РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 5 (14)

Рівне-2008

pdfelement

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.
Бейко І.В.
Бомба А.Я. *(головний редактор)*
Булавацький В.М.
Бурак Я.Й.
Власюк А.П.
Войтович М.М.
Гаращенко Ф.Г.
Гарбарчук В.І.
Джунь Й.В.
Каштан С.С.
Климюк Ю.Є. *(технічний секретар)*
Кратко М.І.
Кузьменко А.П.
Кундрат М.М.
Ляшенко І.М.
Недашковській М.О.
Новіков О.М.
Петрівський Б.П.
Пономаренко Л.А.
Пригорницький Д.О. *(секретар)*
Присяжнюк І.М.
Савула Я.Г.
Свідзинський А.В.
Скопецький В.В. *(консультант)*
Сяський А.О.
Турбал Ю.В.
Чикрій А.О.
Шваб'юк В.І.
Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2008 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

ISBN 966-7281-02-8

© РДГУ, 2008

Зміст

Боголюбов М.М. (мол.), Прикарпатський А.К. *Про інтегровність багатовимірних диференціальних систем типу М. Громова на ріманових поверхнях* 5

Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Присяжнюк І.М. *Числово-асимптотичне розв'язання сингулярно збурених задач типу „фільтрація–конвекція–дифузія" в областях з вільними межами* 27

Бомба А.Я., Теребус А.В. *Просторові гармонічні многочлени та аналоги крайових задач на конформні відображення* 39

Булавацький В.М. *Узагальнена математична модель процесу фільтраційної консолідації, як процесу в системі з подвійною релаксацією*.....64

Возняк О.Г. *Інтегральне зображення розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь* 76

Дейнека О.Ю. *Обмежені розв'язки однієї крайової задачі для системи телеграфних рівнянь* 98

Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О. *Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні*.....104

Кривень В.А., Гром'як Р.С., Лазар В.Ф., Самборська М.М. *Міжфазне пластичне відшарування жорсткого циліндричного включення за поздовжнього зсуву*.....144

Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. *Сітковий інформаційний оператор-інтерполянт з використанням інтерлінанту та оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій*.....151

Литвин О.М., Першина Ю.І. *Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням мішаної апроксимації*.....162

Недашковський М.О. *Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків матричних рівнянь* 174

Pdfelement

Попов О.Г., Прохур М.З. *Паралельні алгоритми в стаціонарних моделях гідродинаміки при використанні рознесених сіток* 196

Присяжнюк І.М., Трохимчук О.Я., Фурсачик О.А. *Математичне моделювання сингулярно-збурених процесів конвективної дифузії за умов неповних даних при наявності невідомих джерел забруднення*.....210

Сафоник А.П. *Числово-асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування з післядією*.....230

Устьян Н.Ю. *Дослідження двох методів для знаходження оптимальної стратегії гравця в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу*.....241

Тарновецька О.Ю. *Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур'є на сегменті полярної вісі*.....253

Цегелик Г.Г., Лещишин Н.Р. *Екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі коші для звичайних диференціальних рівнянь* 265

Рзаєв Р.Р., Алієв Е.Р. *Обчислення і прогнозування секторальних індексів соціально-економічного розвитку регіонів* 277

Шпортько О.В. *Алгоритми оптимізації розкладу LZ77 та вибору розмірів блоків динамічних кодів Хафмана для стиснення даних у форматі DEFLATE* 297

Янчук П.С. *Комплексні квазіспектральні поліноми інтеграла із змінною верхнею границею*.....312

Хроніка

До 60-ліття від дня народження Євгена Ярославовича Чаплі.....330

Зарис наукової біографії Анатолія Карольовича Прикарпатського 334

parlement

УДК 517.95

Бомба А.Я., Теребус А.В.

ПРОСТОРОВІ ГАРМОНІЧНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА АНАЛОГИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Одержані співвідношення (у вигляді системи алгебраїчних рівнянь, що допускає локалізацію нелінійностей) для знаходження невідомих коефіцієнтів гармонічних многочленів – просторових комплексних потенціалів (як розв'язків просторових крайових задач – аналогів плоских задач на конформні відображення) та просторово комплексно-спряжених до них многочленів типу функцій течії для прямої та оберненої постановок задач.

Вступ. Проблеми узагальнення комплексних чисел і теорії функцій комплексної змінної поставали ще з XIX ст. Незважаючи на теорему Фробеніуса, яка стверджує неможливість побудови замкненого поля просторових комплексних чисел (триплетів), виходячи з потреб різних галузей науки і техніки, такі узагальнення проводились Ж.Ліувіллем, К.Гауссом, К.Моісілем та Н.Теодореско, В.Єлісеєвим [1] і багатьма іншими дослідниками. Зокрема, авторами статті запропоновані просторові аналоги комплексних чисел, як інструменту для розв'язання широких класів задач стереометрії [2], опису просторових розтягів і поворотів [3]. У роботі [4], ґрунтуючись на [5], виходячи із фізичних міркувань, побудовано просторовий аналог відомої плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник (див., напр., [6]). У даній роботі йдеться про побудову розв'язків такого роду прямих і обернених задач з використанням просторових гармонічних многочленів.

Загальна постановка задач. Для криволінійного паралелепіпеда $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ (рис. 1), обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями $AA_*B_*B = \{z:\ y = f_1(x,z)\}$, $CC_*D_*D = \{z:\ y = f_2(x,z)\}$ та

© А.Я. Бомба, А.В. Теребус, 2008

чотирма поверхнями течії $ABCD=\{z:\ z=f_3(x,y)\}$, $A_*B_*C_*D_*=\{z:\ z=f_4(x,y)\}$, $ADD_*A_*=\{z:\ x=f_5(y,z)\}$, $BCC_*B_*=\{z:\ x=f_6(y,z)\}$ (гладкими, взаємно ортогональними між собою) у [4] розглядається модельна задача процесу фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v}=grad\ \varphi,\ div\,\vec{v}=0; \tag{1}$$

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*}=\varphi_*,\quad \varphi\Big|_{DCC_*D_*}=\varphi^*,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{ADD_*A_*\cup A_*D_*C_*B_*\cup B_*C_*CB\cup ADCB}=0; \tag{2}$$

де $\vec{v}\left(v_x(x,y,z),v_y(x,y,z),v_z(x,y,z)\right)$ – вектор, а $\varphi=\varphi(x,y,z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($0<\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*<\infty$). Шляхом введення пари функцій $\psi=\psi(x,y,z)$, $\chi=\chi(x,y,z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi=\varphi(x,y,z)$) та коефіцієнта $\mu=\mu(x,y,z)$, таких, що $grad\,\psi(x,y,z)\cdot grad\,\chi(x,y,z)=0$, $\mu(x,y,z)\cdot grad\,\varphi(x,y,z)=grad\,\psi(x,y,z)\times$ $\times grad\,\chi(x,y,z)$, дана задача зводиться до задачі на просторово конформне відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega=\left\{\omega=(\varphi,\psi,\chi):\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*,0\le\psi\le Q_0,0\le\chi\le Q^0\right\}$ (рис. 2), де $Q=Q_0Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії (Q_0, Q^0 – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні прошарки). У тривіальному випадку, коли $\mu(x,y,z)\equiv1$, матимемо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z},\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z}=0;\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\varphi\Big|_{ABB_*A_*}=\varphi_*,\quad \varphi\Big|_{DCC_*D_*}=\varphi^*,\quad \psi\Big|_{ADD_*A_*}=0,\\ \psi\Big|_{BCC_*B_*}=Q_0,\quad \chi\Big|_{ADCB}=0,\quad \chi\Big|_{A_*D_*C_*B_*}=Q^0.\end{cases} \tag{4}$$

Одержану в результаті розв'язку задачі (3) – (4) функцію $\omega = \omega(\mathrm{z}) = \omega\big(\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z), \chi(x,y,z)\big)$, як і у плоскій теорії потенціальних полів та в [1], називатимемо комплексним потенціалом, а обернену до неї функцію $\mathrm{z} = \mathrm{z}(\omega) = \mathrm{z}\big(x(\varphi,\psi,\chi), y(\varphi,\psi,\chi), z(\varphi,\psi,\chi)\big)$ – характеристичною функцією течії.

