,j+1} + a_{i,j+1} x_{i-1,j+1} \right) + \\ + (1 - 2\sigma) \left( a_{i+1,j} x_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) x_{i,j} + a_{i,j} x_{i-1,j} \right) + \\ + \sigma \left( a_{i+1,j-1} x_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) x_{i,j-1} + a_{i,j-1} x_{i-1,j-1} \right) + \\ + \gamma^2 \left( \sigma \left( b_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) x_{i+1,j} + b_{i+1,j} x_{i+1,j-1} \right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\sigma) \left( b_{i,j+1} x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) x_{i,j} + b_{i,j} x_{i,j-1} \right) + \right. \\ \left. + \sigma \left( b_{i-1,j+1} x_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) x_{i-1,j} + b_{i-1,j} x_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \\ \sigma \left( a_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) y_{i,j+1} + a_{i,j+1} y_{i-1,j+1} \right) + \\ + (1 - 2\sigma) \left( a_{i+1,j} y_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) y_{i,j} + a_{i,j} y_{i-1,j} \right) + \\ + \sigma \left( a_{i+1,j-1} y_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) y_{i,j-1} + a_{i,j-1} y_{i-1,j-1} \right) + \\ + \gamma^2 \left( \sigma \left( b_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) y_{i+1,j} + b_{i+1,j} y_{i+1,j-1} \right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\sigma) \left( b_{i,j+1} y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) y_{i,j} + b_{i,j} y_{i,j-1} \right) + \right. \\ \left. + \sigma \left( b_{i-1,j+1} y_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) y_{i-1,j} + b_{i-1,j} y_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (5)$$

де  $a_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j}}{2\kappa_{i,j}\kappa_{i-1,j}}$ ,  $b_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j-1}}{2}$ ,  $\sigma \in [0, 0.5]$  – ваговий коефіцієнт,

від вибору якого залежить стійкість, точність та швидкість збіжності різницевої схеми.

Тут і надалі  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ .

Крайові умови (2) – функції, що визначають фізичну область –  $G_z$  – апроксимуємо точково-різницевими рівняннями, в які входять граничні вузли:



$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (6)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів з граничними вузлами використаємо умови ортогональності лінії течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (4), які апроксимуємо такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{cases} f'_{1x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f'_{1y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ f'_{2x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f'_{2y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ f'_{3x}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f'_{3y}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \\ f'_{4x}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f'_{4y}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \\ i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}. \end{cases} \quad (7)$$

Конформний інваріант  $\gamma$  криволінійного чотирикутника  $G_z$  (відношення сторін прямокутника  $G_w$ ) є невідомим (оскільки невідома витрата  $Q$ ) і визначається в процесі розрахунку. Формулу для наближеного знаходження цієї величини одержимо з умови «конформної подібності в малому» відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+0.5,j+0.5}} \gamma_{i,j}, \quad (8)$$

де 
$$\kappa_{i+0.5,j+0.5} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j+1} + \kappa_{i+1,j+1}}{4},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Тоді фільтраційну витрату знайдемо за формулою

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}. \quad (9)$$

**Алгоритм наближення розв'язку** оберненої диференціальної задачі (1), (2) різницевою задачею (5) – (8) в загальному випадку [1 – 4] побудуємо шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma$  (або значення витрати  $Q$ ), граничних та внутрішніх вузлів сітки  $G_z^\gamma$  з використанням ідей методу блочної ітерації [10] для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме, задавши кількість  $m$  та  $n$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega$ , параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m,j}^{(0)}, y_{m,j}^{(0)}, x_{i,n}^{(0)}, y_{i,n}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$  (так, щоб виконувались рівності (6)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$  та значення коефіцієнта фільтрації  $\kappa_{i,j}$  у кожному вузлі сітки, за формулою (8) знаходимо початкове наближення  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  конформного інваріанта  $\gamma$ . Уточнення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер кроку ітерації) проводимо з допомогою ітераційного методу Зейделя [11] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (5) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  (з метою економії машинного часу і прискорення швидкості збіжності всього процесу та на основі ідей методу блочної ітерації використаємо лише перший ітераційний крок [1 – 4]). Підраховуємо нові значення коефіцієнта фільтрації  $\kappa_{i,j}$  у кожному вузлі сітки, та за формулами (8), (9) знаходимо нові наближення величин  $\gamma$  та  $Q$ . Далі, підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (6), (7) та перевіряємо виконання відносно кроку ітерації умов стабілізації [10, 11]:

