Рівненський державний гуманітарний університет

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 6 (15)

Рівне-2009

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2009 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Бомба А.Я., Каштан Н.Б. *Математичне моделювання процесу руху води із зволожувача в шаруватий ґрунт*.................... 5

Бомба А.Я., Ярощак С.В. *Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху границі розділу різнокольорових рідин*.. 20

Булавацький В.М. *Математичне моделювання фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів за складних гідрогеологічних умов* 36

Гребеннік І.В. *Оптимізація деяких класів інтервальних відображень на інтервальній множині перестановок* 44

Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О. *Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди*.. 59

Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А. *Моделювання прикладних задач багатокритеріальними комбінаторними задачами на поліперестановка* 72

Мандзак Т.І., Савула Я.Г. *Застосування експоненційних і поліноміальних апроксимацій у числовому аналізі задач адвекції-дифузії* 87

Петрик М.Р., Михалик Д.М. *Нелінійна модель і аналіз фільтраційного відтиску з урахуванням перетоків між вологомісткими частинками і порами середовища* 96

Півень В.Ф. *Крайові задачі двовимірної фільтрації в анізотропному шарі ґрунту*.. 110

Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В. *Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням малої тримолекулярної реакції забруднюючих речовин*.. 122

Сафоник А.П. *Нелінійне математичне моделювання магнітних фільтрів з урахуванням зворотного впливу* 137

Турбал Ю.В., Клап А.В. *Про характер траєкторій малих збурень типу* δ *-солітонів для рівнянь газової динаміки галактик* 144

Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. *Новий числовий метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь* 156

Фурсачик О. А. *Обернені сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія" для двозв'язних областей* 169

Цегелик Г.Г., Мельничин А.В. *Математичне моделювання та оптимізація доступу до інформації індексно-послідовних файлів баз даних* 179

Янчук П.С. *Ряди Фур'є за квазіспектральними системами поліномів* 197

Хроніка

Савич В.О., Соколовська О.П. *Анатолій Асірович Гольдберг* .. 212

Каталог статей Волинського математичного вісника з 1994 р. до 2009 р. 217

УДК 628.113.2 : 66.067.1 + 517.95

Сафоник А. П.

НЕЛІНІЙНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАГНІТНИХ ФІЛЬТРІВ З УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНОГО ВПЛИВУ

Запропоновано математичну модель процесу магнітного осадження домішок у пористій фільтруючій насадці, яка враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри та змінну швидкість фільтрування. Побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної збуреної задачі типу «конвекція-масообмін».

Вступ. Магнітна очистка води займає особливе місце не тільки серед відомих методів очистки станційної води, але і в комплексній проблемі магнітного розділення води і домішок через специфіку фільтрючих середовищ, що містять дисперсну фазу порівняно низької концентрації й високої дисперсності (у тому числі на рівні золів). Це стосується насамперед режимів магнітного поділу (фільтрування), особливостей фільтруючих насадок і конструкцій електромагнітних пристроїв. Розробкою теоретичних основ фільтрування у магнітних фільтрах і подальшим їх вдосконаленням займалося чимало вчених в СРСР, на Україні і за кордоном – Ю. І. Азбель, В. І. Кармазин, О. В. Сандуляк, Г. Хейтманн та інші. Проте запропоновані математичні моделі не охоплювали багатьох суттєвих факторів, що істотно впливали на процес фільтрування, а отже і на продуктивність фільтра вцілому. Зокрема не враховувалась концентрація осаду у фільтрі, яка суттєво впливає на ряд параметрів фільтрування (пористість, коефіцієнт фільтрації тощо).

У даній роботі запропоновано узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца для магнітного фільтра з пористим завантаженням, яка враховує зворотній вплив на фільтраційні компоненти, зокрема, на пористість, коефіцієнт відірваних частинок осаду та коефіцієнт фільтрації, що дає можливість визначити важливі параметри процесу

 С. 137–143

фільтрування (час захисної дії фільтра, граничне завантаження осаду та гранична втрата напору) і аналогічно [1 – 2] побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-масообмін».

