

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК  
СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 5 (14)**

Рівне-2008

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів ВНЗ, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашковській М.О.
Бомба А.Я. ( <i>головний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. ( <i>секретар</i> )
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопечкий В.В. ( <i>консультант</i> )
Каштан С.С.	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 4 від 28.11.2008 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: +380362260444 . E-mail: vmvspm@gmail.com

### Зміст

<i>Боголюбов М.М. (мол.), Прикарпатський А.К. Про інтегровність багатовимірних диференціальних систем типу М. Громова на ріманових поверхнях .....</i>	5
<i>Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Присяжнюк І.М. Числово-асимптотичне розв'язання сингулярно збурених задач типу „фільтрація–конвекція–дифузія” в областях з вільними межами .....</i>	27
<i>Бомба А.Я., Теребус А.В. Просторові гармонічні многочлени та аналоги крайових задач на конформні відображення .....</i>	39
<i>Булавацький В.М. Узагальнена математична модель процесу фільтраційної консолідації, як процесу в системі з подвійною релаксацією .....</i>	64
<i>Возняк О.Г. Інтегральне зображення розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь .....</i>	76
<i>Дейнека О.Ю. Обмежені розв'язки однієї крайової задачі для системи телеграфних рівнянь .....</i>	98
<i>Климюк Ю.Є., Пригорницький Д.О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні .....</i>	104
<i>Кривень В.А., Гром'як Р.С., Лазар В.Ф., Самборська М.М. Міжфазне пластичне відшарування жорсткого циліндричного включення за поздовжнього зсуву .....</i>	144
<i>Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Сітковий інформаційний оператор-інтерполянт з використанням інтерліанту та оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій .....</i>	151
<i>Литвин О.М., Першина Ю.І. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням мішаної апроксимації .....</i>	162
<i>Недашковський М.О. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків матричних рівнянь .....</i>	174

<b>Попов О.Г., Прохур М.З.</b> Паралельні алгоритми в стаціонарних моделях гідродинаміки при використанні рознесених сіток.....	196
<b>Присяжнюк І.М., Трохимчук О.Я., Фурсачик О.А.</b> Математичне моделювання сингулярно-збурених процесів конвективної дифузії за умов неповних даних при наявності невідомих джерел забруднення.....	210
<b>Сафоник А.П.</b> Числово-асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування з післядією.....	230
<b>Устьян Н.Ю.</b> Дослідження двох методів для знаходження оптимальної стратегії гравця в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу.....	241
<b>Тарновецька О.Ю.</b> Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур'є на сегменті полярної вісі.....	253
<b>Цегелик Г.Г., Лецишин Н.Р.</b> Екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь .....	265
<b>Рзаєв Р.Р., Алієв Е.Р.</b> Обчислення і прогнозування секторальних індексів соціально-економічного розвитку регіонів .....	277
<b>Шпортко О.В.</b> Алгоритми оптимізації розкладу LZ77 та вибору розмірів блоків динамічних кодів Хафмана для стиснення даних у форматі DEFLATE .....	297
<b>Янчук П.С.</b> Комплексні квазіспектральні поліноми інтеграла із змінною верхньою границею.....	312

#### Хроніка

До 60-ліття від дня народження Євгена Ярославовича Чаплі.....	330
Зарис наукової біографії Анатолія Карольовича Прикарпатського .....	334

УДК 519.63.4.001.57+517.95

**Присяжнюк І.М., Трохимчук О.Я., Фурсачик О.А.**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ЗА УМОВ НЕПОВНИХ ДАНИХ ПРИ НАЯВНОСТІ НЕВІДОМИХ ДЖЕРЕЛ ЗАБРУДНЕННЯ**

*Побудовано асимптотичне наближення розв'язку оберненої сингулярно-збуреної задачі типу „конвекція-дифузія” у двозв'язній криволінійній області, обмеженій двома екіпотенціальними лініями. Особливість задачі полягає у врахуванні впливу на процес невідомих джерел забруднення, що мають конкретно визначену фізико-хімічну інтерпретацію. Наведено результати числових розрахунків.*

**Вступ.** У роботах [1 – 2] та ін., ґрунтуючись на відомій публікації Вішика В.Й., Люстерника Л.А. [3], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно-збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга тощо) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. Разом з тим, аналіз та дослідження робіт [2, 4] показує, що найбільш ефективною методикою розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. Ці методи успішно застосовано до розв'язування задач типу „конвекція–дифузія” в дво- та тривз'язних областях, обмежених двома екіпотенціальними лініями (внутрішнім та зовнішнім гладкими замкненими контурами) [7 – 9], а також до розв'язування аналогічних обернених задач з невідомим залежним від фізичних координат двозв'язної області коефіцієнтом дифузії [10]. Останні задачі представляють значний практичний інтерес, оскільки дозволяють визначити певні параметри процесів масопереносу шляхом математичних розрахунків без проведення фізичних експериментів.

Дослідженню характеру коректності, зокрема стійкості розв'язку та можливості регуляризації такого роду задач, присвячені праці Тихонова А.М., Лаврентьева М.М., Щеглова О.Ю., Pucci С., Cannon J.R., Ginsberg F., Knabner P., Vessela S., Manselli P., Miller K., Hao D.N., Іванчова М.І. та ін. [5, 6].

У цій роботі йдеться про асимптотичне розв'язання розв'язків задач типу “конвекція–дифузія”, якщо відомо, що невідомий коефіцієнт дифузії  $D$  залежить лише від часу ( $D = \varepsilon a(t)$ ), а невідома функція масообміну – від фізичних координат двозв'язної області ( $F = \varepsilon s(x, y)$ ).