- координат граничних вузлів (згідно з принципом максимуму для систем рівнянь еліптичного типу [12])

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left( \left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon; \quad (10)$$

– фільтраційної витрати

$$|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon; \quad (11)$$

– конформності сітки (що підсилює умови ортогональності (4))

$$|D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon, \quad (12)$$

$$\text{де } D^{(k+1)} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k+1)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k+1)})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}^{(k+1)} - x_{i+1,j}^{(k+1)})^2 + (y_{i,j+1}^{(k+1)} - y_{i+1,j}^{(k+1)})^2}} -$$

усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області  $G_z^y$ .

Якщо умови (10) – (12) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів за формулою (5) і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою  $\varepsilon_* = |1 - D|$ . Ця нев'язка характеризує відхилення одержаних криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику дорівнює одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності (4)).

Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку  $\varepsilon_*$ ), то збільшуємо параметри розбиття  $m$  і  $n$  та розв'язуємо різницеву задачу (5) – (8) заново.

Зауважимо, що на даний час є деякі інші варіанти числової реалізації ідеї конформного обернення конкретних типів крайових задач [13]. Наприклад, кроки розбиття  $\Delta\phi$  та  $\Delta\psi$  можна вважати відомими, а у процесі розв'язку задачі уточнювати параметри  $m$  та  $n$  [14].

Провівши розрахунок гідродинамічної сітки руху за вказаною методикою, на основі закону Дарсі [15] (рівняння руху)  $\vec{v} = \kappa \text{grad } \phi$  та умов квазі Коші-Рімана (1), знаходимо розрахункову величину швидкості за такими формулами [1 – 4]:

– у внутрішніх вузлах сітки

$$v_{i,j} = \frac{2\Delta\Psi\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})^2}}{(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

– у граничних вузлах сітки

$$v_{0,j} = \frac{2\Delta\Psi\sqrt{(x_{1,j}-x_{0,j})^2+(y_{1,j}-y_{0,j})^2}}{(x_{1,j}-x_{0,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})(y_{1,j}-y_{0,j})},$$

$$v_{i,n+1} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{i+1,n+1}-x_{i-1,n+1})^2+(y_{i+1,n+1}-y_{i-1,n+1})^2}}{(x_{i+1,n+1}-x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1}-y_{i,n})-(x_{i,n+1}-x_{i,n})(y_{i+1,n+1}-y_{i-1,n+1})},$$

$$v_{m+1,j} = \frac{2\Delta\Psi\sqrt{(x_{m+1,j}-x_{m,j})^2+(y_{m+1,j}-y_{m,j})^2}}{(x_{m+1,j}-x_{m,j})(y_{m+1,j+1}-y_{m+1,j-1})-(x_{m+1,j+1}-x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j}-y_{m,j})},$$

$$v_{i,0} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{i+1,0}-x_{i-1,0})^2+(y_{i+1,0}-y_{i-1,0})^2}}{(x_{i+1,0}-x_{i-1,0})(y_{i,1}-y_{i,0})-(x_{i,1}-x_{i,0})(y_{i+1,0}-y_{i-1,0})}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