Постановка задачі. Розглянемо магнітний фільтр ($0 \le x \le L$) з однорідним завантаженням сталого перерізу, що функціонує за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [3], з урахуванням зворотнього впливу на пористість та коефіцієнт, що характеризує відривання частинок осаду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\big(\sigma(x,t)c(x,t)\big)}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial\big(v(x,t)c(x,t)\big)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho)c(x,t) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

$$c\big|_{x=0} = c_*^*(t),\ c\big|_{t=0} = 0,\ \rho\big|_{x=0} = 0,\ \rho\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$v = k \cdot grad\ P\ , \tag{3}$$

де $c(x,t)$ – концентрація домішок в рідкому середовищі, що фільтрується; $\rho(x,t)$ – концентрація домішок, осаджених у фільтруючій насадці; $\beta(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу, $\beta(\rho) = \beta_0 - \varepsilon\beta_*\rho(x,t)$; $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул насадки домішкових частинок, $\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho(x,t)$; $v(x,t)$ – швидкість фільтрування (неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція), $c_*^*(t)$ – концентрація домішкових частинок на вході фільтра, $\sigma(x,t)$ – пористість фільтруючої насадки (σ_0 – вихідна пористість насадки), $\sigma(x,t) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x,t)$; $\kappa(x,t)$ –

коефіцієнт фільтрування, $\kappa(x,t)=\begin{cases}\kappa_0-\varepsilon\gamma\rho(x,t), & \rho<\rho_0,\\ \kappa_0-\varepsilon\gamma\rho(x,\tau_з), & \rho\ge\rho_0,\end{cases}$ $\rho_0=\rho(L,\tau_з)$,

$\beta_0,\beta_*,\alpha_0,\alpha_*,\sigma_*,\kappa_0,\gamma,\varepsilon$ – жорсткі параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\beta(\rho),\alpha(\rho),\sigma(x,t),\kappa(x,t)$ – м’які параметри і знаходяться дослідним способом), ε – малий параметр, P – тиск.

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових частинок в насадці, змінюються відповідні параметри фільтрування. Оскільки система є замкненою, то зміна коефіцієнта фільтрування призводить до зміни величини перепаду тиску $\Delta P=P(L,t)-P(0,t)$ у пористій насадці.

Алгоритм (асимптотика) розв’язку. Розв’язки системи (1) за умов (2) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (див. [1 – 2]):

$$c(x,t)=c_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i(x,t)+R_1(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho(x,t)=\rho_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i \rho_i(x,t)+R_2(x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де R_1,R_2 – залишкові члени, $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптоти.

Аналогічно до [1], після підстановки (4) в (1) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases}\sigma_0\dfrac{\partial c_0}{\partial t}+v(x,t)\dfrac{\partial c_0}{\partial x}+v_x c_0+\dfrac{\partial\rho_0}{\partial t}=0, \quad \dfrac{\partial\rho_0}{\partial t}=\beta_0 c_0,\\ c_0\big|_{x=0}=c_*^*(t),\ c_0\big|_{t=0}=0,\ \rho_0\big|_{x=0}=\rho_*^*(t),\ \rho_0\big|_{t=0}=0,\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\sigma_*\rho_{i-1}\dfrac{\partial c_i}{\partial t}+v(x,t)\dfrac{\partial c_i}{\partial x}+\left(v_x+\sigma_*\dfrac{\partial\rho_{i-1}}{\partial t}\right)c_i+\dfrac{\partial\rho_i}{\partial t}=0, \quad \dfrac{\partial\rho_i}{\partial t}=q_i-g_i,\\ c_i\big|_{x=0}=0,\ c_i\big|_{t=0}=0,\ \rho_i\big|_{x=0}=0,\ \rho_i\big|_{t=0}=0,\ i=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{6}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(x,t)=\begin{cases} c_*^*\left(t-f_0\left(x\right)\right)\cdot e^{-\beta_0\int\limits_0^x f_0(\tilde{x})d\tilde{x}}, \; t\ge f_0\left(x\right), \\ 0,\; t<f_0\left(x\right), \end{cases} \quad \rho_0(x,t)=\beta_0\int\limits_0^t c_0(x,\tilde{t})d\tilde{t}\ ,$$

$$c_i\left(x,t\right)=\begin{cases} e^{-\lambda_i(x,t)}\cdot\int\limits_0^x \dfrac{g_i\left(\tilde{x},f_i\left(\tilde{x}\right)+x-f_i\left(x\right)\right)\cdot e^{\lambda_i(\tilde{x},t)}}{v\left(\tilde{x}\right)}d\tilde{x},\; t\ge f_i\left(x\right), \\ 0,\; t<f_i\left(x\right), \end{cases}$$

$$\rho_i(x,t)=\int\limits_0^t\left(q_i(x,\tilde{t})-g_i\left(x,\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}\ ,$$