Обернена до (3) – (4) задача на просторове конформне відображення $G_\omega \to G_{\mathrm{z}}$ (при невідомих значеннях параметрів Q_0, Q^0) згідно з [4] має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \chi} - \dfrac{\partial y}{\partial \chi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \psi}, \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial x}{\partial \chi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \psi} - \dfrac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \chi}, \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \chi} - \dfrac{\partial x}{\partial \chi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \psi}, \\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \chi} - \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \chi}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \psi} - \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \psi}\right) + \left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \chi} - \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \chi}\right)\times \\ \times\left(\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right) + \left(\dfrac{\partial x}{\partial \chi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \chi}\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \psi} - \dfrac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} y(\varphi_*,\psi,\chi) = f_1\big(x(\varphi_*,\psi,\chi), z(\varphi_*,\psi,\chi)\big), \\ y\left(\varphi^*,\psi,\chi\right) = f_2\left(x\left(\varphi^*,\psi,\chi\right), z\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\right), \\ z(\varphi,\psi,0) = f_3\big(x(\varphi,\psi,0), y(\varphi,\psi,0)\big), \\ z\left(\varphi,\psi,Q^0\right) = f_4\left(x\left(\varphi,\psi,Q^0\right), y\left(\varphi,\psi,Q^0\right)\right), \\ x(\varphi,0,\chi) = f_5\big(y(\varphi,0,\chi), z(\varphi,0,\chi)\big), \\ x(\varphi,Q_0,\chi) = f_6\big(, y(\varphi,Q_0,\chi), z(\varphi,Q_0,\chi)\big). \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язки такого роду задач будуватимемо у вигляді гармонічних многочленів, використовуючи ідею «від загального розв'язку до частинних». При цьому зауважимо, що в більшості методів, наприклад, варіаційних, базисні функції підбираються так, щоб виконувались крайові умови, а коефіцієнти – щоб задовольнялось рівняння. На початку записуємо умови гармонічності та «квазіспряженості», а далі, використовуючи крайові умови, доповнюватимемо відповідні системи алгебраїчних рівнянь з метою отримання єдиного розв'язку.

pdfelement

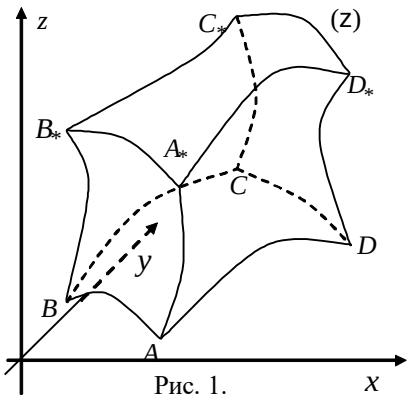

Рис. 1.

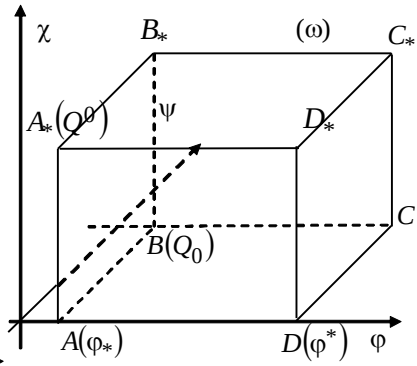

Рис. 2.

1. Розв'яжемо спочатку наближено задачу (1) – (2) на **знаходження потенціалу (гармонічної функції)** $\varphi = \varphi(x, y, z)$ у криволінійному паралелепіпеді $ABCDA^*B^*C^*D^*$ за умов (2).

Зважаючи на теорему Рунге про можливість наближення гармонічної функції з будь-якою точністю лінійними комбінаціями гармонічних многочленів в деякій області ([7]) подамо функцію $\varphi = \varphi(x, y, z)$ у вигляді полінома m-го степеня: $\varphi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+i+k=n} a_{i,j,k}^{(n)} x^i y^j z^k$ ($m \in N$). Рівняння граней, що обмежують даний криволінійний паралелепіпед представимо у явному вигляді: $y = f_1(x, z) = \sum_{i_1+k_1=m_1} \beta_{i_1,k_1}^{(1)} x^{i_1} z^{k_1}$ (для ABB^*A^*), $y = f_2(x, z) = \sum_{i_2+k_2=m_2} \beta_{i_2,k_2}^{(2)} x^{i_2} z^{k_2}$ (для DCC^*D^*), $z = f_3(x, y) = \sum_{i_3+j_3=m_3} \beta_{i_3,k_3}^{(3)} x^{i_3} y^{j_3}$ (для $ABCD$), $z = f_4(x, y) = \sum_{i_4+j_4=m_4} \beta_{i_4,k_4}^{(4)} x^{i_4} y^{j_4}$

pdfelement

(для $A^*B^*C^*D^*$), $x = f_5(y,z) = \sum\limits_{j_5+k_5=m_5} \beta^{(5)}_{i_5,k_5} y^{j_5} z^{k_5}$ (для ADD^*A^*), $x =$

$= f_6(y,z) = \sum\limits_{j_6+k_6=m_6} \beta^{(6)}_{i_6,k_6} y^{j_6} z^{k_6}$ (для BCC^*B^*), причому $m_i \in N$, $i = \overline{1,6}$.

Врахувавши рівняння Лапласа та умови (2), матимемо:

$$(i+2)(i+1)a^{(n)}_{i+2,j,n-i-j} + (j+2)(j+1)a^{(n)}_{i,j+2,n-i-j} +$$

$$+(n-i-j+2)(n-i-j+1)a^{(n)}_{i,j,n-i-j+2} = 0\,, \qquad (7)$$

де $n = \overline{0,m}$, $i = \overline{0,n-2}$, $j = \overline{0,n-2-i}$ (кількість рівнянь у даній підсистемі: $(m^2-1)m/6$).

$$\varphi_* = \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+j+k=n} \left(a^{(n)}_{i,j,k} x^i z^k \sum_{\substack{0\le j_0,\dots,j_{m_1}\le j \\ j_0+\dots+j_{m_1}=j}} \overline{P_j}\left(j_0,\dots,j_{m_1}\right) \cdot \bigcap_{s_1=0}^{m_1} \left(\beta^{(1)}_{s_1,m_1-s_1} x^{s_1} z^{m_1-s_1}\right)^{j_{s_1}} \right);$$

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+j+k=n} \left(a^{(n)}_{i,j,k} x^i z^k \sum_{\substack{0\le j_0,\dots,j_{m_2}\le j \\ j_0+\dots+j_{m_2}=j}} \left(\overline{P_j}\left(j_0,\dots,j_{m_2}\right) \cdot \bigcap_{s_2=0}^{m_2} \left(\beta^{(2)}_{s_2,m_2-s_2} x^{s_2} z^{m_2-s_2}\right)^{j_{s_2}} \right) \right);$$

$$0 = \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+j+k=n} \left(i a^{(n)}_{i,j,k} x^{i-1} y^j \sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_3}\le k \\ k_0+\dots+k_{m_3}=k}} \left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_3}\right) \cdot \bigcap_{s_3=0}^{m_3} \left(\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3} x^{s_3} y^{m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m_3} \left(s \cdot \beta^{(3)}_{s,m_3-s} x^{s-1} y^{m_3-s} \right) + \sum_{s=0}^{m_3} \left((m_3-s) \cdot \beta^{(3)}_{s,m_3-s} x^s y^{m_3-s-1} \right) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+j+k=n} \left(j a^{(n)}_{i,j,k} x^i y^{j-1} \cdot \sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_3}\le k \\ k_0+\dots+k_{m_3}=k}} \left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_3}\right) \cdot \bigcap_{s_3=0}^{m_3} \left(\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3} x^{s_3} y^{m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}} \right) \right) -$$

