

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 5 (14)

Рівне-2008

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"
публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковський М.О.
Бомба А.Я. (<i>головний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. (<i>секретар</i>)
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопечкий В.В. (<i>консультант</i>)
Каштан С.С.	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2008 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

Зміст

Боголюбов М.М. (мол.), Прикарпатський А.К. Про інтегровність багатовимірних диференціальних систем типу М. Громова на ріманових поверхнях	5
Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Присяжнюк І.М. Числово-асимптотичне розв'язання сингулярно збурених задач типу „фільтрація–конвекція–дифузія” в областях з вільними межами	27
Бомба А.Я., Теребус А.В. Просторові гармонічні многочлени та аналоги крайових задач на конформні відображення	39
Булавацький В.М. Узагальнена математична модель процесу фільтраційної консолідації, як процесу в системі з подвійною релаксацією	64
Возняк О.Г. Інтегральне зображення розв'язків деяких вирождених параболічних рівнянь	76
Дейнека О.Ю. Обмежені розв'язки однієї крайової задачі для системи телеграфних рівнянь	98
Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні	104
Кривень В.А., Гром'як Р.С., Лазар В.Ф., Самборська М.М. Міжфазне пластичне відшарування жорсткого циліндричного включення за поздовжнього зсуву	144
Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Сітковий інформаційний оператор-інтерполянт з використанням інтерліанту та оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій	151
Литвин О.М., Першина Ю.І. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням мішаної апроксимації	162
Недашковський М.О. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків матричних рівнянь	174

Попов О.Г., Прохур М.З. Паралельні алгоритми в стаціонарних моделях гідродинаміки при використанні рознесених сіток	196
Присяжнюк І.М., Трохимчук О.Я., Фурсачик О.А. Математичне моделювання сингулярно-збурених процесів конвективної дифузії за умов неповних даних при наявності невідомих джерел забруднення.....	210
Сафоник А.П. Числово-асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування з післядією.....	230
Устьян Н.Ю. Дослідження двох методів для знаходження оптимальної стратегії гравця в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу.....	241
Тарновецька О.Ю. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур'є на сегменті полярної вісі.....	253
Цегелик Г.Г., Лецишин Н.Р. Екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі коші для звичайних диференціальних рівнянь	265
Рзаєв Р.Р., Алієв Е.Р. Обчислення і прогнозування секторальних індексів соціально-економічного розвитку регіонів	277
Шпортко О.В. Алгоритми оптимізації розкладу LZ77 та вибору розмірів блоків динамічних кодів Хаффмана для стиснення даних у форматі DEFLATE	297
Янчук П.С. Комплексні квазіспектральні поліноми інтеграла із змінною верхньою границею.....	312

Хроніка

До 60-ліття від дня народження Євгена Ярославовича Чаплі.....	330
Зарис наукової біографії Анатолія Карольовича Прикарпатського	334

УДК 517.95

Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О.

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПРОСТОРОВІ КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ НА ПРЯМОКУТНІ

Побудовано алгоритм знаходження розв'язку задачі на конформне відображення криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома екіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії, на відповідний прямокутний.

Вступ. Рух рідин в пористих середовищах експериментально досліджував французький інженер А. Дарсі в 1852 – 1856 роках. Результати його досліджень представлені законом, який і на сьогоднішній час широко використовується при моделюванні фільтраційних процесів в пористих середовищах.

Значний внесок у розвиток теорії фільтрації зробив М.М. Павловський, яким був запропонований і теоретично обґрунтований точний метод розв'язування плоских задач усталеної фільтрації – метод конформних відображень [1, 2]. Даний метод використовували та розвивали далі у своїх роботах П.Я. Полубаринова-Кочина, В.І. Аравін, С.М. Нумеров, В.С. Істоміна, М.М. Веригін, М.А. Лаврентьєв, Л.І. Волковиський, В.І. Лаврик, А.Я. Бомба та інші [2, 3]. Також свій внесок у розвиток теорії руху рідин зробили М.Є. Жуковський, П.Ф. Фільчаков, А.Я. Олійник, М.М. Герсєванов, Р. Коллінз, М.Г. Бернардинер, С.Ф. Авер'янов, В.В. Скопєцький, В.С. Дейнека, В.М. Булавацький, В.Н. Монахов, В.Г. Голубєв та інші [3, 4].

Для розв'язування просторових сингулярно збурених крайових задач типу “фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін”, які виникають при дослідженні процесів фільтрації підземних вод в пористих ґрунтах, постала проблема розв'язання просторових обернених крайових задач на конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на відповід-

ні прямокутні. У цій роботі запропонований числовий алгоритм отримання наближеного розв'язку наведеної задачі.

Постановка задачі. Для криволінійного паралелепіпеда $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($z = (x, y, z)$), обмеженого двома екіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$, які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (див. рис. 1 а), розглянемо модельну задачу, яка описує процес фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*C_*D_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD} = 0, \quad (2)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ та $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| > v_* \gg 0$), $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

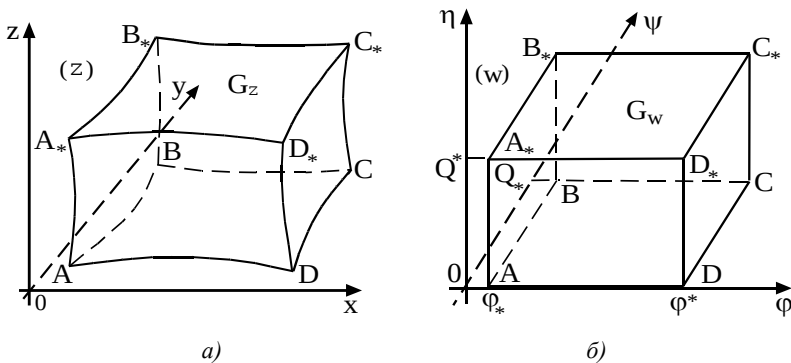


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просто-рово комплексно спряжених із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$) й $\mu = \mu(x, y, z)$ таких, що $\text{grad } \varphi(x, y, z) = \mu(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) \times \text{grad } \eta(x, y, z)$ [5], і заміною останньої з граничних умов (2) на умови: $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*$, задачу (1) – (2) замінімо більш загальною задачею на просторове конформне відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$ (рис. 1 б), де $Q = Q_*Q^*$ – потік через довільний поперечний переріз течії (Q_* , Q^* – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні прошарки):

$$\begin{cases} \varphi_x = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_y \eta_z - \psi_z \eta_y), \\ \varphi_y = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_z \eta_x - \psi_x \eta_z), \\ \varphi_z = \mu(x, y, z) \cdot (\psi_x \eta_y - \psi_y \eta_x), \\ \Delta \varphi = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \quad \eta|_{ADCB} = 0, \quad \eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*. \end{cases} \quad (4)$$

Одержану в результаті розв'язання задачі (3) – (4) функцію $w = w(z) = w(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \eta(x, y, z))$, як і у випадку плоскої теорії потенціальних полів [1, 2], називають комплексним потенціалом, а обернену їй функцію $z = z(w) = z(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta))$ – характеристичною функцією течії.

Обернена до (3) – (4) задача на конформне відображення $G_w \rightarrow G_z$ (при невідомих значеннях параметрів Q_* , Q^*) має вигляд:

$$\begin{cases} x_\varphi = \mu^{-1}(\varphi, \psi, \eta) \cdot (y_\psi z_\eta - z_\psi y_\eta), \\ y_\varphi = \mu^{-1}(\varphi, \psi, \eta) \cdot (z_\psi x_\eta - x_\psi z_\eta), \\ z_\varphi = \mu^{-1}(\varphi, \psi, \eta) \cdot (x_\psi y_\eta - y_\psi x_\eta), \\ \Delta\varphi = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_2(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_3(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\ f_4(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) = 0, \\ f_5(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_6(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Числове розв'язання задачі. В області G_w побудуємо рівномірну ортогональну сітку $G_w^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, n+1}; \right.$

$$\psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, m+1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l+1}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n+1},$$

$$\Delta\psi = \frac{Q_*}{m+1}, \quad \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta}; \quad n, m, l \in N \} \quad (\text{див. рис. 1}). \text{ Через}$$

$x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k), \quad z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів у G_z і $\mu_{i,j,k} = \mu(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ – значення невідомої функції μ у вузлах $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ сітки.