**Постановка задачі.** Ескалацію забруднюючих речовин у однорідних пористих середовищах (грунтах) з врахуванням додаткових джерел забруднення для фізичних областей виду  $G = G_z \times (0, \infty)$ , де  $z = x + iy$ ,  $G_z$  – двозв'язна криволінійна область, обмежена двома замкненими гладкими контурами  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  – внутрішній,  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  – зовнішній (рис. 1 а), можна описати такою моделлю:

$$\varepsilon a(t) \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} + \varepsilon s(x, y) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

$$c|_{L_*} = c_*(M, t), \quad c|_{L^*} = c^*(M, t), \quad c(M, 0) = c_0^0(M), \quad (2)$$

$$a(t) \int_{L_*} \frac{\partial c(M, t)}{\partial n} dl = c_*(t)l, \quad c(x, y, T) - \bar{c}(x, y, T) = \varepsilon \Delta h(x, y), \quad (3)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \quad (4)$$

де  $c(x, y, t)$  – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\bar{c}(x, y, t)$  – концентрація розчинної речовини при відсутності функції забруднення ( $s(x, y) = 0$ ),  $M$  – біжуча точка відповідної кривої,  $n$  – зовнішня нормаль до відповідної кривої,

$\varepsilon a(t)$  – коефіцієнт дифузії,  $a(t)$  – достатньо гладка обмежена функція,  $\varepsilon \Delta h(x, y)$  – зміна концентрації за час  $T$ ,  $\Delta h(x, y)$  – функція координат фізичної області (відома),  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $\varphi, v_x, v_y$  – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в пористому середовищі  $G_z$ .

Припустимо, що задача (4), шляхом побудови конформного відображення  $G_z \setminus \Gamma \rightarrow G_w$ , де  $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$  – розріз двозв'язної області  $G_z$  уздовж однієї з ліній течії, а  $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$  – відповідна  $G_z$  область комплексного потенціалу (рис. 1 б),  $\psi = \psi(x, y)$  – функція течії (комплексно спряжена до  $\varphi = \varphi(x, y)$ ), є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості  $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ .

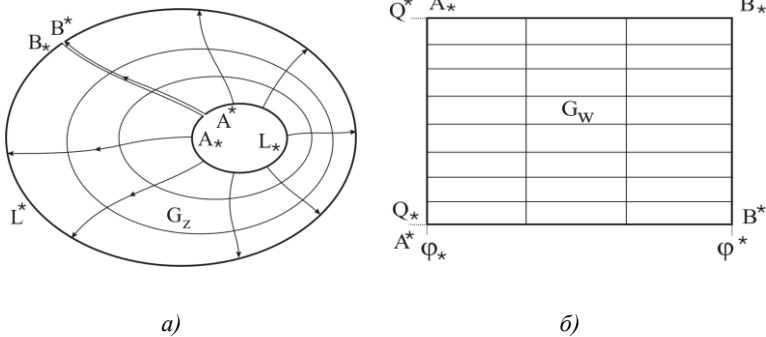


Рис. 1. Фізична двозв'язна область  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

Тоді, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  у рівнянні (1) та умовах (2), (3), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області  $G_w$ :

$$\varepsilon a(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) u_{\varphi} + \varepsilon q(\varphi, \psi) = u_t, \quad (5)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t), \quad (6)$$

$$a(t) \int_{Q_*}^{Q^*} u_{\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t) \cdot Q, u(\varphi, \psi, T) - \bar{u}(\varphi, \psi, T) = \varepsilon h(\varphi, \psi), \quad (7)$$

тут  $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ ,  $q(\varphi, \psi) = s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$  і т.д.

**Асимптотика розв'язку.** Розв'язки задач (5) – (7) на знаходження невідомих  $u(\varphi, \psi, t)$  та  $a(t)$  з точністю  $O(\varepsilon^2)$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів

$$u(\varphi, \psi, t) = (u_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon u_1(\varphi, \psi, t)) + \sum_{i=0}^2 \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + r(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (8)$$

$$a(t) = a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a(t, \varepsilon), \quad (9)$$

де  $u_i(\varphi, \psi, t)$ ,  $a_i(t)$  ( $i = 0, 1$ ) – регулярна частина асимптотики, зокрема  $u_0(\varphi, \psi, t)$  – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу),  $u_1(\varphi, \psi, t)$  – поправка, яка враховує “вплив” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки),  $\pi_i(\xi, \psi, t)$  ( $i = 0, 2$ ) – поправки на виході фільтраційного потоку,  $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$  – відповідне регуляризуюче перетворення,  $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ ,  $r_a(t, \varepsilon)$  – залишкові члени.

В результаті підстановки (8) і (9) в (5) – (7) та виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра  $\varepsilon$  дістанемо такі рівняння для знаходження регулярних членів асимптотики [7 – 9]:



$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ u_0(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(t) \int_{Q_*^*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t) Q,$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{1\varphi} + u_{1t} = a_0(t) v^2(\varphi, \psi) \cdot (u_{0\varphi\varphi} + u_{0\psi\psi}) + q(\varphi, \psi), \\ u_k(\varphi, \psi, 0) = 0, u_k(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

$$a_1(t) \int_{Q_*^*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = -a_0(t) \int_{Q_*^*} u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi.$$

Розв'язки цих задач запишуться у вигляді

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(t) = \frac{u_*^*(t) Q}{\int_{Q_*^*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_1(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi)) + q(\tilde{\varphi}, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t (g_1(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) + q(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi)) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_1(t) = -\frac{a_0(t) \int_{Q_*^*} u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*^*} u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}, t \in [0, T],$$

де  $g_1(\varphi, \psi, t) = a_0(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{0\varphi\varphi} + u_{0\psi\psi})$ ,  $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$ ,  $f^{-1}$  –

функція обернена до  $f$  по змінній  $\varphi$ .

