РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Визначні математики, механіки, інформатики сучасності

З історії математики, механіки, інформатики

УДК 518.61.001.573

Бомба А.Я., Фурсачик О.А.

ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ”

Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв’язку оберненої сингулярно збуреної крайової задачі типу “конвекція–дифузія” з невідомим коефіцієнтом дифузії.

Вступ. Використовуючи методологію переходу від координат фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу, у роботах [1, 2] розвинуто асимптотичні методи [5, 6] для розв’язування модельних сингулярно збурених параболічних задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін” в чотирикутних криволінійних областях, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями, за умов переважання конвективних складових процесу над дифузійними. На даний час (див., напр., [7 – 9]) встановленні умови існування та єдиності розв’язків подібних класів обернених параболічних задач для прямокутних областей.

У цій роботі йдеться про асимптотичне розвинення розв’язків задач типу “конвекція–дифузія”, якщо відомо, що невідомий коефіцієнт дифузії залежить лише від часу.

Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z=$ABCD$ (z=x+iy) – криволінійна прямокутна чотирикутна область (див. рис. 1 а), розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon b(t)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-v_x(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}; \qquad (1)$$

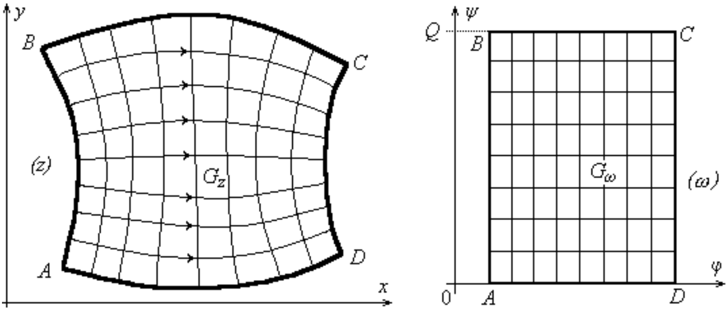
$$c\left(x,y,0\right)=c_0^0\left(x,y\right); \tag{2}$$

$$c\big|_{AB}=c_*\left(M,t\right),\ c\big|_{CD}=c^*\left(M,t\right),\ c\big|_{AD}=c_\Delta\left(M,t\right),$$
$$c\big|_{BC}=c^\Delta\left(M,t\right); \tag{3}$$

$$b\left(t\right)\int\limits_{AB}\frac{\partial c\left(M,t\right)}{\partial n}dl=c_*^*\left(t\right)\ell; \tag{4}$$

$$(v_x,v_y)=grad\varphi(x,y),\ \ \Delta\varphi=0,\ \ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,$$
$$\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA}=0, \tag{5}$$

де $c\left(x,y,t\right)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x,y) в момент часу t, M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\varepsilon b(t)$ – коефіцієнт дифузії, $b(t)$ – достатньо гладка обмежена функція, ε – малий параметр ($\varepsilon>0$), ℓ – довжина кривої AB, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в пористому середовищі G_z.



а) б)

Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення гармонічної функції $\psi=\psi(x,y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi=\varphi(x,y)$, і заміною останніх двох граничних умов (5) на умови: $\psi\big|_{BC}=Q$, $\psi\big|_{AD}=0$ (де $Q=\int\limits_{AB}-v_y dx+v_x dy$ – потік через довільний поперечний переріз G_z), задачу (5) замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$ фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega=\{\omega:\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*$, $0<\psi<Q\}$ (див. рис. 1 б) при відповідності чотирьох кутових точок.

Припустивши, що задача (5) є розв'язаною [3], зокрема знайдено поле швидкості $\vec{v}=(v_x,v_y)$, здійснюємо заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ у рівнянні (1) та умовах (2) – (4) і приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області G_w:

$$\varepsilon a(t)v^2(\varphi,\psi)\left(u_{\varphi\varphi}+u_{\psi\psi}\right)-v^2(\varphi,\psi)u_\varphi=u_t, \tag{6}$$

$$u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi), \tag{7}$$

$$u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t),\ u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t),$$

$$u(\varphi,0,t)=u_\Delta(\varphi,t),\ u(\varphi,Q,t)=u^\Delta(\varphi,t), \tag{8}$$

$$a(t)\int\limits_0^Q u_\varphi(\varphi_*,\psi,t)d\psi=u_*^*(t), \tag{9}$$

де $u(\varphi,\psi,t)=c(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $b(t)=a(t)$ і т.д.

