Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики та методики її викладання

Лекції з елементарної математики. Стереометрія. Олімпіадні задачі

Посібник для студентів напряму 0402 – фізико-математичні науки
Спеціальність 6.040201 - математика

Рівне - 2011

ББК 22.10
УДК 51

Сяська Н.А. Лекції з елементарної математики. Стереометрія. Олімпіадні задачі. - Рівне: РДГУ, 2011. – 56 с.

Упорядник: Н.А. Сяська, доцент кафедри математики та методики її викладання РДГУ.
Рецензенти: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор РЕГІ.
Відповідальний за випуск Н.А. Сяська, кандидат пед. наук, доцент кафедри математики та МВ.

Рекомендовано до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № від ________ 2011 р.)

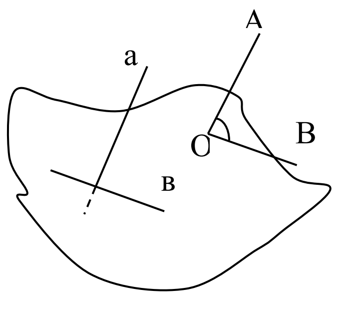
Тема 1 Фігури, їх зображення, побудови на зображеннях.

1. **Прямі і площини в просторі.**
2. **Задачі на побудову в стереометрії.**
3. **Геометричні місця точок в просторі.**
4. **Многогранники.**
5. **Побудова плоских перерізів многогранників.**
6. **Круглі тіла.**
7. **Комбінації геометричних тіл.**

1) Дві прямі в просторі можуть мати таке розміщення:

- лежати в одній площині і мати спільну точку, тобто перетинатися;
- лежати в одній площині і не мати спільних точок, тобто бути паралельними;
- не лежати в одній площині, отже не мати спільних точок, тобто бути мимобіжними.

Дві мимобіжні прямі не утворюють кута в звичайному розумінні. Домовимось вважати, що кут між мимобіжними прямими дорівнює куту, утвореному двома променями, які виходять з однієї точки і паралельні цим мимобіжним прямим.



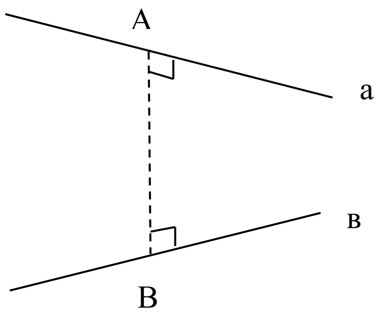
$$(a;b) = \angle AOB$$

$$AO \parallel a, BO \parallel b$$

Означення 1. Відстанню між двома паралельними прямими називається довжина відрізка прямої, що знаходиться між ними, перпендикулярна до кожної з паралельних прямих.

Означення 2. Відстань між двома мимобіжними прямими – це довжина відрізка прямої, перпендикулярної до кожної з мимобіжних прямих, що перетинає кожну з цих прямих в точках, що є кінцями цього відрізка.

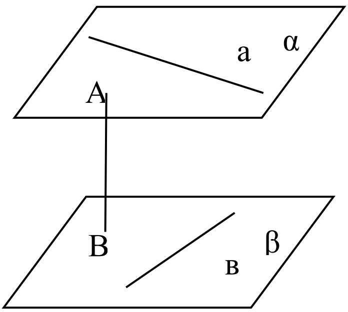
Відстань між двома мимобіжними прямими є найменша відстань між точками, що лежать на цих прямих.



$$AB \perp a, A \in a$$
$$AB \perp b, B \in b$$
$$\rho(a,b) = AB$$

Відстань між двома мимобіжними прямими може бути визначена як відстань між паралельними площинами, які містять ці мимобіжні прямі.

$$AB \perp \alpha, A \in \alpha$$
$$AB \perp \beta, B \in \beta$$
$$a \in \alpha,$$
$$b \in \beta$$



Пряма і площина в просторі можуть бути розміщені так:

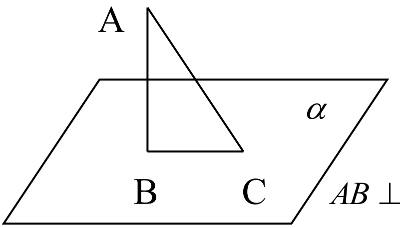
- пряма лежить в площині;

- пряма і площина мають одну спільну точку, тобто перетинаються. Ця точка називається слідом прямої на даній площині;
- пряма і площина не мають спільних точок, тобто пряма паралельна площині.

Означення 3. Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить в цій площині.

Пряма,яка не є перпендикулярною до площини, називається похилою до цієї площини.

Прямокутною проекцією точки на площину називається слід перпендикуляра, проведеного через цю точку до площини. Слід перпендикуляра на площині називається основою перпендикуляра, а слід похилої - основою похилої. Прямокутною проекцією похилої на площину називається відрізок прямої, що сполучає основу похилої з основою перпендикуляра, опущеного з кінця похилої на площину.

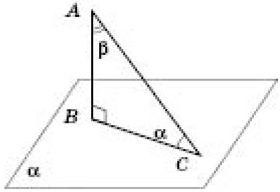


$AB \perp \alpha$; AC – похила; BC – проекція

Властивості перпендикуляра і похилої:

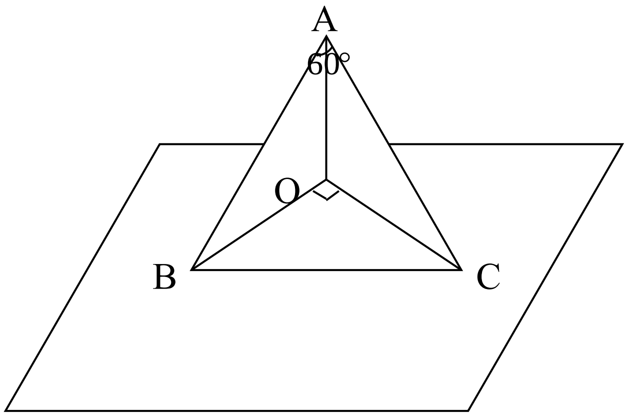
1. Перпендикуляр менший за будь-яку похилу, проведену з цієї самої точки
2. Похилі, що мають рівні проекції рівні між собою;
3. З двох похилих, що проведені з однієї точки, більша та, яка відповідає більшій проекції.

Означення 4. Кутом між прямою і площиною називається гострий кут між цією прямою і її проекцією на дану площину.



$AB \wedge \alpha = \angle ABC$

Задача 1. З деякої точки простору проведеної до даної площини дві похилі, кожна з яких дорівнює а , кут між ними $60°$, а кут між їх проекціями прямий. Знайти відстань від даної точки до площини і кут між похилими і площиною.



Знайти АО-?

$\angle ACO$ -?

ΔABC -рівносторонній, ВС=а

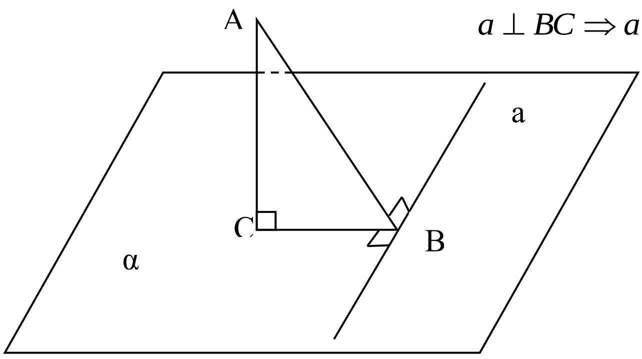
ΔBOC - прямокутний і рівнобедрений

$BO = BC \cdot \sin 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $AO\sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$tg\angle ACO = \frac{AO}{OC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 1, \angle ACO = 45^\circ$$

<u>Теорема про три перпендикуляри:</u> Пряма проведена на площині перпендикулярно проекції похилої на цю площину, перпендикулярна до самої похилої і навпаки.

$$a \perp BC \Rightarrow a \perp AB$$



Дві площини в просторі можуть розміщуватись так:

- не мати спільних точок, тобто бути паралельними;
- мати спільну точку, отже перетинатись по прямій, яка проходить через цю точку.

