

**Рівненський державний гуманітарний університет**

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 6 (15)**

**Рівне-2009**

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"**  
публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Я.Б.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. ( <i>консультант</i> )
Каштан С.С.	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2009 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

## Зміст

<b>Бомба А.Я., Каштан Н.Б.</b> Математичне моделювання процесу руху води із зволожувача в шаруватий ґрунт.....	5
<b>Бомба А.Я., Ярощак С.В.</b> Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху границі розділу різнокольорових рідин.....	20
<b>Булавацький В.М.</b> Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів за складних гідрогеологічних умов .....	36
<b>Гребеннік І.В.</b> Оптимізація деяких класів інтервальних відображень на інтервальній множині перестановок .....	44
<b>Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О.</b> Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди.....	59
<b>Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А.</b> Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановка .....	72
<b>Мандзак Т.І., Савула Я.Г.</b> Застосування експоненційних і поліноміальних апроксимацій у числовому аналізі задач адвекції-дифузії .....	87
<b>Петрик М.Р., Михалик Д.М.</b> Нелінійна модель і аналіз фільтраційного відтиску з урахуванням перетоків між вологомісткими частинками і порами середовища .....	96
<b>Півень В.Ф.</b> Крайові задачі двовимірної фільтрації в анізотропному шарі ґрунту.....	110
<b>Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В.</b> Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням малої тримолекулярної реакції забруднюючих речовин.....	122

<b>Сафоник А.П.</b> Нелінійне математичне моделювання магнітних фільтрів з урахуванням зворотного впливу .....	137
<b>Турбал Ю.В., Клап А.В.</b> Про характер траєкторій малих збурень типу $\delta$ -солітонів для рівнянь газової динаміки галактик .....	144
<b>Фундак Л.І., Цегелик Г.Г.</b> Новий числовий метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь .....	156
<b>Фурсачик О. А.</b> Обернені сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" для двозв'язних областей .....	169
<b>Цегелик Г.Г., Мельничин А.В.</b> Математичне моделювання та оптимізація доступу до інформації індексно-послідовних файлів баз даних .....	179
<b>Янчук П.С.</b> Ряди Фур'є за квазіспектральними системами поліномів .....	197

### Хроніка

<b>Савич В.О., Соколовська О.П.</b> Анатолій Асірович Гольдберг ..	212
--	-----



<b>Каталог статей Волинського математичного вісника з 1994 р. до 2009 р.</b> .....	217
--	-----

УДК 517.95

**Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О.**

**ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА  
ПРОСТОРОВІ КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ  
ОБЛАСТЕЙ ІЗ РОЗРІЗОМ НА ПРЯМОКУТНІ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДИ**

*Побудовано алгоритм знаходження розв'язку задачі на просторове конформне відображення двозв'язної області, обмеженої двома еквіпотенціальними поверхнями та двома поверхнями течії, із розрізом на відповідний прямокутний паралелепіпед.*

**Вступ.** Для розв'язування плоских задач усталеної фільтрації М. М. Павловським був запропонований і теоретично обґрунтований метод конформних відображень [1, 2], який використовували та розвивали далі у своїх роботах П. Я. Полубаринова-Кочина, В. І. Аравін, С. М. Нумеров, В. С. Істоміна, М. М. Веригін, М. А. Лаврентьєв, Л. І. Волковиський, В. І. Лаврик, А. Я. Бомба та інші. Також вагомий внесок у розвиток теорії руху рідин зробили М. Є. Жуковський, П. Ф. Фільчаков, А. Я. Олійник, М. М. Герсеванов, Р. Коллінз, М. Г. Бернардинер, С. Ф. Авер'янов, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека, В. М. Булавацький, В. Н. Монахов, В. Г. Голубєв.

Для розв'язування просторових задач, які виникають при дослідженні процесів фільтрації забруднених вод у пористих середовищах, нами у [3] запропонований числовий алгоритм розв'язання обернених крайових задач на конформні відображення криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, на відповідні прямокутні, який у цій роботі модифіковано для розв'язання задач на конформне відображення двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та двома поверхнями течії, із розрізом на відповідні прямокутні паралелепіпеди.