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z (при відповідності кутових точок) запишемо різницьевий аналог задачі (5), (6) у рівномірній сітковій області G_w^γ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 x_{i,j,k} &= x_{i,j-1,k} + \frac{1}{4} \gamma \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right) / \mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}), \\
 y_{i,j,k} &= y_{i,j-1,k} + \frac{1}{4} \gamma \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) / \mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}), \\
 z_{i,j,k} &= z_{i,j-1,k} + \frac{1}{4} \gamma \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right) / \mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}), \\
 \mu_{i,j,k} &= (\mu_{i-1,j,k} (y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) + \\
 &\quad + \mu_{i,j-1,k} (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k}) (z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) + \\
 &\quad + \mu_{i,j,k-1} (y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})) / \\
 &\quad ((y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k}) \times \\
 &\quad \times (z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) + (y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})), \\
 i &= \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Крайові умови, які визначають фізичну область G_z , апроксимуюмо точково-різницевиими рівняннями

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_1(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) &= 0, f_2(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 f_3(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) &= 0, f_4(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\
 f_5(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) &= 0, f_6(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 i &= \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}.
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області, які у сітковій області G_w^γ записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями

$$\begin{aligned}
\frac{f'_{1x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{f'_{1y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{1z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}; \\
\frac{f'_{2x}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} &= \frac{f'_{2y}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f'_{2z}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}; \\
\frac{f'_{3x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{f'_{3y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{f'_{3z}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}; \\
\frac{f'_{4x}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{x_{i,m,k} - x_{i,m+1,k}} &= \frac{f'_{4y}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{y_{i,m,k} - y_{i,m+1,k}} = \frac{f'_{4z}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k})}{z_{i,m,k} - z_{i,m+1,k}}; \\
\frac{f'_{5x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{f'_{5y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{5z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}; \\
\frac{f'_{6x}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} &= \frac{f'_{6y}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f'_{6z}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\
i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Значення невідомої функції $\mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ у граничних вузлах $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ гідродинамічної сітки знаходимо за формулами:

у внутрішніх вузлах сітки на ABB_*A_* :

$$\begin{aligned}
\mu_{0,j,k} &= (\mu_{1,j,k}(y_{0,j,k} - y_{0,j-1,k}))(z_{0,j,k} - z_{0,j,k-1}) + \\
&+ \mu_{0,j-1,k}(y_{1,j,k} - y_{0,j,k})(z_{0,j,k} - z_{0,j,k-1}) + \\
&+ \mu_{0,j,k-1}(y_{0,j,k} - y_{0,j-1,k})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) / \\
&((y_{0,j,k} - y_{0,j-1,k})(z_{0,j,k} - z_{0,j,k-1}) + (y_{1,j,k} - y_{0,j,k})(z_{0,j,k} - z_{0,j,k-1}) + \\
&+ (y_{0,j,k} - y_{0,j-1,k})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k})), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l};
\end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на CDD_*C_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,j,k} = & \left(\mu_{n,j,k} (y_{n+1,j,k} - y_{n+1,j-1,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n+1,j,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{n+1,j-1,k} (y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n+1,j,k-1}) + \\ & + \mu_{n+1,j,k-1} (y_{n+1,j,k} - y_{n+1,j-1,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) \Big) / \\ & \left((y_{n+1,j,k} - y_{n+1,j-1,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n+1,j,k-1}) + (y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n+1,j,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{n+1,j,k} - y_{n+1,j-1,k}) (z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) \right), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на ADD_*A_* :

$$\begin{aligned} \mu_{i,0,k} = & \left(\mu_{i-1,0,k} (y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i,0,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{i,1,k} (y_{i,0,k} - y_{i-1,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i,0,k-1}) + \\ & + \mu_{i,0,k-1} (y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i-1,0,k}) \Big) / \\ & \left((y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i,0,k-1}) + (y_{i,0,k} - y_{i-1,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i,0,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{i,1,k} - y_{i,0,k}) (z_{i,0,k} - z_{i-1,0,k}) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на BCC_*B_* :

$$\begin{aligned} \mu_{i,m+1,k} = & \left(\mu_{i-1,m+1,k} (y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i,m+1,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{i,m,k} (y_{i,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i,m+1,k-1}) + \\ & + \mu_{i,m+1,k-1} (y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) \Big) / \\ & \left((y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i,m+1,k-1}) + (y_{i,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i,m+1,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) (z_{i,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на $ABCD$:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j,0} = & \left(\mu_{i-1,j,0} (y_{i,j,0} - y_{i,j-1,0}) (z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) + \right. \\ & + \mu_{i,j-1,0} (y_{i,j,0} - y_{i-1,j,0}) (z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_{i,j,1} \left(y_{i,j,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,0} - z_{i-1,j,0} \right) \Big) / \\
& \left(\left(y_{i,j,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) + \left(y_{i,j,0} - y_{i-1,j,0} \right) \left(z_{i,j,1} - z_{i,j,0} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{i,j,0} - y_{i,j-1,0} \right) \left(z_{i,j,0} - z_{i-1,j,0} \right) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на $A_* B_* C_* D_*$:

$$\begin{aligned}
\mu_{i,j,l+1} = & \left(\mu_{i-1,j,l+1} \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) + \right. \\
& + \mu_{i,j-1,l+1} \left(y_{i,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) + \\
& \left. + \mu_{i,j,l} \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) + \left(y_{i,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{i,j,l+1} - y_{i,j-1,l+1} \right) \left(z_{i,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1} \right) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AB :

$$\begin{aligned}
\mu_{0,j,0} = & \left(\mu_{1,j,0} \left(y_{0,j,0} - y_{0,j-1,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) + \right. \\
& + \mu_{0,j-1,0} \left(y_{1,j,0} - y_{0,j,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) + \\
& \left. + \mu_{0,j,1} \left(y_{0,j,0} - y_{0,j-1,0} \right) \left(z_{1,j,0} - z_{0,j,0} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{0,j,0} - y_{0,j-1,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) + \left(y_{1,j,0} - y_{0,j,0} \right) \left(z_{0,j,1} - z_{0,j,0} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{0,j,0} - y_{0,j-1,0} \right) \left(z_{1,j,0} - z_{0,j,0} \right) \right), \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на CD :

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1,j,0} = & \left(\mu_{n,j,0} \left(y_{n+1,j,0} - y_{n+1,j-1,0} \right) \left(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0} \right) + \right. \\
& + \mu_{n+1,j-1,0} \left(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0} \right) \left(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0} \right) + \\
& \left. + \mu_{n+1,j,1} \left(y_{n+1,j,0} - y_{n+1,j-1,0} \right) \left(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{n+1,j,0} - y_{n+1,j-1,0} \right) \left(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0} \right) + \left(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0} \right) \left(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{n+1,j,0} - y_{n+1,j-1,0} \right) \left(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0} \right) \right), \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на BC :

$$\begin{aligned} \mu_{i,m+1,0} = & \left(\mu_{i-1,m+1,0} (y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) (z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + \right. \\ & + \mu_{i,m,0} (y_{i,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0}) (z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + \\ & \left. + \mu_{i,m+1,1} (y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) (z_{i,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) \right) / \\ & \left((y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) (z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + (y_{i,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0}) (z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + \right. \\ & \left. + (y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}) (z_{i,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) \right), \quad i = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AD :

$$\begin{aligned} \mu_{i,0,0} = & \left(\mu_{i-1,0,0} (y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) (z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + \right. \\ & + \mu_{i,1,0} (y_{i,0,0} - y_{i-1,0,0}) (z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + \\ & \left. + \mu_{i,0,1} (y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) (z_{i,0,0} - z_{i-1,0,0}) \right) / \\ & \left((y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) (z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + (y_{i,0,0} - y_{i-1,0,0}) (z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + \right. \\ & \left. + (y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) (z_{i,0,0} - z_{i-1,0,0}) \right), \quad i = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на A_*B_* :

$$\begin{aligned} \mu_{0,j,l+1} = & \left(\mu_{1,j,l+1} (y_{0,j,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) (z_{0,j,l} - z_{0,j,l+1}) + \right. \\ & + \mu_{0,j-1,l+1} (y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1}) (z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + \\ & \left. + \mu_{0,j,l} (y_{0,j,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) (z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) \right) / \\ & \left((y_{0,j,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) (z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + (y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1}) (z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + \right. \\ & \left. + (y_{0,j,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) (z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) \right), \quad j = \overline{1, m}; \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на C_*D_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,j,l+1} = & \left(\mu_{n,j,l+1} (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1}) (z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) + \right. \\ & \left. + \mu_{n+1,j-1,l+1} (y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1}) (z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_{n+1,j,l} \left(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1} \right) \left(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1} \right) \Big) / \\
& \left(\left(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1} \right) \left(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l} \right) + \left(y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1} \right) \left(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1} \right) \left(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1} \right) \right), \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на B_*C_* :

$$\begin{aligned}
\mu_{i,m+1,l+1} = & \left(\mu_{i-1,m+1,l+1} \left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l} \right) + \right. \\
& + \mu_{i,m,l+1} \left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l} \right) + \\
& \left. + \mu_{i,m+1,l} \left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l} \right) + \left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1} \right) \left(z_{i,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1} \right) \right), \quad i = \overline{1, n};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на A_*D_* :