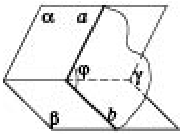
Властивості паралельних площин

1. Дві паралельні площини перетинаються третьою площиною по паралельних прямих.
2. Відрізки паралельних прямих між двома паралельними площинами, рівні.
3. Пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.

Означення 5.

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, —

ребром двогранного кута. Півплощини називаються гранями двогранного кута.



Означення 6.

Лінійним кутом двогранного кута називається кут, створений двома перпендикулярами, які проведені до ребра з довільної його точки і лежать на гранях кута.

$$\begin{matrix} MO \perp AB, MO \in \alpha \\ NO \perp AB, NO \in \beta \end{matrix} \Rightarrow \angle MON - \text{лінійний кут двогранного кута}$$

Двогранний кут вимірюється його лінійним кутом.

Означення 7. Кутом між площинами, які перетинаються, називається лінійний кут двогранного кута, що утворений цими площинами.

Площина перпендикулярна до ребра двогранного кута, перпендикулярна і до його граней.

$$\alpha ; \beta = \angle AOB$$

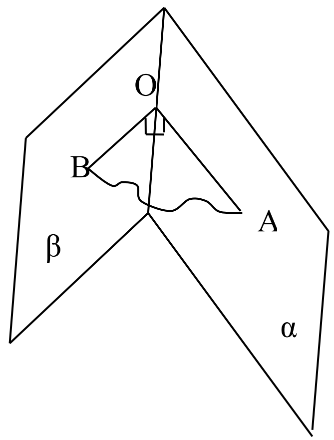
$$\left.\begin{matrix} \gamma \perp CD \Rightarrow \gamma \perp \alpha \\ \gamma \perp \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} AO \perp CD \\ BO \perp CD \end{matrix}$$

2) Для побудови просторових фігур фактично не існує інструментів, аналогічних циркулю, лінійці та ін., які використовуються в планіметрії. При розв’язанні задач на побудову просторових фігур описується і логічно обґрунтовується хід побудови, який супроводжується схематичним рисунком. Тобто основним є логічне обґрунтування побудови, а рисунок є лише ілюстрацією.

Задача на побудову в стереометрії вважається розв'язаною, якщо її зведено до розв'язання найпростіших задач. До них належать:

1. Провести площину через три точки, що не лежать на одній прямій.
2. Провести площину через пряму і точку, що лежить поза прямою.
3. Провести площину через дві прямі, що перетинаються або паралельні.
4. Побудувати лінію перетину двох даних прямих.
5. Розв'язати будь-яку задачу на побудову в даній площині, користуючись методами планіметрії.

Задача 2. Побудувати площину перпендикулярну до даної прямої, яка проходить через дану точку.



Розв'язання:

Нехай дано точку А і пряму l. Побудуємо площину α, що проходить через точку А і перпендикулярна до прямої l.

Випадок 1. Точка А лежить поза прямою l. Через т. А і пряму l проведемо площину α. Через пряму l проведемо площину β відмінну від площини α. В площині α

проведемо $AO \perp l$. В площині β проведемо $OB \perp l$. Через прямі АО і ОВ проведемо площину γ, яка перпендикулярна до прямої l.

Випадок 2. Якщо т. $A \in l$, то через пряму l проводимо дві довільні площини, в яких з точки А будуємо перпендикуляри до прямої l (ОА і ОВ). Через ці перпендикуляри проводимо площину γ, яка буде перпендикулярна до l.

3) ГМТ називається множина всіх точок, які мають одну або кілька спільних властивостей.

Розглянемо приклади ГМТ у просторі:

1. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від даної площини α, на відстань d, є дві площини, паралельні до площини α, які знаходяться по обидві сторони від неї на відстані d.

2. Геометричним місцем вершин пірамід, що мають даний об'єм V і побудовані на даній основі S, є площини паралельні до основи, які знаходяться від неї на відстані, що дорівнює спільній висоті цих пірамід $h = \frac{3V}{S}$

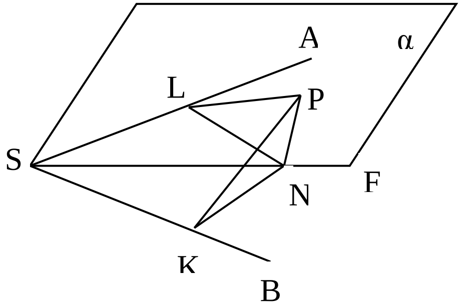
3. Геометричне місце центрів сфер даного радіуса, що дотикаються до двох площин, є 4 прямі, паралельні до лінії перетину даних площин.

4. Геометричним місцем прямих, що проходять через дану точку і дотикаються до даної сферичної поверхні, є конічна кругова поверхня з вершиною в даній точці.

При розв'язуванні задач на ГМТ спочатку визначають фігуру, яка може бути даним ГМТ, а потім доводять, що довільна точка знайденої фігури, задовольняє умовам шуканого ГМТ.

Задача 3. Знайти ГМТ рівновіддалених від сторін даного у просторі кута ASB.

Розв'язання ГМТ рівновіддалених від сторін кута на площині – бісектриса даного кута.



Нехай SF – бісектриса $\angle ASB$. Проведемо площину $\alpha \perp (ASB)$, $SF \in \alpha$. Візьмемо в площині α довільну точку P і проведемо $PN \perp SF$. Проведемо $PK \perp SB, PL \perp SA$ і доведемо, що вони рівні $\Delta PLN = \Delta PKN$ (за двома катетами).

Отже PK=PL. Оскільки т. $P \in \alpha$ вибрана довільно, то твердження істинне для всіх точок п лощини α.

Отже, ГМТ – площина, яка проведена через бісектрису $\angle ASB$ перпендикулярна до площини кута.

4) Означення 9. Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається з частин площин, обмежених многокутниками.

У ШКМ розглядають такі види многогранників: призма і піраміда.

Означення 10. Призмою називається многогранник, дві грані якого паралельні і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, які сполучають відповідні точки даних граней.

Паралельні грані називаються основами призми, всі інші – бічними гранями.

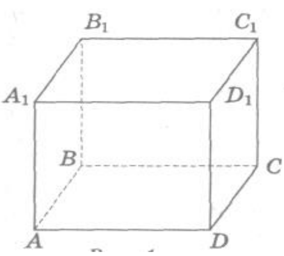
З означення випливає, що в основах призми лежать рівні многогранники, а бічні грані призми – паралелограми.

Спільні сторони бічних граней призми називаються бічними ребрами. Висотою призми називається відстань між основами. Діагональною площиною призми називається площина, яка проходить через діагональ основи і бічне ребро, а фігуру одержану при перетині цієї площини з поверхнею призми називається діагональним перерізом призми. Переріз призми площиною, перпендикулярною до бічних ребер, називається перпендикулярним перерізом призми. Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи, інакше призма називається похилою.

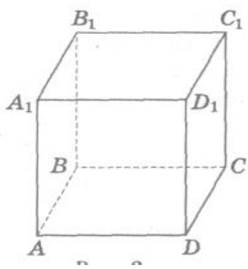
Правильною називається пряма призма, в основі якої лежить правильний многокутник.

Означення 11. Паралелепіпедом називається призма, основами якої є паралелограм.

Паралелограм, бічні ребра якого перпендикулярні до основи, називається прямим, інакше – похилим. Прямий паралелепіпед, основи якого є прямокутники, називається прямокутним. Прямокутний паралелепіпед, всі три виміри якого рівні між собою, називається кубом.



пряма



похила

Властивості паралелепіпеда:

1. В паралелепіпеді протилежні грані рівні і паралельні.

2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться в ній пополам.

3. Сума квадратів всіх діагоналей паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

4. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Бічною поверхнею призми (паралелепіпеда) називається сума площ всіх її бічних граней.

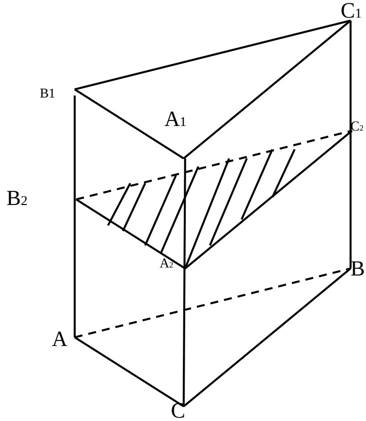
$S_п = S_б + 2S_о$

$S_б = P_\perp \cdot l$ - бічна поверхня призми (паралелепіпеда) дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро.