Для знаходження  $q(\varphi, \psi)$ , використавши другу частину (7),

матимемо

$$\begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{q(\tilde{\varphi}, \psi)}{v^2(\varphi, \psi)} d\tilde{\varphi} = h(\varphi, \psi), T \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^T q(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - T + \tilde{t}, \psi), \psi) d\tilde{t} = h(\varphi, \psi), T < f(\varphi, \psi). \end{cases}$$

Вибравши  $T \geq \max_{\psi} (f(\varphi^*, \psi))$  (час проведення експерименту досить великий – подібний природному процесу), або ввівши заміну  $\theta = f^{-1}(f(\varphi, \psi) - T + \tilde{t})$  і  $d\tilde{t} = \frac{d\theta}{v^2(\theta, \psi)}$  для другого рівняння останньої

системи, отримаємо рівняння

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi} q(\theta, \psi) \frac{1}{v^2(\theta, \psi)} d\theta = h(\varphi, \psi). \quad (10)$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним інтегральним рівнянням Вольтера I роду. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi} K(\tilde{\varphi}, \psi) q(\tilde{\varphi}, \psi) d\tilde{\varphi} = h(\varphi, \psi),$$

де  $K(\varphi, \psi) = \frac{1}{v^2(\varphi, \psi)}$ . В області комплексного потенціалу  $G_w = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$ :

$$\varphi_i = \varphi_* + ih_{\text{крок}}, \psi_j = Q_* + j \frac{(Q^* - Q_*)}{m}, h_{\text{крок}} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n} \quad (i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, m, n \in N),$$

фіксуємо верхню межу для кожного  $\psi = \psi_j, j = \overline{0, m}$  матимемо

$$\int_{\varphi_*}^{\varphi_i} K(\tilde{\varphi}, \psi_j) q(\tilde{\varphi}, \psi_j) d\tilde{\varphi} = h(\varphi_i, \psi_j), i = \overline{0, n}. \quad (11)$$

Отримані системи зведемо до СЛАР трикутного вигляду

$$\sum_{l=1}^i A_l K(\varphi_l, \psi_j) q(\varphi_l, \psi_j) = h(\varphi_i, \psi_j), i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де  $A_i$  – коефіцієнти однієї із квадратурних формул, яка використовується при заміні інтегралів в (11). У випадку використання формули прямокутників коефіцієнти  $A_i$  мають значення

$$A_i^{лів} = \begin{cases} h_{\text{крок}}, i = \overline{0, n-1}, \\ 0, i = n, \end{cases} ; A_i^{прав} = \begin{cases} 0, i = 0, \\ h_{\text{крок}}, i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Розв'язавши (12), отримаємо формули для обчислення значень функції  $q(\varphi, \psi)$  в точках  $(\varphi_i, \psi_j)$ :

$$q(\varphi_i, \psi_j) = \frac{h(\varphi_i, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{h_{\text{крок}} K(\varphi_i, \psi_j)}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m}. \quad (13)$$

На еквіпотенціальних лініях  $\varphi = \varphi_*$  та  $\varphi = \varphi^*$  покладемо  $q(\varphi_*, \psi) = q(\varphi^*, \psi) = 0$ , оскільки згідно (6) на  $A^* A_*$  і  $B^* B_*$  вже задані режими концентрації забруднюючої речовини, що визначаються функціями  $u_*(\psi, t)$  і  $u^*(\psi, t)$  відповідно.

Врахувавши, що  $\frac{h(\varphi_i, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{h_{\text{крок}}} = h_\varphi(\varphi_i, \psi_j)$  – різницєва форма запису похідної для функції  $h(\varphi, \psi)$  по змінній  $\varphi$ , то з (13) слідує

$$q(\varphi, \psi) = h_\varphi(\varphi, \psi) v^2(\varphi, \psi). \quad (14)$$

Похідну  $h_\varphi(\varphi, \psi)$  можемо замінити більш точною центральною похідною

$$h_\varphi(\varphi_i, \psi_j) = \frac{h(\varphi_{i+1}, \psi_j) - h(\varphi_{i-1}, \psi_j)}{2h_{\text{крок}}}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m}.$$

До (14) можна також прийти, використавши формулу  $\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$ , при взятті частинних похідних по змінній  $\varphi$  від обох частин інтегрального рівняння (10).

З метою задовольнити другу крайову умову будується зовнішня

примежова функція  $\pi = \sum_{i=0}^2 \pi_i \varepsilon^i$  в околі  $\varphi = \varphi^*$  (на виході фільтраційного потоку) таким чином, щоб функція  $u(\varphi, \psi, t)$  задовольняла як дане рівняння, так і всі крайові умови. Для цього вводиться заміна (розтяг)  $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$ .

Врахувавши співвідношення  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ ,

перепишемо оператор  $L\pi = \varepsilon a(t)v^2(\varphi, \psi)\Delta\pi - v^2(\varphi, \psi)\pi_\varphi + \varepsilon q(\varphi, \psi) - \pi_t$  у вигляді змінних  $(\xi, \psi, t)$ :

$$L\pi = a(t)v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \left( \frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon\pi_{\psi\psi} \right) + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) \frac{\pi_\xi}{\varepsilon} + \varepsilon q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) - \pi_t.$$

Розкладемо  $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$  та  $q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi)$  в ряди Тейлора в околі  $\varphi = \varphi^*$

$$v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = v^2(\varphi^*, \psi) - 2v(\varphi^*, \psi)v'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + (v'^2(\varphi^*, \psi) + v(\varphi^*, \psi)v''(\varphi^*, \psi))\varepsilon^2\xi^2 + \dots,$$

$$q(\varphi^* - \xi\varepsilon, \psi) = q(\varphi^*, \psi) - q'(\varphi^*, \psi)\varepsilon\xi + \frac{1}{2}q''(\varphi^*, \psi)\varepsilon^2\xi^2 + \dots$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} a_0(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(t)\pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{0\xi}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - a_1(t)\pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t), \\ \pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Розв'язками одержаних диференціальних рівнянь будуть вирази

$$\pi_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}},$$

$$\pi_1(\xi, \psi, t) = \left[ (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left( \frac{a_1(t)\xi}{a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)\xi}{a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} - \frac{a_0'(t)\xi^2}{2a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - u_1(\varphi^*, \psi, t) - (u_t^*(\psi, t) - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t)) \frac{\xi}{v^2(\varphi^*, \psi)} \right] e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}.$$

