РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

УДК 518.61.001.573

Сафоник А.П.

НЕЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРУВАННЯ

Побудовано нову модель процесу очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах шляхом „дифузійного збурення” відомої моделі Мінца, зокрема, отримано формули для характеристики співвідношення між концентраціями забруднень стічної води та фільтра. На цій основі проведено комп’ютерний експеримент.

Вступ. Область застосовності відомих математичних моделей процесів фільтрування через пористі середовища обмежена численними припущеннями відносно властивостей рідини, що фільтрується, завислих у ній домішкових частинок, осаду, завантаження, швидкості фільтрування тощо [1]. Разом з тим, оптимізація процесів фільтрування, на які в різних країнах витрачаються надзвичайно великі кошти, передбачає можливість надійного прогнозування наслідків зміни не тільки самих складних з існуючих, але й гіпотетичних умов фільтрування. Досвід фундаментальної науки однозначно свідчить про необхідність введення узагальненої математичної моделі процесів фільтрування через пористі середовища. Достатньо послатися на рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Нав`є–Стокса в гідродинаміці, рівняння Полубаринової–Кочиної в фільтрації тощо. Не є виключенням і фільтрування, хоча в цій області традиційні методи введення узагальнених математичних моделей, що безпосередньо базуються на законах збереженнях, наперед неприйнятні.

Проведений в [2, 3] аналіз показав, що основна математична модель процесів фільтрування через пористі середовища – модель Мінца (точніше лінійна модель) є стохастичною. Зокрема, розв`язки цієї моделі можуть бути виражені через пуассонові ймовірності захвату і відриву частинок, а сама модель еквівалентна відомим у статистичній фізиці рівнянням Колмогорова–Феллера [4]. Крім того, доведено [5], що модель Мінца може застосовуватися і у випадках, коли на протязі фільтроциклу відбувається значна зміна пористості завантаження (формально модель Мінца зміни пористості завантаження не враховує, див., наприклад, [6]).

На даний час актуальними залишаються питання узагальнення моделі Мінца шляхом її дифузійного збурення з метою дослідження нелінійних процесів очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням малої дифузії та зміни пористості завантаження. Виходячи з цього розглянемо наступну модельну сингулярно збурену задачу конвективної дифузії:

$$\begin{cases} \sigma(x)\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}+v\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x}=D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}=\varepsilon\beta c(x,t)-\alpha\rho(x,t)+D_*\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{1}$$

$$c\big|_{x=0}=c_*^*(t),\ \ c\big|_{t=0}=c_*(x),\ \ \rho\big|_{x=0}=\rho_*^*(t),\ \ \rho\big|_{t=0}=\rho_*(x),$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\quad \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x=L}=0, \tag{2}$$

де $c(x,t)$ – концентрація домішок у рідині, що фільтрується, $\rho(x,t)$ – концентрація осаду в завантаженні, β – коефіцієнт, що характеризує обсяги захоплених за одиницю часу домішкових частинок, α – коефіцієнт, що характеризує обсяги відірваних за той же час частинок осаду, v – швидкість фільтрування, $c_*^*(t)$, $c_*(x)$ – концентрація завислих домішкових частинок відповідно на вході фільтра та в початковий момент часу, $\rho_*^*(t)$, $\rho_*(t)$ – концентрація осаду у завантаженні відповідно на вході фільтра та в початковий момент часу, $\sigma(x)$ – пористість завантаження, D, D_* – коефіцієнт дифузії, де $D=b\varepsilon$, $D_*=b_*\varepsilon$, $0<b\le 1$, $0<b_*\le 1$, ε – малий параметр.

Асимптотика розв'язку. Розв'язки системи (1) за умов (2) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (див. [7 – 8]):

$$c(x,t)=c_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i(x,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i M_i(\xi,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i N_i(\xi,t)+R_1(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho(x,t)=\rho_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i \rho_i(x,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2} P_i(\mu,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2} U_i(\mu,t)+R_2(x,t,\varepsilon),$$