де $g_i\left(x,t\right)=\sum\limits_{j=1}^{i}\rho_{j-1}\left(\alpha_0+I(i,j)\sum\limits_{j=2}^{i}(\alpha_*\rho_{i-2})\right)$, $q_i\left(x,t\right)=\sum\limits_{j=1}^{i}c_j\left(I(i,j)\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\beta_*\rho_{i-1}\right)\right)$,

$\lambda_i\left(x,t\right)=\dfrac{1}{v}\int\limits_0^x\psi_i\left(\tilde{x},f_i\left(\tilde{x}\right)+x-f_i\left(x\right)\right)d\tilde{x}$, $\psi_i\left(x,t\right)=v_x+\sigma_*\dfrac{\partial\rho_{i-1}\left(x,t\right)}{\partial t}+\beta$,

$I(a,b)=\begin{cases}1,\ \textit{якщо}\ a\ge b,\\ 0,\ \textit{якщо}\ a<b.\end{cases}$ Наближені значення функцій $f_i\left(x\right)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву $\left(x_j,t_j\right)$, $j=\overline{1,n}$, де $x_j=\Delta x\cdot j$, $t_1=t_0+\dfrac{\Delta x}{v\left(x_0,t_0\right)}\sigma_0$, $t_{j+1}=t_j+\dfrac{\Delta x}{v\left(x_j,t_j\right)}\sigma_*\rho_{i-1}\left(x_j,t_j\right)$.

Для оцінки залишкових членів маємо відповідну задачу аналогічну до [2].

Числові розрахунки та питання автоматизації. Згідно [1] коефіцієнти захоплених домішкових частинок і відірваних частинок осаду обчислюються за наступною формулою: $\beta_0=\dfrac{\beta^* H^{0.75}}{vd^2}$ [1], де β^* – вільний параметр, H – напруженість магнітного поля, v – швидкість фільтрування, d – діаметр гранулованої насадки фільтру.

Наведемо результати розрахунків за формулами (4) при $c_*^*(t)=2\ \textit{мг/л}$, $L=1\textit{м}$, $\beta_0=0.7\cdot 10^{-9}\ \textit{м}^2\textit{/с}$, $\alpha_0=0.35\,\textit{м}^2\textit{/с}$, $\sigma_0=0.5$, $H=60\ \ \textit{кА/м}$, $d=2.4\ \ \textit{мм}$. $\alpha_*=1$, $\beta_*=1$, $\sigma_*=1$.

На рис. 1 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу. Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 1$) допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.59$ *мг/л*, знаходимо час його захисної дії: $t = \tau_з = 68$ *год*, що на 1 годину відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [1]. При цьому фільтр накопичить 260 *г* осаду.

Як бачимо (рис. 2), у випадку $c_*^*(t) = c_*^* = const$ ефективність фільтра практично не змінюється до моменту часу $\tau_з$, після якого починає спадати, що підтверджує відомий факт розподілу ефективності фільтра з часом.

