

Рівненський державний гуманітарний університет

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 6 (15)

Рівне-2009

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"
публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. (<i>консультант</i>)
Каштан С.С.	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2009 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

Зміст

Бомба А.Я., Каштан Н.Б. Математичне моделювання процесу руху води із зволожувача в шаруватий ґрунт.....	5
Бомба А.Я., Ярощак С.В. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху границі розділу різнокольорових рідин.....	20
Булавацький В.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів за складних гідрогеологічних умов	36
Гребеннік І.В. Оптимізація деяких класів інтервальних відображень на інтервальній множині перестановок	44
Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди.....	59
Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А. Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановка	72
Мандзак Т.І., Савула Я.Г. Застосування експоненційних і поліноміальних апроксимацій у числовому аналізі задач адвекції-дифузії	87
Петрик М.Р., Михалик Д.М. Нелінійна модель і аналіз фільтраційного відтиску з урахуванням перетоків між вологомісткими частинками і порами середовища	96
Півень В.Ф. Крайові задачі двовимірної фільтрації в анізотропному шарі ґрунту.....	110
Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням малої тримолекулярної реакції забруднюючих речовин.....	122

Сафоник А.П. Нелінійне математичне моделювання магнітних фільтрів з урахуванням зворотного впливу	137
Турбал Ю.В., Клап А.В. Про характер траєкторій малих збурень типу δ -солітонів для рівнянь газової динаміки галактик	144
Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Новий числовий метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь	156
Фурсачик О. А. Обернені сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" для двозв'язних областей	169
Цегелик Г.Г., Мельничин А.В. Математичне моделювання та оптимізація доступу до інформації індексно-послідовних файлів баз даних	179
Янчук П.С. Ряди Фур'є за квазіспектральними системами поліномів	197

Хроніка

Савич В.О., Соколовська О.П. Анатолій Асірович Гольдберг ..	212
--	-----



Каталог статей Волинського математичного вісника з 1994 р. до 2009 р.	217
--	-----

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Бомба А. Я., Ярощак С. В.

**МЕТОД КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У НАФТОГАЗОВИХ
ПЛАСТАХ: ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІКИ РУХУ ЛІНІЇ РОЗДІЛУ
РІЗНОКОЛЬОРОВИХ РІДИН**

Розроблено алгоритм числового розв'язання обернених модельних задач на конформні відображення для моделі типу «нагнітальна та експлуатаційна свердловини» у горизонтальному пласті, що автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу, частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема, час повного обводнення експлуатаційної свердловини).

Вступ. Процес видобутку нафти та газу є складним як з технологічної сторони так і із економічної, адже нераціональна розробка родовищ тягне за собою великі витрати, що звісно не є бажаним, тому постає проблема раціоналізації процесу видобутку сировини та мінімізації фінансових витрат. Одним із способів досягнення цього є створення з наступним використанням, або ж використання існуючих математичних моделей процесів, що відбуваються в нафтогазових пластах та розрахунку на їх основі характеристик процесу, що дозволяють оптимізувати виробництво.

Так, у роботах [1 – 5] запропоновано метод розв'язання обернених крайових задач на побудову динамічних сіток потенціальних і квазі-потенціальних полів та полів швидкостей із паралельним розрахунком інших характеристик (витрат, перетоків тощо) для обмежених еквіпотенціальними лініями тризв'язних областей – пластів з двома свердловинами та зовнішнім контуром живлення. У цій роботі йдеться про алгоритм числового розв'язання обернених модельних задач на конформні відображення для моделі нагнітальна та експлуатаційна свердловини

(НЕС) у горизонтальному пласті, що автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу, частки витіснюючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема час повного обводнення експлуатаційної свердловини).