де R_1, R_2 – залишкові члени, $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик, зокрема: c_0, ρ_0 – розв'язки відповідної виродженої задачі, c_i, ρ_i – поправки, що враховують “вклад” дифузії вздовж фільтра (за винятком деякої його пригранічної зони), $M_i(\xi,t)$, $P_i(\mu,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу пограншару, що враховують вплив бічних джерел забруднень в околі $x=L$ (поправки на виході фільтраційного потоку із фільтра), $N_i(\xi,t)$, $U_i(\mu,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу пограншару, (поправки на вході фільтраційного потоку в фільтр) $\xi=(L-x)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\mu=(L-x)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [5], після підстановки (3) в (1) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma(x)\dfrac{\partial c_0}{\partial t}+v\dfrac{\partial c_0}{\partial x}=-\dfrac{\partial \rho_0}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial \rho_0}{\partial t}=-\alpha\rho_0, \\ c_0\big|_{x=0}=c_*^*(t), \ c_0\big|_{t=0}=c_*(x), \ \rho_0\big|_{x=0}=c_*^*(t), \ \rho_0\big|_{t=0}=\rho_*(x), \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sigma(x)\dfrac{\partial c_i}{\partial t}+v\dfrac{\partial c_i}{\partial x}=\Psi_i-\dfrac{\partial \rho_i}{\partial t}, \ \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t}=-\alpha\rho_i+\Phi_i, \\ c_i\big|_{x=0}=0, \ c_i\big|_{t=0}=0, \ \rho_i\big|_{x=0}=0, \ \rho_i\big|_{t=0}=0, \end{cases} \tag{5}$$

де $\Psi_i(x,t)=\dfrac{\partial^2 c_{i-1}(x,t)}{\partial x^2}$, $\Phi_i(x,t)=\dfrac{\partial^2 \rho_{i-1}(x,t)}{\partial x^2}+\beta c_{i-1}(x,t)$ $i=1,2...$

В результаті розв’язання (4) маємо:

$$\rho_0(x,t)=\rho_*(x)e^{-\alpha t},$$

$$c_0(x,t)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{g\left(f^{-1}\left(f(x)-t-\tilde{t}\right),\tilde{t}\right)}{\sigma\left(f^{-1}\left(f(x)-t-\tilde{t}\right)\right)}d\tilde{t}+c_*\left(f^{-1}\left(f(x)-t\right)\right), \ t\le f(x), \\ \displaystyle\frac{1}{v}\int_0^x \frac{g\left(\tilde{x}, f(\tilde{x})+t-f(x)\right)}{\sigma(\tilde{x})}d\tilde{x}+c_*^*\left(t-f(x)\right), \ t>f(x), \end{cases}$$

де $g(x,t)=-\dfrac{\partial \rho_0(x,t)}{\partial t}$, $f^{-1}(x)$ – функція, обернена до функції $f(x)=\dfrac{x}{v}$.

Розв’язавши (5) отримаємо:

$$\rho_i(x,t)=e^{-2\alpha t}\int_0^t \Phi_i\left(x,\tilde{t}\right)d\tilde{t},$$

$$c_i(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \frac{W_i\left(f^{-1}\left(f(x)-t-\tilde{t}\right),\tilde{t}\right)}{\sigma\left(f^{-1}\left(f(x)-t-\tilde{t}\right)\right)}d\tilde{t},\ t\le f(x),\\ \displaystyle\frac{1}{v}\int_0^x \frac{W_i\left(\tilde{x},f(\tilde{x})+t-f(x)\right)}{\sigma(\tilde{x})}d\tilde{x},\ t>f(x),\end{cases}$$

де $W_i(x,t)=\Psi_i(x,t)-\dfrac{\partial\rho_i}{\partial t}$.

Функції $M=\sum_{i=0}^{m+1}M_i\,\varepsilon^i$, $N=\sum_{i=0}^{m+1}N_i\,\varepsilon^i$, $P=\sum_{i=0}^{m+1}P_i\,\varepsilon^{i/2}$, $U=\sum_{i=0}^{m+1}U_i\,\varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c(x,t)=\sum_{i=0}^{m}c_i\,\varepsilon^i$, $\rho(x,t)=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\,\varepsilon^i$ в околі точки $x=0,\ x=L$ (виходу та входу фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умов: $\dfrac{\partial}{\partial x}(c+M)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(c+N)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho+P)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho+U)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$. Для знаходження цих функцій маємо задачі:

$$\begin{cases}bM_{i\xi\xi}+vM_{i\xi}=I(i)P_{i-1t}+I(i)\varepsilon^{\frac{i}{2}}P_{it}+I(i+1)P_{it}+\sigma(x)M_{i-1t},\\ M_i\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ M_{i\xi}(L,t)=K_i(t);\end{cases}$$

$$\begin{cases}bN_{i\xi\xi}+vN_{i\xi}=I(i)U_{i-1t}+I(i)\varepsilon^{\frac{i}{2}}U_{it}+I(i+1)U_{it}+\sigma(x)N_{i-1t},\\ N_i\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ N_{i\xi}(L,t)=K_i(t);\end{cases}$$

$$b_*P_{i\mu\mu}-\alpha P_i-P_{it}=0,\ P_i\underset{\mu\to\infty}{\to}0,\ P_{i\mu}(L,t)=H_i(t);$$

$$b_*U_{i\mu\mu}-\alpha U_i-U_{it}=0,\ U_i\underset{\mu\to\infty}{\to}0,\ U_{i\mu}(L,t)=H_i(t);$$

$$I(a)=\begin{cases}0, \; a-\textit{парне},\\ 1, \; a-\textit{непарне},\end{cases}$$

$$K_i(t)=\begin{cases}0, \; i=m+1,\\ -c_{i\xi}(L,t), \; i=0,...,m,\end{cases} \quad H_i(t)=\begin{cases}0, \; i=m+1,\\ -\rho_{i\mu}(L,t), \; i=0,...,m.\end{cases}$$

Розв'язки останніх задач, як задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та параболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами, отримуються в явному вигляді.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{cases}\sigma(x)\dfrac{\partial R_1}{\partial t}+\dfrac{\partial R_2}{\partial t}+v\dfrac{\partial R_1}{\partial x}-\varepsilon b\dfrac{\partial^2 R_1}{\partial x^2}=\varepsilon^{m+1}g(x,t),\\ \dfrac{\partial R_2}{\partial t}-\beta R_1+\alpha R_2-\varepsilon b_*\dfrac{\partial^2 R_2}{\partial x^2}=\varepsilon^{m+1}g_1(x,t,\varepsilon),\end{cases}$$

де $g(x,t)=b\dfrac{\partial^2 c_m}{\partial x^2}-\sigma(x)\dfrac{\partial M_m}{\partial t}-\sigma(x)\dfrac{\partial N_m}{\partial t}$, $g_1(x,t,\varepsilon)=\beta c_m+\beta M_{m+1}+$

$$+\varepsilon\beta M_{m+1}+b_*\frac{\partial^2\rho_m}{\partial x^2}+b_*\frac{\partial^2 P_{m+1}}{\partial\mu^2}+\beta N_{m+1}+\varepsilon\beta N_{m+1}+b_*\frac{\partial^2 U_{m+1}}{\partial\mu^2},$$

$$R_1(0,t,\varepsilon)=R_1(L,t,\varepsilon)=R_1(x,0,\varepsilon)=R_2(0,t,\varepsilon)=$$

$$=R_2(L,t,\varepsilon)=R_2(x,0,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Вимагаючи достатньої гладкості початкової і граничних умов та коефіцієнтів системи рівнянь (1), а також їх узгодженості у точці $x=L$, на основі принципу максимуму приходимо до справедливості такого твердження: $R_i(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$ ($i=1,2$).

Результати числових розрахунків. Наведемо результати розрахунків за формулами (4) при $\rho_0(x)=0.5e^{-x^2}$, $c_0(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$, $c_0(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

$\beta = 3\,c^{-1}$, $a = \dfrac{1}{18000}\,c^{-1}$, $v = \dfrac{1}{2}\,мc^{-1}$. На рисунку 1 зображено розподіли концентрацій $c(x,t_0)$ і $\rho(x,t_0)$ при $t_0 = 0.1$, $t_0 = 1$, $t_0 = 2$, $t_0 = 3$ (криві 1,a – 4,a відповідно при $\varepsilon = 0$; криві 1,b – 4,b відповідно при $\varepsilon = 0.05$).

Розподіл концентрацій $c(x,t_0)$ і $\rho(x,t_0)$ для різних значень коефіцієнта дифузії зображено на рисунку 2: $\varepsilon = 0.1$ – криві 1; $\varepsilon = 0.05$ – криві 2; $\varepsilon = 0.03$ – криві 3; $\varepsilon = 0.01$ – криві 4.