Асимптотичне наближення розв'язку. Розв'язок задачі (6) – (9) для знаходження невідомих $u(\varphi,\psi,t)$ та $a(t)$ з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi,\psi,t)=\left(u_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i u_i(\varphi,\psi,t)\right)+\sum_{i=0}^{n+1}\pi_i\ (\xi,\psi,t)\varepsilon^i+$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1}\underline{p}_{i/2}(\varphi,\eta,t)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{n+1}\overline{p}_{i/2}(\varphi,\mu,t)\varepsilon^{i/2}+R_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \quad (10)$$

$$a(t)=a_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i a_i(t)+r_n(t,\varepsilon), \quad (11)$$

де $u_i\ (\varphi,\psi,t)$, $a_i(t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0(\varphi,\psi,t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_i\ (\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,n}$) – поправки, які враховують вплив дифузії всюди у даній області (за виключенням деякої її пригграничної ділянки); $\pi_i\ (\xi,\psi,t)$, $\underline{p}_{i/2}(\varphi,\eta,t)$, $\overline{p}_{i/2}(\varphi,\mu,t)$ – функції типу примежового шару в околах $\varphi=\varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії) відповідно; $\psi=0$, $\psi=Q$ (поправки, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”); $R_n\ (\varphi,\psi,t,\varepsilon)$, $r_n\ (t,\varepsilon)$ – залишкові члени.

В результаті підстановки (10) – (11) в (6) – (9) та виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε одержано такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотики та поправок навколо виходу фільтраційної течії [1, 2]:

$$\left[\begin{array}{l} v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)+u_{0t}(\varphi,\psi,t)=0, \\ u_0(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t), u_0(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

$$a_0(t)\int_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi=u_*^*(t),$$

$$\left[\begin{array}{l} v^2\left(\varphi,\psi\right)\cdot u_{k\varphi}+u_{kt}=g_k\left(\varphi,\psi,t\right),\\ u_k\left(\varphi,\psi,0\right)=0, u_k\left(\varphi_*,\psi,t\right)=0, \end{array}\right.$$

$$a_k(t)\int\limits_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi=-\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}(t)\int\limits_0^Q u_{i\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi,\ k=\overline{1,n},$$

де $g_k(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\sum\limits_{i=1}^{k}a_{k-i}(t)(u_{i\varphi\varphi}+u_{i\psi\psi})$,

$$\begin{cases} a_0(t)\cdot\pi_{0\xi\xi}\left(\xi,\psi,t\right)+\pi_{0\xi}\left(\xi,\psi,t\right)=0,\\ \pi_0\left(0,\psi,t\right)=u^*\left(\psi,t\right)-u_0(\varphi^*,\psi,t),\\ \pi_0\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(t)\cdot\pi_{1\xi\xi}\left(\xi,\psi,t\right)+\pi_{1\xi}\left(\xi,\psi,t\right)=\dfrac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*,\psi)}-\\ -a_1(t)\pi_{0\xi\xi}-\dfrac{2v'(\varphi^*,\psi)\xi(\pi_{0\xi}+a_0\pi_{0\xi\xi})}{v(\varphi^*,\psi)},\\ \pi_1\left(0,\psi,t\right)=-u_1\left(\varphi^*,\psi,t\right),\\ \pi_1\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0\text{ і т.д.} \end{cases}$$

В результаті їх розв’язання маємо:

$$u_0\left(\varphi,\psi,t\right)=\left[\begin{array}{ll} u_*\left(\psi,t-f\left(\varphi,\psi\right)\right), & t\geq f\left(\varphi,\psi\right),\\ u_0^0\left(f^{-1}\left(f\left(\varphi,\psi\right)-t\right),\psi\right), & t<f\left(\varphi,\psi\right), \end{array}\right.$$

$$a_0(\varphi,\psi)=\frac{u_*^*(t)}{\int\limits_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi},$$

$$u_k\left(\varphi,\psi,t\right)=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_k\left(\tilde{\varphi},\psi,t-f\left(\varphi,\psi\right)+f\left(\tilde{\varphi},\psi\right)\right)}{v^2\left(\tilde{\varphi},\psi\right)}d\tilde{\varphi},\quad t\geq f\left(\tilde{\varphi},\psi\right),\\ \displaystyle\int\limits_0^t g_k\left(f^{-1}(f\left(\varphi,\psi\right)-t+\tilde{t},\psi,\tilde{t}\right))d\tilde{t},\quad t<f\left(\tilde{\varphi},\psi\right),\end{array}\right.$$

$$a_k(t)=\frac{-\sum\limits_{i=1}^{k}a_{k-i}(t)\int\limits_0^Q u_{i\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi}{\int\limits_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi,t)d\psi},$$

де $f\left(\varphi,\psi\right)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{d\tilde{\varphi}}{v^2\left(\tilde{\varphi},\psi\right)}$, f^{-1} – функція обернена до f стосовно змінної φ,

$$\pi_0\left(\xi,\psi,t\right)=(u^*\left(\psi,t\right)-u_0(\varphi^*,\psi,t))e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}},$$

$$\pi_1\left(\xi,\psi,t\right)=\left(-u_1(\varphi^*,\psi,t)\right)e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*,\psi)}}+b_0\xi+b_1\xi^2,$$

де $b_1=\frac{v'(\varphi^*,\psi)(\pi_{0\xi}+a_0\pi_{0\xi\xi})}{v(\varphi^*,\psi)}$, $b_0=a_1(t)\pi_{0\xi\xi}+\frac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*,\psi)}-2a_0(t)b_1$.