$$\begin{aligned}
\mu_{i,0,l+1} = & \left(\mu_{i-1,0,l+1} \left(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l} \right) + \right. \\
& + \mu_{i,1,l+1} \left(y_{i,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l} \right) + \\
& \left. + \mu_{i,0,l} \left(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l} \right) + \left(y_{i,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1} \right) \left(z_{i,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1} \right) \right), \quad i = \overline{1, n};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AA_* :

$$\begin{aligned}
\mu_{0,0,k} = & \left(\mu_{1,0,k} \left(y_{0,1,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{0,0,k} - z_{0,0,k-1} \right) + \right. \\
& + \mu_{0,1,k} \left(y_{1,0,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{0,0,k} - z_{0,0,k-1} \right) + \\
& \left. + \mu_{0,0,k-1} \left(y_{0,1,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{1,0,k} - z_{0,0,k} \right) \right) / \\
& \left(\left(y_{0,1,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{0,0,k} - z_{0,0,k-1} \right) + \left(y_{1,0,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{0,0,k} - z_{0,0,k-1} \right) + \right. \\
& \left. + \left(y_{0,1,k} - y_{0,0,k} \right) \left(z_{1,0,k} - z_{0,0,k} \right) \right), \quad k = \overline{1, l};
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на BB_* :

$$\begin{aligned} \mu_{0,m+1,k} = & \left(\mu_{1,m+1,k} (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) (z_{0,m+1,k} - z_{0,m+1,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{0,m,k} (y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k}) (z_{0,m+1,k} - z_{0,m+1,k-1}) + \\ & \left. + \mu_{0,m+1,k-1} (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) (z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) \right) / \\ & \left((y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) (z_{0,m+1,k} - z_{0,m+1,k-1}) + (y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k}) (z_{0,m+1,k} - z_{0,m+1,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) (z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) \right), \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на CC_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,m+1,k} = & \left(\mu_{n,m+1,k} (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{n+1,m,k} (y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k-1}) + \\ & \left. + \mu_{n+1,m+1,k-1} (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k}) \right) / \\ & \left((y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k-1}) + (y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) (z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m+1,k}) \right), \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на DD_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,0,k} = & \left(\mu_{n,0,k} (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n+1,0,k-1}) + \right. \\ & + \mu_{n+1,1,k} (y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n+1,0,k-1}) + \\ & \left. + \mu_{n+1,0,k-1} (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) \right) / \\ & \left((y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n+1,0,k-1}) + (y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n+1,0,k-1}) + \right. \\ & \left. + (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) \right), \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}$$

у вершині A :

$$\begin{aligned} \mu_{0,0,0} = & \left(\mu_{1,0,0} (y_{0,1,0} - y_{0,0,0}) (z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) + \right. \\ & \left. + \mu_{0,1,0} (y_{1,0,0} - y_{0,0,0}) (z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_{0,0,1}(y_{0,1,0}-y_{0,0,0})(z_{1,0,0}-z_{0,0,0})/ \\
& ((y_{0,1,0}-y_{0,0,0})(z_{0,0,1}-z_{0,0,0})+(y_{1,0,0}-y_{0,0,0})(z_{0,0,1}-z_{0,0,0})+ \\
& +(y_{0,1,0}-y_{0,0,0})(z_{1,0,0}-z_{0,0,0}));
\end{aligned}$$

у вершині B :

$$\begin{aligned}
\mu_{0,m+1,0} &= (\mu_{1,m+1,0}(y_{0,m+1,0}-y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1}-z_{0,m+1,0})+ \\
& +\mu_{0,m,0}(y_{1,m+1,0}-y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,1}-z_{0,m+1,0})+ \\
& +\mu_{0,m+1,1}(y_{0,m+1,0}-y_{0,m,0})(z_{1,m+1,0}-z_{0,m+1,0}))/ \\
& ((y_{0,m+1,0}-y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1}-z_{0,m+1,0})+(y_{1,m+1,0}-y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,1}-z_{0,m+1,0})+ \\
& +(y_{0,m+1,0}-y_{0,m,0})(z_{1,m+1,0}-z_{0,m+1,0}));
\end{aligned}$$

у вершині C :

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1,m+1,0} &= (\mu_{n,m+1,0}(y_{n+1,m+1,0}-y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1}-z_{n+1,m+1,0})+ \\
& +\mu_{n+1,m,0}(y_{n+1,m+1,0}-y_{n,m+1,0})(z_{n+1,m+1,1}-z_{n+1,m+1,0})+ \\
& +\mu_{n+1,m+1,1}(y_{n+1,m+1,0}-y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,0}-z_{n,m+1,0}))/ \\
& ((y_{n+1,m+1,0}-y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1}-z_{n+1,m+1,0})+(y_{n+1,m+1,0}-y_{n,m+1,0})(z_{n+1,m+1,1}-z_{n+1,m+1,0})+ \\
& +(y_{n+1,m+1,0}-y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,0}-z_{n,m+1,0}));
\end{aligned}$$

у вершині D :

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1,0,0} &= (\mu_{n,0,0}(y_{n+1,1,0}-y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,1}-z_{n+1,0,0})+ \\
& +\mu_{n+1,1,0}(y_{n+1,0,0}-y_{n,0,0})(z_{n+1,0,1}-z_{n+1,0,0})+ \\
& +\mu_{n+1,0,1}(y_{n+1,1,0}-y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,0}-z_{n,0,0}))/ \\
& ((y_{n+1,1,0}-y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,1}-z_{n+1,0,0})+(y_{n+1,0,0}-y_{n,0,0})(z_{n+1,0,1}-z_{n+1,0,0})+ \\
& +(y_{n+1,1,0}-y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,0}-z_{n,0,0}));
\end{aligned}$$

у вершині A_* :

$$\begin{aligned} \mu_{0,0,l+1} = & \left(\mu_{1,0,l+1} (y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + \right. \\ & + \mu_{0,1,l+1} (y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + \\ & \left. + \mu_{0,0,l} (y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) \right) / \\ & \left((y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + (y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + \right. \\ & \left. + (y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}) (z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) \right); \end{aligned}$$

у вершині B_* :

$$\begin{aligned} \mu_{0,m+1,l+1} = & \left(\mu_{1,m+1,l+1} (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + \right. \\ & + \mu_{0,m,l+1} (y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1}) (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + \\ & \left. + \mu_{0,m+1,l} (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) (z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) \right) / \\ & \left((y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + (y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1}) (z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + \right. \\ & \left. + (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) (z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) \right); \end{aligned}$$

у вершині C_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,m+1,l+1} = & \left(\mu_{n,m+1,l+1} (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \right. \\ & + \mu_{n+1,m,l+1} (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n,m+1,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \\ & \left. + \mu_{n+1,m+1,l} (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) \right) / \\ & \left((y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n,m+1,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \right. \\ & \left. + (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m,l+1}) (z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) \right); \end{aligned}$$

у вершині D_* :

$$\begin{aligned} \mu_{n+1,0,l+1} = & \left(\mu_{n,0,l+1} (y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1}) (z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) + \right. \\ & \left. + \mu_{n+1,1,l+1} (y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1}) (z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu_{n+1,0,l} \left(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1} \right) \left(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1} \right) \Big) / \\
 & \left(\left(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1} \right) \left(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l} \right) + \left(y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1} \right) \left(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1} \right) \left(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1} \right) \right) \Big). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Конформний інваріант γ криволінійного паралелепіпеда G_z є невідомим (оскільки невідома витрата Q) і визначається в процесі розрахунку. Формулу для наближеного знаходження даної величини одержимо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів двох областей:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \mu(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) \cdot \gamma_{i,j,k}, \quad (11) \\
 \gamma_{i,j,k} &= 4 \left(\sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\
 & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \right) / \\
 & \left(\left(\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\
 & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\
 & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\
 & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \times \\
 & \times \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}\right)^2 + \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}\right)^2 + \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}\right)^2} \Bigg).
 \end{aligned}$$

Фільтраційну витрату знаходимо за формулою

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma}, \quad (12)$$

а параметри Q_* , Q^* відповідно за формулами

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q \cdot (m+1)}{\tilde{\gamma} \cdot (l+1)}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} \cdot Q \cdot (l+1)}{m+1}}, \quad (13)$$