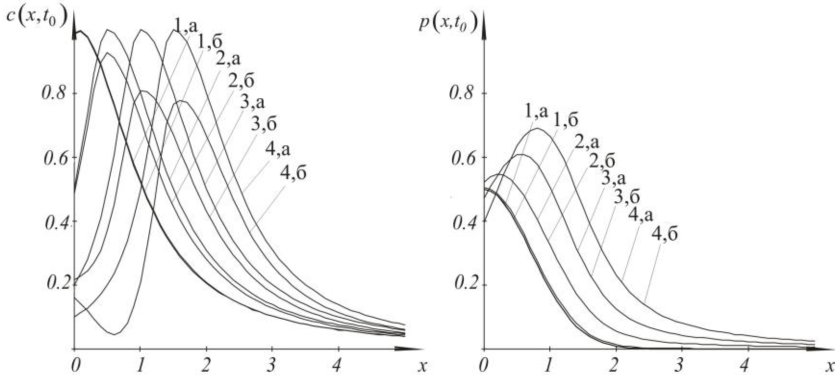

Рис. 1. Розподіл $c(x,t_0)$ *і* $\rho(x,t_0)$ *в різні моменти часу при* $\varepsilon = 0.05$

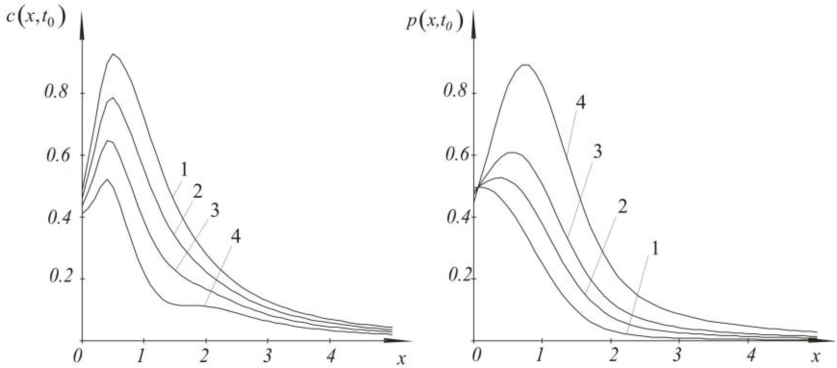

Рис. 2. Розподіл $c(x,t_0)$ *і* $\rho(x,t_0)$ *в різні моменти часу при різних* ε

На рисунку 3 зображено розподіл концентрацій $c\left(x,t_0\right)$ і $\rho\left(x,t_0\right)$ вздовж фільтру в різні моменти часу при $t_0=0.1$, $t_0=1$, $t_0=2$, $t_0=3$ (криві 1 – 4 відповідно).

Розподіл концентрацій $c\left(x_0,t\right)$ і $\rho\left(x_0,t\right)$ у часі t при $x_0=0.1$, $x_0=1$, $x_0=1.5$, $x_0=2$, $x_0=2.5$, $x_0=3$ (криві 1 – 6 відповідно) зображено на рисунку 4.

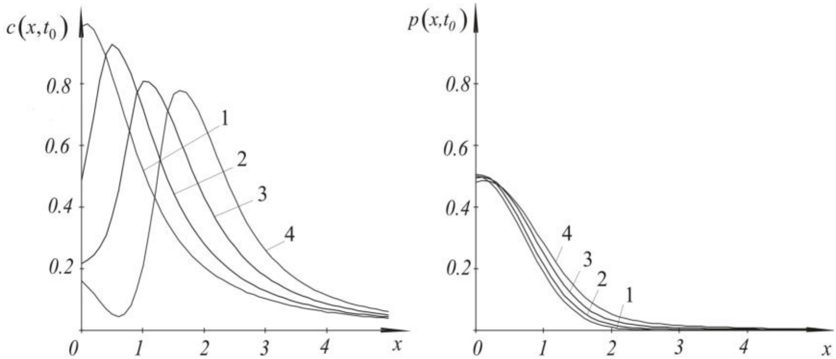

Рис. 3. Розподіл $c\left(x,t_0\right)$ і $\rho\left(x,t_0\right)$ в різні моменти часу