Бічна поверхня прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми $S_б = P_о \cdot H$.

$V_{пр} = S_{осн} \cdot H$, $V_{куба} = a^3$, $V_{парал.прям} = a \cdot b \cdot c$

Задача 4. У похилі трикутній призмі бічні ребра дорівнюють по 8 см; сторони перпендикулярного перерізу відносяться, як 9:10:17, а його площа $144 см^2$. Знайти бічну поверхню цієї призми.



$S_б = P_{\perp} \cdot AA_1$

$A_2B_2 : A_2C_2 : B_2C_2 = 9 : 10 : 17$

$A_2B_2 = 9x$

$A_2C_2 = 10x$

$B_2C_2 = 17x$

$P = 18x$

$S_{\Delta A_2B_2C_2} = \sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 36x^2 = 144$

$x^2 = 4, x = 2$

$A_2B_2 = 18см; A_2C_2 = 20см; B_2C_2 = 34см$

$S_{бічн} = (18 + 20 + 34) \cdot 8 = 728 = 576(см^2)$

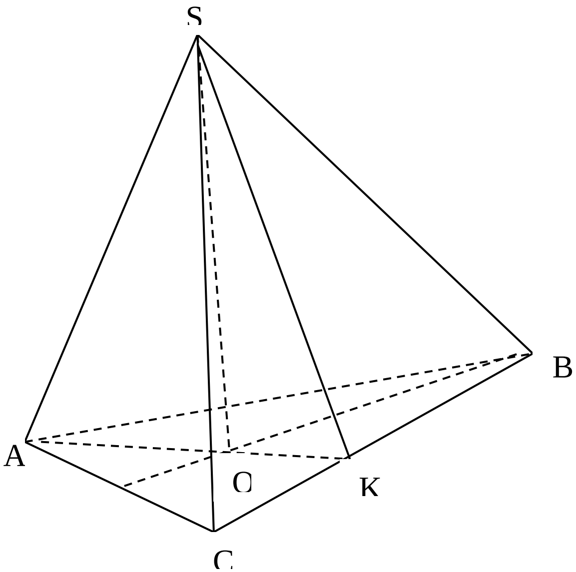
Означення 12. Пірамідою називається многогранник, який складається з многокутника (основи), точки, яка не лежить в площині основи (вершини) та всіх відрізків, які сполучають вершину з точкою основи.

Вписаною пірамідою називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи. Піраміда називається правильною, якщо її основа – правильний многокутник і висота піраміди проектується в центр цього многокутника. Апофемою правильної піраміди називається висота її бічної грані.

Властивості перерізів піраміди площиною, паралельною до основи

Якщо піраміду перетнути площиною, паралельною до основи, то:

1. бічні ребра і висота піраміди діляться цією площиною на пропорційні відрізки;
2. в перерізі отримуємо многокутник, який подібний до основи;
3. площі перерізу і основи відносяться між собою, як квадрати їх відстаней від вершини піраміди.

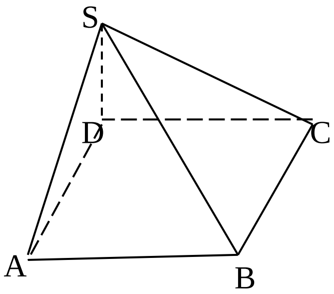


Бічною поверхнею піраміди називається сума площ її бічних граней $S_n = S_б + S_о$

Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра основи на апофему. $S_б = \frac{1}{2} P_о \cdot l$

Задача 5. Основою піраміди є квадрат, її висота проходить через одну з вершин основи. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо сторона основи 20 дм, а висота 21 дм.

Розв'язання:



$$S_б = S_{ASD} + S_{DSC} + S_{CSB} + S_{BSA}$$

$$S_{\Delta ASD} = S_{\Delta CSD} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210(дм^2)$$

$$AS = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29дм$$

За ТТП $SC \perp BC, SA \perp AB$

$\Delta SAB = \Delta SCB$ - прямокутні

$$S_{\Delta SAB} = 2 \cdot 20 \cdot 29 = 290(дм^2)$$

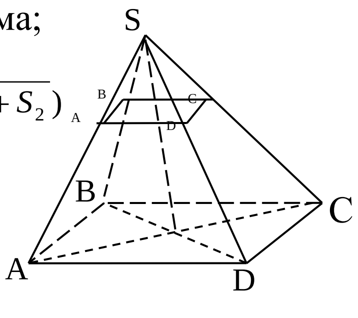
$$S_{біч} = 2 \cdot (290 + 210) = 1000(дм^2) = 10м^2$$

Означення 13. Зрізаною пірамідою називається частина піраміди, обмежена її основою і січною площиною, паралельною до основи.

Паралельні грані зрізаної піраміди називаються основами. Висота – це відрізок перпендикулярної прямої, проведеної до основ, і обмежений основами. Зрізана піраміда називаються правильною, якщо її основи правильні многокутники, і пряма, що з'єдную центри основ, перпендикулярна до площин основ. Апофемою правильної зрізаної піраміди називають висоту її бічної грані.

$S_б = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l, l -$ апофема;

$$V_{зр.пір.} = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 + S_2})$$



5)

Побудувати переріз многогранника площиною означає побудувати прямі, що є слідами перетину граней многогранника даною площиною. Січна площина може бути задана різними способами:

1. трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2. прямою і точкою, що не лежить на ній;
3. двома прямими, що перетинаються;
4. деякими з названих елементів в сукупності з різними залежностями між ними і елементами многогранника.

При цьому можуть бути використані паралельність, перпендикулярність, кути між січною площиною і ребрами і т. д.

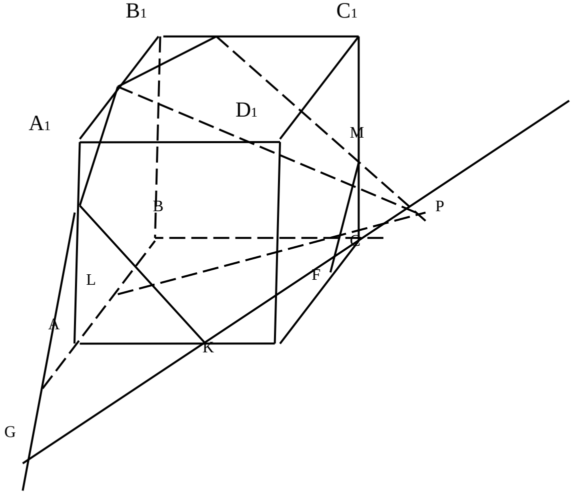
Для побудови перерізів площиною використовують спосіб побудови слідів або спосіб внутрішнього проектування. Він полягає в тому, що на площині нижньої основи (іноді іншій площині) виконується побудова слідів (ліній і точок перетину січної площини, деяких прямих). За допомогою цих слідів виконується побудова точок перетину січної площини з ребрами многогранника і ліній перетину січної площини з гранями многогранника.

Задача.

Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через три задані точки K, L, M, що лежать на ребрах, які не перетинаються.

Розв'язання: Спроектуємо т. K,L,M на площину основи т. $L \to L_1$, т. $M \to C$, т. $K \to K$. Оскільки, т. L і M належать січній площині, а т. L_1 і С - основі, то точка їх перетину т.E буде слідом прямої LM на площині основи. Пряма KE – слід перетину січної площини з площиною основи, вона перетинає BC в т. F. MF - лінія перетину бічної грані DD_1C_1C з січною площиною. Щоб знайти лінії перетину бічних граней AA_1B_1B і BB_1C_1C з січною площиною продовжимо прямі AB і BC до перетину з слідом. Сполучаємо т.G і т.L та т. P і т. M

Шуканий переріз KFMQLH.



Спосіб внутрішнього проектування полягає в тому, що для побудови перерізу спочатку будують ті точки нижньої основи многогранника, які однозначно відповідають точкам внутрішнього перерізу. Для цього будують перпендикулярні проекції точок нижньої основи на січну площину. Всі побудови здійснюються в середині многогранника, не виходячи за його межі.