Модель НЕС в ізотропних однорідних нафтогазових пластах. Розглянемо в деякій тризв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій трьома гладкими замкненими контурами: $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ (або $L_* = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$), $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ (або $L^* = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), 0 \leq t < 2\pi\}$) – внутрішні, $L_0 = \{z : f(x, y) = 0\}$ (або $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t), y = y_0(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ – зовнішній, процес руху частинок (фільтрації в пористому пласті), який описується за допомогою рівняння руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad} \varphi$ (закон Дарсі) та рівняння нерозривності $\text{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$ – швидкість руху частинок, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{L_0} = 0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної кривої), κ – коефіцієнт фільтрації (для зручності викладок покладемо $\kappa = 1$).

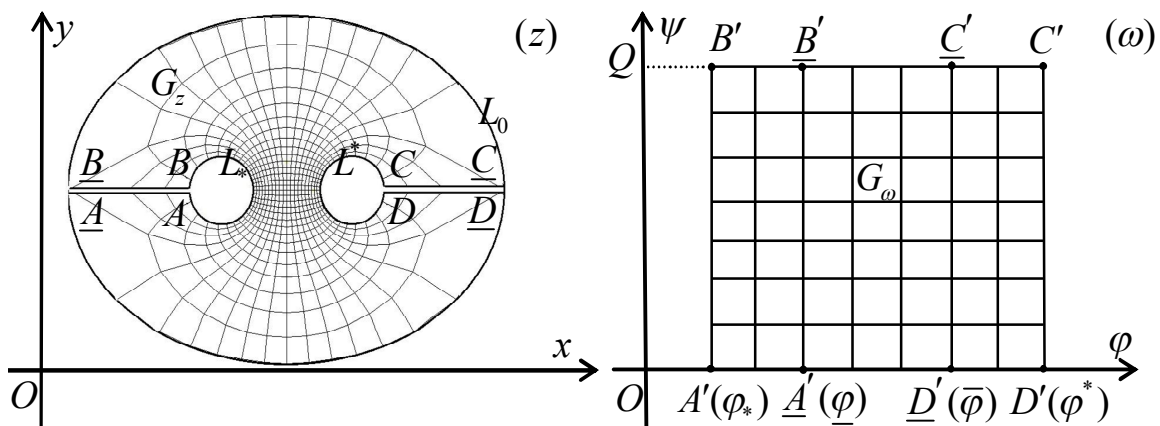


Рис. 1 Фізична область та відповідна їй область комплексного потенціалу

Ввівши комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* вздовж ліній розділу течії (через \underline{AA} та \underline{BB} , \underline{CC} та \underline{DD} на рис. 1 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізів, де $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*)$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0)$ – точки «призупинки» потоку, $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$) приходимо до відповідної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [9] утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомими параметрами Q (повна витрата); $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ (потенціали в шуканих точках призупинки – відповідно «розходження» та «сходження» течії); (x_0^*, y_0^*) , (x_*^0, y_*^0) ; (x_*, y_*) , (x^*, y^*) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi|_{AB} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ \nu(x_0^*, y_0^*) &= 0, \quad \nu(x_*^0, y_*^0) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $Q = \oint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy$, $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$.

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного потенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на конформне відображення обернену до неї.

Обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області

G_z до G_ω) функції течії при невідомих Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, та розрізах Γ_* , Γ^* запишуться у вигляді:

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \underline{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (4)$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad (5)$$

$$v(x(\underline{\varphi}, \psi), y(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, \quad v(x(\bar{\varphi}, \psi), y(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \psi = \{0, Q\}.$$

Маючи функцію течії $z = z(\omega)$ та виділивши її дійсну і уявну частини $x = \operatorname{Re} z(\omega)$, $y = \operatorname{Im} z(\omega)$, знаходимо швидкість $\vec{v} = \overline{\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^{-1}}$

$$(v_x = \frac{1}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{1}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad J(\varphi, \psi) = x'_\varphi y'_\psi - x'_\psi y'_\varphi).$$

Час t проходження частинкою шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ вздовж лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$ знаходимо за формулою [6–8]

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi}, \quad (6)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, σ - пористість ґрунту (вважатимемо, що пористість обчислюється за формулою $\sigma = ak$, де a – деяке додатне дійсне число). Використовуючи (6), знаходимо положення лінії розділу $\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, зокрема, час початку заводнення $\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$ та повного