– у кутових точках сітки

$$v_{0,0} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{1,0}-x_{0,0})^2+(y_{1,0}-y_{0,0})^2}}{(x_{1,0}-x_{0,0})(y_{0,1}-y_{0,0})-(x_{0,1}-x_{0,0})(y_{1,0}-y_{0,0})},$$

$$v_{0,n+1} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{1,n+1}-x_{0,n+1})^2+(y_{1,n+1}-y_{0,n+1})^2}}{(x_{1,n+1}-x_{0,n+1})(y_{0,n+1}-y_{0,n})-(x_{0,n+1}-x_{0,n})(y_{1,n+1}-y_{0,n+1})},$$

$$v_{m+1,n+1} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{m+1,n+1}-x_{m,n+1})^2+(y_{m+1,n+1}-y_{m,n+1})^2}}{(x_{m+1,n+1}-x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1}-y_{m+1,n})-(x_{m+1,n+1}-x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1}-y_{m,n+1})},$$

$$v_{m+1,0} = \frac{\Delta\Psi\sqrt{(x_{m+1,0}-x_{m,0})^2+(y_{m+1,0}-y_{m,0})^2}}{(x_{m+1,0}-x_{m,0})(y_{m+1,1}-y_{m+1,0})-(x_{m+1,1}-x_{m+1,0})(y_{m+1,0}-y_{m,0})}.$$

**Практичне застосування моделі.** Розглянута модельна задача теорії фільтрації може бути використана (виникає), зокрема, при дослідженні екологічних проблем, пов'язаних із збереженням ґрунтів у зоні зрошувального землеробства. Так збільшення потужності зрошувальних систем призводить до порушення екологічного балансу, деградації та засоленості ґрунтів, збільшенню вартості будівництва. Зниження – призводить до втрат врожаю з приводу недостатнього та несвоєчасного поливу сільськогосподарських культур.

При підґрунтовому зрошенні вода надходить у ґрунт (плоско-вертикальний рух) із закладених у ґрунті найчастіше гончарних труб або спеціально обладнаних підземних земляних ходів-котовин (рис. 1).

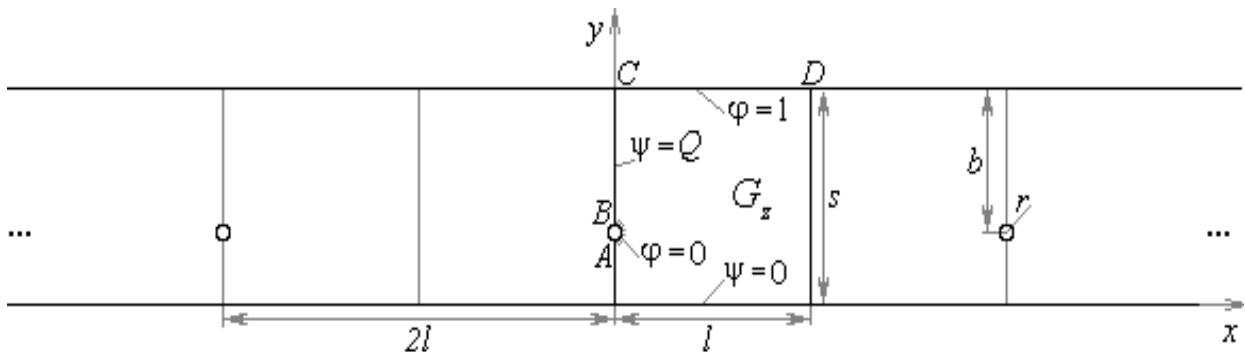


Рис. 1. Схема зрошувальної системи

В силу симетрії картини руху розглядатимемо лише один фрагмент такої системи, а саме – фізичну область  $G_z$ , де  $AB = \{z: x > 0, x^2 + (y - (s - b))^2 = r^2\}$ ,  $BC = \{z: x = 0, s - b + r \leq y \leq s\}$ ,  $CD = \{z: 0 \leq x \leq l, y = s\}$ ,  $DA = \{z: f(x, y) = 0\} = \{z: x = l, 0 \leq y \leq s\} \cup \{z: 0 \leq x \leq l, y = 0\} \cup \{z: x = 0, 0 \leq y \leq s - b - r\}$ ,  $r = 1$  дм – радіус труби,  $b = 11$  дм та  $s = 17$  дм – відповідно глибина закладання труб та до водоупору,  $2l = 20$  дм – відстань між трубами.