де

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k},$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_{i,j,k} = & \left(\sqrt{\left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}\right)^2 + \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}\right)^2 + \left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}\right)^2} + \right. \\
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k}\right)^2 + \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k}\right)^2 + \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k}\right)^2} + \\
 & \left. + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k}\right)^2} \right) / \\
 & \left(\sqrt{\left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k}\right)^2 + \left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}\right)^2 + \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}\right)^2} + \right. \\
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}\right)^2 + \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}\right)^2 + \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1}\right)^2} + \\
 & \left. + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1}\right)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (7) – (10) знаходимо шляхом поетапної параметризації величини γ (або значення витрати Q), координат граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності [6, 7]. А саме, задавши кількість n , m та l вузлів розбиття сіткової області G_w , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$ (так, щоб виконувались рівності (8)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ і $\mu^{(0)}\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right) = 1$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, за формулою (11) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ конформного інваріанта γ . Уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(p+1)}, y_{i,j,k}^{(p+1)}, z_{i,j,k}^{(p+1)}\right)$ і значень невідомої функції $\mu_{i,j,k}^{(p+1)}$ проводимо за формулами (7) на основі значень з попереднього кроку ітерації p ($p = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь сформовану з (8) – (9), знаходимо нові наближення значень функції $\mu_{i,j,k}^{(p+1)}$ у граничних вузлах і γ за формулами (10) – (11), параметрів Q , Q^* і Q^* – за формулами (12), (13) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і фільтраційної витрати відносно кроку ітерації відповідно

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(p+1)} - x_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(p+1)} - y_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(p+1)} - z_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| \mu_{i,j,k}^{(p+1)} - \mu_{i,j,k}^{(p)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| Q^{(p+1)} - Q^{(p)} \right| < \varepsilon. \quad (14)$$

Якщо умови (14) не виконуються, то повертаємося до уточнення

координат внутрішніх вузлів за формулою (7) і т.д. У протилежному випадку перевіряємо нев'язку рівняння Лапласа $\Delta\varphi=0$ у отриманих вузлах гідродинамічної сітки. Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^γ та розв'язуємо задачу заново.

Для одержаних координат вузлів гідродинамічної сітки на основі рівняння руху (1) та умов (3) величини швидкості знаходимо за такими різницевиими формулами:

у внутрішніх вузлах сітки G_z^γ :

$$v_{i,j,k} = \sqrt{v_{xi,j,k}^2 + v_{yi,j,k}^2 + v_{zi,j,k}^2}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,l},$$

$$v_{xi,j,k} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right),$$

$$v_{yi,j,k} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right),$$

$$v_{zi,j,k} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right),$$

$$\begin{aligned} J_{i,j,k} = & (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + \\ & + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + \\ & + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\ & - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\ & - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\ & - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}); \end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на ABB_*A_* :

$$v_{0,j,k} = \sqrt{v_{x0,j,k}^2 + v_{y0,j,k}^2 + v_{z0,j,k}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x0,j,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y0,j,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z0,j,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,k}} \left((x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k}) \right),$$

$$J_{0,j,k} = (x_{1,j,k} - x_{0,j,k})(y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1}) + \\ + (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(y_{1,j,k} - y_{0,j,k})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) + \\ + (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - \\ - (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k-1})(y_{0,j+1,k} - y_{0,j-1,k})(z_{1,j,k} - z_{0,j,k}) - \\ - (x_{1,j,k} - x_{0,j,k})(y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k-1})(z_{0,j+1,k} - z_{0,j-1,k}) - \\ - (x_{0,j+1,k} - x_{0,j-1,k})(y_{1,j,k} - y_{0,j,k})(z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k-1});$$

у внутрішніх вузлах сітки на CDD_*C_* :

$$v_{n+1,j,k} = \sqrt{v_{xn+1,j,k}^2 + v_{yn+1,j,k}^2 + v_{zn+1,j,k}^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{xn+1,j,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}} \left((y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) \right),$$

$$v_{yn+1,j,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}} \left((x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}\right)\left(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}\right)), \\
 v_{zn+1,j,k} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,k}}\left(\left(x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k}\right)\left(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1}\right) - \right. \\
 & \left. -\left(x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1}\right)\left(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k}\right)\right), \\
 J_{n+1,j,k} &= (x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k})(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}) + \\
 & + (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) + \\
 & + (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k})(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) - \\
 & - (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k-1})(y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j-1,k})(z_{n+1,j,k} - z_{n,j,k}) - \\
 & - (x_{n+1,j,k} - x_{n,j,k})(y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k-1})(z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j-1,k}) - \\
 & - (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j-1,k})(y_{n+1,j,k} - y_{n,j,k})(z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k-1}); \\
 & \text{у внутрішніх вузлах сітки на } ADD_*A_*:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i,0,k} &= \sqrt{v_{xi,0,k}^2 + v_{yi,0,k}^2 + v_{zi,0,k}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \\
 v_{xi,0,k} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}}\left(\left(y_{i,1,k} - y_{i,0,k}\right)\left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}\right) - \right. \\
 & \left. -\left(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1}\right)\left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}\right)\right), \\
 v_{yi,0,k} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}}\left(\left(x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}\right)\left(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}\right) - \right. \\
 & \left. -\left(x_{i,1,k} - x_{i,0,k}\right)\left(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}\right)\right), \\
 v_{zi,0,k} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,k}}\left(\left(x_{i,1,k} - x_{i,0,k}\right)\left(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1}\right) - \right. \\
 & \left. -\left(x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1}\right)\left(y_{i,1,k} - y_{i,0,k}\right)\right), \\
 J_{i,0,k} &= (x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k})(y_{i,1,k} - y_{i,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}) + \\
 & + (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k})(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) + \\
 & + (x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k}) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(y_{i,1,k} - y_{i,0,k})(z_{i+1,0,k} - z_{i-1,0,k}) - \\
& -(x_{i+1,0,k} - x_{i-1,0,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,0,k}) - \\
& -(x_{i,1,k} - x_{i,0,k})(y_{i+1,0,k} - y_{i-1,0,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1});
\end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на BCC_*B_* :

$$v_{i,m+1,k} = \sqrt{v_{x i,m+1,k}^2 + v_{y i,m+1,k}^2 + v_{z i,m+1,k}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$\begin{aligned}
v_{x i,m+1,k} = 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,m+1,k}} & \left((y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) - \right. \\
& \left. - (y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y i,m+1,k} = 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,m+1,k}} & \left((x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z i,m+1,k} = 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,m+1,k}} & \left((x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i,0,k} = & (x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k})(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1}) + \\
& + (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) + \\
& + (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1})(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) - \\
& - (x_{i,m+1,k+1} - x_{i,m+1,k-1})(y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k})(z_{i+1,m+1,k} - z_{i-1,m+1,k}) - \\
& - (x_{i+1,m+1,k} - x_{i-1,m+1,k})(y_{i,m+1,k+1} - y_{i,m+1,k-1})(z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}) - \\
& - (x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k})(y_{i+1,m+1,k} - y_{i-1,m+1,k})(z_{i,m+1,k+1} - z_{i,m+1,k-1});
\end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на $ABCD$:

$$v_{i,j,0} = \sqrt{v_{x i,j,0}^2 + v_{y i,j,0}^2 + v_{z i,j,0}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
v_{x i,j,0} = 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,j,0}} & \left((y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,0}) - \right. \\
& \left. - (y_{i,j,1} - y_{i,j,0})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{y i, j, 0} &= 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i, j, 0}} \left((x_{i, j, 1} - x_{i, j, 0}) (z_{i, j+1, 0} - z_{i, j-1, 0}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i, j+1, 0} - x_{i, j-1, 0}) (z_{i, j, 1} - z_{i, j, 0}) \right), \\
 v_{z i, j, 0} &= 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i, j, 0}} \left((x_{i, j+1, 0} - x_{i, j-1, 0}) (y_{i, j, 1} - y_{i, j, 0}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i, j, 1} - x_{i, j, 0}) (y_{i, j+1, 0} - y_{i, j-1, 0}) \right), \\
 J_{i, j, 0} &= (x_{i+1, j, 0} - x_{i-1, j, 0}) (y_{i, j+1, 0} - y_{i, j-1, 0}) (z_{i, j, 1} - z_{i, j, 0}) + \\
 &\quad + (x_{i, j, 1} - x_{i, j, 0}) (y_{i+1, j, 0} - y_{i-1, j, 0}) (z_{i, j+1, 0} - z_{i, j-1, 0}) + \\
 &\quad + (x_{i, j+1, 0} - x_{i, j-1, 0}) (y_{i, j, 1} - y_{i, j, 0}) (z_{i+1, j, 0} - z_{i-1, j, 0}) - \\
 &\quad - (x_{i, j, 1} - x_{i, j, 0}) (y_{i, j+1, 0} - y_{i, j-1, 0}) (z_{i+1, j, 0} - z_{i-1, j, 0}) - \\
 &\quad - (x_{i+1, j, 0} - x_{i-1, j, 0}) (y_{i, j, 1} - y_{i, j, 0}) (z_{i, j+1, 0} - z_{i, j-1, 0}) - \\
 &\quad - (x_{i, j+1, 0} - x_{i, j-1, 0}) (y_{i+1, j, 0} - y_{i-1, j, 0}) (z_{i, j, 1} - z_{i, j, 0});
 \end{aligned}$$