затоплення $\Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$ експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що $\bar{\psi}$ приймає одне із двох значень – 0 або Q , а у випадку зображеної на рис. 1 симетрії течії маємо $\bar{\psi} = Q/2$,

$$\max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi) = \Phi(\varphi^*, 0) = \Phi(\varphi^*, Q).$$

Різницевий аналог. Введемо в області G_ω рівномірну ортогональну

сітку $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta_i\varphi, \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}$ при $i = \overline{0, n_1}$;

$$\varphi_i = \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta_i\varphi, \quad \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1} \quad \text{при} \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2};$$

$$\varphi_i = \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta_i\varphi, \quad \Delta_i\varphi = \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1} \quad \text{при} \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n};$$

$\psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, j = \overline{0, m}; \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi}, l = \overline{1, 3}$ }, де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$;

$n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ , γ_l – конформні інваріанти.

Рівняння (5) у середині сіткової області G_ω і розрізах Γ_*, Γ^* , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) апроксимуємо наступним чином [1, 5, 10]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_l^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma_l^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_l^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma_l^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \\ i = \overline{1, n_1}, l = 1, j = \overline{1, m-1}, \\ i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n-1}, l = 3; \end{cases} \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2}) \times \\ \times (y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \end{array} \right. \quad (9)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = m\Delta\psi$, де $\Delta\psi = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta\varphi_l}{\gamma_l}$, величини γ_l – одержуємо на підставі умови «конформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\ \beta_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

У процесі ітераційного розв'язку задачі невідомі $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ шукаємо за формулами: $\underline{\varphi} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi\gamma_1$, $\bar{\varphi} = \varphi^* - (n_3 + 1)\Delta\psi\gamma_3$.

Згідно з (6) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж j -тої лінії течії від i_* -ї до

$$i_*^* - \bar{i} \text{ еквіпотенціалей: } t_{j(i_*, i_*^*)} = a \sum_{i=i_*}^{i_*^*} \frac{k \Delta_i \varphi}{v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))}, \quad j = \overline{0, m},$$

$(i_*, i_*^*) = \overline{0, n}$ (зокрема, $t_{j(0, n)}$ – час руху частинки рідини від нагнітальної свердловини до експлуатаційної).

Алгоритм розв'язку різницевої задачі (7) – (10) представимо у вигляді наступної послідовності кроків:

1. Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z неявно $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f(x, y) = 0\}$ або, що зручніше для реалізації на ЕОМ, параметрично; кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного потенціалу G_ω деякої сіткової області G_ω^γ (параметри n_1, n_2, n_3 , та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_i , $i = 1, 2$ та рівень конформності δ_* відображення.
2. Задаємо початкове наближення шуканих координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$ та $y_{i,j}^{(0)}$, так щоб виконувалися умови (8).

3. Задаємо початкові наближення шуканих координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ та початкове наближення витрати $Q^{(0)}$ та

$$\underline{\varphi}^{(0)} = \varphi_* + \frac{\varphi^* - \varphi_*}{3}, \quad \overline{\varphi}^{(0)} = \varphi^* - \frac{\varphi^* - \varphi_*}{3} \quad (Q^{(0)} = \frac{m}{3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta \varphi_l}{\gamma_l}), \text{ де } \gamma_l \text{ шукаємо}$$

за формулами (10)).

4. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ динамічної сітки за формулами, отриманими шляхом розв'язання (7) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації [10] використаємо лише перший ітераційний крок, при цьому врахуємо періодичність шуканих функцій).