6) Означення.

Циліндром називається тіло утворене при обертанні прямокутника навколо однієї з його сторін.

Циліндр складається з двох основ (круги) та бічної поверхні, яка в розгортці є прямокутником, одна сторона якого дорівнює довжині кола основи, а інша – висоті циліндра.

$$S_{біч} = 2\pi RH$$

$$S_п = S_б + 2S_о = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H)$$

$$V_ц = S_о \cdot H = \pi R^2 H$$

Означення.

Конусом називається тіло, утворене при обертанні прямокутного трикутника навколо його катета.

Конус складається з основи (круга) та бічної поверхні.

Висотою конуса називається перпендикуляр опущений з висоти на площину основи. Твірна – це відрізок, який сполучає вершину з точками кола основи.

Бічна поверхня конуса дорівнює границі, до якої наближається бічна поверхня вписаної в нього (або описаної навколо нього) піраміди при необмеженому збільшенні числа її бічних границь. При цьому довжина ребра основи правильної піраміди наближається до нуля.

$$S_{б\,конуса} = \lim_{n\to\infty} S_{б\,пір} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} P_o \cdot l = \frac{1}{2} \cdot C_{кола} \cdot l = \pi Rl$$

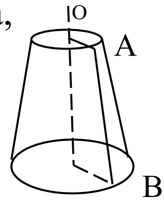
$$S_{пов} = S_б + S_o = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l+R)$$

Аналогічно визначається об'єм конуса

$$V_{кон} = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Означення.

Зрізаним конусом називається частина конуса, що лежить між його основою і січною площиною, паралельною до основи.



Зрізаний конус може бути утворений обертанням прямокутної піраміди навколо бічної сторони, перпендикулярної до її основ.

Означення.

Два циліндри, конуси, зрізані конуси називаються подібними, якщо подібні їх осьові перерізи.

Бічні і повні поверхні подібних циліндрів, конусів, зрізаних конусів відносяться як квадрати їх споріднених лінійних елементів (радіусів основ, висот, твірних), а об'єми, як куби їх лінійних елементів.

Задача.

У зрізаному конусі твірна 5 см , а радіуси основ – 6 см і 10 см. Знайти радіус циліндра такої ж висоти повна поверхня якого рівновелика бічній поверхні зрізаного конуса.

Розв'язання:

$$H_{зр.кон} = H_{ц}$$

$$S_{п.зр.к} = S_{б.цил}$$

$$\pi l \cdot (R + r) = 2\pi R_{ц} H + 2\pi R_{ц}^2$$

$$З\Delta ACB(\angle C = 90°):$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} \quad = \sqrt{5^2 (\frac{10 \cdot 6}{2})^2} = 3(см)$$

H=3 см

$$\pi \cdot 5(6 + 10) = 2\pi R_{ц} \cdot 3 + 2\pi R_{ц}^2$$

$$80 = 6R_{ц} + 2R_{ц}^2$$

$$R_{ц}^2 + 3R_{ц} - 40 = 0$$

$$R_{ц} = -8 - незадов.умова$$

$$R_{ц} = 5$$

Означення.

Кульовою поверхнею або сферою називається ГМТ простору, рівновіддалених від однієї точки, що називається центром сфери.

Означення.

Кулею називається тіло, обмежене сферою.

Сферу можна одержати обертанням півкола навколо діаметра.

Переріз сфери будь-якою площиною є коло, а переріз кулі – круг. Переріз, який проходить через центр називається великим кругом кулі. Перерізи, рівновіддалені від центра кулі, рівні між собою. З двох перерізів, не однаково віддалених від центра кулі, більший радіус має той, що лежить ближче до центра.

Через дві точки сфери, які не лежать на кінцях одного діаметра, можна провести великого круга і до того ж тільки одне.

Означення.

Дотичною площиною до кульової поверхні називається площина, що має з цією поверхнею тільки одну спільну точку.

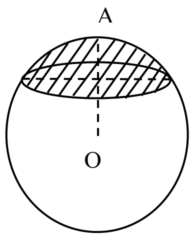
Дотична площина, перпендикулярна до радіуса, проведена з точки дотику і навпаки. $V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$S_{сф} = 4\pi R^2$$

У ШКС розглядають такі частини кулі: кульовий сегмент, кульовий шар, кульовий сектор та відповідно: сегментна поверхня, кульовий пояс.

Означення.

Кульовим сегментом називається тіло, яке відтинає площина від кулі, а частина кульової поверхні називається сегментною поверхнею. Відрізок AO_1 назив. висотою сегмента.

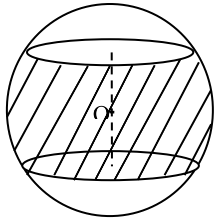


$S_{сегм} = 2\pi RH$, де Н – висота сегмента, R – радіус кулі.

$$V_{кул.сегм} = \pi H^2 (R - \frac{1}{3} H)$$

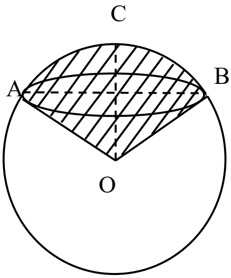
Означення.

Кульовим шаром називається тіло, яке відтинається від кулі двома паралельними січними площинами, а частина кульової поверхні називається кульовим поясом.



$S_{пояса} = 2\pi RH$, R – радіус кулі, H – висота пояса.

$V_{кул.шару} = V_{кулі} - V_{сегм1} - V_{сегм2}$



Означення.

Кульовим сектором називається тіло, одержане обертанням кругового сектора навколо осі, що лежить в його площині, яка проходить через його центр.

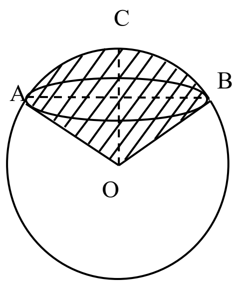
Кульовий секетор складається з кульового сегмента та конуса, які мають спільну основу.

$V_{кул.сект} = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$ де R – радіус кульового сектора, H- висота кульового сегмента.

Задача:

Визначити, яку частину об’єму кулі становить об’єм сферичного сектора, у якого сферична і конічна поверхні рівновеликі.

$S_{сегм} = S_{біч.конуса}$



$S_{сегм} = 2\pi RH, H = CO_1$

$S_{біч.конуса} = \pi \cdot O_1B \cdot R$

$2\pi RH = \pi rR$

$2H = r$

$2CO_1 = O_1B$

$З\Delta AOO_1 (\angle O_1 = 90): R^2 = (R-H)^2 + r^2$

$R^2 = (R-H)^2 + 4H^2; R^2 = R^2 - 2RH + H^2 + 4H^2$

$5H^2 = 2RH$

$5H = 2R$

$$H = \frac{2R}{5}$$

$$V_{кул.сект} = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{2R}{5} = \frac{4}{15}\pi R^3$$

$$V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{V_{кул.сект}}{V_{кулі}} = \frac{\frac{4}{15}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{5}$$

7) Означення.

Куля називається вписаною в многогранник, якщо площини всіх граней дотикаються до кулі.

Означення.

Куля називається описаною навколо многогранника, якщо всі вершини многогранника лежать на поверхні кулі.

Означення.

Куля називається вписаною в конус, зрізаний конус, циліндр, якщо поверхня кулі дотикається до площини основи і до всіх твірних їх бічних поверхонь.

Означення.

Куля називається описаною навколо конуса, якщо поверхня кулі проходить через вершину конуса, а коло основи конуса лежить на поверхні кулі.

Означення.

Куля називається описаною навколо циліндра і зрізаного конуса, якщо кола їх основи лежать на поверхні кулі.

У трикутну піраміду і будь-яку правильну піраміду та конус завжди можна вписати кулю. Навколо трикутної піраміди, циліндра, зрізаного конуса і правильної піраміди можна описати кулю.

Навколо прямої призми можна описати кулю, якщо в основі призми лежить многокутник, навколо якого можна описати коло.

У пряму призму можна вписати кулю, якщо в основі призми лежить многокутник, у який можна вписати коло і висота призми дорівнює діаметру кулі.