При моделюванні роботи зволожувальної дренажної системи (розрахунку параметрів процесу та середовища) у початкові моменти часу (перші декілька років) слід врахувати той факт, що після побудови системи зволоження, коефіцієнт фільтрації над закладеними у ґрунт трубами буде вдвічі більшим від базового значення внаслідок розрихлення ґрунту, також врахуємо, що верхній активний (родючий) шар ґрунту, товщина якого в середньому 1.5дм, має провідність більшу як підґрунтя в середньому на 20% (рис. 2).

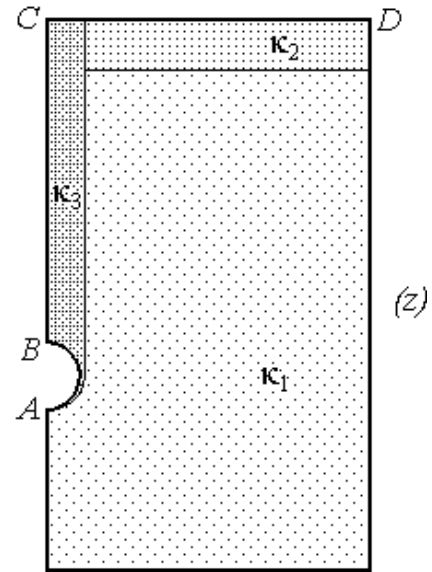


Рис. 2. Фізична область фільтрації

**Числова реалізація** методу здійснювалась з використанням модельної залежності коефіцієнта фільтрації вигляду

$$k = k(x, y) = \begin{cases} k_3 = 2, & x < 1.1, \quad y > 6.1 - \sqrt{1.21 - x^2}; \\ k_2 = 1.2, & x \geq 1.1, \quad s - 1.5 \leq y \leq s; \\ k_1 = 1, & \text{інші } x, y. \end{cases} \quad (13)$$

**Результати числового розрахунку.** Провівши розрахунок гідродинамічної сітки руху у такій області, де базовий коефіцієнт фільтрації є сталою величиною, наприклад,  $k = 1$  дм/добу при розбитті області фільтрації  $m \times n = 23 \times 15$ , точності наближення  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\varphi|_{AB} = \varphi_* = 0$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^* = 1$  за 766 ітераційні кроки знайдено повну фільтраційну витрату  $Q = 0.6758$  дм<sup>3</sup>/добу за максимальної нев'язки  $\varepsilon_* = 0.0036$ , що має місце в околі деяких граничних вузлів, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників.

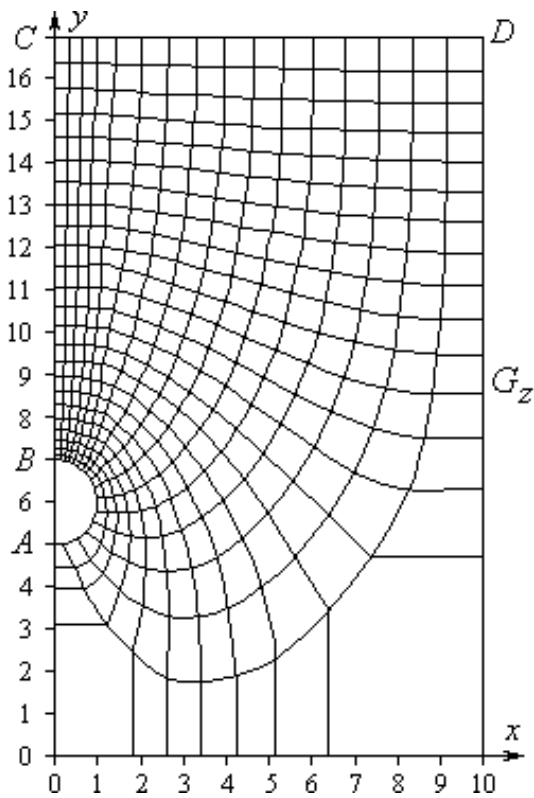


Рис. 3. Гідродинамічна сітка руху

Врахування властивостей середовища за моделлю (13) при розрахунку гідродинамічної сітки руху (рис. 3) привело до збільшення шуканої фільтраційної витрати  $Q$  до  $0.8193 \text{ дм}^3/\text{добу}$ , тобто на 21.2%.