**Постановка задачі.** Нехай маємо деяку двозв'язну криволінійну область  $G_z$  ( $\mathbf{z}=(x, y, z)$ ), обмежену двома еквіпотенціальними гладкими поверхнями  $S_* = \{\mathbf{z}: f_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $S^* = \{\mathbf{z}: f^*(x, y, z) = 0\}$  і двома поверхнями течії  $S_{**} = \{\mathbf{z}: f_{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $S^{**} = \{\mathbf{z}: f^{**}(x, y, z) = 0\}$  (рис. 1). Для області  $G_z$  розглянемо модельну задачу, яка описує процес фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0, \quad (2)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  та  $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$  – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$ ),  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації ( $\kappa = \text{const}$ ),  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

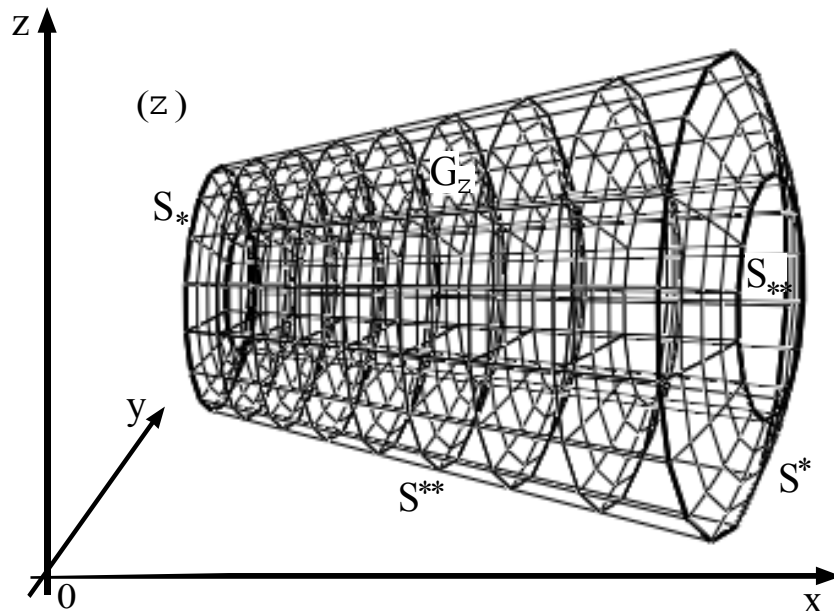


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$

Шляхом фіксації на поверхні  $S_{**}$  деякої лінії течії  $AD$  та виконання умовного розрізу  $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$  вздовж відповідної поверхні течії  $ADD_*A_*$  (через  $ADD_*A_*$  та  $BCC_*B_*$  позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (1) – (2) зводиться до розв’язування відповідної задачі (3) – (4) в криволінійному паралелепіпеді  $ABCD A_* B_* C_* D_*$  (однозв’язній області  $G_z \setminus \Gamma$ ), обмеженій двома еквіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$  та чотирма поверхнями течії  $ABCD = \{z : f_{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z : f^{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z : \hat{f}(x, y, z) = 0\}$ , які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умови непроникності вздовж розрізу  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0$  (рис. 2):

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0; \quad (3)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi^*, \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0. \quad (4)$$