Для знаходження  $\pi_2(\xi, \psi, t)$  маємо задачу Коші

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(t)\pi_{2\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{2\xi}(\xi, \psi, t) = 2v_\varphi(\varphi^*, \psi) \frac{\pi_{0t}(\xi, \psi, t)}{v^3(\varphi^*, \psi)} \xi + \\ + \frac{\pi_{1t}(\xi, \psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} - a_0(t)\pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) - a_1(t)\pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t), \\ \pi_2(0, \psi, t) = 0, \quad \pi_2 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{array} \right.$$

ЗВІДКИ

$$\begin{aligned} \pi_2(\xi, \psi, t) = & \left[ \left( a_0(t)(u_{\psi\psi}^*(\psi, t) - u_{0\psi\psi}(\varphi^*, \psi, t)) + \frac{a_0'(t)}{a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} (u_{1t}(\varphi^*, \psi, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - a_1(t)(u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t))) - \frac{a_1(t)}{a_0^2(t)} u_1(\varphi^*, \psi, t) \right) \xi - \left( a_0'(t) \frac{1}{a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} (u_t^*(\psi, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t)) - a_1(t)(u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \right) \left( \frac{a_1(t)}{2a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)}{2a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{a_0'(t)}{2a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \left( \frac{u_1(\varphi^*, \psi, t)}{2} - (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left( \frac{a_1'(t)a_0(t) + 2a_0'(t)a_1(t)}{2a_0^3(t)} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_0''(t)a_0(t) - a_0'^2(t)}{2a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) + \frac{u_{1t}^*(\psi, t) - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t)}{2v^2(\varphi^*, \psi)} \right) - \frac{u_{0t}(\varphi^*, \psi, t) - u_t^*(\psi, t)}{v^2(\varphi^*, \psi)} \left( \frac{v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{v(\varphi^*, \psi)} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{a_1(t)}{2a_0^2(t)} \right) \right] \left( \xi^2 + 2a_0(t)\xi \right) + \left( \frac{(u_0(\varphi^*, \psi, t) - u^*(\psi, t))a_0'(t)}{a_0^2(t)v^2(\varphi, \psi)} \left[ \frac{a_1(t)}{6a_0^2(t)} + \frac{2v_\varphi(\varphi^*, \psi)}{3v(\varphi^*, \psi)} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{a_1(t)}{3a_0^2(t)} - \frac{a_0'(t)}{3a_0(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \right) \Bigg] + \frac{(u_t^*(\psi, t) - u_{0t}(\varphi^*, \psi, t))a_0'(t)}{3a_0^2(t)v^2(\varphi^*, \psi)} \left( 1 + \frac{1}{2a_0^2(t)} a_0'(t) \right) + \\
 & + \frac{(a_0''(t)a_0(t) - 2a_0'^2(t))a_0'(t)}{6a_0^5(t)v^4(\varphi^*, \psi)} \Bigg) \left( \xi^3 + 3a_0(t)\xi^2 + 6a_0^2(t)\xi \right) - \frac{a_0'^2(t)}{8a_0^4(t)v^4(\varphi^*, \psi)} (u^*(\psi, t) - \\
 & - u_0(\varphi^*, \psi, t)) \left( \xi^4 + 4a_0(t)\xi^3 + 12a_0^2(t)\xi^2 + 24a_0^3(t)\xi \right) \Bigg] e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}.
 \end{aligned}$$

Залишкові члени  $r$  і  $r_a$  шукаємо із системи

$$\begin{cases}
 \varepsilon(a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a)v^2(\varphi, \psi) [r_{\varphi\varphi} + r_{\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi)r_{\varphi} = r_t + \varepsilon^2 g_1(\varphi, \psi, t), \\
 r_a(t, \varepsilon) = - \frac{(a_0(t) + \varepsilon a_1(t)) \int_{Q_*}^{Q^*} r_{\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi + \varepsilon^2 a_1(t) \int_{Q_*}^{Q^*} u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_{Q_*}^{Q^*} (u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) + \varepsilon u_{1\varphi}(\varphi_*, \psi, t) + r_{\varphi}(\varphi_*, \psi, t)) d\psi}, \\
 r(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = r(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = r(\varphi, Q_*, t, \varepsilon) = r(\varphi, Q^*, t, \varepsilon) = 0,
 \end{cases}$$

де  $g_1(\varphi, \psi, t)$  – функція, що виражається через відомі члени рядів (8) і (9):

$$\begin{aligned}
 g_1(\varphi, \psi, t) = & - (a_0(t) + \varepsilon a_1(t) + r_a)v^2(\varphi, \psi) \left( u_{1\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + \right. \\
 & \left. + u_{1\psi\psi}(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \pi_{2\varphi\varphi}(\xi, \psi, t) + \varepsilon \pi_{2\psi\psi}(\xi, \psi, t) \right) - \varepsilon q(\varphi, \psi), \quad \xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

На основі принципу максимуму для параболічних рівнянь маємо, що  $|r| \leq M$ .

**Числові розрахунки.** Наведемо одержані результати розрахунку процесу конвективної дифузії на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками  $z_1 = 0$  та  $z_2 = 4$  (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей  $Q_0 = 2\pi$ ), комплексний потенціал якого –  $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1)/(z - z_2))$ , при  $\varphi_* = -2.31$ ,

$$\varphi^* = -1.25, Q_* = 0, Q^* = 2\pi.$$

На рис. 2 зображено величину швидкості фільтрації  $v = \left( (dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2}$  та час проходження між еквіпотенціальними лініями  $t = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$  у вузлах  $(\varphi_i, \psi_j)$  для області комплексного потенціалу  $G_w$ :  $\varphi_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 28$ ,  $\psi_j = Q_* + ((Q^* - Q_*) \cdot j) / 28$ ,  $i = \overline{0, 28}$ ,  $j = \overline{0, 28}$ .