5. «Підправляємо» граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов Коші-Рімана (9) (умови ортогональності граничних дотичних та приграничних нормальних векторів [1 - 5]).
6. Знаходимо нове наближення параметрів Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, використовуючи значення конформного інваріанту, знайдене за формулами (10).
7. Якщо зміна невідомої величини Q за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то переходимо до п. 4.
8. Знаходимо величини зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$. Якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до п. 4.
9. Оцінюємо ступінь конформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \gamma_l (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|, \quad l = \overline{1,3}.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^l (при цьому намагаємося співвідношення між параметрами n_1 , n_2 , n_3 , m вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки G_ω^l до квадратної) та переходимо до п. 2, інакше – кінець роботи алгоритму: задача розв’язана із необхідною точністю.

Формули для знаходження поля швидкостей для внутрішніх, граничних (включаючи розрізи) вузлів апроксимуємо наступним чином:

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{i,j}} \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1} \right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1,$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = (\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{i,m}} \left(y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1} \right),$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3;$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{0,j}} \left(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1} \right), \quad l = 1, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,j} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{n,j}} \left(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1} \right), \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{1}{\Delta\psi J_{i,m}} \left(y_{i,m} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,m} \right), \quad l = 2,$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,m} - y_{i,m-1}) - (x_{i,m} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = \frac{1}{\Delta\psi J_{i,0}} \left(y_{i,1} - y_{i,0}, x_{i,0} - x_{i,1} \right), \quad i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1},$$

$$J_{i,0} = \frac{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{n_1+1, j} &= \frac{1}{2\Delta\psi J_{n_1+1, j}} \left(y_{n_1+1, j+1} - y_{n_1+1, j-1}, x_{n_1+1, j-1} - x_{n_1+1, j+1} \right), \\
 J_{n_1+1, j} &= \frac{(x_{n_1+2, j} - x_{n_1+1, j})(y_{n_1+1, j+1} - y_{n_1+1, j-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
 &\quad - \frac{(x_{n_1+1, j+1} - x_{n_1+1, j-1})(y_{n_1+2, j} - y_{n_1+1, j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}, \quad j = \overline{1, m-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{n_1+n_2, j} &= \frac{1}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2, j}} \left(y_{n_1+n_2, j+1} - y_{n_1+n_2, j-1}, x_{n_1+n_2, j-1} - x_{n_1+n_2, j+1} \right), \\
 J_{n_1+n_2, j} &= \frac{(x_{n_1+n_2, j} - x_{n_1+n_2-1, j})(y_{n_1+n_2, j+1} - y_{n_1+n_2, j-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
 &\quad - \frac{(x_{n_1+n_2, j+1} - x_{n_1+n_2, j-1})(y_{n_1+n_2, j} - y_{n_1+n_2-1, j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}, \quad j = \overline{1, m-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{0,0} = (v_x, v_y)_{0,m} &= \frac{1}{2\Delta\psi J_{0,0}} \left(y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1} \right), \\
 J_{0,0} &= \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{n,0} = (v_x, v_y)_{n,m} &= \frac{1}{2\Delta\psi J_{n,0}} \left(y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1} \right), \\
 J_{n,0} &= \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{n_1+1,0} = (v_x, v_y)_{n_1+1,m} &= \frac{1}{2\Delta\psi J_{n_1+1,0}} \times \\
 &\quad \times \left(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1}, x_{n_1+1,m-1} - x_{n_1+1,1} \right), \\
 J_{n_1+1,0} &= \frac{(x_{n_1+2,0} - x_{n_1+1,0})(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
 &\quad - \frac{(x_{n_1+1,1} - x_{n_1+1,m-1})(y_{n_1+2,0} - y_{n_1+1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v_x, v_y)_{n_1+n_2,0} &= (v_x, v_y)_{n_1+n_2,m} = \frac{1}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,0}} \times \\
 &\times \left(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1}, x_{n_1+n_2,m-1} - x_{n_1+n_2,1} \right), \\
 J_{n_1+n_2,0} &= \frac{(x_{n_1+n_2,0} - x_{n_1+n_2-1,0})(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2} - \\
 &- \frac{(x_{n_1+n_2,1} - x_{n_1+n_2,m-1})(y_{n_1+n_2,0} - y_{n_1+n_2-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_2}.
 \end{aligned}$$