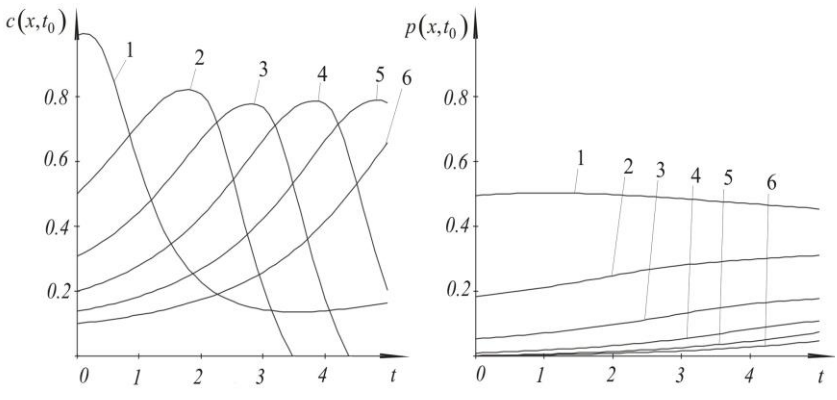

Рис. 4. Розподіл $c\left(x_0,t\right)$ і $\rho\left(x_0,t\right)$ в різних точках x

Висновок. Запропонована в роботі методика уточнення відомої моделі Мінца шляхом переходу до відповідної “збуреної” задачі (1), (2) дозволяє зберегти класичні форми законів, які описують процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові її розв’язку, не починаючи “спочатку”, доповнювати відомі “незбурені” розв’язки різними поправками. Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгоджені або недостатньо гладкі, то необхідно здійснити спочатку процедуру згладження негладкостей розв’язків вироджених задач вздовж відповідних характеристик, наприклад, аналогічно до [9]. У **перспективі** – поширення запропонованої методики на відповідні нелінійні задачі, задачі із запізненням, а також аналогічні двовимірні і тривимірні задачі.

1. *Минц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды.- М.: Стройиздат, 1964.- 156 с.
2. *Кочмарский В.З., Демчик И.И.* Статистическая интерпретация математической модели фильтрования Минца // Теорет. основы хим. технологии.- 1989.- Т.23, №3.- С.405-407.
3. *Демчик І.І.* До питання про статистичну інтерпретацію моделі фільтрування Мінца // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Зб. наук.праць.- Рівне, 2002.- Вип. 27.- С. 207-213.
4. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. - М.: Наука, 1976.- Ч.1.- 494 с.
5. *Демчик І.І.* Деякі питання теорії фільтрування // Вісник Рівненського державного технічного університету: Зб. наук. праць.- Рівне, 2002.- Вип. 1 (14).- С. 80-89.
6. *Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н., Сенявин М.М.* О возможности распространения динамики сорбции на расчет осветления воды зернистыми фильтрами // Докл. АН СССР.- 1970.- Т.195, №3.- С. 658-661.
7. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв’язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
8. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых массопереноса при фильтрации в неоднородной среде Препринт 85.72.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- 16 с.

9. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса. В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения.- М.: Наука, 1988.- С. 115-120.

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне
E-mail: safonik@ukr.net

Надійшла 01.08.2007

Сафоник А.П. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЙ ВОЗМУЩЕНЫ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРОВАНИЯ // *Построена новая модель процесса очистки сточной воды на каркасно-засыпных фильтрах путем „дифузного возмущение" известной модели Минца, в частности, получены формулы для характеристики соотношения между концентрациями загрязнений сточной воды и фильтра. На этой основе проведен компьютерный эксперимент.*

Safonik A.P. NONLINEAR SINGULYARNYY MATHEMATICAL MODELS OF PROCESSES OF FILTRATION // *The new model of process of sewer water treatment is built on wire-frame filling filters by a way „diffuse existement" of the known model of Mintsa, in particular got formulas for description of correlation between the concentrations of contaminations of sewer water and filter. On this basis the computer experiment is carried out.*

Наукове видання

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

серія прикладна математика

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Відповідальний за випуск
Бомба А.Я.

Підписано до друку 28.12.2007 р.
Папір офсет. Формат 60/84 1/16.
Ум. друк. арк. 7,5. Тираж 100. Зам. № / .

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, м. Рівне, 33028, вул. С. Бандери, 12