На рис. 4 зображено поверхню розрахункового скалярного поля швидкості фільтраційної течії над областю комплексного потенціалу. При цьому, діапазон швидкостей становить  $[0.021, 0.546]$ , а усереднене по розрахунковій області значення швидкості –  $0.132$ . У табл. 1 подано розрахункові значення величини швидкості фільтрації вздовж деяких

ліній течії та евіквівазіпотенціальних ліній.

Табл. 1. Значення величини швидкості фільтрації при фіксованих  $i, j$ 

	$i = 0$	$i = 4$	$i = 8$	$i = 12$	$i = 16$	$i = 20$	$i = 24$
$j = 0$	0.2419	0.0321	0.0223	0.0374	0.0551	0.0620	0.0636
$j = 4$	0.1883	0.0754	0.0579	0.0585	0.0629	0.0662	0.0670
$j = 8$	0.2833	0.1275	0.0953	0.0817	0.0767	0.0755	0.0758
$j = 12$	0.4419	0.2966	0.2234	0.1689	0.1094	0.0999	0.0997
$j = 16$	0.3508	0.3115	0.2401	0.2007	0.1881	0.1688	0.1563

На рис. 5 позначено зони, в яких розрахункова швидкість більша за середню, точками відзначено вузли в яких швидкість є найбільшою та найменшою.

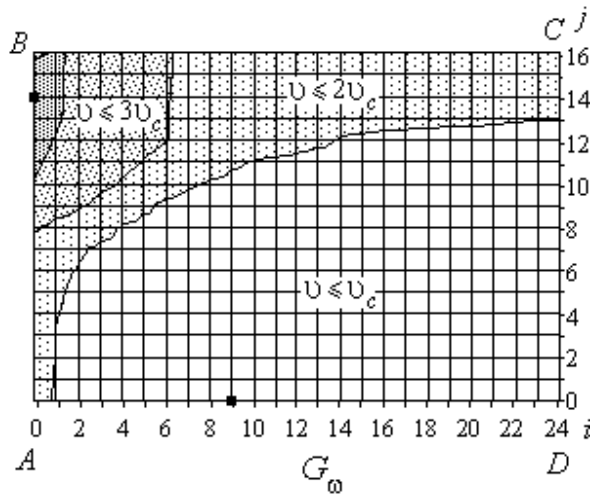
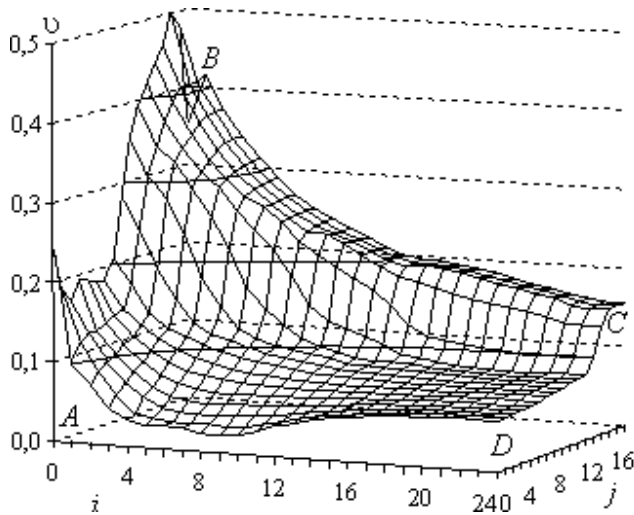


Рис. 4. Розрахункова поверхня швидкості    Рис. 5. Зони швидкості фільтрації

На рис. 6 та 7 зображено розподіл швидкості фільтрації вздовж деяких ліній (1 –  $\psi = 0$ ; 2 –  $\psi = Q/2$ ; 3 –  $\psi = Q$ ; 4 –  $\varphi = 0$ ; 5 –  $\varphi = 0.5$ ; 6 –  $\varphi = 1$ ) без (пунктирні) і з (суцільні) врахуванням властивостей ґрунту. Як і очікувалося, найменша розрахункова величина швидкості фільтрації 0,0208 досягається на ділянці  $AD$ , а саме на водоупорі у вузлі  $(i, j) = (9, 0)$ , а найбільша – 0.5462 – на ділянці  $AB$ , а саме у верхній зовнішній частині труби у вузлі  $(i, j) = (0, 14)$ .