Легко бачити, що $\pi_k(\xi,\psi,t)=\sum\limits_{j=0}^{k+1}\alpha_{kj}(\psi,t)\xi^j e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}, k=\overline{1,n+1},$ де всі α_{kj} визначаються через $\alpha_{ij}(i<k)$ та через граничні умови.

Зауважимо, що аналогічно до [4] знаходяться функції $\underline{p}\left(\varphi,0,t\right)$, $\overline{p}\left(\varphi,Q,t\right)$.

Для оцінки R_n та r_n маємо наступні співвідношення:

$$\varepsilon\Big(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i a_i(t)+r_n\Big)v^2(\varphi,\psi)\Big[R_{n\varphi\varphi}+R_{n\psi\psi}\Big]-v^2(\varphi,\psi)R_{n\varphi}=R_{nt}+\varepsilon^{n+1}g_n(\varphi,\psi,t),$$

$$R_n(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=R_n(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_n(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_n(\varphi,0,t,\varepsilon)=R_n(\varphi,Q,t,\varepsilon)=0,$$
$$r_n(\varphi,\psi,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}p_n(\varphi,\psi,\varepsilon),$$

де $g_n(\varphi,\psi,t)$, $p_n(\varphi,\psi,\varepsilon)$ виражаються через відомі члени ряду (10) – (11).

Висновки та зауваження.

1. Таким чином, як бачимо із викладеного вище, методологія переходу від фізичної криволінійної області до відповідної області комплексного потенціалу, окрім відомих переваг (спрощення рівняння, зведення задачі до канонічної області, тощо), дозволяє ще й опиратися на відомі напрацювання (результати) при обґрунтуванні коректності поставлених задач.

2. Зауважимо, що аналогічно до вище викладеного можемо розв'язати задачу (1) – (4), якщо замість умови перевизначення (4) задати:

$$b(t)\frac{\partial c(x_0,y_0,t)}{\partial n_0}=c_*^*(t),$$

де $M_0(x_0,y_0)$ – деяка фіксована точка ділянки входу AB; n_0 – відповідна нормаль. При цьому в області G_ω, дана умова прийме вигляд:

$$a(t)\frac{\partial u(\varphi_*,\psi_0,t)}{\partial\varphi}=u_*^*(t),$$

де ψ_0 – значення функції течії в точці $M_0(x_0,y_0)$ (потік через ділянку AM_0), як і в [10]. Для знаходження регулярних членів асимптотики, замість відповідних задач матимемо:

$$a_0(t)u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t)=\overset{*}{u_*}(t),$$

$$a_k(t)u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t)=-\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}(t)u_{i\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t),\ k=\overline{1,n}\,.$$

Розв’язок матиме вигляд:

$$a_0(t)=\frac{\overset{*}{u_*}(t)}{u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t)},$$

$$a_k(t)=-\frac{\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}(t)u_{i\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t)}{u_{0\varphi}(\varphi_*,\psi_0,t)}\,.$$

3. Розроблений вище підхід можна використати при розв’язанні відповідних задач у випадках більш складної структури коефіцієнта дифузії (наприклад, $\varepsilon a(x,y)$), а також у випадках багатозв’язних областей.

4. Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгодженні або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження негладкостей розв’язків вироджених задач вздовж характеристик, що виходять із кутових (реброрвих) точок області $G_\omega\times(0,\infty)$ [1], та побудова кутових функцій [5].

1. *Бомба А.Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
2. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція–дифузія” // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
3. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.
4. *Бомба А.Я., Власюк А.П., Лаврик В.И.* Об асимптотическом

приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде.- К.: 1985.- 17 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).

5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1990.- 208с.
6. *Вішик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук.- 1957.- 12, Вып. 5.- С. 3-122.
7. *Іванчов М.І.* Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі // Мат. методи і фіз.-мех. поля.- 2000.- 43, №1.- С. 45-50.
8. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал.- 1998.- Т. 39, № 3.- С. 539-550.
9. *Ратыни А.К.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравнения.- 1992.- 28, №8.- С. 1419-1426.
10. *Сагайдак Р.В.* Про одну обернену задачу для двовимырного рывняння параболычного типу // Мат. методи і фіз.-мех. поля.- 2002.- 45, №2.- С. 22-30.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail : abomba@ukr.net, yatsuko@mail.ru

Надійшла 11.04.2007

Бомба А.Я., Фурсачик О.А. ОБРАТНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА “КОНВЕКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ” // *Построен алгоритм асимптотического приближения решения обратной сингулярно возмущенной краевой задачи типа “конвекция–диффузия” с неизвестным коэффициентом диффузии.*

Bomba A.Y., Fursachyk O.A. INVERS SINGULAR PERTURBED PROBLEMS OF TYPE "CONVECTION–DIFFUSION" // *The algorithm is constructed for asymptotic expansion resolving invers singular perturbed boundary value "convection–diffusion" problems, where the coefficient of diffusion is unknown.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Відповідальний за випуск
Бомба А.Я.

Підписано до друку 28.12.2007 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. № / .

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12