pdfelement

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(k\cdot a_{i,j,k}^{(n)}x^{i}y^{j}\cdot\sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_3}\le k-1\\ k_0+\dots+k_{m_3}=k-1}}\left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_3}\right)\cdot\bigcap_{s_3=0}^{m_3}\left(\beta_{s_3,m_3-s_3}^{(3)}x^{s_3}y^{m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}}\right)\right);$$

$$0=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ia_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^{j}\sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_4}\le k\\ k_0+\dots+k_{m_4}=k}}\left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_4}\right)\cdot\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\left(\beta_{s_4,m_4-s_4}^{(4)}x^{s_4}y^{m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m_4}\left(s\cdot\beta_{s,m_4-s}^{(4)}x^{s-1}y^{m_4-s}\right)+\sum_{s=0}^{m_4}\left((m_4-s)\cdot\beta_{s,m_4-s}^{(4)}x^{s}y^{m_4-s-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ja_{i,j,k}^{(n)}x^{i}y^{j-1}\cdot\sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_4}\le k\\ k_0+\dots+k_{m_4}=k}}\left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_4}\right)\cdot\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\left(\beta_{s_4,m_4-s_4}^{(4)}x^{s_4}y^{m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(k\cdot a_{i,j,k}^{(n)}x^{i}y^{j}\cdot\sum_{\substack{0\le k_0,\dots,k_{m_4}\le k-1\\ k_0+\dots+k_{m_4}=k-1}}\left(\overline{P_k}\left(k_0,\dots,k_{m_4}\right)\cdot\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\left(\beta_{s_4,m_4-s_4}^{(4)}x^{s_4}y^{m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}}\right)\right);$$

$$0=-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ia_{i,j,k}^{(n)}y^{j}z^{k}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_5}\le i-1\\ i_0+\dots+i_{m_5}=i-1}}\left(\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_5}\right)\cdot\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\left(\beta_{s_5,m_5-s_5}^{(5)}y^{s_5}z^{m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ja_{i,j,k}^{(n)}y^{j-1}z^{k}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_5}\le i\\ i_0+\dots+i_{m_5}=i}}\left(\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_5}\right)\cdot\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\left(\beta_{s_5,m_5-s_5}^{(5)}y^{s_5}z^{m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m_5}\left(s\cdot\beta_{s,m_5-s}^{(5)}y^{s-1}z^{m_5-s}\right)+\sum_{s=0}^{m_5}\left((m_5-s)\cdot\beta_{s,m_5-s}^{(5)}y^{s}z^{m_5-s-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(k\cdot a_{i,j,k}^{(n)}y^{j}z^{k-1}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_5}\le i\\ i_0+\dots+i_{m_5}=i}}\left(\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_5}\right)\cdot\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\left(\beta_{s_5,m_5-s_5}^{(5)}y^{s_5}z^{m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}}\right)\right);$$

pdfelement

$$0=-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ia_{i,j,k}^{(n)}y^{j}z^{k}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,..,i_{m_6}\le i-1\\ i_0+...+i_{m_6}=i-1}}\left(\overline{P}_i\left(i_0,..,i_{m_6}\right)\cdot\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\left(\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(6)}y^{s_6}z^{m_6-s_6}\right)^{i_{s_6}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(ja_{i,j,k}^{(n)}y^{j-1}z^{k}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,..,i_{m_6}\le i\\ i_0+...+i_{m_6}=i}}\left(\overline{P}_i\left(i_0,..,i_{m_6}\right)\cdot\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\left(\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(6)}y^{s_6}z^{m_6-s_6}\right)^{i_{s_6}}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m_6}\left(s\cdot\beta_{s,n-s}^{(6)}y^{s-1}z^{m_6-s}\right)+\sum_{s=0}^{m_6}\left((m_6-s)\cdot\beta_{s,m_6-s}^{(6)}y^{s}z^{m_6-s-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(k\cdot a_{i,j,k}^{(n)}y^{j}z^{k-1}\cdot\sum_{\substack{0\le i_0,..,i_{m_6}\le i\\ i_0+...+i_{m_6}=i}}\left(\overline{P}_i\left(i_0,..,i_{m_6}\right)\cdot\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\left(\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(5)}y^{s_6}z^{m_6-s_6}\right)^{i_{s_6}}\right)\right),$$

де $\overline{P}_r(r_1,r_2,...,r_l)=r!/(r_1!...r_l!)$ – кількість перестановок з повторенням.

Здійснивши ряд перетворень(піднесення полінома до степеня, множення та перегрупування), записані вище співвідношення зведемо до наступного вигляду:

$$\varphi_*=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le j_0,...,j_{m_1}\le j\\ j_0+..+j_{m_1}=j}}\left(\overline{P}_j\left(j_0,..,j_{m_1}\right)a_{i,j,k}^{(n)}\left(\bigcap_{s_1=0}^{m_1}\beta_{s_1,m_1-s_1}^{(1)}\right)^{j_{s_1}}x^{i+\sum_{s_1=0}^{m_1}s_1j_{s_1}}z^{k+\sum_{s_1=0}^{m_1}(m_1-s_1)j_{s_1}}\right);$$

$$\varphi^*=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le j_0,...,j_{m_2}\le j\\ j_0+..+j_{m_2}=j}}\left(\overline{P}_j\left(j_0,..,j_{m_2}\right)a_{i,j,k}^{(n)}\left(\bigcap_{s_2=0}^{m_2}\beta_{s_2,m_2-s_2}^{(2)}\right)^{j_{s_2}}x^{i+\sum_{s_2=0}^{m_2}s_2j_{s_2}}z^{k+\sum_{s_2=0}^{m_2}(m_2-s_2)j_{s_2}}\right);$$

$$0=\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,...,k_{m_3}\le k\\ k_0+..+k_{m_3}=k}}\left(sia_{i,j,k}^{(n)}\overline{P}_k\left(k_0,..,k_{m_3}\right)\left(\bigcap_{s_3=0}^{m_3}\beta_{s_3,m_3-s_3}^{(3)}\right)^{k_{s_3}+1}x^{s+i+\sum_{s_3=0}^{m_3}s_3k_{s_3}-2}\times\right.$$

$$\left.\times y^{m_3-s+j+\sum_{s_3=0}^{m_3}(m_3-s_3)k_{s_3}}\right)-\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,...,k_{m_3}\le k\\ k_0+..+k_{m_3}=k}}\left(j(m_3-s)a_{i,j,k}^{(n)}\times\right.$$

$$\times\overline{P_k}\left(k_0,..,k_{m_3}\right)\left(\bigcap_{s_3=0}^{m_3}\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}+1} x^{s+i+\sum\limits_{s_3=0}^{m_3}s_3k_{s_3}} y^{m_3-s+j+\sum\limits_{s_3=0}^{m_3}(m_3-s_3)k_{s_3}-2}\Bigg)-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,..,k_{m_3}\le k-1\\ k_0+...+k_{m_3}=k-1}}\left(k\cdot a^{(n)}_{i,j,k}x^i y^j\overline{P_k}\left(k_0,..,k_{m_3}\right)\bigcap_{s_3=0}^{m_3}\left(\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}} x^{i+\sum\limits_{s_3=0}^{m_3}s_3k_{s_3}} y^{j+\sum\limits_{s_3=0}^{m_3}s_3k_{s_3}}\right);$$

$$0=\sum_{s=0}^{m_4}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,..,k_{m_4}\le k\\ k_0+..+k_{m_4}=k}}\left(sia^{(n)}_{i,j,k}\overline{P_k}\left(k_0,..,k_{m_4}\right)\left(\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\beta^{(4)}_{s_4,m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}+1} x^{s+i+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}s_4k_{s_4}-2}\times\right.$$

$$\left.\times y^{m_4-s+j+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}(m_4-s_4)k_{s_4}}\right)-\sum_{s=0}^{m_4}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,..,k_{m_4}\le k\\ k_0+..+k_{m_4}=k}}\Bigg(j(m_4-s)a^{(n)}_{i,j,k}\times$$