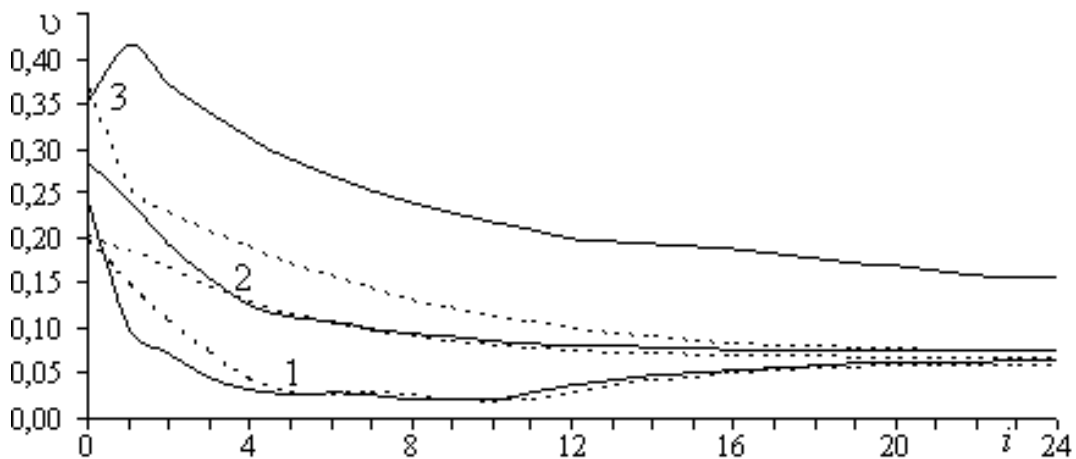


Рис. 6. Розподіл швидкості фільтрації вздовж ліній течії



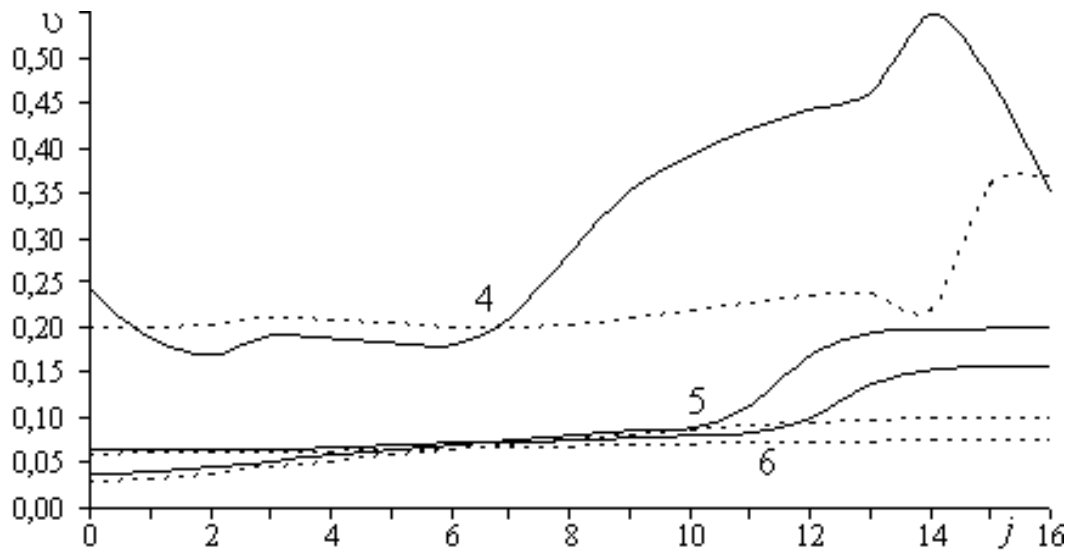


Рис. 7. Розподіл швидкості фільтрації вздовж еквіпотенціальних ліній

**Висновки.** Побудований нами алгоритм розв'язання модельних задач теорії фільтрації дозволяє враховувати властивості середовища на характеристики процесу. Розв'язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу.