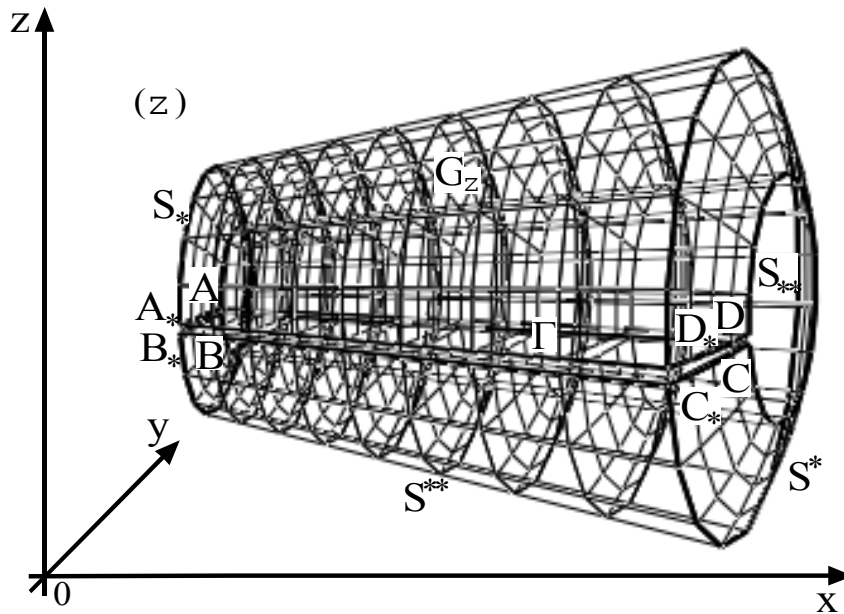


Рис. 2. Просторова фізична область  $G_z$  з розрізом  $\Gamma$

Тоді, аналогічно [3], ввівши функції  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжені із функцією  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) і  $\mu = \mu(x, y, z)$  такі, що  $grad \varphi = \mu \cdot grad \psi \times grad \eta$  [4], задачу (3) – (4) замінимо більш загальною задачею (5) – (6) на просторове конформне відображення однозв’язної області  $G_z \setminus \Gamma$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$  (рис. 3), де  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – потік через довільний поперечний переріз течії:

$$\begin{cases} \varphi_x = \mu \cdot (\psi_y \eta_z - \psi_z \eta_y), \\ \varphi_y = \mu \cdot (\psi_z \eta_x - \psi_x \eta_z), \\ \varphi_z = \mu \cdot (\psi_x \eta_y - \psi_y \eta_x), \\ \Delta \varphi = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \quad \eta|_{ABCD} = 0, \quad \eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*. \end{cases} \quad (6)$$