у внутрішніх вузлах сітки на $A_* B_* C_* D_*$:

$$\begin{aligned}
 v_{i, j, l+1} &= \sqrt{v_{x i, j, l+1}^2 + v_{y i, j, l+1}^2 + v_{z i, j, l+1}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \\
 v_{x i, j, l+1} &= 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i, j, l+1}} \left((y_{i, j+1, l+1} - y_{i, j-1, l+1}) (z_{i, j, l+1} - z_{i, j, l}) - \right. \\
 &\quad \left. - (y_{i, j, l+1} - y_{i, j, l}) (z_{i, j+1, l+1} - z_{i, j-1, l+1}) \right), \\
 v_{y i, j, l+1} &= 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i, j, l+1}} \left((x_{i, j, l+1} - x_{i, j, l}) (z_{i, j+1, l+1} - z_{i, j-1, l+1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i, j+1, l+1} - x_{i, j-1, l+1}) (z_{i, j, l+1} - z_{i, j, l}) \right), \\
 v_{z i, j, l+1} &= 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i, j, l+1}} \left((x_{i, j+1, l+1} - x_{i, j-1, l+1}) (y_{i, j, l+1} - y_{i, j, l}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i, j, l+1} - x_{i, j, l}) (y_{i, j+1, l+1} - y_{i, j-1, l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{i,j,l+1} = & (x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1})(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}) + \\
& + (x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l})(y_{i+1,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1})(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) + \\
& + (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l})(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1}) - \\
& - (x_{i,j,l+1} - x_{i,j,l})(y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j-1,l+1})(z_{i+1,j,l+1} - z_{i-1,j,l+1}) - \\
& - (x_{i+1,j,l+1} - x_{i-1,j,l+1})(y_{i,j,l+1} - y_{i,j,l})(z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j-1,l+1}) - \\
& - (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j-1,l+1})(y_{i+1,j,l+1} - y_{i-1,j,l+1})(z_{i,j,l+1} - z_{i,j,l}) ;
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AB :

$$v_{0,j,0} = \sqrt{v_{x0,j,0}^2 + v_{y0,j,0}^2 + v_{z0,j,0}^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
v_{x0,j,0} = & \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,0}} \left((y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) - \right. \\
& \left. - (y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y0,j,0} = & \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,0}} \left((x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z0,j,0} = & \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,0}} \left((x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{0,j,0} = & (x_{1,j,0} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) + \\
& + (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{1,j,0} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) + \\
& + (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - \\
& - (x_{0,j,1} - x_{0,j,0})(y_{0,j+1,0} - y_{0,j-1,0})(z_{1,j,0} - z_{0,j,0}) - \\
& - (x_{1,j,0} - x_{0,j,0})(y_{0,j,1} - y_{0,j,0})(z_{0,j+1,0} - z_{0,j-1,0}) - \\
& - (x_{0,j+1,0} - x_{0,j-1,0})(y_{1,j,0} - y_{0,j,0})(z_{0,j,1} - z_{0,j,0}) ;
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на CD :

$$v_{n+1,j,0} = \sqrt{v_{x\,n+1,j,0}^2 + v_{y\,n+1,j,0}^2 + v_{z\,n+1,j,0}^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$v_{x\,n+1,j,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,0}} \left((y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) - (y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) \right),$$

$$v_{y\,n+1,j,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,0}} \left((x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) \right),$$

$$v_{z\,n+1,j,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,0}} \left((x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0}) - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0}) \right),$$

$$\begin{aligned} J_{n+1,j,0} = & (x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}) + \\ & + (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) + \\ & + (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0}) - \\ & - (x_{n+1,j,1} - x_{n+1,j,0})(y_{n+1,j+1,0} - y_{n+1,j-1,0})(z_{n+1,j,0} - z_{n,j,0}) - \\ & - (x_{n+1,j,0} - x_{n,j,0})(y_{n+1,j,1} - y_{n+1,j,0})(z_{n+1,j+1,0} - z_{n+1,j-1,0}) - \\ & - (x_{n+1,j+1,0} - x_{n+1,j-1,0})(y_{n+1,j,0} - y_{n,j,0})(z_{n+1,j,1} - z_{n+1,j,0}); \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на BC :

$$v_{i,m+1,0} = \sqrt{v_{x\,i,m+1,0}^2 + v_{y\,i,m+1,0}^2 + v_{z\,i,m+1,0}^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$v_{x\,i,m+1,0} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,0}} \left((y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) - (y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) \right),$$

$$v_{y\,i,m+1,0} = 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,0}} \left((x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) \right),$$

$$\begin{aligned}
& -\left(x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0}\right)\left(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}\right), \\
v_{z\,i,m+1,0} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,0}} \left(\left(x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0}\right)\left(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0}\right) - \right. \\
& \left. -\left(x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0}\right)\left(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0}\right) \right), \\
J_{i,m+1,0} &= (x_{i+1,m+1,0} - x_{i-1,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0}) + \\
& + (x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(y_{i+1,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) + \\
& + (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i+1,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) - \\
& - (x_{i,m+1,1} - x_{i,m+1,0})(y_{i,m+1,0} - y_{i,m,0})(z_{i+1,m+1,0} - z_{i-1,m+1,0}) - \\
& - (x_{i+1,m+1,0} - x_{i-1,m+1,0})(y_{i,m+1,1} - y_{i,m+1,0})(z_{i,m+1,0} - z_{i,m,0}) - \\
& - (x_{i,m+1,0} - x_{i,m,0})(y_{i+1,m+1,0} - y_{i-1,m+1,0})(z_{i,m+1,1} - z_{i,m+1,0});
\end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AD :

$$\begin{aligned}
v_{i,0,0} &= \sqrt{v_{x\,i,0,0}^2 + v_{y\,i,0,0}^2 + v_{z\,i,0,0}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \\
v_{x\,i,0,0} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,0}} \left((y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) - \right. \\
& \left. - (y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) \right), \\
v_{y\,i,0,0} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,0}} \left((x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) \right), \\
v_{z\,i,0,0} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,0,0}} \left((x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0}) \right), \\
J_{i,0,0} &= (x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) + \\
& + (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) + \\
& + (x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - z_{i-1,0,0}) - \\
& - (x_{i,0,1} - x_{i,0,0})(y_{i,1,0} - y_{i,0,0})(z_{i+1,0,0} - z_{i-1,0,0}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(x_{i+1,0,0} - x_{i-1,0,0})(y_{i,0,1} - y_{i,0,0})(z_{i,1,0} - z_{i,0,0}) - \\
 & -(x_{i,1,0} - x_{i,0,0})(y_{i+1,0,0} - y_{i-1,0,0})(z_{i,0,1} - z_{i,0,0}) ;
 \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на A_*B_* :

$$v_{0,j,l+1} = \sqrt{v_{x0,j,l+1}^2 + v_{y0,j,l+1}^2 + v_{z0,j,l+1}^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
 v_{x0,j,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,l+1}} & \left((y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) - \right. \\
 & \left. - (y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{y0,j,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,l+1}} & \left((x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - \right. \\
 & \left. - (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{z0,j,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,j,l+1}} & \left((x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l}) - \right. \\
 & \left. - (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{0,j,l+1} = & (x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) + \\
 & + (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) + \\
 & + (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - \\
 & - (x_{0,j,l+1} - x_{0,j,l})(y_{0,j+1,l+1} - y_{0,j-1,l+1})(z_{1,j,l+1} - z_{0,j,l+1}) - \\
 & - (x_{1,j,l+1} - x_{0,j,l+1})(y_{0,j,l+1} - y_{0,j,l})(z_{0,j+1,l+1} - z_{0,j-1,l+1}) - \\
 & - (x_{0,j+1,l+1} - x_{0,j-1,l+1})(y_{1,j,l+1} - y_{0,j,l+1})(z_{0,j,l+1} - z_{0,j,l}) ;
 \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на C_*D_* :