У піраміду можна вписати (описати) конус, якщо в її основу можна вписати (описати) коло.

У циліндр можна вписати (описати) призму, якщо вона пряма і в її основу можна вписати (описати) коло.

При розв’язуванні задач на комбінацію многогранників з кулею необхідно визначити розташування центра кулі відносно елементів многогранника.

Центр кулі описаної навколо правильної піраміди лежить на перетині серединного перпендикуляра до бічного ребра з висотою піраміди.

Центр кулі вписаної у правильну піраміду лежить на перетині бісектриси лінійного кута двогранного кута при основі з висотою піраміди.

Центр кулі описаної (вписаної) в пряму призму лежить на середині відрізка, який складає центри описаного (вписаного) кіл в основи призми.

Тема 2 Розв'язування олімпіад них задач

1. **Логічні задачі.**
2. **Принцип Діріхле.**
3. **Діофантові рівняння.**
4. **Задачі з цілою і дробовою частинами.**
5. **Функціональні рівняння.**

1. При розв'язуванні логічних задач необхідно зіставляти факти, зв'язки між ними, інколи відкидати зайві дані. Багато фактів утруднює сприймання їх змісту. Схематично зображувати міркування можна: таблицею, на прямій, на двох прямих, по колу, у двовимірній таблиці, за двома ознаками.

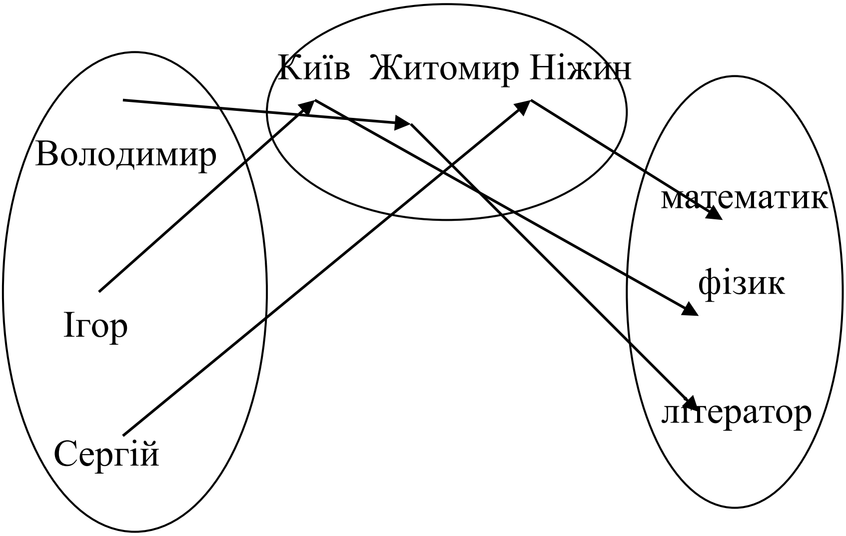
Задача1 Дівчата Береза, Верба і Тополя посадили дерева: березу, вербу і тополю. Жодна з них не посадила дерева, від якого пішло її прізвище. Яке дерево посадила кожна дівчина, якщо Береза посадила не тополю.

Розв'язання запишемо у таблиці:

	Береза	Верба	Тополя
береза	1 -	5 +	4 -
верба	8 -	2 -	9 +
тополя	7 +	6 -	3 -

Задача 2 Володимир, Ігор та Сергій викладають математику, фізику й літературу, а живуть вони в Києві, Житомирі та Ніжині. Відомо, що Володимир живе не в Ніжині, Ігор живе не в Житомирі, ніжинець не фізик, Ігор не математик, житомирець викладає літературу. Хто де живе та що викладає?

Розв'яжемо цю задачу класичним методом графів. Розглянемо множини міст, імен і предметів. Проведемо суцільну лінію, якщо твердження правильне, і пунктирну, якщо – хибне.



2. Принцип Діріхле названий на честь німецького математика XIX століття, який застосовував його у своїх дослідженнях з теорії чисел. Діріхле сформулював свій принцип у побутовій формі: «Якщо в n шухлядах міститься не менше, як n+1 предмет, то висуваючи ці шухляди, ми принаймні в одній з них виявимо не менше двох предметів».

Пізніше математики уточнили цей принцип, взявши замість предметів – кроликів, а замість шухляд – клітки.

Абстрактне формулювання принципу Діріхле: Нехай маємо дві множини A і B, в першій з яких n+1 елемент, а в другій – n елементів. Нехай задано якесь відображення першої множини на другу. У такому випадку принаймні з одним із елементів множини B буде співставлень не менше двох елементів множини A.

Задача 3 Довести, що серед будь-яких 13 натуральних чисел можна вибрати принаймні два числа, різниця яких ділиться на 12.

Поділимо кожне з цих чисел на 12. При цьому може бути не більше 12 різних остач: 0, 1, …, 11. Тому за принципом Діріхле, принаймні два числа при діленні на 12 дадуть однакові остачі. А їх різниця поділиться на 12 без остачі.

У задачах, де треба довести якесь твердження. Можна розглядати «найгірший» випадок. Якщо довести це твердження для найгіршого випадку. То воно буде істинне в інших випадках.

Задача 4 У непрозорому мішку лежать 5 білих та дві чорні кульки. Яку найменшу кількість куль треба витягнути з мішка. Щоб серед них обов'язково була хоча б одна біла кулька; дві кульки одного кольору; три білі і одна чорна кулька.

а) найгірший випадок – дві чорні, тоді третя обов'язково буде біла;

б) найгірший випадок – спочатку дві кулі різного кольору, тоді третя буде або біла, або чорна;

в) найгірший випадок – спочатку всі білі, а потім чорна куля, тобто 6.

3. Лінійні рівняння з двома змінними виду ax+вy=c у множині раціональних чисел має безліч розв'язків. Надаючи змінній x довільні значення, можна отримати всі значення y. Знайдені пари (x; y) є розв'язками даного рівняння. Але

часто пропонують розв'язати такі рівняння на множині цілих чисел, при цьому коефіцієнти а, в, с – теж цілі числа. Такі рівняння називають Діофантовими або невизначеними.

Властивості Діофантових рівнянь

1) Якщо НСД(а, в)=d і с не ділиться націло на d, то дане рівняння цілих розв’язків не має.

Приклад 4x+6y=7; НСД(4;6)=2, 7 не ділиться на 2, тому рівняння цілих розв'язків не має.

2) Якщо НСД(а, в)=d і с ділиться націло на d, то обидві частини рівняння ах+ву=с можна поділити на d. При цьому отримаємо рівносильне рівняння, у якому коефіцієнти при х і у взаємно прості.

Приклад 21x+35y=77; НСД(21;35)=7; 77 ділиться на 7, тому одержимо рівняння 3x+5y=11.

Отже, щоб розв'язати Діофантові рівняння першого степеня з двома змінними досить знайти цілі розв'язки рівняння виду ах+ву=с при взаємнопростих а і в.

Розв'язування таких рівнянь можна звести до розв'язування конгруенцій. Перепишемо рівняння ах+ву'с таким чином ах-с=ву. Оскільки х та у цілі числа, то різниця ах-с повинна ділитися на в, тобто остача від ділення на в виразів ах і с має співпадати. Говорять, що має виконуватись конгруенція ах≡ с(mod в). Розв'язавши конгруенцію, отримаємо деякий клас цілих чисел х. Підставивши їх у дане рівняння, визначимо клас відповідних значень у.

Приклад Знайти цілі розв'язки рівняння 25x+11y=7.

НСД(25;11)=1. 25x-7=11y; 25x≡7(mod 11); (25=22+3); 3x≡7(mod 11); 3x≡18(mod 11); x≡6(mod 11).

Утворену конгруенцію задовольняє клас чисел конгруентних 6 за модулем 11. Його задамо формулою x=6+11t. Підставимо у рівняння 25(6+11t)+11t=7. Звідси y'-13-25t.

Отже, $\begin{cases} x = 6 + 11t \\ y = - - 13 - 25t \end{cases}$ - всі розв'язки даного рівняння.

Якщо t=0, то $\begin{cases} x = 6 \\ y = -13 \end{cases}$, t=1, то $\begin{cases} x = 17 \\ y = -38 \end{cases}$ і т.д.