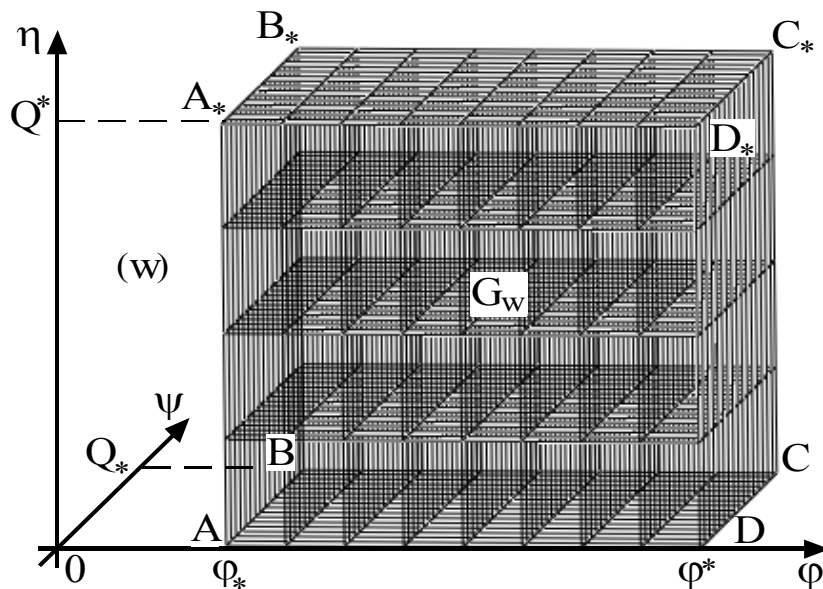


Рис. 3. Просторова область комплексного потенціалу  $G_w$



У випадку, коли функція  $\widehat{f}(x, y, z)$ , яка визначає розріз, є наперед відомою, обернена до (5) – (6) задача на конформне відображення  $G_w \rightarrow G_z \setminus \Gamma$  (при невідомих значеннях параметрів  $Q_*$ ,  $Q^*$ ) має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} x_\varphi &= \frac{y_\psi z_\eta - z_\psi y_\eta}{\mu}, y_\varphi = \frac{z_\psi x_\eta - x_\psi z_\eta}{\mu}, z_\varphi = \frac{x_\psi y_\eta - y_\psi x_\eta}{\mu}, \\ \mu_\varphi \cdot &\left( (y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi) \cdot x_\varphi + (x_\eta z_\psi - x_\psi z_\eta) \cdot y_\varphi + \right. \\ &+ (x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi) \cdot z_\varphi \left. \right) + \mu_\psi \cdot \left( (y_\eta z_\varphi - y_\varphi z_\eta) \cdot x_\varphi + \right. \\ &+ (x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi) \cdot y_\varphi + (x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta) \cdot z_\varphi \left. \right) + \\ &+ \mu_\eta \cdot \left( (y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi) \cdot x_\varphi + (x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi) \cdot y_\varphi + \right. \\ &+ (x_\psi y_\varphi - x_\varphi y_\psi) \cdot z_\varphi \left. \right) = 0; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) &= 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) &= 0, \\ \widehat{f}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) &= 0, \\ \widehat{f}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) &= 0, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) &= 0, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

і розв'язується аналогічно [3]. У протилежному випадку система (7) залишиться без змін, а рівняння (8) слід замінити на таку систему:

$$\left\{ \begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) &= 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) &= 0, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) &= 0, \\ f^{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) &= 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, 0, \eta) &= z(\varphi, Q_*, \eta), \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x_\psi, \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y_\psi, \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z_\psi. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

**Числове розв'язання.** В області  $G_w$ , аналогічно [3], будуюмо рівномір-

ну ортогональну сітку  $G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, n+1}; \right.$

$\psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, m+1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l+1}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n+1}, \quad \Delta\psi =$

$= \frac{Q_*}{m+1}, \quad \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta}; \quad n, \quad m, \quad l \in N \}$  (див. рис. 3). Через

$x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$  позначи-

мо координати відповідних вузлів  $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$  сітки у  $G_z \setminus \Gamma$ , а

через  $\mu_{i,j,k} = \mu(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$  – значення невідомої функції  $\mu$  у них.

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепі-  
педа  $G_w$  на криволінійну область  $G_z \setminus \Gamma$  (при відповідності кутових  
точок) запишемо різницеві аналоги рівнянь (7) у рівномірній сітковій  
області  $G_w^\gamma$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ \mu_{i,j,k} = \frac{\mu_{i-1,j,k} \cdot s_{i,j,k}^1 + \mu_{i,j-1,k} \cdot s_{i,j,k}^2 + \mu_{i,j,k-1} \cdot s_{i,j,k}^3}{s_{i,j,k}^1 + s_{i,j,k}^2 + s_{i,j,k}^3}, \\ i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{\gamma}{4 \cdot \mu_{i,j,k}} \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ \mu_{i,j,k} = \frac{\mu_{i+1,j,k} \cdot s_{i,j,k}^1 + \mu_{i,j+1,k} \cdot s_{i,j,k}^2 + \mu_{i,j,k+1} \cdot s_{i,j,k}^3}{s_{i,j,k}^1 + s_{i,j,k}^2 + s_{i,j,k}^3}, \\ i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (10')$$

де

$$\begin{aligned} s_{i,j,k}^1 &= (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ &\left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \times \right. \\ &\times (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \left. \right) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \times \\ &\times \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ s_{i,j,k}^2 &= (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \left( (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \right. \\ &\left. - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \left( (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \times \right. \\ &\times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \left. \right) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \times \\ &\times \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \right), \\ s_{i,j,k}^3 &= (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \left( (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ &\left. - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \right) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \times \right. \\ &\times (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \left. \right) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \times \\ &\times \left( (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \right). \end{aligned}$$