$$v_{n+1,j,l+1} = \sqrt{v_{xn+1,j,l+1}^2 + v_{yn+1,j,l+1}^2 + v_{zn+1,j,l+1}^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
 v_{xn+1,j,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} & \left((y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) - \right. \\
 & \left. - (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y\,n+1,j,l+1} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} \left((x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l}) (z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - \right. \\
&\quad \left. - (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1}) (z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) \right), \\
v_{z\,n+1,j,l+1} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,j,l+1}} \left((x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1}) (y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l}) - \right. \\
&\quad \left. - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l}) (y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1}) \right), \\
J_{n+1,j,l+1} &= (x_{n+1,j,l+1} - x_{n,j,l+1})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}) + \\
&\quad + (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) + \\
&\quad + (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1}) - \\
&\quad - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n+1,j,l})(y_{n+1,j+1,l+1} - y_{n+1,j-1,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n,j,l+1}) - \\
&\quad - (x_{n+1,j,l+1} - x_{n,j,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n+1,j,l})(z_{n+1,j+1,l+1} - z_{n+1,j-1,l+1}) - \\
&\quad - (x_{n+1,j+1,l+1} - x_{n+1,j-1,l+1})(y_{n+1,j,l+1} - y_{n,j,l+1})(z_{n+1,j,l+1} - z_{n+1,j,l}); \\
&\text{у граничних вузлах сітки на } B_*C_* :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,m+1,l+1} &= \sqrt{v_{x\,i,m+1,l+1}^2 + v_{y\,i,m+1,l+1}^2 + v_{z\,i,m+1,l+1}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \\
v_{x\,i,m+1,l+1} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1}) (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - \right. \\
&\quad \left. - (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l}) (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) \right), \\
v_{y\,i,m+1,l+1} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1}) (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - \right. \\
&\quad \left. - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1}) (z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) \right), \\
v_{z\,i,m+1,l+1} &= 2 \frac{\Delta\varphi}{J_{i,m+1,l+1}} \left((x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1}) (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1}) - \right. \\
&\quad \left. - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l}) (y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i,m+1,l+1} = & (x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}) + \\
 & + (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i+1,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) + \\
 & + (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - \\
 & - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m+1,l})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m,l+1})(z_{i+1,m+1,l+1} - z_{i-1,m+1,l+1}) - \\
 & - (x_{i+1,m+1,l+1} - x_{i-1,m+1,l+1})(y_{i,m+1,l+1} - y_{i,m+1,l})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m,l+1}) - \\
 & - (x_{i,m+1,l+1} - x_{i,m,l+1})(y_{i+1,m+1,l+1} - y_{i-1,m+1,l+1})(z_{i,m+1,l+1} - z_{i,m+1,l}); \\
 & \text{у граничних вузлах сітки на } A_* D_* :
 \end{aligned}$$

$$v_{i,0,l+1} = \sqrt{v_{x i,0,l+1}^2 + v_{y i,0,l+1}^2 + v_{z i,0,l+1}^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned}
 v_{x i,0,l+1} = & 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,0,l+1}} \left((y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) - \right. \\
 & \left. - (y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{y i,0,l+1} = & 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,0,l+1}} \left((x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - \right. \\
 & \left. - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{z i,0,l+1} = & 2 \frac{\Delta \varphi}{J_{i,0,l+1}} \left((x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l}) - \right. \\
 & \left. - (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{i,0,l+1} = & (x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l}) + \\
 & + (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) + \\
 & + (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - \\
 & - (x_{i,0,l+1} - x_{i,0,l})(y_{i,1,l+1} - y_{i,0,l+1})(z_{i+1,0,l+1} - z_{i-1,0,l+1}) - \\
 & - (x_{i+1,0,l+1} - x_{i-1,0,l+1})(y_{i,0,l+1} - y_{i,0,l})(z_{i,1,l+1} - z_{i,0,l+1}) - \\
 & - (x_{i,1,l+1} - x_{i,0,l+1})(y_{i+1,0,l+1} - y_{i-1,0,l+1})(z_{i,0,l+1} - z_{i,0,l});
 \end{aligned}$$

у граничних вузлах сітки на AA_* :

$$v_{0,0,k} = \sqrt{v_{x0,0,k}^2 + v_{y0,0,k}^2 + v_{z0,0,k}^2}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x0,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,k}} \left((y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) \right),$$

$$v_{y0,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,k}} \left((x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - \right. \\ \left. - (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) \right),$$

$$v_{z0,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,k}} \left((x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k}) \right),$$

$$J_{0,0,k} = (x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1}) + \\ + (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) + \\ + (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - \\ - (x_{0,0,k+1} - x_{0,0,k-1})(y_{0,1,k} - y_{0,0,k})(z_{1,0,k} - z_{0,0,k}) - \\ - (x_{1,0,k} - x_{0,0,k})(y_{0,0,k+1} - y_{0,0,k-1})(z_{0,1,k} - z_{0,0,k}) - \\ - (x_{0,1,k} - x_{0,0,k})(y_{1,0,k} - y_{0,0,k})(z_{0,0,k+1} - z_{0,0,k-1});$$

у граничних вузлах сітки на BB_* :

$$v_{0,m+1,k} = \sqrt{v_{x0,m+1,k}^2 + v_{y0,m+1,k}^2 + v_{z0,m+1,k}^2}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x0,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,k}} \left((y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) \right),$$

$$v_{y0,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,k}} \left((x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - \right. \\ \left. - (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) \right),$$

$$v_{z\,0,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,k}} \left((x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k}) \right),$$

$$J_{0,m+1,k} = (x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1}) + \\ + (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) + \\ + (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - \\ - (x_{0,m+1,k+1} - x_{0,m+1,k-1})(y_{0,m+1,k} - y_{0,m,k})(z_{1,m+1,k} - z_{0,m+1,k}) - \\ - (x_{1,m+1,k} - x_{0,m+1,k})(y_{0,m+1,k+1} - y_{0,m+1,k-1})(z_{0,m+1,k} - z_{0,m,k}) - \\ - (x_{0,m+1,k} - x_{0,m,k})(y_{1,m+1,k} - y_{0,m+1,k})(z_{0,m+1,k+1} - z_{0,m+1,k-1});$$

у граничних вузлах сітки на CC_* :

$$v_{n+1,m+1,k} = \sqrt{v_{x\,n+1,m+1,k}^2 + v_{y\,n+1,m+1,k}^2 + v_{z\,n+1,m+1,k}^2}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x\,n+1,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) \right),$$

$$v_{y\,n+1,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - \right. \\ \left. - (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) \right),$$

$$v_{z\,n+1,m+1,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,k}} \left((x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k}) \right),$$

$$J_{n+1,m+1,k} = (x_{n+1,m+1,k} - x_{n,m+1,k})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1}) + \\ + (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) + \\ + (x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n,m+1,k}) - \\ - (x_{n+1,m+1,k+1} - x_{n+1,m+1,k-1})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n+1,m,k})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n,m+1,k}) -$$

$$-(x_{n+1,m+1,k} - x_{n,m+1,k})(y_{n+1,m+1,k+1} - y_{n+1,m+1,k-1})(z_{n+1,m+1,k} - z_{n+1,m,k}) - \\ -(x_{n+1,m+1,k} - x_{n+1,m,k})(y_{n+1,m+1,k} - y_{n,m+1,k})(z_{n+1,m+1,k+1} - z_{n+1,m+1,k-1});$$

у граничних вузлах сітки на DD_* :

$$v_{n+1,0,k} = \sqrt{v_{x\,n+1,0,k}^2 + v_{y\,n+1,0,k}^2 + v_{z\,n+1,0,k}^2}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$v_{x\,n+1,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1}) (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) \right),$$

$$v_{y\,n+1,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1}) (z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - \right. \\ \left. - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k}) (z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) \right),$$

$$v_{z\,n+1,0,k} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,k}} \left((x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k}) (y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1}) (y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k}) \right),$$

$$J_{n+1,0,k} = (x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1}) + \\ + (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) + \\ + (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - \\ - (x_{n+1,0,k+1} - x_{n+1,0,k-1})(y_{n+1,1,k} - y_{n+1,0,k})(z_{n+1,0,k} - z_{n,0,k}) - \\ - (x_{n+1,0,k} - x_{n,0,k})(y_{n+1,0,k+1} - y_{n+1,0,k-1})(z_{n+1,1,k} - z_{n+1,0,k}) - \\ - (x_{n+1,1,k} - x_{n+1,0,k})(y_{n+1,0,k} - y_{n,0,k})(z_{n+1,0,k+1} - z_{n+1,0,k-1});$$