Із результатів числових розрахунків бачимо, що не врахування як родючого шару (тонкої смуги) так і «розрихлення» ґрунту при підґрунтовому зрошенні може призвести до його перезволоження, а згодом і до підтоплення або/та засолення ґрунту. А це в свою чергу, призводить до втрат врожаю сільськогосподарських культур. Результати проведених нами досліджень у цій та подібних роботах підводять до необхідності перегляду пов'язаних з фільтраційними розрахунками (при прогнозуванні та проектуванні дренажних споруд та оптимізації інших гідросистем) стандартів з метою їх уточнення.

1. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. Випуск 8. – Рівне : РДГУ, 2001. – С. 9-22.

2. *Бомба А. Я.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. – 2001, №4. – С.182–195.
3. *Бомба А. Я.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – 45, №2. – С.49–57.
4. *Каштан С. С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища / С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. Випуск 9. – Рівне : РДГУ, 2002. – С. 32-40.
5. *Бомба А. Я.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу / А. Я. Бомба, Ж. С. Гутіна, С. С. Каштан, М. М. Хлапук // Вісник Українського державного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць. – №4 (23). – Рівне: УДУВГП, 2003. – С. 108–115.
6. *Каштан Н. Б.* До питання моделювання нелінійних процесів фільтрації води із зволожувача в ґрунт / Н. Б. Каштан // Одинадцята Всеукраїнська (шоста Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2008. – Львів, 2008. – С. 115–116.
7. *Каштан Н. Б.* Про математичне моделювання процесів фільтрації води у зволожувальних дренажних системах / Н. Б. Каштан // Наука, освіта, суспільство очима молодих: Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції студентів, педагогів, психологів та молодих науковців. – Рівне, 2009. – С.152–154.
8. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
9. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
10. *Ортега Д.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
11. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – К. : Наукова думка, 1980. – 334 с.
12. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
13. *Годунов С. К.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах / С. К. Годунов, Г. П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – 12, №2. – С. 429–440.

14. *Власюк А. П.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – К., 1989. – 55 с. – (Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.79).
15. *Darcy H.* Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon / H. Darcy. – Paris : Dalmont, 1856. – 647 p.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

*E-mail:* abomba@mail.ru

as024@ua.fm

*Надійшла 02.07.2009*

**Бомба А. Я., Каштан Н. Б.** МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ ИЗ УВЛАЖНИТЕЛЯ В СЛОИСТУЮ ПОЧВУ // *Построен алгоритм численного решения обратных нелинейных краевых задач на квазиконформные отображения в слоистых средах – криволинейных четырехугольных областях, ограниченных линиями течения и эквипотенциальными линиями. На этой основе решена модельная задача на примере работы оросительной системы (системы водоснабжения) с учетом верхнего плодородного слоя почвы – чернозема, проведен расчет поля скорости фильтрации.*

**Bomba A. Ya., Kashtan N. B.** MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF MOVEMENT OF WATER FROM MOISTENING IN THE STRATIFIED SOIL // *The algorithm of numeral decision of inverse nonlinear boundary-value problems on the quasiconformal reflections in the stratified environments – the curvilinear quadrangular areas limited by the lines of flow and equipotential lines was built. On this basis a modelled problem was solved on the example of work of the water systems taking into account the overhead fertile layer of soil – black earth, computation of the field of speed of filtration was conducted.*

Наукове видання

# **ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК**

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 6 (15)**

Відповідальний за випуск

Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2009 р.

Папір офсет. Формат 60/84 1/16.

Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. № / .

Редакційно-видавничий відділ

Рівненського державного гуманітарного університету

Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12