Крайові умови, які визначають фізичну область  $G_z \setminus \Gamma$ , апроксимуємо точково-різницевиими рівняннями

$$\left\{ \begin{array}{l} f_* (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f^* (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f_{**} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f^{**} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}. \end{array} \right. \quad (11)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, які у сітковій області  $G_w^\gamma$  записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*x} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{f'_{*y} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{*z} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\ \frac{f^{**}_x (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} &= \frac{f^{**}_y (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f^{**}_z (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\ \frac{f'_{**x} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{f'_{**y} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{**z} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\ \frac{f^{**'}_x (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} &= \frac{f^{**'}_y (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f^{**'}_z (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\ & i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок різницевої задачі (10) – (12) знаходимо шляхом поетапної параметризації конформного інваріанту  $\gamma$  криволінійного паралелепіпеда  $G_z \setminus \Gamma$ , координат граничних та внутрішніх вузлів шуканої гідродинамічної сітки  $G_z^\gamma$ , значень невідомої функції  $\mu$  у вузлах цієї сітки за

алгоритмом, який детальніше описаний в [3], із врахуванням почергового використання систем (10) і (10'). При цьому, нами був введений додатковий параметр релаксації  $0 < \alpha < 2$  для можливості впливати на швидкість збіжності алгоритму:

$$u^{(p+1)} = \alpha \cdot \hat{u}^{(p+1)} + (1 - \alpha) \cdot u^{(p)},$$

де  $u^{(p)}$ ,  $u^{(p+1)}$  – відповідно вектори  $p$ -го та  $(p+1)$ -го наближення розв'язку задачі (7), (9);  $\hat{u}^{(p+1)}$  – вектор, який обчислюється за ітераційними формулами, які отримуються з (10).

На основі рівняння руху (1) та умов (2) величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки  $G_z$  знаходимо за такими різницевиими формулами:

$$v_{i,j,k} = \kappa \cdot \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x_{i,j,k}} = 2 \cdot \Delta\varphi \cdot \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) / J_{i,j,k},$$

$$v_{y_{i,j,k}} = 2 \cdot \Delta\varphi \cdot \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) / J_{i,j,k},$$

$$v_{z_{i,j,k}} = 2 \cdot \Delta\varphi \cdot \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) / J_{i,j,k},$$

$$\begin{aligned} J_{i,j,k} = & (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + \\ & + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + \\ & + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\ & - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\ & - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\ & - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}). \end{aligned}$$

Вирази для знаходження швидкостей у граничних вузлах сітки на поверхнях  $S_*$ ,  $S^*$ ,  $S_{**}$  та  $S^{**}$  знаходяться аналогічно [3].

**Програмна реалізація алгоритму та числові приклади.** Комп'ютерна збіжність та точність описаного вище алгоритму числового розв'язання різницевої задачі (10) – (12) перевірялася на тестовому прикладі для області  $G_z^1$ , обмеженої поверхнями  $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ ,  $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$ ,  $f_{**}(x, y, z) = 32.163 \cdot x^2 - y^2 - z^2$ ,  $f^{**}(x, y, z) = 7.548 \cdot x^2 - y^2 - z^2$  при  $\varphi_* = 0.1$ ,  $\varphi^* = 0.2$ ,  $\kappa = 1$ . На рис. 4 зображено отриману в результаті обчислень динамічну сітку в  $G_z$ :  $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / n$ ,  $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j^{df} = (Q_* \cdot j) / m$ ,  $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k^{df} = (Q^* \cdot k) / l$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $k = \overline{0, l}$  при  $n = 30$ ,  $m = 44$ ,  $l = 6$  (параметри  $n$ ,  $m$ ,  $l$  вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Результати розв'язання подані у табл. 1, де  $\Delta Q$  – абсолютна похибка величини  $Q$ ,  $\delta$  – максимум нев'язки рівнянь системи (7).