Комп'ютерна реалізація алгоритму та приклади числових розрахунків. Вище описаний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Для перевірки його коректності проведена серія числових експериментів на тестовому прикладі, коли $x_*(t) = 0.3 \cos(t) - 0.6$, $y_*(t) = 0.3 \sin(t)$, $x^*(t) = 0.3 \cos(t) + 0.6$, $y^*(t) = 0.3 \sin(t)$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $a = 1$, $x_0(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(2t))$, $y_0(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(2t))$. Відповідна гідродинамічна сітка у випадку $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 7 \times 23 \times 7 \times 90$ зображена на рис. 2, де жирними лініями виділено границю розділу різнокольорових рідин в наступні моменти часу: а) $t = \Phi(\varphi_*, \psi) = 0$ (відповідає початку нагнітання води в пласт); б) $t = 0.17$ ($0 < t < \Phi(\varphi^*, \underline{\psi})$, що характеризує деякий «проміжний» випадок розміщення лінії розділу); в) $t = \Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = 0.37$ (час початку «заводнення» експлуатаційної свердловини); г) $t = 0.95$ (час, коли потоки до експлуатаційної свердловини нагнітаючої та пластової рідин є рівними); д)-е) $t = 8.63$, $t = 23.59$, $t = 150$ ($\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) < t < \Phi(\varphi^*, \bar{\psi})$); ж) $t = \Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = 187.89$ (час повного «заводнення» експлуатаційної свердловини).