$$\times\overline{P_k}\left(k_0,..,k_{m_4}\right)\left(\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\beta^{(4)}_{s_4,m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}+1} x^{s+i+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}s_4k_{s_4}} y^{m_4-s+j+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}(m_4-s_4)k_{s_4}-2}\Bigg)-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le k_0,..,k_{m_4}\le k-1\\ k_0+...+k_{m_4}=k-1}}\left(k\cdot a^{(n)}_{i,j,k}\overline{P_k}\left(k_0,..,k_{m_4}\right)\bigcap_{s_4=0}^{m_4}\left(\beta^{(4)}_{s_4,m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}} x^{i+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}s_4k_{s_4}} y^{j+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}(m_4-s_4)k_{s_4}}\right);$$

$$0=-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,...,i_{m_5}\le i-1\\ i_0+...+i_{m_5}=i-1}}\left(i\cdot a^{(n)}_{i,j,k}\overline{P_i}\left(i_0,..,i_{m_5}\right)\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\left(\beta^{(5)}_{s_5,m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}} x^{i+\sum\limits_{s_5=0}^{m_5}s_5i_{s_5}} y^{j+\sum\limits_{s_5=0}^{m_5}(m_5-s_5)i_{s_5}}\right)+$$

$$+\sum_{s=0}^{m_5}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,...,i_{m_6}\le i\\ i_0+..+i_{m_6}=i}}\left(sj\beta^{(5)}_{s,m_5-s}a^{(n)}_{i,j,k}\overline{P_k}\left(i_0,..,i_{m_5}\right)\left(\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\beta^{(5)}_{s_5,m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}+1} y^{s+j+\sum\limits_{s_5=0}^{m_5}s_5i_{s_5}-2}\times\right.$$

pdfelement

$$\times z^{m_5-s+j+\sum\limits_{s_4=0}^{m_4}(m_5-s_5)i_{s_5}}\Bigg)+\sum_{s=0}^{m_5}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_5}\le i\\ i_0+\dots+i_{m_5}=i}}\Bigg(\Bigg(k(m_5-s)a_{i,j,k}^{(n)}\times$$

$$\times\left(\bigcap_{s_5=0}^{m_5}\beta_{s_5,m_5-s_5}^{(5)}\right)^{i_{s_5}+1}\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_5}\right)y^{j+s+\sum\limits_{s_5=0}^{m_5}s_5i_{s_5}}z^{m_5-s+k+\sum\limits_{s_5=0}^{m_5}s_5i_{s_5}-2}\Bigg);$$

$$0=-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_6}\le i-1\\ i_0+\dots+i_{m_6}=i-1}}\left(i\cdot a_{i,j,k}^{(n)}\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_6}\right)\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\left(\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(6)}\right)^{i_{s_6}}x^{i+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}s_6i_{s_6}}y^{j+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}(m_6-s_6)i_{s_6}}\right)+$$

$$+\sum_{s=0}^{m_6}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_6}\le i\\ i_0+..+i_{m_6}=i}}\Bigg(sj\beta_{s,m_6-s}^{(6)}a_{i,j,k}^{(n)}\overline{P_k}\left(i_0,\dots,i_{m_6}\right)\left(\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(6)}\right)^{i_{s_6}+1}y^{s+j+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}s_6i_{s_6}-2}\times$$

$$\times z^{m_6-s+j+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}(m_6-s_6)i_{s_6}}\Bigg)+\sum_{s=0}^{m_6}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\sum_{\substack{0\le i_0,\dots,i_{m_6}\le i\\ i_0+\dots+i_{m_6}=i}}\Bigg(\Bigg(k(m_6-s)a_{i,j,k}^{(n)}\times$$

$$\times\left(\bigcap_{s_6=0}^{m_6}\beta_{s_6,m_6-s_6}^{(6)}\right)^{i_{s_6}+1}\overline{P_i}\left(i_0,\dots,i_{m_6}\right)y^{j+s+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}s_6i_{s_6}}z^{m_6-s+k+\sum\limits_{s_6=0}^{m_6}s_6i_{s_6}-2}\Bigg).$$

На основі представлення усіх сум, що входять до одержаних співвідношень, за однаковими степенями при x, y, z і теореми про алгебраїчну рівність многочленів приходимо до такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$(i+2)(i+1)a_{i+2,j,n-i-j}^{(n)}+(j+2)(j+1)a_{i,j+2,n-i-j}^{(n)}+$$

$$+(n-i-j+2)(n-i-j+1)a_{i,j,n-i-j+2}^{(n)}=0,\ n=\overline{0,m},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n-i};$$

$$\varphi_*=a_{0,0,0}^{(0)},$$

$$0=\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+k)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{k=0}^{\min(n-i,k)}\sum_{j_2=0}^{\min(n-i-k,\left[\tilde{i}-i/2\right])}\cdots\sum_{j_{m_1}=0}^{\min(n-i-k-\ldots-j_{m_1-1},\left[\left(\tilde{i}-i-\sum_{s_1=2}^{m_1-1}s_1j_{s_1}\right)\Big/m_1\right])}\Bigg(a_{i,n-i-k,k}^{(n)}\times$$

$$\times\overline{P_{n-i-k}}\left(\tilde{i}-i-\sum_{s_1=2}^{m_1}s_1j_{s_1},\frac{1}{m_1}(k-k-\sum_{s_1=2}^{m_1}(m_1-2s_1)j_{s_1}-\tilde{i}+i),..,j_{m_1}\right)\left(\beta_{0,m_1}^{(1)}\right)^{\tilde{i}-i-\sum_{s_1=2}^{m_1}s_1j_{s_1}}\times$$

$$\times\left(\beta_{1,m_1-1}^{(1)}\right)^{\frac{1}{m_1}(k-k-\sum_{s_1=2}^{m_1}(m_1-2s_1)j_{s_1}-\tilde{i}+i)}\left(\bigcap_{s_1=2}^{m_1}\beta_{s_1,m_1-s_1}^{(1)}\right)^{j_{s_1}}\Bigg),\tilde{i}+\tilde{k}=N,\ N=\overline{0,m\cdot m_1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{j=0}^{\min(n-j,j)}\sum_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[\left(\tilde{i}-i-s+2\right)/2\right])}\cdots\sum_{k_{m_3}=0}^{\min(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1},\left[\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3-1}s_3k_{s_3}\right)\Big/m_3\right])}\Bigg(si\times$$

$$\times\overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}+2,\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i),..,k_{m_3}\right)\times$$

$$\times\left(\beta_{1,m_3-1}^{(3)}\right)^{\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i)}\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta_{s_3,m_3-s_3}^{(3)}\right)^{k_{s_3}}\left(\beta_{0,m_3}^{(3)}\right)^{\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}+2}a_{i,j,n-i-j}^{(n)}\Bigg)+$$

$$+\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{j=0}^{\min(n-j,j)}\sum_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[\left(\tilde{i}-i-s+2\right)/2\right])}\cdots\sum_{k_{m_3}=0}^{\min(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1},\left[\left(\tilde{i}-i-s+2-\sum_{s_3=2}^{m_3-1}s_3k_{s_3}\right)\Big/m_3\right])}\Bigg(j\times$$

$$\times(m_3-s)\overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3},\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i+2),..,k_{m_3}\right)\times$$

$$\times\left(\beta_{1,m_3-1}^{(3)}\right)^{\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i+2)}\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta_{s_3,m_3-s_3}^{(3)}\right)^{k_{s_3}}\left(\beta_{0,m_3}^{(3)}\right)^{\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}}a_{i,j,n-i-j}^{(n)}\Bigg)+$$

pdfelement

$$+\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{j=0}^{\min(n-j,j)}\sum_{k_2=0}^{\min(n-i-j-1,\left[\left(\tilde{i}-i+2\right)/2\right])}\cdots\sum_{k_{m_3}=0}^{\min\left(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1}-1,\left[\left(\tilde{i}-i+2-\sum_{s_3=2}^{m_3-1}s_3k_{s_3}\right)/m_3\right]\right)}\Bigg(k\times$$

$$\times\overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3},\frac{1}{m_3}(j-j-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i),..,k_{m_3}\right)\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}}\times$$