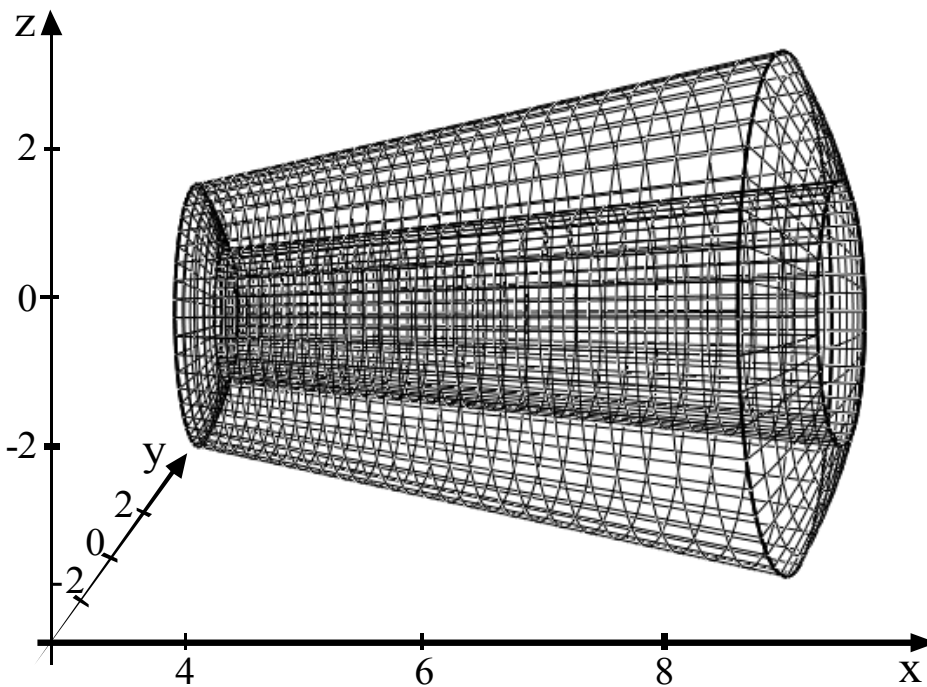


Рис. 4. Динамічна сітка в фізичній області  $G_z^1$

Табл. 1. Результати розв'язання задачі в області  $G_z^1$ 

№	$n$	$m$	$l$	$\varepsilon$	$Q$	$\Delta Q$	$\delta$
1	30	44	6	0.00001	1.037283	0.059340	0.032057
2	45	66	9	0.00001	1.056495	0.040127	0.014973
3	60	88	12	0.00001	1.066311	0.030312	0.008631
4	75	110	15	0.00001	1.072269	0.024354	0.005604
5	105	154	21	0.00001	1.079141	0.017481	0.002907
6	135	198	27	0.00001	1.082989	0.013634	0.001775
7	180	264	36	0.00001	1.086373	0.010250	0.001006
8	240	352	48	0.00001	1.088921	0.007701	0.000569

Результати розв'язання цієї ж задачі у фізичній області  $G_z^2$  складнішої геометрії:  $S_* = \{z : (x + 1.986)^2 + y^2 + z^2 = 395\}$ ,  $S^* = \{z : (x - 3.502)^2 + y^2 + z^2 = 30.121\}$ ,  $S_{**} = \{z : (x^2 - 68x + 256 + y^2 + z^2)^2 + 3600y^2 - 476.9076z^2 = 0\}$ ,  $S^{**} = \{z : (x^2 - 68x + 256 + y^2 + z^2)^2 + 3600y^2 - 111.92833z^2 = 0\}$  при  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1.2$ ,  $\kappa = 1$  подані на рис. 5 та у табл. 2.

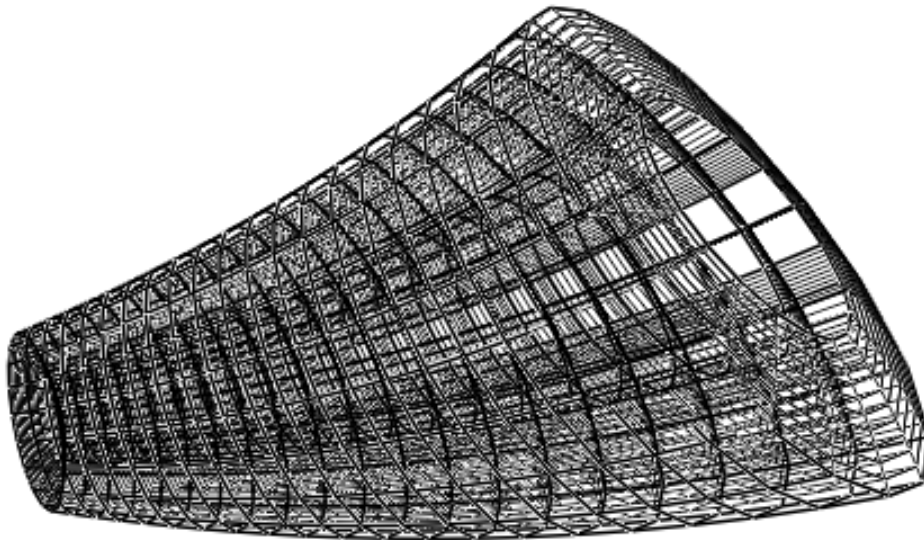
Рис. 5. Динамічна сітка фізичної області  $G_z^2$