у вершині A :

$$v_{0,0,0} = \sqrt{v_{x\,0,0,0}^2 + v_{y\,0,0,0}^2 + v_{z\,0,0,0}^2},$$

$$v_{x\,0,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \left((y_{0,1,0} - y_{0,0,0}) (z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) - \right. \\ \left. - (y_{0,0,1} - y_{0,0,0}) (z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) \right),$$

$$v_{y\,0,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \left((x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) \right),$$

$$v_{z\,0,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,0}} \left((x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0}) \right),$$

$$J_{0,0,0} = (x_{1,0,0} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0}) +$$

$$+ (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) +$$

$$+ (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) -$$

$$- (x_{0,0,1} - x_{0,0,0})(y_{0,1,0} - y_{0,0,0})(z_{1,0,0} - z_{0,0,0}) -$$

$$- (x_{1,0,0} - x_{0,0,0})(y_{0,0,1} - y_{0,0,0})(z_{0,1,0} - z_{0,0,0}) -$$

$$- (x_{0,1,0} - x_{0,0,0})(y_{1,0,0} - y_{0,0,0})(z_{0,0,1} - z_{0,0,0});$$

у вершині B :

$$v_{0,m+1,0} = \sqrt{v_{x\,0,m+1,0}^2 + v_{y\,0,m+1,0}^2 + v_{z\,0,m+1,0}^2},$$

$$v_{x\,0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) - \right.$$

$$\left. - (y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) \right),$$

$$v_{y\,0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) \right),$$

$$v_{z\,0,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,0}} \left((x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0}) \right),$$

$$J_{0,m+1,0} = (x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) +$$

$$\begin{aligned}
& +(x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) + \\
& +(x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) - \\
& -(x_{0,m+1,1} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,0} - y_{0,m,0})(z_{1,m+1,0} - z_{0,m+1,0}) - \\
& -(x_{1,m+1,0} - x_{0,m+1,0})(y_{0,m+1,1} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,0} - z_{0,m,0}) - \\
& -(x_{0,m+1,0} - x_{0,m,0})(y_{1,m+1,0} - y_{0,m+1,0})(z_{0,m+1,1} - z_{0,m+1,0}) ;
\end{aligned}$$

у вершині C :

$$v_{n+1,m+1,0} = \sqrt{v_{x\ n+1,m+1,0}^2 + v_{y\ n+1,m+1,0}^2 + v_{z\ n+1,m+1,0}^2} ,$$

$$\begin{aligned}
v_{x\ n+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} & \left((y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) - \right. \\
& \left. - (y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{y\ n+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} & \left((x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z\ n+1,m+1,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,0}} & \left((x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0})(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0}) - \right. \\
& \left. - (x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0})(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0}) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{n+1,m+1,0} = & (x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0})(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) + \\
& +(x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0})(y_{n+1,m+1,0} - y_{n,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) + \\
& +(x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0})(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n,m+1,0}) - \\
& -(x_{n+1,m+1,1} - x_{n+1,m+1,0})(y_{n+1,m+1,0} - y_{n+1,m,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n,m+1,0}) - \\
& -(x_{n+1,m+1,0} - x_{n,m+1,0})(y_{n+1,m+1,1} - y_{n+1,m+1,0})(z_{n+1,m+1,0} - z_{n+1,m,0}) - \\
& -(x_{n+1,m+1,0} - x_{n+1,m,0})(y_{n+1,m+1,0} - y_{n,m+1,0})(z_{n+1,m+1,1} - z_{n+1,m+1,0}) ;
\end{aligned}$$

у вершині D :

$$v_{n+1,0,0} = \sqrt{v_{x\ n+1,0,0}^2 + v_{y\ n+1,0,0}^2 + v_{z\ n+1,0,0}^2} ,$$

$$v_{x\,n+1,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left((y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}) - \right.$$

$$\left. - (y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) \right),$$

$$v_{y\,n+1,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left((x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0})(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}) \right),$$

$$v_{z\,n+1,0,0} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,0}} \left((x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0}) - \right.$$

$$\left. - (x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0}) \right),$$

$$J_{n+1,0,0} = (x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0})(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0}) +$$

$$+ (x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0})(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) +$$

$$+ (x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0}) -$$

$$- (x_{n+1,0,1} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,1,0} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,0,0} - z_{n,0,0}) -$$

$$- (x_{n+1,0,0} - x_{n,0,0})(y_{n+1,0,1} - y_{n+1,0,0})(z_{n+1,1,0} - z_{n+1,0,0}) -$$

$$- (x_{n+1,1,0} - x_{n+1,0,0})(y_{n+1,0,0} - y_{n,0,0})(z_{n+1,0,1} - z_{n+1,0,0});$$

у вершині A_* :

$$v_{0,0,l+1} = \sqrt{v_{x\,0,0,l+1}^2 + v_{y\,0,0,l+1}^2 + v_{z\,0,0,l+1}^2},$$

$$v_{x\,0,0,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left((y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) - \right.$$

$$\left. - (y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) \right),$$

$$v_{y\,0,0,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left((x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) - \right.$$

$$\left. - (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) \right),$$

$$v_{z\,0,0,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,0,l+1}} \left((x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l}) - \right. \\ \left. - (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1}) \right),$$

$$J_{0,0,l+1} = (x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l}) + \\ + (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) + \\ + (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l})(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) - \\ - (x_{0,0,l+1} - x_{0,0,l})(y_{0,1,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{1,0,l+1} - z_{0,0,l+1}) - \\ - (x_{1,0,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{0,0,l+1} - y_{0,0,l})(z_{0,1,l+1} - z_{0,0,l+1}) - \\ - (x_{0,1,l+1} - x_{0,0,l+1})(y_{1,0,l+1} - y_{0,0,l+1})(z_{0,0,l+1} - z_{0,0,l});$$

у вершині B_* :

$$v_{0,m+1,l+1} = \sqrt{v_{x\,0,m+1,l+1}^2 + v_{y\,0,m+1,l+1}^2 + v_{z\,0,m+1,l+1}^2},$$

$$v_{x\,0,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) - \right. \\ \left. - (y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) \right),$$

$$v_{y\,0,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) - \right. \\ \left. - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) \right),$$

$$v_{z\,0,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{0,m+1,l+1}} \left((x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l}) - \right. \\ \left. - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1}) \right),$$

$$J_{0,m+1,l+1} = (x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) + \\ + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m,l+1}) + \\ + (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) - \\ - (x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m,l+1})(z_{1,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l+1}) -$$

$$\begin{aligned}
 & -(x_{1,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l+1})(y_{0,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l}) - \\
 & -(x_{0,m+1,l+1} - x_{0,m+1,l})(y_{1,m+1,l+1} - y_{0,m+1,l+1})(z_{0,m+1,l+1} - z_{0,m+1,l});
 \end{aligned}$$

у вершині C_* :

$$v_{n+1,m+1,l+1} = \sqrt{v_{x\ n+1,m+1,l+1}^2 + v_{y\ n+1,m+1,l+1}^2 + v_{z\ n+1,m+1,l+1}^2},$$

$$\begin{aligned}
 v_{x\ n+1,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,l+1}} & \left((y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - \right. \\
 & \left. - (y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{y\ n+1,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,l+1}} & \left((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - \right. \\
 & \left. - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{z\ n+1,m+1,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,m+1,l+1}} & \left((x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) - \right. \\
 & \left. - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{n+1,m+1,l+1} = & (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n,m+1,l+1})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \\
 & + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) + \\
 & + (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - \\
 & - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - \\
 & - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l}) - \\
 & - (x_{n+1,m+1,l+1} - x_{n+1,m+1,l})(y_{n+1,m+1,l+1} - y_{n+1,m+1,l})(z_{n+1,m+1,l+1} - z_{n+1,m+1,l});
 \end{aligned}$$

у вершині D_* :

$$v_{n+1,0,l+1} = \sqrt{v_{x\ n+1,0,l+1}^2 + v_{y\ n+1,0,l+1}^2 + v_{z\ n+1,0,l+1}^2},$$

$$v_{x\ n+1,0,l+1} = \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}} \left((y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\left(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l}\right)\left(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}\right), \\
v_{y\ n+1,0,l+1} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}}\left(\left(x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l}\right)\left(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}\right) - \right. \\
& \left. -\left(x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1}\right)\left(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}\right)\right), \\
v_{z\ n+1,0,l+1} &= \frac{\Delta\varphi}{J_{n+1,0,l+1}}\left(\left(x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1}\right)\left(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l}\right) - \right. \\
& \left. -\left(x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l}\right)\left(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1}\right)\right), \\
J_{n+1,0,l+1} &= (x_{n+1,0,l+1} - x_{n,0,l+1})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}) + \\
& + (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) + \\
& + (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1}) - \\
& - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n+1,0,l})(y_{n+1,1,l+1} - y_{n+1,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n,0,l+1}) - \\
& - (x_{n+1,0,l+1} - x_{n,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n+1,0,l})(z_{n+1,1,l+1} - z_{n+1,0,l+1}) - \\
& - (x_{n+1,1,l+1} - x_{n+1,0,l+1})(y_{n+1,0,l+1} - y_{n,0,l+1})(z_{n+1,0,l+1} - z_{n+1,0,l}).
\end{aligned}$$

Програмна реалізація алгоритму та числові приклади. Вище описаний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT, яка дозволяє використовувати як одно-, так і багатопроцесорну архітектуру. Для перевірки його коректності проведена серія числових експериментів на тестовому прикладі при