$$\times\left(\beta^{(3)}_{1,m_3-1}\right)^{\frac{1}{m_3}(j-j-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i)}\left(\beta^{(3)}_{0,m_3}\right)^{\tilde{i}-i-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}}a^{(n)}_{i,j,n-i-j}\Bigg),\tilde{i}+j=N,\ N=\overline{0,m\cdot m_3-1};$$

$$0=\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{j=0}^{\min(n-j,j)}\sum_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[\left(\tilde{i}-i-s+2\right)/2\right])}\cdots\sum_{k_{m_3}=0}^{\min\left(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1},\left[\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3-1}s_3k_{s_3}\right)/m_3\right]\right)}\Bigg(si\times$$

$$\times\overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}+2,\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i),..,k_{m_3}\right)\times$$

$$\times\left(\beta^{(3)}_{1,m_3-1}\right)^{\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i)}\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}}\left(\beta^{(3)}_{0,m_3}\right)^{\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}+2}a^{(n)}_{i,j,n-i-j}\Bigg)+$$

$$+\sum_{s=0}^{m_3}\sum_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)}\sum_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})}\sum_{j=0}^{\min(n-j,j)}\sum_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[\left(\tilde{i}-i-s+2\right)/2\right])}\cdots\sum_{k_{m_3}=0}^{\min\left(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1},\left[\left(\tilde{i}-i-s+2-\sum_{s_3=2}^{m_3-1}s_3k_{s_3}\right)/m_3\right]\right)}\Bigg(j\times$$

$$\times(m_3-s)\overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3},\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i+2),..,k_{m_3}\right)\times$$

$$\times\left(\beta^{(3)}_{1,m_3-1}\right)^{\frac{1}{m_3}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i+2)}\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}}\left(\beta^{(3)}_{0,m_3}\right)^{\tilde{i}-i-s-\sum_{s_3=2}^{m_3}s_3k_{s_3}}a^{(n)}_{i,j,n-i-j}\Bigg),$$

$$\tilde{i}+j=N,\ N=\overline{m\cdot m_3-1,m\cdot m_3+m_3-2}.$$

……

Тут записані лише рівняння стосовно першої та третьої із шести умов (2) (інші рівняння одержуються аналогічно), причому суми поширюються тільки на ті значення відповідних індексів при яких $m_1^{-1}(k-k-\sum_{s_1=2}^{m_1}(m_1-2s_1)j_{s_1}-\tilde{i}+i)$, $m_3^{-1}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i)$, $m_3^{-1}(j-j+s-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i+2)$, $m_3^{-1}(j-j-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-$ $-\tilde{i}+i)$ приймають цілі значення.

2. При розв'язанні задачі (3) – (4) на "просторово-конформне" відображення області G_z на відповідну область G_ω представимо функції, що описують течію $\psi(x,y,z)$ і $\chi(x,y,z)$ аналогічно до $\varphi(x,y,z)$, у вигляді многочленів m-го степеня:

$$\psi(x,y,z)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}b_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k, \tag{8}$$

$$\chi(x,y,z)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}^{n}c_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k \tag{9}$$

(ми вважаємо $\psi(x,y,z)$ і $\chi(x,y,z)$ рівноправними і на m не накладаємо ніяких обмежень). Підставляючи вирази (8) і (9) у (3), матимемо:

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ia_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^jz^k=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}jb_{i,j,k}^{(n)}x^iy^{j-1}z^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}kc_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}kb_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}jc_{i,j,k}^{(n)}x^iy^{j-1}z^k,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ja_{i,j,k}^{(n)}x^iy^{j-1}z^k=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}kb_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ic_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^jz^k-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ib_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^jz^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}kc_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1},$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ka_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1}=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}ib_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^jz^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}jc_{i,j,k}^{(n)}x^iy^{j-1}z^k-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} jb_{i,j,k}^{(n)} x^i y^{j-1} z^k \cdot \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} ic_{i,j,k}^{(n)} x^{i-1} y^j z^k,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} ib_{i,j,k}^{(n)} x^{i-1} y^j z^k \cdot \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} ic_{i,j,k}^{(n)} x^{i-1} y^j z^k + \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} jb_{i,j,k}^{(n)} x^i y^{j-1} z^k \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} jc_{i,j,k}^{(n)} x^i y^{j-1} z^k + \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} kb_{i,j,k}^{(n)} x^i y^j z^{k-1} \cdot \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} kc_{i,j,k}^{(n)} x^i y^j z^{k-1} = 0.$$

В результаті виконання дій множення та алгебраїчного додавання многочленів від трьох змінних, перегрупування та прирівнювання членів при однакових степенях x, y, z отримаємо відносно $b_{i,j,k}^{(n)}$, $c_{i,j,k}^{(n)}$ таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$(i+1)a_{i+1,j,k}^{(n+1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}} \left(j_1 (k+1-k_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - b_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,$$

$$(j+1)a_{i,j+1,k}^{(n+1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}} \left(k_1 (i+1-i_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,$$

$$(k+1)a_{i,j,k+1}^{(n+1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}} \left(i_1 (j+1-j_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,\ i+j+k=n,\ n=\overline{0,m-1};$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}} \left(j_1 (k+1-k_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - b_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}} \left(k_1 (i+1-i_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}} \left(i_1 (j+1-j_1) \left(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} \right) \right) = 0,$$

$$i+j+k=n,\ n=\overline{m,2m-2};$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j,k_1\le k}}(i_1+1)\left(i+1-i_1\right)b_{i_1+1,j_1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i+1-i_1,j-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}+\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\\ j_1\le j+1,k_1\le k}}\Big((j_1+1)\left(j+1-i_1\right)\times$$

$$\times b_{i_1,j_1+1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}\Big)+\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}(k_1+1)\left(k-k_1+1\right)b_{i_1,j_1,k_1+1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}=0,$$

$$i+j+k=n,\ n=\overline{0,2m-2}. \qquad (10)$$

У загальному випадку, коли $\mu(x,y,z)=\sum_{n=0}^{m_*}\sum_{i+j+k=n}\mu_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k$ ($m_*\in N$), з умов просторової комплексної спряженості функцій $\varphi=\varphi\left(x,y,z\right)$, $\psi=\psi\left(x,y,z\right)$, $\chi=\chi\left(x,y,z\right)$ матимемо для випадків $m_*=m-1$; $m_*=m-1$; $m_*>m-1$ відповідно:

$$\begin{cases}
(i+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1}a_{i+1-i_1,j-j_1,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)}-\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}}\Big(j_1\left(k+1-k_1\right)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}c_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}-\\
\quad -b_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big)=0,\\
(j+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1}a_{i-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)}-\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}\Big(k_1\left(i+1-i_1\right)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}c_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}-\\
\quad -b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big)=0,\\
(k+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1}a_{i-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)}-\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1,k_1\le k}}\Big(i_1\left(j+1-j_1\right)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}c_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}-\\
\quad -b_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big)=0,\\
\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j,k_1\le k}}(i_1+1)\left(i+1-i_1\right)b_{i_1+1,j_1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i+1-i_1,j-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}+\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\\ j_1\le j+1,k_1\le k}}\Big((j_1+1)\left(j+1-i_1\right)\times\\
\quad \times b_{i_1,j_1+1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}\Big)+\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}(k_1+1)\left(k-k_1+1\right)b_{i_1,j_1,k_1+1}^{(i_1+1+j_1+k_1)}c_{i-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}=0,\\
i+j+k=n,\ n=\overline{0,2m-2};
\end{cases}$$