Табл. 2. Результати розв'язання задачі в області  $G_z^2$ 

№	$n$	$m$	$l$	$\varepsilon$	$Q$	$\delta$
1	14	40	5	0.00001	0.986558	0.317610
2	21	60	8	0.00001	1.024167	0.142215
3	28	80	10	0.00001	1.039483	0.085349
4	35	100	13	0.00001	1.051634	0.054050
5	42	120	15	0.00001	1.058043	0.038840
6	49	140	18	0.00001	1.063998	0.028222
7	56	160	20	0.00001	1.067503	0.022105
8	63	180	23	0.00001	1.071031	0.017293
9	70	200	25	0.00001	1.073238	0.014247
10	77	220	28	0.00001	1.075569	0.011671
11	84	240	30	0.00001	1.077085	0.009940
12	91	260	33	0.00001	1.078740	0.008403
13	98	280	35	0.00001	1.079846	0.007327
14	105	300	38	0.00001	1.081081	0.006338
15	112	320	40	0.00001	1.081923	0.005624
16	119	340	43	0.00001	1.082880	0.004950
17	126	360	45	0.00001	1.083542	0.004452
18	133	380	48	0.00001	1.084305	0.003973
19	140	400	50	0.00001	1.084840	0.003612

**Висновки і зауваження.**

1. Аналіз отриманих числових результатів (див. табл. 1) свідчить про збіжність послідовності числових розв'язків, отриманих за описаним нами алгоритмом для пропорційно зростаючої кількості вузлів сітки, до точного.
2. Введення у алгоритм релаксаційного параметру  $\alpha$  (за умови вдалого підбору його значення) дозволило суттєво скоротити загальний час знаходження наближеного числового розв'язку задачі.
3. Наведений вище алгоритм для побудови просторових гідродинамічних сіток дозволяє значно полегшити розв'язання просторових задач конвективної дифузії у двозв'язних областях фільтрації завдяки використанню ідеї переходу від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої поверхнями течії і еквіпотенціальними поверхнями, до відповідної області комплексного потенціалу.



1. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод. Собр. сочинений: В 2 т. / Н. Н. Павловский. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2, 771 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-Кочиной П. Я. – Москва : Наука, 1969. – 546 с.
3. Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143.
4. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

*E-mail:* klimyuk@ukr.net

dmitry@prigornitsky.com

*Надійшла 17.06.2009*

**Климюк Ю. Е., Пригорницький Д. А.** ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С РАЗРЕЗОМ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ // *Построен алгоритм нахождения решения задачи на конформное отображение двусвязной области, ограниченной двумя эквипотенциальными поверхностями и двумя поверхностями течения, на соответствующий прямоугольный параллелепипед.*

**Klymyuk Yu. Ye., Prigornitsky D. A.** NUMERICAL SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON SPATIAL CONFORMAL MAPPINGS OF DOUBLY CONNECTED AREAS WITH CUT ONTO RECTANGULAR PARALLELEPIPEDS // *Algorithm of solving of problem on conformal mapping of doubly connected area bounded by two equipotential surface and two surfaces of flow onto corresponding rectangular parallelepiped is designed.*

Наукове видання

# **ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК**

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 6 (15)**

Відповідальний за випуск

Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2009 р.

Папір офсет. Формат 60/84 1/16.

Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. № / .

Редакційно-видавничий відділ

Рівненського державного гуманітарного університету

Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12