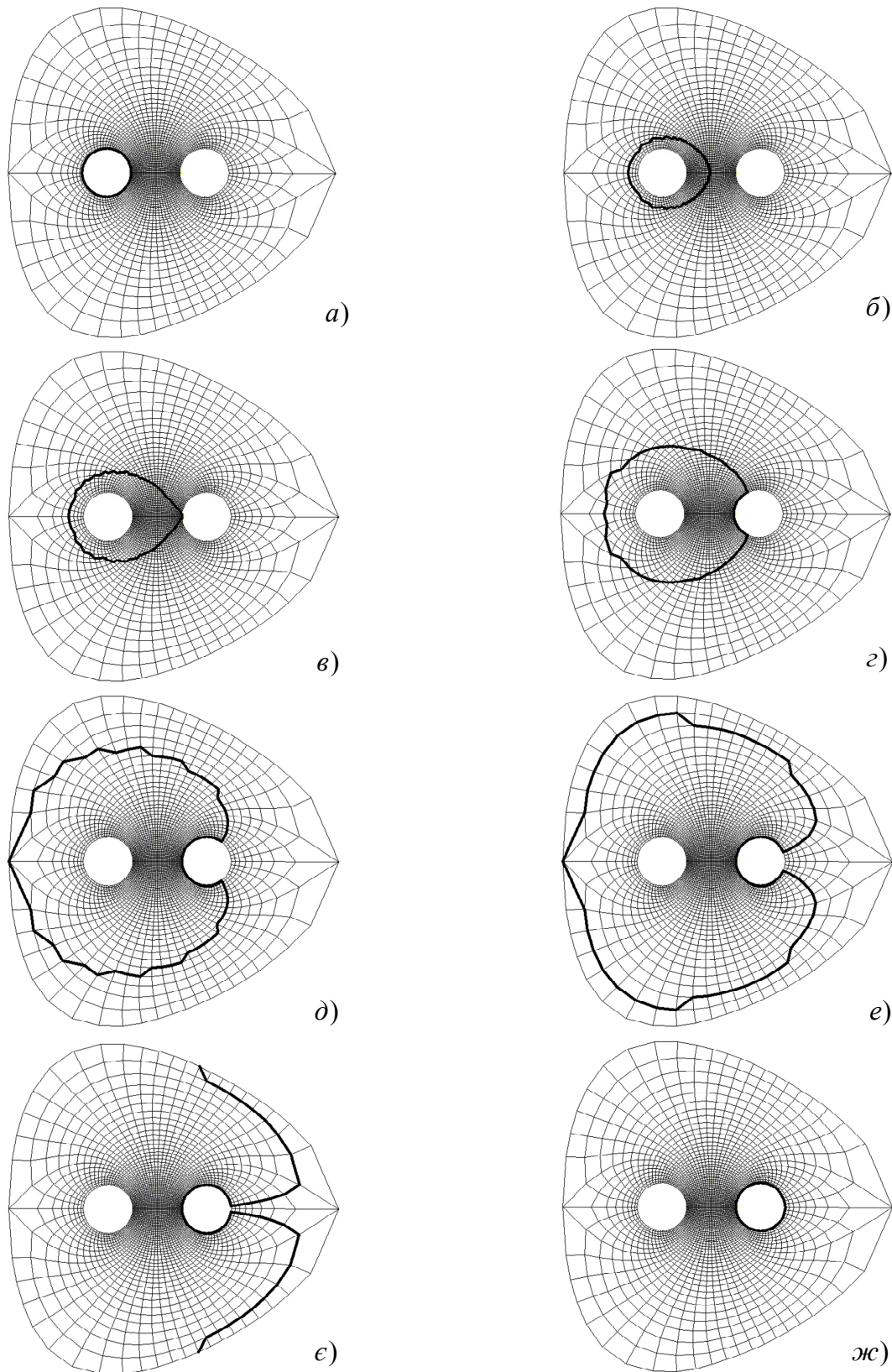


Рис. 2. Динамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин для різних моментів часу в пластовій системі «нагнітальна та експлуатаційна свердловини»

На рис. 3 зображено залежність частки витісняючої (нагнітальної) рідини у загальній фільтраційній витраті експлуатаційної свердловини від часу руху. Бачимо, що в даному випадку вже в момент часу $t = 19.30$ до експлуатаційної свердловини потрапляє суміш, 90% якої становить витісняюча рідина, а це в свою чергу означає, що подальша експлуатація свердловини економічно не вигідна і необхідно її зупинити, або ж провести водоізоляційні роботи [11].

На рис. 4 проілюстровано залежність часу $T_j = \Phi(\varphi^*, \psi_j)$ проходження частинкою шляху від нагнітальної до експлуатаційної свердловини відносно до конкретної лінії течії ψ_j ($j = \overline{0, m}$).

Одержані значення витрати Q та потенціалів $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ для різних співвідношень параметрів розбиття (n_1, n_2, n_3, m) області занесені до табл 1.

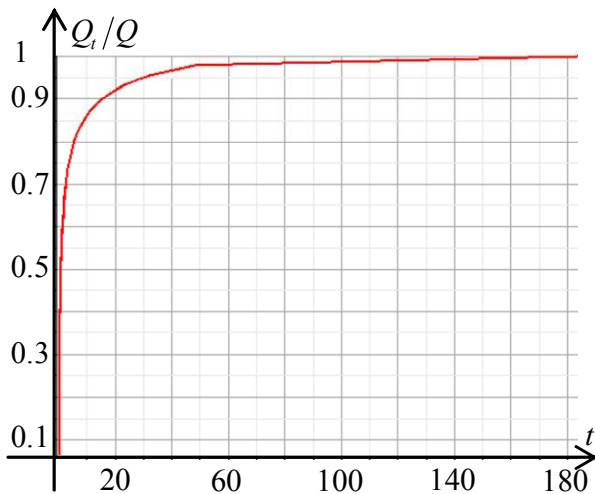


Рис. 3. Залежність частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті від часу