Діофантові рівняння бувають вищих степенів і можуть мати більше змінних. Наприклад, $x^2 + 2y^2 = 9; x^2 + y^2 = z^2$. Останнє рівняння розв'язували ще вавилонські математики. Всі числові розв'язки цього рівняння виражаються формулами: $\begin{matrix} x = m(p^2 - q^2) \\ y = 2mpq \\ z = m(p^2 + q^2) \end{matrix}$, де m, p, q – цілі числа. Декілька розв'язків цього рівняння: (3; 4; 5); (5; 12; 13); (8; 15; 17) і т.д.

Якщо взяти рівняння $x^n + y^n = z^n$, n>2, то Ферма довів. Що це рівняння натуральних розв'язків не має. Якщо необхідно знайти натуральні розв'язки діофантового рівняння. То іноді це можна зробити способом перебору.

<u>Приклад</u> 25x+11y=7. Виразимо x через y: $x = \frac{7 - 11y}{25}$.Надаючи y натуральні значення, ми бачимо, що x набуває від'ємних значень. Отже, рівняння натуральних розв'язків не має.

<u>4.Означення </u>Цілою частиною числа називається таке ціле число, яке не перевищує дане число не більше, ніж на 1.

Позначається [x]. Наприклад, [3,4]=3, [-5,1]=-6.

<u>Означення</u> Дробовою частиною числа називається різниця між даним числом і цілою частиною числа. Позначимо {x}.

$\{x\}=x,\ 0 \le x < 1$.

При розв'язуванні рівнянь і нерівностей, у які входять ціла і дробова частини числа, необхідно виразити дробову частину числа через цілу і накласти обмеження від 0 до 1.

<u>Приклад</u> Розв'язати нерівність [x]{x}<1.

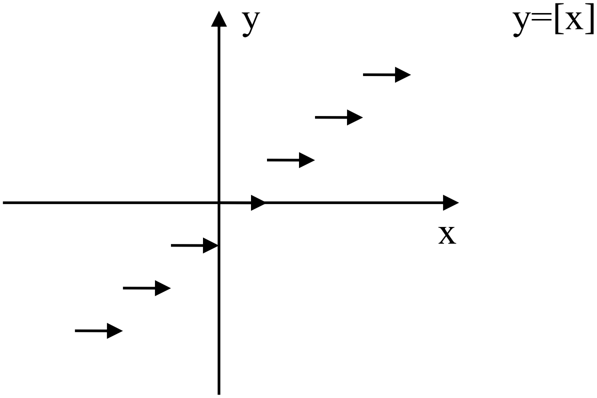
1) Якщо x<1, то $[x] \le 0, \{x\} \ge 0$. Отже, $[x]\{x\} \le 0$; $x \in (-\infty;1)$.

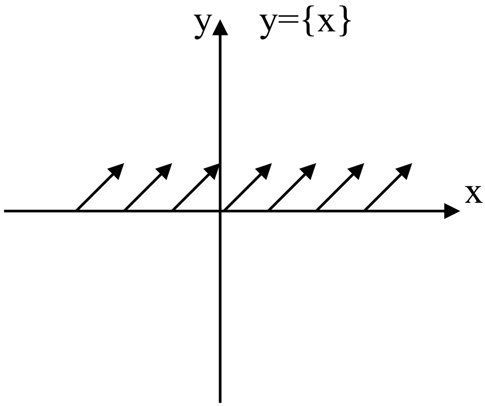
2) Якщо $x \in Z$, то {x}=0, [x]{x}=0<1.

3) Якщо $x \in (k;k+1)$, де $k \in N$, то $\begin{cases} k(x-k) < 1 \\ k < x < k+1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x < k + \dfrac{1}{k} \\ k < x < k+1 \end{cases}$, отже $x \in (k;k+\dfrac{1}{k})$.

Розглянемо графіки функцій y=[x] і y={x}.





5. Нехай дано функції f і g. Якщо під знак функції y=f(x) замість x підставити функцію x=g(t), то дістанемо нову

функцію y=f(g(t)). Ця функція називається суперпозицією функцій f і g і позначається f $\circ$ g. Розглядаючи суперпозицію функцій, потрібно стежити за її областю визначення.

Приклад Нехай f(x)=$\sqrt{x}$, g(t)=$\frac{t^2}{t-1}$. Знайти f $\circ$ g. f $\circ$ g= f(g(t))=$\sqrt{\frac{t^2}{t-1}}=\frac{|t|}{\sqrt{t-1}}$.

Означення Функціональним називається рівняння, у якому шуканими є деякі функції.

Розв'язком функціональних рівнянь можуть бути як конкретні функції, так і цілі класи функцій.

Приклад Знайти функцію f з областю визначення Д(f)=R\{0}, що задовольняє функціональне рівняння af(x)+ f$(\frac{1}{x})=ax$.

Введемо змінну x=$\frac{1}{t}$, тоді $af(\frac{1}{t})+f(t)=\frac{a}{t}$. Пере позначимо t через x, одержимо: $af(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{a}{x}$. Складемо систему рівнянь: $\begin{cases} af(x)+f(\frac{1}{x})=ax \\ af(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{a}{x} \end{cases}$. Домножимо перше рівняння на –a і почленно додамо рівняння системи, одержимо $(-a^2+1)f(x)=\frac{a}{x}-a^2x$. Звідси $f(x)=\frac{a-a^2x^2}{x(1-a^2)}$.

Тема 1 Прямі і площини в просторі

Наступна тема **Кути у просторі.**

Домашнє завдання:

1. Периметр рівностороннього трикутника 27 см. Деяка точка простору рівновіддалена від вершин трикутника на 14 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.
2. Із точки простору до площини прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 24 см, а більша бічна сторона 25 см, проведено перпендикуляр, довжина якого $7\sqrt{15}$ см. Основа перпендикуляра – вершина тупого кута трапеції, більша діагональ якої є бісектрисою прямого кута. Обчисліть відстань від даної точки до вершини другого прямого кута.
3. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Деяка точка поза ромбом, віддалена від усіх його сторін на 8 см. Знайти відстань від цієї точки до площини ромба.

Завдання для самостійної роботи:

1. Із точки, яка віддалена від площини на 24 см, проведено дві похилі, кут між якими 90^0. Проекції цих похилих на площину дорівнюють 18 см і 32 см. Знайти відстань від цієї точки до прямої, яка проходить через основи похилих.
2. Із деякої точки простору до площини трикутника, сторони якого дорівнюють 32 см, 40 см і 48 см, проведено перпендикуляр, довжина якого 18 см. Основа перпендикуляра належить стороні трикутника, що дорівнює 40 см, а дві інші сторони рівновіддалені від даної точки. Обчисліть відстань від даної точки до інших сторін трикутника.
3. У паралелограмі АВСД діагональ АС дорівнює $3\sqrt{21}$ см. Через вершину В проведено площину на відстані 5 см від діагоналі АС. Проекції сторін ВС і АВ на цю площину дорівнюють відповідно 12 см і 9 см. Знайти довжину діагоналі ВД.
4. У прямокутному трикутнику Перпендикуляр, проведений із вершини прямого кута, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9:16. Відстань від точки простору до вершин трикутника дорівнює 65 см. Знайти відстань від даної точки до площини трикутника.

5. Доведіть, що коли дві площини α і β перпендикулярні до прямої а, то вони паралельні.
6. Прямокутник АВСД зі сторонами 15 см і 20 см перегнули по діагоналі АС так, що площини АВС і АСД перпендикулярні. Знайти відстань між точками В і Д.
7. Дві прямі належать двом перпендикулярним площинам, паралельні прямій перетину площин і віддалені від неї на 5 см і 12 см. Доведіть, що через дані прямі можна провести площину і знайдіть відстань до неї від лінії перетину даних площин.