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= (x + 2.6197848)^2 + y^2 + z^2 - 137.8525137, \\
f_2(x, y, z) &= (x - 52.6197848)^2 + y^2 + z^2 - 137.8525137, \quad f_3(x, y, z) = (x - 25)^2 + \\
& + (y - 14.4337567)^2 + z^2 - 833.3333333, \quad f_4(x, y, z) = (x - 25)^2 + (y + 14.4337567)^2 + \\
& + z^2 - 833.3333333, \quad f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 25) + y^2 + z^2)^2 + 2500y^2 - \\
& - 833.3333333z^2, \quad \varphi_* = -1.5, \quad \varphi^* = 1.5.
\end{aligned}$$

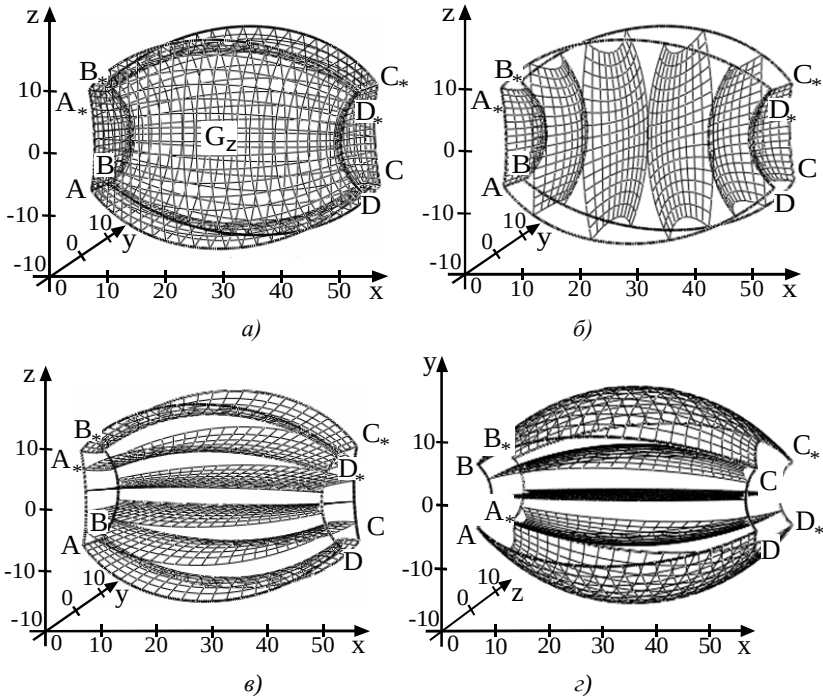


Рис. 2. Фізична область G_z (а) та відповідні їй
еквіпотенціальні поверхні (б) і поверхні течії (в, г)

На рис. 2 а зображено отриману в результаті обчислень динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / n$, $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / m$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k = (Q^* \cdot k) / l$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$, $k = \overline{0, l}$ при $n = 30$, $m = 15$, $l = 15$, $\varepsilon = 10^{-5}$ (параметри m , l вибиралися з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), на рис. 2 б – еквіпотенціальні поверхні $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i$ ($i = 0, 6, 12, 18, 24, 30$), на рис. 2 в та рис. 2 г – відповідно поверхні течії $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_i$ ($i = 0, 3, 6, 9, 12, 15$) і $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_i$ ($i = 0, 3, 7, 12, 15$), а на рис. 3 величина

швидкості фільтрації $|v|$ вздовж поверхонь течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_i$ ($i = 0, 2, 4, 6$). При цьому $Q = 3.76991$, $Q_* = 2.0944$, $Q^* = 1.8$, нев'язка рівняння Лапласа становить 0.004.

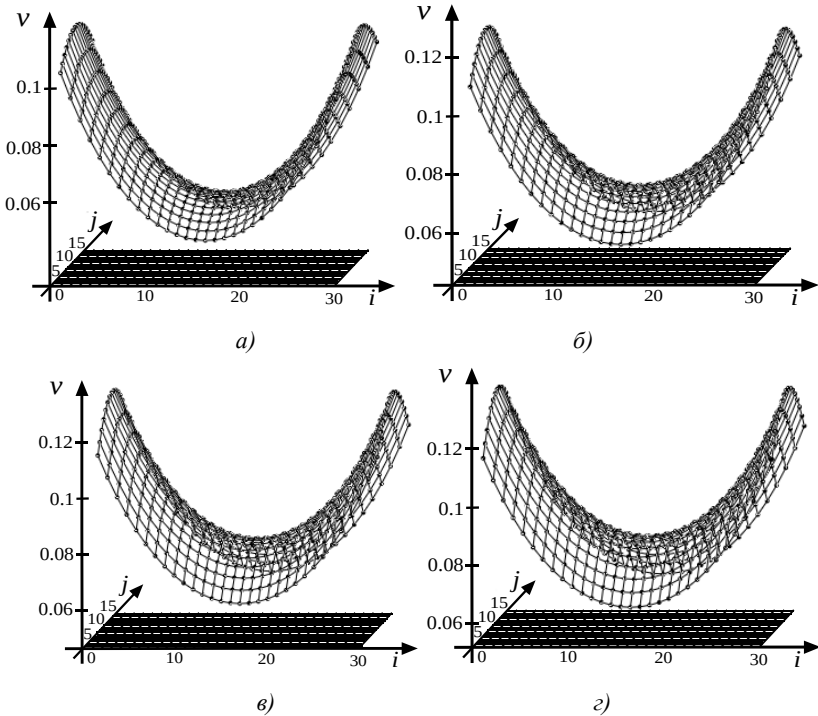


Рис. 3. Розподіл величини швидкості фільтрації відповідно вздовж поверхонь течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_0$ (а), $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_2$ (б), $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ (в) і $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_6$ (з)

Висновки і зауваження.

1. Розв'язання обернених крайових задач на конформні відображення дозволяє автоматично вирішити проблему побудови сітки (більше того, сітка в G_z , що відповідає рівномірній сітці в G_w , є гідродинамічною сіткою руху) та одночасно із побудовою гідродинамічної сітки руху визначити фільтраційну витрату Q .
2. Отримані за наведеним вище алгоритмом гідродинамічні сітки є

- зручними для розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації підземних вод, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої поверхнями течії і еквіпотенціальними поверхнями, до відповідної області комплексного потенціалу.
3. Зазначимо, що нелінійність, яка породжується переходом від прямої задачі до оберненої є локалізованою і суттєво не впливає на хід розрахунку даної задачі.

1. *Павловский Н.Н.* Движение грунтовых вод. Собр. сочинений: В 2 т. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.- Т. 2, 771 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-Кочиной П.Я.- Москва: Наука, 1969.- 546с.
3. *Пригорницький Д.О.* Математичне моделювання збурень фільтраційних процесів у пористих пластах: Дис. ... канд. тех. наук: 01.02.05.- Тернопіль., 2006.- 162 с.
4. *Каиштан С.С.* Математичне моделювання фільтраційних деформацій в ґрунтах з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища та процесу: Дис. ... канд. тех. наук: 01.02.05.- Тернопіль., 2004.- 172 с.
5. *Рауз. Х.* Механика жидкости.- М.: Стройиздат.- 1967.- 390 с.
6. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- Москва: Мир, 1975.- 558с.
7. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы.- М.: Мир, 1986.- 446 с.
8. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы.- М.: Наука, 1989.- 430с.
9. *Слепцов А.Г.* Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач // Моделирование в механике.- Вып. 5 (22), №2.- Новосибирск, 1991.- С. 101-126.
10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике.- М.: Мир, 1985.- 589 с.
11. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа.- М.: Наука, 1967.- 368 с.
12. *Мотигін В.В., Роптанов В.І., Дудатьєв А.В.* Чисельні методи в інженерних дослідженнях. Частина І. Теоретичні відомості. Навчальний посібник.- Вінниця: ВНТУ, 2004.- 102 с.
13. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т.- Т. 1. Осн. положения и общ. методы.- М., Мир, 1991.- 502 с.
14. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т.- Т. 2. Методы расчета различных течений.- М., Мир, 1991.- 552 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

E-mail: klimyuk@ukr.net

dmitry@prigornitsky.com

Надійшла 11.08.2008

Климюк Ю.Е., Пригорницкий Д.А. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ // *Построен алгоритм нахождения решения задачи на конформное отображение криволинейного параллелепипеда, ограниченного двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения, на соответствующий прямоугольный.*

Klymyuk Yu.Ye., Prigornitsky D.A. NUMERICAL SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON SPATIAL CONFORMAL MAPPINGS OF CURVILINEAR PARALLELEPIPEDS ONTO RECTANGULAR ONES // *Algorithm of solving of problem on conformal mapping of curvilinear parallelepiped bounded by two equipotential surface and four surfaces of flow onto corresponding rectangular one is designed.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 5 (14)

Відповідальний за випуск
Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2008 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12