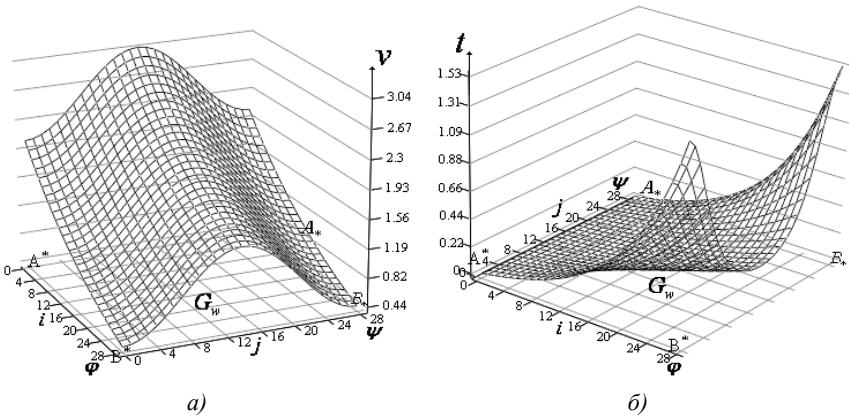
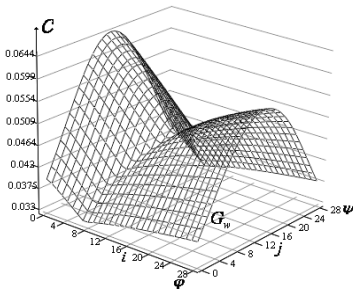


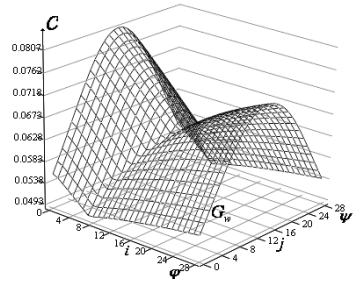
Рис. 2. Поле швидкості над належною їй областю комплексного потенціалу  $G_w$  (а) та відповідна поверхня часу (б)

Зміна у часі концентрації  $u(\varphi, \psi, t)$  розчинної речовини над областю комплексного потенціалу  $G_w$  при  $\varepsilon = 0.015$ ,  $u_*(\psi, t) = ((1 - 2te^t)25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi_*^2)^{-1}$ ,  $u^*(\psi, t) = ((1 - 5te^t)25 + (Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + \varphi^{*2})^{-1}$ ,  $u_0^0(\varphi, \psi) = ((Q^* - \psi)(\psi - Q_*) + 25 + \varphi^2)^{-1}$ ,  $u_*^*(t) = \frac{(t + e^{-5t})^2}{(e^{-5t} - 3)(t^2 + 7)^2}$ ,  $h(\varphi, \psi) = \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2 + 5}$  проілюстрована на рис. 3.

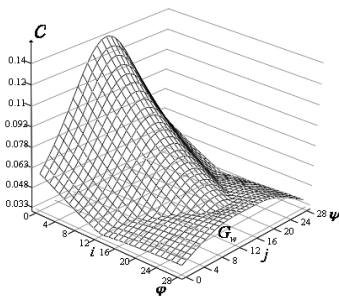


$t = 0.128$

а)

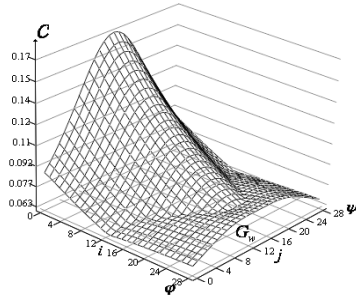


б)

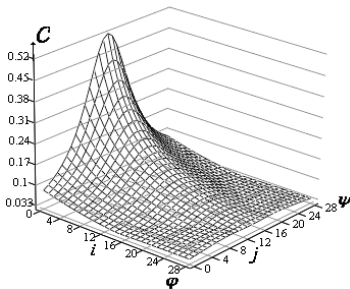


$t = 0.183$

в)

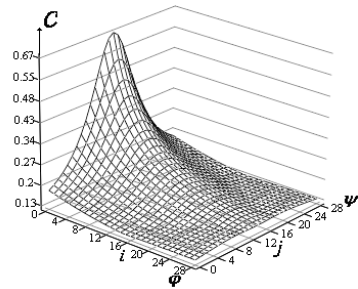


г)



$t = 0.235$

д)



е)

Рис. 3. Зміна концентрації забруднюючої речовини в різні моменти часу з врахуванням конвективних, дифузійних поправок (а, в, д) та додаткових джерел забруднення (б, г, е)



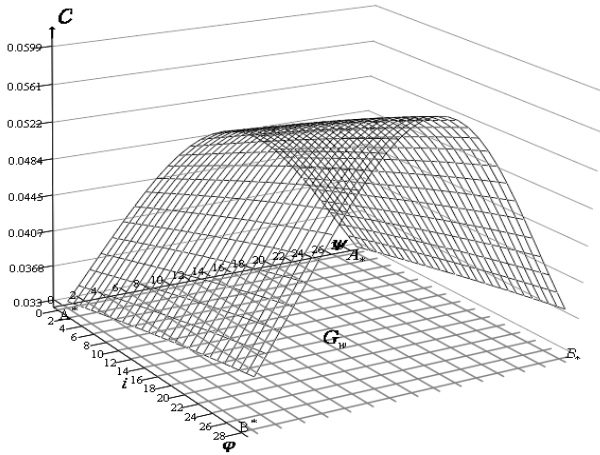


Рис. 4. Початковий розподіл забруднення

На рис. 4 показано початковий розподіл концентрації забруднюючої речовини  $u_0^0(\varphi, \psi)$ .