pdfelement

$$\begin{cases}
(i+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1} a^{(n+1-n_1)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k-k_1}\mu^{(n_1)}_{i_1,j_1,k_1} - \sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i,\, j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}}\Big(j_1\big(k+1-k_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1} - \\
-b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0, \\
(j+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1} a^{(n+1-n_1)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}\mu^{(n_1)}_{i_1,j_1,k_1} - \sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\, j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}\Big(k_1\big(i+1-i_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1} - \\
-b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0, \\
(k+1)\sum\limits_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\sum\limits_{i_1+j_1+k_1=n_1} a^{(n+1-n_1)}_{i-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}\mu^{(n_1)}_{i_1,j_1,k_1} - \sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}}\Big(i_1\big(j+1-j_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1} - \\
-b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0,\ i+j+k=n,\ n=\overline{0,m_*+m-1}, \\
\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\, j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}}\Big(j_1\big(k+1-k_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1} - b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0, \\
\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\, j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}\Big(k_1\big(i+1-i_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1} - b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0, \\
\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}}\Big(i_1\big(j+1-j_1\big)\Big(b^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1} - b^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}c^{(i_1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1}\Big)\Big)=0, \\
i+j+k=n,\ n=\overline{m_*+m-1,2m-2}, \\
\sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j, k_1\le k}}(i_1+1)\big(i+1-i_1\big)b^{(i_1+1+j_1+k_1)}_{i_1+1,j_1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k-k_1} + \sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}}\Big((j_1+1)\big(j+1-i_1\big)\times \\
\times b^{(i_1+1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1+1,k_1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}\Big) + \sum\limits_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\, j_1\le j,\\ k_1\le k+1}}(k_1+1)\big(k-k_1+1\big)b^{(i_1+1+j_1+k_1)}_{i_1,j_1,k_1+1}c^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}_{i-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}=0, \\
i+j+k=n,\ n=\overline{0,2m-2};
\end{cases}$$

pdfelement

$$
\begin{cases}
(i+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}} \Big(j_1\big(k+1-k_1\big)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \\
-b_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0, \\
(j+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}} \Big(k_1\big(i+1-i_1\big)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \\
-b_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0, \\
(k+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=n,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1,k_1\le k}} \Big(i_1\big(j+1-j_1\big)\Big(b_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \\
-b_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} c_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0, \\
\displaystyle\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j,k_1\le k}} \big(i_1+1\big)\big(i+1-i_1\big) b_{i_1+1,j_1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)} c_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)} + \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\\ j_1\le j+1,k_1\le k}} \Big(\big(j_1+1\big)\big(j+1-i_1\big)\times \\
\times b_{i_1,j_1+1,k_1}^{(i_1+1+j_1+k_1)} c_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)}\Big) + \displaystyle\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j,\\ k_1\le k+1}} \big(k_1+1\big)\big(k-k_1+1\big) b_{i_1,j_1,k_1+1}^{(i_1+1+j_1+k_1)} c_{i-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+1)} = 0, \\
i+j+k=n,\ n=\overline{0,2m-2}, \\
(i+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i+1-i_1,\,j-j_1,\,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} = 0, \\
(j+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i-i_1,\,j+1-j_1,\,k-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} = 0, \\
(k+1)\displaystyle\sum_{n_1=0}^{\min(m_*,n+1)}\ \sum_{i_1+j_1+k_1=n_1} a_{i-i_1,\,j-j_1,\,k+1-k_1}^{(n+1-n_1)}\mu_{i_1,j_1,k_1}^{(n_1)} = 0,\ i+j+k=n,\ n=\overline{2m-1,m_*+m-1}.
\end{cases}
$$

Вважатимемо, що задача попереднього пункту є розв’язаною. Тоді для доповнення (замикання) одержаної системи алгебраїчних рівнянь досить використати лише 3, 4, 5 та 6-ту із крайових умов (4). А саме:

pdfelement

$$
\begin{cases}
0 = \sum\limits_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+j)} \sum\limits_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})} \sum\limits_{j=0}^{\min(n-j,j)} \sum\limits_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[(\tilde{i}-i)/2\right])} \cdots \sum\limits_{k_{m_3}=0}^{\min(n-i-j-\ldots-k_{m_3-1},\left[\left(\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_3=2}^{m_3-1} s_3 k_{s_3}\right)/m_3\right])} \Big(c^{(n)}_{i,j,n-i-j} \times \\
\times \overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_3=2}^{m_3} s_3 k_{s_3}, \frac{1}{m_3}(j-j-\sum\limits_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i),..,k_{m_3}\right)\left(\beta^{(3)}_{0,m_3}\right)^{\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_3=2}^{m_3} s_3 k_{s_3}} \times \\
\times\left(\beta^{(3)}_{1,m_3-1}\right)^{\frac{1}{m_3}(\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-\tilde{i}+i)}\left(\bigcap_{s_3=2}^{m_3}\beta^{(3)}_{s_3,m_3-s_3}\right)^{k_{s_3}}\Bigg), \tilde{i}=\overline{0,m\cdot m_3}, \widetilde{j=0,\overline{m\cdot m_3-\tilde{i}}}; \\
0 = \sum\limits_{n=0}^{\min(m,\tilde{i}+\widetilde{j})} \sum\limits_{i=0}^{\min(n,\tilde{i})} \sum\limits_{j=0}^{\min(n-j,\widetilde{j})} \sum\limits_{k_2=0}^{\min(n-i-j,\left[(\tilde{i}-i)/2\right])} \cdots \sum\limits_{k_4=0}^{\min(n-i-j-\ldots-k_{m_4-1},\left[\left(\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_4=2}^{m_4-1} s_4 k_{s_4}\right)/m_4\right])} \Big(c^{(n)}_{i,j,n-i-j} \times \\
\times \overline{P_{n-i-j}}\left(\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_4=2}^{m_4} s_4 k_{s_4}, \frac{1}{m_4}(\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_4=2}^{m_4}(m_4-2s_4)k_{s_4}-\tilde{i}+i),..,k_{m_4}\right)\left(\beta^{(4)}_{0,m_4}\right)^{\tilde{i}-i-\sum\limits_{s_4=2}^{m_4} s_4 k_{s_4}} \times \\
\times\left(\beta^{(4)}_{1,m_4-1}\right)^{\frac{1}{m_4}(\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_4=2}^{m_4}(m_4-2s_4)k_{s_4}-\tilde{i}+i)}\left(\bigcap_{s_4=2}^{m_4}\beta^{(4)}_{s_4,m_4-s_4}\right)^{k_{s_4}}\Bigg), \tilde{i}=\overline{0,m\cdot m_4}, \widetilde{j=0,\overline{m\cdot m_4-\tilde{i}}}; \qquad (11) \\
0 = \sum\limits_{n=0}^{\min(m,\widetilde{j+k})} \sum\limits_{j=0}^{\min(n,\widetilde{j})} \sum\limits_{k=0}^{\min(n-j,\widetilde{k})} \sum\limits_{i_2=0}^{\min(n-j-k,\left[\widetilde{j-j}/2\right])} \cdots \sum\limits_{i_{m_5}=0}^{\min(n-j-k-\ldots-j_{m_5-1},\left[\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_5-1} s_5 i_{s_5}/m_5\right])} \Big(b^{(n)}_{n-j-k,j,k} \times \\
\times \overline{P_{n-j-k}}\left(\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_5} s_5 i_{s_5}, \frac{1}{m_5}(\widetilde{k-k}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_5}(m_5-2s_5)i_{s_5}-\widetilde{j+j}),..,i_{m_5}\right)\left(\beta^{(5)}_{0,m_5}\right)^{\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_5} s_5 i_{s_5}} \times \\
\times\left(\beta^{(5)}_{1,m_5-1}\right)^{\frac{1}{m_5}(\widetilde{k-k}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_5}(m_5-2s_5)i_{s_5}-\widetilde{j+j})}\left(\bigcap_{s_5=2}^{m_5}\beta^{(5)}_{s_5,m_5-s_5}\right)^{i_{s_5}}\Bigg), \widetilde{j=0,\overline{m\cdot m_5}}, \widetilde{k=0,\overline{m\cdot m_5-\tilde{j}}}; \\
Q_0 = \sum\limits_{n=0}^{\min(m,\widetilde{j+k})} \sum\limits_{j=0}^{\min(n,\widetilde{j})} \sum\limits_{k=0}^{\min(n-j,\widetilde{k})} \sum\limits_{i_2=0}^{\min(n-j-k,\left[\widetilde{j-j}/2\right])} \cdots \sum\limits_{i_{m_6}=0}^{\min(n-j-k-\ldots-j_{m_6-1},\left[\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_6=2}^{m_6-1} s_6 i_{s_6}/m_6\right])} \Big(b^{(n)}_{n-j-k,j,k} \times \\
\times \overline{P_{n-j-k}}\left(\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_6=2}^{m_6} s_6 i_{s_6}, \frac{1}{m_6}(\widetilde{k-k}-\sum\limits_{s_6=2}^{m_6}(m_6-2s_6)i_{s_6}-\widetilde{j+j}),..,i_{m_6}\right)\left(\beta^{(6)}_{0,m_6}\right)^{\widetilde{j-j}-\sum\limits_{s_6=2}^{m_6} s_6 i_{s_6}} \times \\
\times\left(\beta^{(6)}_{1,m_6-1}\right)^{\frac{1}{m_6}(\widetilde{k-k}-\sum\limits_{s_5=2}^{m_6}(m_6-2s_6)i_{s_6}-\widetilde{j+j})}\left(\bigcap_{s_6=2}^{m_6}\beta^{(6)}_{s_6,m_6-s_6}\right)^{i_{s_6}}\Bigg), \widetilde{j=0,\overline{m\cdot m_6}}, \widetilde{k=0,\overline{m\cdot m_6-\tilde{j}}};
\end{cases}
$$