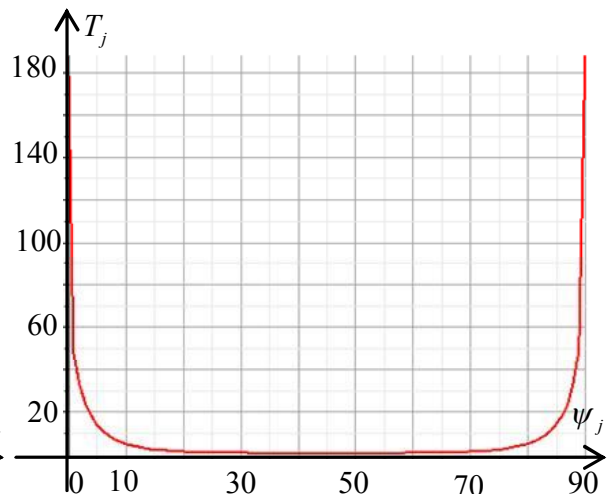


Рис. 4. Залежність часу T_j проходження частинок від нагнітальної свердловини до експлуатаційної відносно ψ_j

Табл. 1

n_1	n_2	n_3	m	Q	φ	$\bar{\varphi}$
7	23	7	90	2.1583	0.1874	0.8146
10	26	10	100	2.1589	0.2054	0.7956
15	36	15	150	2.1594	0.2095	0.7889
20	46	20	200	2.1591	0.2115	0.7851

Висновки. Розроблено алгоритм числового розв'язання обернених модельних задач на конформні відображення для моделі типу нагнітальна та експлуатаційна свердловини у горизонтальному пласті, який автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу, точок призупинки («розходження» та «сходження» течії), частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема час повного обводнення експлуатаційної свердловини). Особливо актуальним є можливість встановлення часу, коли заводненість пласта перевищує встановлену норму, а це в свою чергу означає, що подальша експлуатація свердловини економічно не вигідна і необхідно її зупинити, або ж провести водоізоляційні роботи [11].

1. Бомба А. Я. Наближення розв'язків одного класу обернених крайових задач на конформні відображення в багатозв'язних областях з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – 46, №4. – С. 155-162.
2. Пригорницький Д. О. Алгоритм чисельного розв'язання одного класу нелінійних модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей / Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 1 (10). – Рівне : РДГУ, 2003. – С. 107-117.
3. Бомба А. Я. Чисельне розв'язування одного класу обернених крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Київського університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 155-162.

4. Пригорницький Д. О. Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей / Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 2 (11). – Рівне : РДГУ, 2004. – С. 196-211.
5. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
6. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. – М. : Недра, 1993. – 416 с.
7. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 628 с.
8. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 288 с.
9. Лаврентьев М. А. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1973. – 736 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
11. Газизов А. Ш. Повышение эффективности разработки нефтяных месторождений на основе ограничения движения вод в пластах / А. Ш. Газизов, А. А. Газизов. – М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 1999. – 285 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: abomba@ukr.net

yaroschak@mail.ru

Надійшла 01.09.2009

Бомба А. Я., Ярошак С. В. МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЫТЕСНЕНИЯ В НЕФТЕГАЗОВЫХ ПЛАСТАХ: ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИИ РАЗДЕЛА РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ // *Разработан алгоритм численного решения обратных модельных задач на конформные отображения для модели типа «нагнетательная и эксплуатационная скважины» в горизонтальном пласте, который автоматически разрешает проблему построения равномерной гидродинамической сетки, нахождения положения линии раздела разноцветных жидкостей, в разные моменты времени, части вытесняющей жидкости (воды), в общей фильтрационной затрате (в частности, время полного обводнения эксплуатационной скважины).*

Bomba A. Ya., Yaroschak S. V. METHOD OF CONFORMAL MAPPING FOR MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF DISPLACEMENT IN THE OIL-BEARING FORMATIONS: PREDICTION DYNAMICS TRAFFIC LINE ALBUM MULTICOLORED LIQUIDS // *An algorithm for the numerical solution of inverse modeling problems on conformal mapping for injection and operational model horizontal wells in the reservoir, which automatically solves the problem of constructing a uniform hydrodynamic grid, finding of the separation line of colorful liquids, at different times, part of the displacing fluid (water), a total filtration costs (including time for a complete irrigation development well).*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 6 (15)

Відповідальний за випуск

Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2009 р.

Папір офсет. Формат 60/84 1/16.

Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. № / .

Редакційно-видавничий відділ

Рівненського державного гуманітарного університету

Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12