Тема 2 Кути в просторі

Наступна тема **Задачі на мимобіжні прямі**

Домашнє завдання:

1. На ребрі двогранного кута величиною 60^0 взято відрізок довжиною $4\sqrt{2}$ см. Із його кінців у різних гранях проведено перпендикуляри до ребра довжиною 3 см і 8 см. Знайдіть довжину відрізка, який сполучає інші кінці перпендикулярів.
2. Із точки А до площини під кутом 45^0 проведено похилу АВ. У площині проведено пряму ВС, яка утворює кут 45^0 з проекцією похилої АВ на площину. Знайдіть відстань від точки А до прямої ВС і кут між прямими АВ і ВС, якщо АВ дорівнює 12 см.
3. Однакові рівнобедрені трикутники АВС і ВСД мають спільну основу ВС, а їх площини утворюють кут 120^0. Знайдіть бічні сторони трикутників АВС і ВСД, якщо їх основи дорівнюють 3 см, а відстань між точками А і Д - $\sqrt{15}$ см.

Завдання для самостійної роботи:

1. Кінці відрізка довжиною 10 см лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах. Цей відрізок утворює з площинами кути 30^0 і 45^0. Визначте відстань між основами перпендикулярів, опущених із кінців даного відрізка на лінію перетину площин.
2. На площині дано трапецію і точку поза нею. Прямі, які проходять через цю точку і вершини трапеції, утворюють з її

площиною кути, що дорівнюють 45^0. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60^0, а діагональ, яка виходить із вершини цього кута, - $3\sqrt{3}$ см.

3. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, що дорівнює 16 см. Відстань між вершинами цих трикутників – 13 см. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, другий трикутник – прямокутний. Обчисліть кут між площинами цих трикутників.
4. З точки Д, що лежить на гіпотенузі АВ прямокутного трикутника АВС і віддалена від вершини прямого кута на $9\sqrt{2}$ см, проведено перпендикуляр ДК до площини трикутника. Перпендикуляри, проведені з точки К на катети трикутника АВС, нахилені до площини трикутника під кутом 45^0. Знайдіть відстань від вершини прямого кута трикутника АВС до точки К.
5. У грані двогранного кута поведена пряма, яка утворює з другою гранню кут 30^0, а з ребром двогранного кута кут 45^0. Яка величина двогранного кута?
6. Із центра О квадрата АВСД проведено перпендикуляр ОМ до його площини. Площина, проведена через точку М і пряму АВ, утворює з площиною квадрата кут 60^0. Проекція відрізка ОМ на площину АВМ дорівнює 6 см. Знайти діагональ квадрата.
7. Через гіпотенузу АВ прямокутного рівнобедреного трикутника АВС проведено площину β під кутом 45^0 до площини трикутника. Обчисліть кути нахилу катетів трикутника АВС до площини β.
8. Із даної точки до площини проведено дві різні похилі. Кут між похилими дорівнює 60^0, а кут між проекціями – прямий. Доведіть, що кожна з цих похилих утворює із площиною кут 45^0.

Тема 3 Задачі на мимобіжні прямі

Наступна тема **Зображення фігур в стереометрії. Задачі на побудову в просторі**

Домашнє завдання:

1. Ребро правильного тетраедра дорівнює а. Знайдіть відстань між двома ребрами тетраедра, які є мимобіжними.
2. Катет АС трикутника АВС($\angle$С=90^0) лежить у площині α, точка В не належить площині α. Трикутник $АВ_1С$ – ортогональна проекція даного трикутника на площину α. Побудуйте кут між прямими $АВ_1$ і ВС при умові, що другий катет не перпендикулярний до площини α.
3. У кубі $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ побудуйте спільний перпендикуляр між діагоналлю бічної грані $А_1В$ і відрізком МК, де М – середина $А_1Д_1$, К – середина АД.

Завдання для самостійної роботи:

1. Побудувати спільний перпендикуляр бічного ребра куба і діагоналі основи, які мимобіжні між собою.
2. Побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох граней куба, що не перетинаються.
3. Площі двох рівнобедрених трикутників дорівнюють 48 $см^2$ і 90 $см^2$. Спільна основа цих трикутників має довжину 12 см. Відстань між вершинами цих трикутників 13 см. Знайдіть відстань між прямою, яка містить спільну основу, і прямою, яка проходить через вершини трикутників.
4. Ребро куба дорівнює а. Знайдіть найкоротшу відстань між діагоналлю куба і діагоналлю основи куба, яка з нею мимобіжна.
5. Дано квадрат АВСД. Із вершини А проведено перпендикуляр $АА_1$ до його площини. Побудуйте кут між АВ і $А_1О$, де О – точка перетину діагоналей квадрата.
6. Побудуйте спільний перпендикуляр діагоналі $В_1Д$ куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ і ребра $АА_1$, яке не перетинає цю діагональ.

Тема 4 Зображення фігур в стереометрії. Задачі на побудову в просторі.

Наступна тема **Задачі на перерізи многогранників.**

Домашнє завдання:

Виконати графічну роботу на стандартному листку А4: непарний номер в журналі – перший варіант, парний номер в журналі – непарний варіант.

Побудувати за правилами паралельного проектування:

Варіант 1

1. два взаємно перпендикулярні діаметри в колі;
2. рівнобедрений трикутник, вписаний в коло;
3. правильний трикутник, описаний навколо кола;
4. прямокутний трикутник, вписаний в коло;
5. квадрат, описаний навколо кола;
6. правильний шестикутник, вписаний в коло;
7. правильну трикутну піраміду;
8. чотирикутну піраміду із двома гранями перпендикулярними до основи.

Варіант 2

1. два взаємно перпендикулярні діаметри в колі;
2. рівнобедрений трикутник, описаний навколо кола;
3. правильний трикутник, вписаний в коло;
4. тупокутний трикутник, вписаний в коло;
5. квадрат, вписаний в коло;
6. правильний шестикутник, описаний навколо кола;
7. правильну чотирикутну піраміду;
8. трикутну піраміду із однією гранню перпендикулярною до основи.

Завдання для самостійної роботи:

1. Дано паралелепіпед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$; М і К – середини ребер ДС і $А_1В_1$. Побудуйте точки перетину прямих АМ і АК з площиною грані $ВВ_1С_1С$.
2. Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює 60^0.
3. Побудуйте довільний паралелограм $А_1В_1С_1Д_1$ і, взявши його за паралельну проекцію квадрата АВСД, побудуйте проекцію прямої, що проходить через точку М, розташовану на стороні АВ так, що 3АМ=МВ, і утворює кут 45^0 зі стороною АВ.
4. Позначте три довільні точки $А_1$, $В_1$, $С_1$, що не лежать на одній прямій і, визначивши ці точки як паралельні проекції вершин

A, B, C правильного шестикутника ABCДEF, побудуйте проекцію цього шестикутника.
5. Дано зображення ромба, в якого одна з діагоналей дорівнює стороні. Побудуйте зображення висот ромба, що проходять через його центр.
6. Побудуйте кути нахилу діагоналі прямокутного паралелепіпеда до його граней.
7. Дано мимобіжні прямі а і в і точку А, що не належить жодній з них. Через точку А провести площину, паралельну прямим а і в.

Тема 5 Задачі на перерізи многогранників.

Наступна тема **Обчислення елементів многогранників.**

Домашнє завдання:
1. Побудуйте переріз даної призми $ABCДEA_1B_1C_1Д_1E_1$ площиною, що проходить через точки M, N, P (M належить ребру EE_1, N – ребру CC_1, P – грані AA_1B_1B).
2. Побудуйте переріз піраміди SABCDE площиною, що проходить через діагональ основи АД і паралельна бічному ребру SE.
3. Основою правильної призми є шестикутник із стороною 3 дм, висота призми дорівнює 13 дм. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві протилежні сторони верхньої і нижньої основ призми.

Завдання для самостійної роботи:
1. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини ребер АВ, ВС і $ДД_1$. Визначте вид перерізу.
2. Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через центр основи піраміди паралельно бічній грані піраміди.
3. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми АВСД $A_1B_1C_1Д_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах AA_1, $ДД_1$, CC_1.

4. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми АВСД $А_1В_1С_1Д_1$ площиною, що проходить через точки M, N, К, які лежать відповідно на ребрах $АА_1$, $В_1С_1$, у грані $ДД_1С_1С$.
5. У правильній чотирикутній призмі через діагональ основи проведено переріз паралельно діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи призми дорівнює 2 см, а її висота – 4 см.
6. Побудуйте переріз прямої чотирикутної призми АВСД $А_1В_1С_1Д_1$ площиною, що проходить через точки M, N, К, які лежать відповідно на ребрах $АА_1$, $В_1С_1$, ДС.
7. Побудуйте переріз прямої п'ятикутної призми $АВСДЕА_1В_1С_1Д_1Е_1$ площиною, що проходить через точки M, N, P, які належать трьом суміжним бічним граням.