Основний вплив на зміну розподілу концентрації забруднюючої речовини, очевидно, здійснює конвективний перенос (конвекція). З меншим впливом на перерозподіл забруднення діють дифузійні поправки (дифузія). Загалом вплив конвекції і дифузії, як механічної і міжмолекулярної дії на розповсюдження забруднення із контура  $L_*$  (фактично джерела забруднення із режимом  $c_*(M, t)$ ) в область  $G_z$ , стає помітнішим із часом (рис. 3.(а,в,д)), і залежить від режиму  $c^*(M, t)$  на контурі  $L^*$ , що по суті є втоком (точніше буфером, шлюзом), в околі якого концентрація хімічної речовини може швидко відводитись чи накопичуватись в залежності від конкретно вибраної функції  $c^*(x, y, t)$ .

На рис. 5 а та рис. 5 б відповідно в моменти часу  $t_1 = 0.1$ ,  $t_2 = 0.156$  зображено вплив дифузії і конвекції (криві  $1^* - 3^*$ ) на початковий розподіл концентрації забруднюючої речовини (криві  $1 - 3$ ) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній  $\varphi_1 = -2.083$ ,  $\varphi_2 = -1.894$ ,  $\varphi_3 = -1.666$  при  $\varepsilon = 0.01$ .

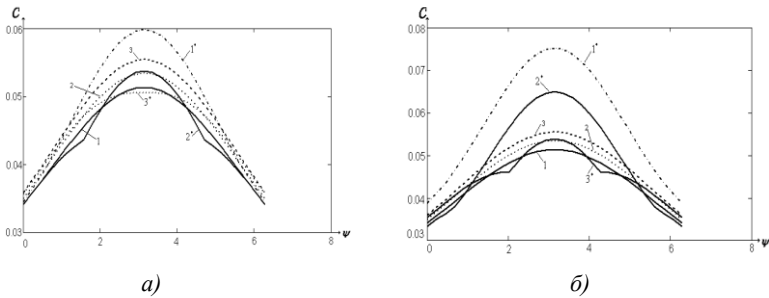


Рис. 5. Вплив конвекції та дифузії на початковий розподіл концентрації у фіксовані моменти часу

Точкові джерела забруднення, що визначаються функцією  $q(\varphi, \psi)$ , суттєво впливають на зміну концентрації забруднюючої речовини. Знаючи конкретний вид забруднення (токсичні речовини, тверді солі, важкі ізотопи радіоактивних металів та ін.), можна пояснити природу функції  $q(\varphi, \psi)$ . Наприклад, для виробництва певних барвників, медикаментів, вибухових речовин, засобів захисту рослин та синтетичних волокон використовують бензол ( $C_6H_6$ ) – безбарвна, токсична, нерозчинна у воді рідина, темп. кип.  $80.1^\circ C$ . Через використання застарілих технологій можливе попадання бензолу в стічні води. Однак, при використанні нафтопродуктів чи безпосередньо при каталітичному крекінгу нафти можливе попадання у водойми гексану. Попадання гексану ( $C_6H_{14}$ ) у водні ресурси можливе і при неякісному спалюванні високооктанових вуглеводів, опари яких разом із дощем конденсуються і потрапляють на господарські угіддя. Потрапляння гексану у водойми, пористі середовища (грунти) в яких досліджуються процеси поширення  $C_6H_6$ , може привести до утворення додаткової кількості бензолу, яка сумарно становитиме  $\sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j)$  моль. Дійсно, при нагріванні сонцем ґрунту чи водойми, в яких

міститься гексан відбувається реакція [11]  $C_6H_{14} \xrightarrow{\text{нагрівання}} C_6H_6 + 4H_2 \uparrow$ .

Саме результат процесу проходження останньої реакції в досліджуваній двозв'язній області буде описуватися функцією  $q(\varphi, \psi)$ , що визначає з хімічної точки зору кількість вхідної речовини (в нашому випадку гексану) –  $\sum_{i,j} \varepsilon q(\varphi_i, \psi_j)$  моль, яка в результаті реакції утворює більш небезпечний вид забруднення (в нашому випадку бензол).

Вважаємо тепер, що в досліджуваній області – наприклад, території біля водойм Прип'яті і Дніпра (після вибуху ЧАЕС), чи зони видобутку природного урану (ізотопи  $^{235}_{92}U$  та  $^{238}_{92}U$ ) [22] – м. Грін-Бей (США, озеро Мічіган) та м. Су-Сент-Марі (Канада, озеро Верхнє), розглядаються процеси забруднення плутонієм. Наявність на даних територіях урану  $^{238}_{92}U$  масою  $238 \cdot \sum_{i,j} \varepsilon q(\varphi_i, \psi_j)$  г призводитиме до

утворення нової кількості плутонію  $^{239}_{94}Pu$ , яка становитиме  $\sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j)$  моль (це  $239 \cdot \sum_{i,j} \varepsilon h(\varphi_i, \psi_j)$  г). Справді, без поділу, після

захоплення повільних “мандруючих” нейтронів ядрами ізотопу урану  $^{238}_{92}U$ , утворюється радіоактивний ізотоп  $^{239}_{92}U$  [19]:  $^{238}_{92}U + {}^1_0n \rightarrow ^{239}_{92}U$ , з періодом напіврозпаду 23 хв. Подальший розпад відбувається з випромінюванням електрона й виникненням трансуранового елемента – нептунію:  $^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{93}Np + {}^0_{-1}e$ . Нептуній, у свою чергу,  $\beta$ -радіоактивний з періодом піврозпаду близько двох днів:  $^{239}_{93}Np \rightarrow ^{239}_{94}Pu + {}^0_{-1}e$ . Утворений плутоній відносно стабільний, оскільки його період піврозпаду порядку 24 000 років.