pdfelement

Аналогічно до 1 і 2 з крайових умов (4) суми обчислюються лише для тих значень відповідних індексів при яких $m_3^{-1}(j-j-\sum_{s_3=2}^{m_3}(m_3-2s_3)k_{s_3}-$ $-\tilde{i}+i)$, $m_4^{-1}(j-j-\sum_{s_4=2}^{m_4}(m_4-2s_4)k_{s_4}-\tilde{i}+i)$, $m_5^{-1}(k-k-\sum_{s_5=2}^{m_5}(m_5-2s_5)i_{s_5}-$ $-j+j)$, $m_6^{-1}(k-k-\sum_{s_6=2}^{m_6}(m_6-2s_6)i_{s_6}-j+j)$ приймають цілі значення.

Компоненти вектора швидкості визначаються з співвідношень:

$$v_x=\sum_{n=0}^{m_*}\sum_{i+j+k=n}\mu_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+i+k=n}ia_{i,j,k}^{(n)}x^{i-1}y^jz^k\ ,$$

$$v_y=\sum_{n=0}^{m_*}\sum_{i+j+k=n}\mu_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+i+k=n}ja_{i,j,k}^{(n)}x^iy^{j-1}z^k\ ,$$

$$v_z=\sum_{n=0}^{m_*}\sum_{i+j+k=n}\mu_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+i+k=n}ka_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^{k-1}\ .$$

3. Розглянемо приклад знаходження потенціалу $\varphi=\varphi(x,y,z)$ та функцій течії $\psi=\psi(x,y,z)$, $\chi=\chi(x,y,z)$ в області G_z, обмеженій координатними площинами і площинами $x=\alpha$, $y=\beta$ і $z=\gamma$. На початку (з метою інтерпретації методу) знайдемо тривіальний (очевидний) розв'язок $\varphi=\varphi(x,y,z)$ $(\varphi(x,y,z)=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{a}x+\varphi_*)$ задачі: $\varphi_{xx}+$ $+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0$, $\varphi(0,y,z)=\varphi_*$, $\varphi(\alpha,y,z)=\varphi^*$, $\varphi'_y(x,0,z)=0$, $\varphi'_y(x,\beta,z)=0$, $\varphi'_z(x,y,0)=0$, $\varphi'_z(x,y,\gamma)=0$. Шукатимемо його у вигляді:

$$\varphi(x,y,z)=a_{0,0,0}^{(0)}+(a_{1,0,0}^{(1)}x+a_{0,1,0}^{(1)}y+a_{0,0,1}^{(1)}z)+\sum_{n=2}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}x^iy^jz^k\ .$$

Врахувавши рівняння (7) та 3, 4, 5, і 6-ту із крайових умов, матимемо: $a_{0,1,0}^{(1)}=a_{0,0,1}^{(1)}=a_{i,j,k}^{(n)}=0$ $(n=\overline{2,m})$, тобто $\varphi(x,y,z)=a_{0,0,0}^{(0)}+$

$+\alpha_{1,0,0}^{(1)}x$. А з першої та другої крайових умов матимемо: $\alpha_{0,0,0}^{(0)}=\varphi_*$, $a_{1,0,0}^{(1)}=\left(\varphi^*-\varphi_*\right)\big/\alpha$. Отже:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}x+\varphi_*, \tag{12}$$

що і потрібно було довести.

Розв'язок відповідної задачі на конформне відображення $G_z\to G_\omega$ шукаємо у вигляді (8), (9) і (12):

Розв'язавши систему рівнянь (10) (з врахуванням (12)), одержимо: $c_{1,0,0}^{(1)}=b_{1,0,0}^{(1)}=0$, $b_{0,1,0}^{(1)}=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}\dfrac{c_{0,1,0}^{(1)}}{\left(c_{0,1,0}^{(1)}\right)^2+\left(c_{0,0,1}^{(1)}\right)^2}$, $b_{0,0,1}^{(1)}=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}\times$

$\times\dfrac{-c_{0,0,1}^{(1)}}{\left(c_{0,1,0}^{(1)}\right)^2+\left(c_{0,0,1}^{(1)}\right)^2}$, $b_{i,j,k}^{(n)}=c_{i,j,k}^{(n)}=0$, $n=\overline{2,m}$. Отже: $\psi(x,y,z)=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}\times$

$\times\left(\dfrac{c_{0,0,1}^{(1)}}{\left(c_{0,1,0}^{(1)}\right)^2+\left(c_{0,0,1}^{(1)}\right)^2}y-\dfrac{c_{0,1,0}^{(1)}}{\left(c_{0,1,0}^{(1)}\right)^2+\left(c_{0,0,1}^{(1)}\right)^2}z\right)+b_{0,0,0}^{(0)}$, $\chi(x,y,z)=c_{0,1,0}^{(1)}y+c_{0,0,1}^{(1)}z+c_{0,0,0}^{(0)}$.

З крайових умов $\psi(x,0,z)=0$ і $\chi(x,y,0)=0$ матимемо: $c_{0,1,0}^{(1)}=$ $=c_{0,0,0}^{(0)}=b_{0,0,0}^{(0)}=0$. Звідки: $\psi(x,y,z)=\left(c_{0,0,1}^{(1)}\alpha\right)^{-1}\left(\varphi^*-\varphi_*\right)y$, $\chi(x,y,z)=$ $=c_{0,0,1}^{(1)}z$. А з умов

$$\psi(x,\beta,z)=Q_0,\ \chi(x,y,\gamma)=Q^0 \tag{13}$$

випливає, що $Q=Q_0Q^0=\psi(x,\beta,z)\cdot\chi(x,y,\gamma)=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}bc$. Потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні прошарки Q_0, Q^0 визначимо із співвідношень: $Q_0\cdot Q^0=Q$, $\dfrac{Q_0}{\beta}=\dfrac{Q^0}{\gamma}$, одержимо: $Q_0=\beta\sqrt{\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}}$, $Q^0=\gamma\sqrt{\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}}$. Звідки, враховуючи (13), матимемо:

$$\psi(x,y,z)=y\sqrt{\frac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}}\,,\ \chi(x,y,z)=z\sqrt{\frac{\varphi^*-\varphi_*}{\alpha}}\,.$$

Як і слід було очікувати: $v_x(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{a}$,

$v_y(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=0$, $v_z(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=0$.