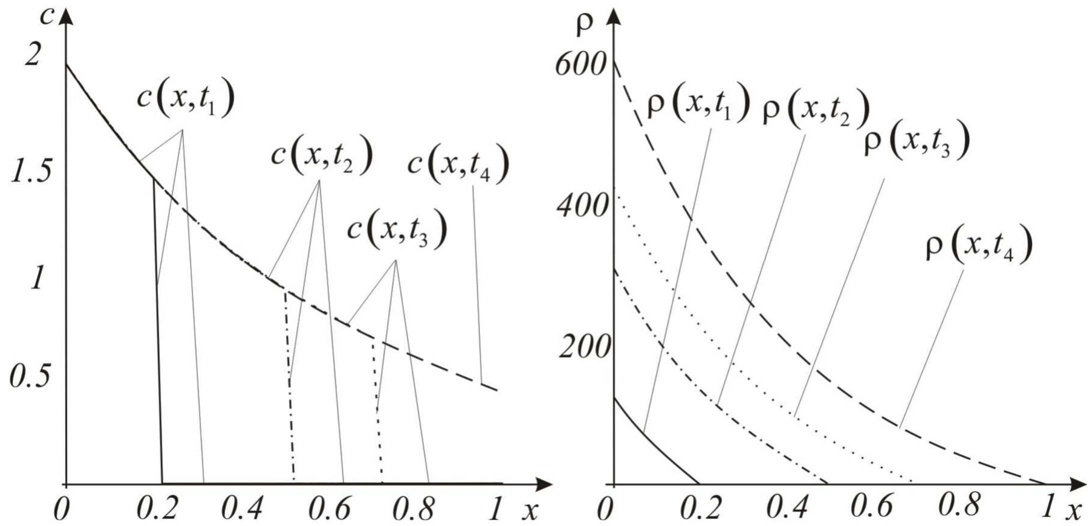

Рис. 1. Розподіл концентрації домішок у рідині та осаду вздовж фільтра в моменти часу $t_1 = 20$ *год,* $t_2 = 40$ *год,* $t_3 = 60$ *год,* $t_4 = 80$ *год*

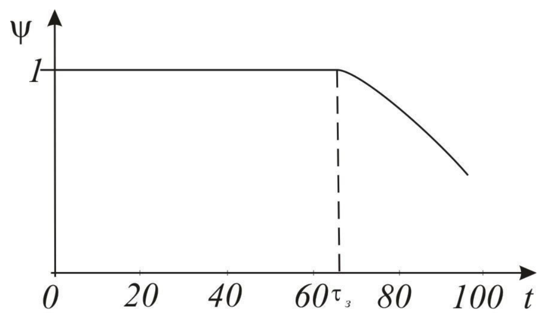

Рис. 2. Розподіл ефективності фільтра $\left(\psi = \dfrac{c_*^* - c}{c_*^*} \right)$

Висновки. Побудована математична модель, що описує закономірності магнітного осадження домішок в пористій фільтруючій насадці, закономірності накопичення („заносу”) домішок у насадці, яка враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Запропоновано алгоритм розв’язання відповідної задачі з визначення часу $\tau_з$ захисної дії фільтруючої насадки. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини насадки L, що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) насадки. Отримана математична модель і окремі результати розрахунків дозволять контролювати процес ефективного осадження домішок в намагніченій фільтруючій насадці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається.

1. *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв’язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А. Я. Бомба // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 4, № 4. – С. 493-496.
2. *Сафоник А. П.* Нелінійні сингулярно збурені математичні моделі процесів фільтрування / А. П. Сафоник // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 4 (13). – Рівне : РДГУ, 2007. – С. 119-128.
3. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
4. *Сандуляк А. В.* Очистка жидкостей в магнитном поле / А. В. Сандуляк. – Львів : Вища школа, 1984. – 168 с.

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

E-mail: safonik@ukr.net

Надійшла 01.07.2009

Сафоник А. П. НЕЛИНЕЙНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ФИЛЬТРОВ С УЧЕТОМ ОБРАТНОГО ВЛИЯНИЯ // *Предложена математическая модель процесса магнитного осаждения примесей в пористой фильтрующей насадке, которая учитывает обратное влияние характеристик процесса (концентрации осадка) на фильтрационные параметры и сменную скорость фильтрования. Построен алгоритм решения соответствующей нелинейной возмущенной задачи типу «конвекция-масообмен».*

Safonyk A. P. NONLINEAR MATHEMATICAL MODELLING OF MAGNETIC FILTERS TAKING INTO ACCOUNT RETURN INFLUENCE // *The mathematical model of process of the magnetic besieging of admixtures is offered in porous filter attachment which takes into account reverse influence of descriptions of process (concentrations of sediment) on lauter parameters and removable speed of filtration. The algorithm of decision of the proper nonlinear perturbative task is built to the type of «convection-mass-transfer».*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 6 (15)

Відповідальний за випуск
Бомба А.Я.

Підписано до друку   .   .2009 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. №   / .

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12