Очевидно, знаходження функції  $q(\varphi, \psi)$  і визначення її дії на зміну концентрації забруднення із знайдених компонент дозволяє обійти розв'язання складних багатоетапних задач фізики та хімії. Функція  $\varepsilon h(\varphi, \psi)$  являє собою ту граничну зміну концентрації

забруднюючої речовини при якій не можливе існування флори і фауни, та при якій виникає загроза життю людей певного соціуму. Знаючи функцію  $q(\varphi, \psi)$  для конкретно заданої  $\varepsilon h(\varphi, \psi)$ , ми можемо апріорно оцінити ситуацію для розглядуваної екосистеми і вжити необхідні заходи для поліпшення екологічного благополуччя населення.

На рис. 6 а та рис. 6 б відповідно в моменти часу  $t_1 = 0.121$ ,  $t_2 = 0.28$  зображено розподіли концентрації забруднюючої речовини з урахуванням поправок на виході, конвекції і дифузії (криві 1–3) та додаткових джерел забруднення (криві  $1^* - 3^*$ ) вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній  $\varphi_1 = -1.856$ ,  $\varphi_2 = -1.742$ ,  $\varphi_3 = -1.629$  при  $\varepsilon = 0.01$ .

Зміна концентрації шкідливої речовини з врахуванням конвекції, дифузії, поправок на виході та додаткових джерел забруднення в моменти часу  $t_1 = 0.156$ ,  $t_2 = 0.169$ ,  $t_3 = 0.183$  вздовж фіксованих еквіпотенціальних ліній  $\varphi_1 = -1.856$  (криві 1–3 відповідно),  $\varphi_2 = -1.477$  (криві  $1^* - 3^*$ ) при  $\varepsilon = 0.01$  продемонстрована на рис. 7 а. А зміна концентрації вздовж фіксованих ліній течії  $\psi_1 = 1.122$  (криві 1–3),  $\psi_2 = 3.366$  (криві  $1^* - 3^*$ ) в моменти часу  $t_1 = 0.245$ ,  $t_2 = 0.262$ ,  $t_3 = 0.28$  при  $\varepsilon = 0.01$  зображена на рис. 7 б.

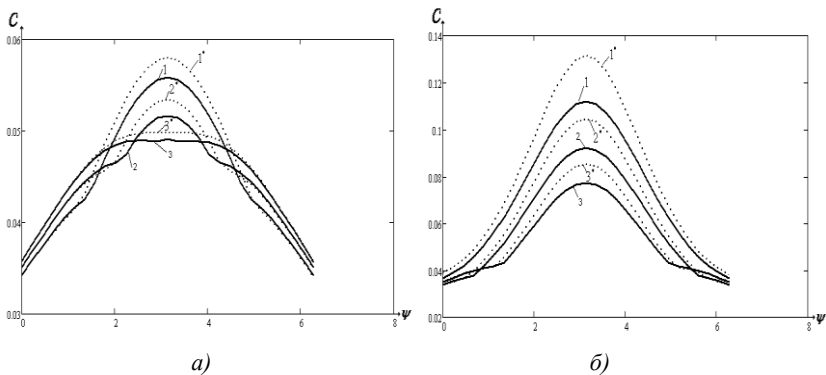


Рис. 6. Вплив додаткових джерел забруднення на розподіл концентрації розчинної речовини у різні моменти часу

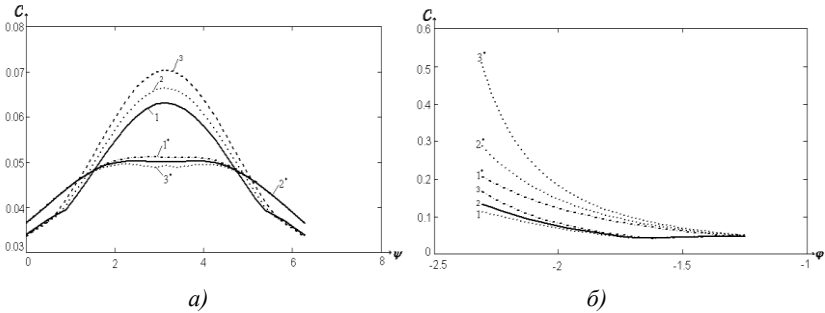


Рис. 7. Зміна концентрації розчинної речовини з плином часу

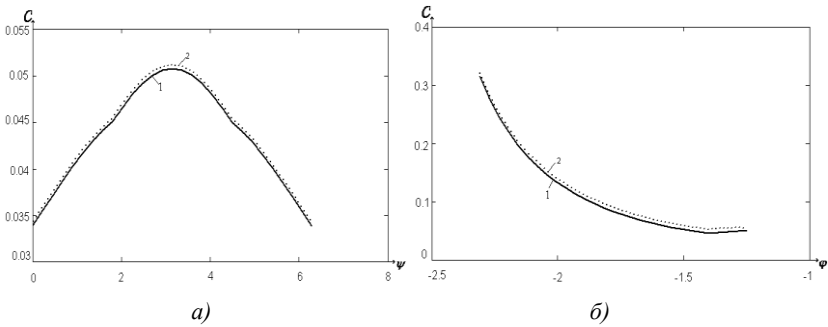


Рис. 8. Зміна концентрації забруднюючої речовини при виборі малого параметра  $\varepsilon$

На розподіл концентрації також впливає вибір параметра  $\varepsilon$ , оскільки тим самим змінюється коефіцієнт дифузії  $\varepsilon a(t)$ , а відтак посилюється або послаблюється вплив самої дифузії. Так, на рис. 8.а показано розподіл концентрації вздовж фіксованої еквіпотенціальної лінії  $\varphi = -2.121$  в момент часу  $t = 0.245$  при  $\varepsilon_1 = 0.015$  (крива 1),  $\varepsilon_2 = 0.02$  (крива 2). На рис. 8.б показано розподіл концентрації вздовж фіксованої лінії течії  $\psi = 2.02$  в момент часу  $t = 0.245$  при  $\varepsilon_1 = 0.015$  (крива 1),  $\varepsilon_2 = 0.02$  (крива 2).