4. Для розв'язання оберненої задачі на просторове конформне відображення $G_\omega\to G_z$ (5) – (6) (при невідомих значеннях параметрів Q_0, Q^0) представимо функції $x(\varphi,\psi,\chi)$, $y(\varphi,\psi,\chi)$, $z(\varphi,\psi,\chi)$ у вигляді многочленів:

$$x(\varphi,\psi,\chi)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^k,\ y(\varphi,\psi,\chi)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^k,$$

$$z(\varphi,\psi,\chi)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^k. \tag{14}$$

Підставимо (14) у систему диференціальних рівнянь (5), матимемо:

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}i\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^j\chi^k=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}i\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^j\chi^k=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1},$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^j\chi^k=\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}k\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\chi^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}j\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^{j-1}\chi^k,$$

pdfelement

$$\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\right)+\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}\right)+\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}\cdot\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} k\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j}\chi^{k-1}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}-\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} j\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\psi^{j-1}\chi^{k}\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n} i\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}\right)=0.$$

Звідси:

$$(i+1)a_{i+1,j,k}^{(n+1)}-\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}}\left(j_1\left(k+1-k_1\right)\left(\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\beta_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\right)\right)=0,$$

$$(i+1)\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i-1}\psi^{j}\chi^{k}-\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\ j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}}\left(j_1\left(k+1-k_1\right)\left(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\right)\right)=0,$$

$$(k+1)a_{i,j,k+1}^{(n+1)} - \sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\, j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}} \Big(j_1\left(k+1-k_1\right)\Big(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\beta_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} -$$

$$-\alpha_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0,\ i+j+k=n,\ n=\overline{0,m-1};$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i,\, j_1\le j+1,\\ k_1\le k+1}} \Big(j_1\left(k+1-k_1\right)\Big(\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \beta_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\, j_1\le j,\\ k_1\le k+1}} \Big(j_1\left(k+1-k_1\right)\Big(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \alpha_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1+j_1+k_1=m,\\ i_1\le i+1,\\ j_1\le j+1, k_1\le k}} \Big(j_1\left(k+1-k_1\right)\Big(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\beta_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \alpha_{i-i_1,j+1-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big) = 0,$$

$$i+j+k=n,\ n=\overline{m,2m-2};$$

$$\sum_{i_2=0}^{i}\sum_{j_2=0}^{j}\sum_{k_2=0}^{k}\left(p_{i_2,j_2,k_2}^{(1)}p_{i-i_2,j-j_2,k-k_2}^{(4)} + p_{i_2,j_2,k_2}^{(2)}p_{i-i_2,j-j_2,k-k_2}^{(5)} + p_{i_2,j_2,k_2}^{(3)}p_{i-i_2,j-j_2,k-k_2}^{(6)}\right) = 0,$$

де

$$i+j+k=n,\ n=\overline{0,2m-2};$$

$$p_{i,j,k}^{(1)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{k_1=0}^{k+1}\Big(k_1\left(i+1-i_1\right)\Big(\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \beta_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big),$$

$$p_{i,j,k}^{(2)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{k_1=0}^{k+1}\Big(k_1\left(i+1-i_1\right)\Big(\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\alpha_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \gamma_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big),$$

$$p_{i,j,k}^{(3)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j}\sum_{k_1=0}^{k+1}\Big(k_1\left(i+1-i_1\right)\Big(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\beta_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \alpha_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big),$$

$$p_{i,j,k}^{(4)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j+1}\sum_{k_1=0}^{k}\Big(i_1\left(j+1-j_1\right)\Big(\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\gamma_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \beta_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\Big)\Big),$$

pdfelement

$$p_{i,j,k}^{(5)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j+1}\sum_{k_1=0}^{k}\left(i_1\left(j+1-j_1\right)\left(\gamma_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\alpha_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \gamma_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\right)\right),$$

$$p_{i,j,k}^{(6)} = \sum_{i_1=0}^{i+1}\sum_{j_1=0}^{j+1}\sum_{k_1=0}^{k}\left(i_1\left(j+1-j_1\right)\left(\alpha_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\beta_{i+1-i_1,j+1-j_1,k-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)} - \alpha_{i+1-i_1,j-j_1,k+1-k_1}^{(n-i_1-j_1-k_1+2)}\beta_{i_1,j_1,k_1}^{(i_1+j_1+k_1)}\right)\right).$$

Аналогічно до (10), (11) доповнимо систему рівнянь (14), виходячи із крайових умов (6):

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi_*\right)^i\psi^j\chi^k = \sum_{i_1+k_1=m_1}\left(\beta_{i_1,k_1}^{(1)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi_*\right)^i\psi^j\chi^k\right)^{i_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi_*\right)^i\psi^j\chi^k\right)^{k_1}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi^*\right)^i\psi^j\chi^k = \sum_{i_2+k_2=m_2}\left(\beta_{i_2,k_2}^{(2)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi^*\right)^i\psi^j\chi^k\right)^{i_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\left(\varphi^*\right)^i\psi^j\chi^k\right)^{k_2}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j = \sum_{i_3+j_3=m_3}\left(\beta_{i_3,k_3}^{(3)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\right)^{i_3}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\right)^{j_3}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\left(\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\left(Q^0\right)^k\right) = \sum_{i_4+j_4=m_4}\left(\beta_{i_4,k_4}^{(4)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\cdot\left(Q^0\right)^k\right)^{i_4}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\psi^j\cdot\left(Q^0\right)^k\right)^{j_4}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\chi^k = \sum_{j_5+k_5=m_5}\left(\beta_{j_5,k_5}^{(5)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\chi^k\right)^{j_5}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+k=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^i\chi^k\right)^{k_5}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\left(Q_0\right)^{j}\chi^{k}=\sum_{j_6+k_6=m_6}\left(\beta_{i_6,k_6}^{(6)}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\beta_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\left(Q_0\right)^{j}\chi^{k}\right)^{j_6}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j+k=n}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi^{i}\left(Q_0\right)^{j}\chi^{k}\right)^{k_6}\right)\text{ і т. д.}$$

Висновки. Одержано системи алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів гармонічних многочленів (просторових комплексних потенціалів), а також просторово комплексно-спряжених до них многочленів типу функції течії для прямої та оберненої задач на конформне відображення криволінійного паралелепіпеда на прямокутний. Зазначимо, що на відміну від інших методів, наприклад, варіаційних, складність при формуванні системи алгебраїчних рівнянь з'являється за рахунок граничних умов. У **перспективі** досліджень – побудова просторового базису гармонічних та просторово комплексно-спряжених до них многочленів, а також, побудова відповідних аналогів квазіконформних відображень.

pdfelement

1. *Елисеев В.И.* Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного.- М.: НИАТ.- 1990.- 189 с.
2. *Бомба А.Я., Теребус А.В.* Про один просторовий аналог комплексних чисел і задачі стереометрії // У світі математики.-К.: Твімс.- 2006.- Том 12.- Вип. 1.- С. 34-41.
3. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип. 6.- С. 25-36.
4. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник.- 2003.- Вип. 10.- С. 5-15.
5. *Рауз Х.* Механика жидкости.- М.: Стройиздат.- 1967.- 390 с.
6. *Бомба А.Я., Барановська І.А., Теребус А.В., Тищук Т.В.* Узагальнення тригонометричних функцій та комплексних чисел.- Рівне: РОІППО.- 2007.- 60 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.- М.: Наука.- 1977.- 407 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail: abomba@ukr.net
terebus@rivne.com

Надійшла 11.07.2008

Бомба А.Я., Теребус А.В. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ И АНАЛОГИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ // *Получены соотношения (в виде системы алгебраических уравнений, допускающей локализацию нелинейностей) для нахождения неизвестных коэффициентов гармонических многочленов – пространственных комплексных потенциалов (как решений пространственных краевых задач на конформные отображения) и пространственно комплексно-сопряженных к ним многочленов типа функций течения для прямой и обратной постановок задач.*

Bomba A.Ya., Terebus A.V. SPATIAL HARMONIC POLYNOMIALS AND ANALOGUES OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS // *Ratios (in the form of the algebraic equations system, which assumes the localization of the nonlinearities) for the finding of unknown coefficients of harmonic polynomials, which are spatial complex potentials (as the solutions of the spatial boundary value problems, which are analogues of a plane boundary value problems on conformal mappings) and spatial complex conjugate for them flow functions type polynomials for the direct and inverse problems formulations are received.*

Element

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 5 (14)

pdfelement

Відповідальний за випуск
Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2008 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12