Із знайдених компонент асимптотичних рядів (2.26) та (2.27) видно, що коефіцієнт дифузії (зокрема функція  $a_1(t)$ ) також залежить від функції  $q(\varphi, \psi)$ . На рис. 9 а та рис. 9 б відповідно при  $\varepsilon_1 = 0.005$ ,  $\varepsilon_2 = 0.015$  показано коефіцієнт дифузії без урахування (крива 2) та з урахуванням (крива 1) додаткових джерел забруднення. На рис. 10 зображено зміну коефіцієнта дифузії при виборі різних значень параметра  $\varepsilon$  з врахуванням функції додаткових джерел забруднення  $q(\varphi, \psi)$ .

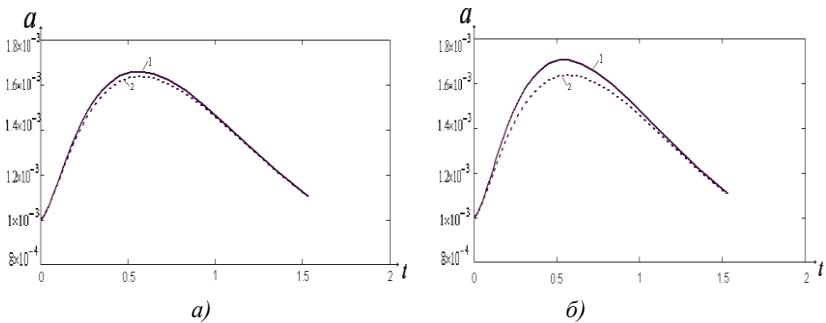


Рис. 9. Залежність коефіцієнта дифузії від додаткових джерел забруднення при заданих значеннях параметра  $\varepsilon$

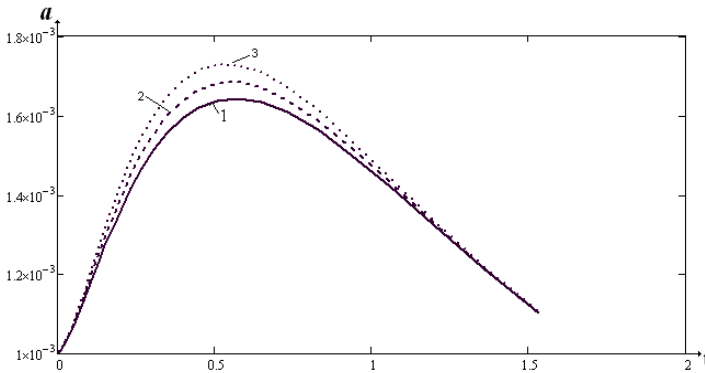


Рис. 10. Зміна коефіцієнта дифузії при  $\varepsilon_1 = 0.007$ ,  $\varepsilon_2 = 0.01$ ,  $\varepsilon_3 = 0.02$

**Висновки.** Очевидно, розгляд таких обернених задач є корисним з урахуванням того, що на основі їхніх розв'язків ми можемо прогнозувати поширення забруднень в різних водних екосистемах нашої країни без проведення реальних експериментів, які можуть бути шкідливими чи, в кращому випадку, дуже тривалими у часі та економічно не обґрунтованими.

Отримані результати також можна застосувати для прогнозування конвективно-дифузійного поширення забруднень захоронених ядерних відходів в земляних пластах [11].

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973.- 273 с.
2. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
3. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.- Успехи математических наук.- 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
4. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущенной задачи массопереноса. -К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИТИ, №286-Ук86.
5. *Иванцов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал.- 1998.- Т. 39, № 3.- С. 539-550.
6. *Иванцов М.И., Лучко І.Я.* Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.- 1990.- Вип. 34.- С. 7-10
7. *Бомба А.Я. Присяжнюк І.М.* Задачі типу “конвекція-дифузія” у трьох-зв'язних областях з умовами усереднення // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2005.- 48, №2.- С. 53-58.
8. *Присяжнюк. І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” у багатов'язних областях // Волинський математичний вісник.- 2003.- Вип. 10.- С. 118-128.
9. *Скопеецкий В.В., Бомба А.Я., Присяжнюк. И.М.* Сингулярно возмущенные задачи типа “конвекция-диффузия” в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
10. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Яцук О.А.* Обернені сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” для двозв'язних областей // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2008.- 52, № 3.- С. 160-166.

11. Научно-популярный журнал “Наука и жизнь”.- М.: Издательство “Пресса”, №2, февраль, 1993.- С. 60-65.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 01.09.2008

**Присяжнюк И.М., Трохимчук А.Я., Фурсачик Е.А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ // Построено асимптотическое приближение решения обратной сингулярно-возмущенной задачи типа „конвекция–диффузия” в двусвязной криволинейной области, ограниченной двумя эквипотенциальными линиями. Особенностью задачи есть учет влияния на процесс неизвестных источников загрязнения, которые имеют конкретно определенную физико-химическую интерпретацию. Приведены результаты числовых расчетов.**

**Prysjazhnjuk I.M., Trokhymchuk A.Y., Fursazik O.A. MATHEMATICAL MODELING SINGULAR INDIGNANT PROCESS OF CONVECTION DIFFUSION IN CONDITION PARTIAL DATA WITH ACCOUNTING AVAILABILITY UNKNOWN SOURCE OF POLLUTION // The asymptotic approximation of the decisions inverse singular indignant problem of a type „convection diffusion” in two-coherent curvilinear area, bounded by two equipotent lines is constructed. The feature of a task is the account of influence on process of unknown sources of pollution, which have the particularly certain physical and chemical interpretation. The results of numerical researches are given.**



Наукове видання

# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

**серія прикладна математика**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 5 (14)**

Відповідальний за випуск  
Бомба А.Я.

Підписано до друку . .2008 р.  
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.  
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100.

Редакційно-видавничий відділ  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12