Тема 6 Обчислення елементів многогранників.

Наступна тема **Геометричні місця в просторі**

Домашнє завдання:

1. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні суміжні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом φ. Визначте, якщо найбільше бічне ребро дорівнює а.
2. В основі прямої призми лежить прямокутник. Діагональ призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут β, а діагональ однієї з бічних граней нахилена до площини основи під кутом φ. Обчисліть об'єм призми.
3. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною а і гострим кутом 60^0. Ребро $АА_1$ також дорівнює а і утворює з ребрами АВ і АД кути 45^0. Визначте об'єм паралелепіпеда.

Завдання для самостійної роботи:

1. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі, що перетинаються, двох однакових бічних граней призми утворюють між собою кут β. Через ці діагоналі проведено площину, яка утворює з площиною основи кут φ.

Діагональ третьої бічної грані дорівнює в. Знайти об'єм призми.

2. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює m, а двогранний кут при основі - β. Знайти повну поверхню піраміди.
3. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Через сторону основи проведено площину під кутом φ до основи ($\alpha > \varphi$). Знайти площу перерізу, якщо висота піраміди дорівнює h.
4. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC зі стороною а. Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 нахилене до площини основи під кутом 60^0. знайти бічну поверхню призми..
5. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

Тема 7 Геометричні місця в просторі

Наступна тема **Площа поверхні многогранника**

Домашнє завдання:

1. Визначити ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.
2. Знайти ГМТ, рівновіддалених від трьох даних точок, що не лежать на одній прямій.
3. Знайти ГМТ, Рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти ГМТ, що знаходяться на даній площині , з яких даний відрізок AB видно під прямим кутом.
2. Знайти ГМТ, рівновіддалених від сторін даного кута.
3. Знайти ГМТ, рівновіддалених від даної площини на задану відстань.
4. Знайти ГМТ, які є вершинами пірамід даного об'єму V і побудованих на даній основі S.
5. Знайти геометричне місце центрів сфер даного радіусу, що дотикаються до двох площин, що перетинаються.

6. Знайти геометричне місце прямих, що проходять через дану точку А і перетинають дану площину під кутом α.
7. Знайти геометричне місце перпендикулярів, опущених з даної точки А на площини, що проходять через дану пряму а.

Тема 8 Площа поверхні многогранника

Наступна тема **Об'єм многогранника**

Домашнє завдання:

1. Через діагональ нижньої і вершину верхньої основи правильної чотирикутної призми проведено площину, яка перетинає дві суміжні бічні грані призми по прямих, що утворюють між собою кут 60^0. Обчисліть бічну поверхню епризми, якщо сторона основи дорівнює а.
2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом α. Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя - нахилена до неї під кутом β. Визначте повну поверхню піраміди, якщо найменше бічне ребро дорівнює в.
3. Площі основ і діагонального перерізу правильної чотирикутної зрізаної піраміди відповідно дорівнюють 16 дм^2, 324 дм^2 і 88 дм^2. Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

Завдання для самостійної роботи:

1. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною с і гострим кутом α, причому діагоналі трапеції перпендикулярні до бічних сторін. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.
2. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через сторону основи а і середину її висоти, нахилена до основи під кутом φ.
3. Основою піраміди є правильний шестикутник зі стороною а, одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і

дорівнює стороні основи. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.
4. В основі піраміди лежить квадрат. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші - нахилені до неї під кутом φ. Визначте об'єм піраміди, якщо найбільше бічне ребро дорівнює в.
5. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро має довжину 24 м і віддалене від двох інших ребер на відстань 12 м і 35 м. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

Тема 9 Об'єм многогранників

Наступна тема **Поверхні та об'єми тіл обертання**

Домашнє завдання:
1. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, нахилена до площини основи під кутом φ. Діагоналі двох інших бічних граней дорівнюють d. Визначте об'єм призми.
2. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайти об'єм піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює в.
3. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною с і гострим кутом α. Всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом β. Знайти об'єм піраміди.

Завдання для самостійної роботи:
1. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α і гіпотенузою с. Кожна бічна грань нахилена до основи піраміди під кутом β. Знайти бічну поверхню піраміди.
2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює а. Кут між суміжними бічними гранями дорівнює α. Знайти бічну поверхню піраміди.

3. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R. Знайти об'єм піраміди.
4. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною с і гострим кутом α. Бічна грань піраміди, що містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до основи піраміди, а три інші грані нахилені до неї під кутом β. Знайти об'єм піраміди.
5. В основі прямої призми лежить ромб. Більша діагональ призми дорівнює в і нахилена до площини основи під кутом φ, а менша – утворює з бічним ребром кут α. Знайти об'єм призми.

Тема 10 Поверхні та об'єми тіл обертання

Наступна тема **Куля, описана навколо многогранника**

Домашнє завдання:
1. Радіус основи рівностороннього циліндра дорівнює R. Через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму. Відстань від цієї прямої до осі циліндра дорівнює в. Знайти кут нахилу цієї прямої до площини основи циліндра.
2. Відрізок, який сполучає центр основи конуса з серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом α. Довжина цього відрізка дорівнює m. Знайти повну поверхню конуса.
3. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну із точок перерізу, має довжину $4\sqrt{2}$ дм і утворює з площиною кут 45^0. Знайти довжину лінії перетину.

Завдання для самостійної роботи:
1. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді а. Діагональ перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з серединою хорди нижньої

основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ. Знайти об'єм циліндра.

2. Через дві твірні конуса проведено площину, що нахилена до площини основи під кутом α. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра його основи під кутом φ. Знайти об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l.
3. У зрізаному конусі твірна дорівнює 5 см, а радіуси основ – 6 см і 10 см. Знайти радіус циліндра такої ж висоти, повна поверхня якого рівновелика бічній поверхні даного зрізаного конуса.
4. Сторони трикутника 13 см, 14 см, 15 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, якщо радіус кулі – 5 см.
5. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а із вершини конуса – під кутом φ. Визначте бічну поверхню конуса, якщо відрізок, який сполучає вершину конуса з серединою цієї хорди, дорівнює l.
6. Хорда основи циліндра стягує дугу основи , яка дорівнює α. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює Q. Знайти площу перерізу, проведеного через дану хорду паралельно осі циліндра.

Тема 11 Куля, описана навколо многогранника

Наступна тема **Куля, вписана в многогранник**

Домашнє завдання:

1. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом в і протилежним кутом β. Діагональ грані, яка містить цей катет. Нахилена до основи під кутом φ. Знайти площу поверхні описаної сфери.
2. У правильній трикутній піраміді відстань від центра описаної навколо неї кулі до бічного ребра дорівнює m. Визначити повну поверхню піраміди, якщо її бічні ребра нахилені до основи під кутом β.
3.

Завдання для самостійної роботи:

1. Навколо правильної трикутної призми описано кулю радіуса R. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з площиною її основи кут γ. Знайти об'єм призми.
2. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до основи під кутом α. Обчислити об'єм піраміди. Якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.
3. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з кутом α і гіпотенузою с, вписано сферу. Знайти об'єм призми.
4. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Знайти поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

Тема 12 Куля, вписана в многогранник

Наступна тема **Задачі на комбінації многогранників**

Домашнє завдання:

1. Знайти об'єм правильної чотирикутної призми, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R. Цей радіус, проведений до вершини призми, утворює кут φ з бічною гранню, що містить цю вершину.
2. Основа піраміди – прямокутна трапеція з основами а і в; двогранні кути при основі α. Знайти об'єм вписаної кулі.

Завдання для самостійної роботи:

1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом описаного кола R. Знайти об'єм вписаної кулі, якщо кожна бічна грань піраміди утворює з основою кут φ.
2. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Знайти поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

3. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює m. Бічне ребро утворює з висотою кут α. Знайти об'єм описаної кулі.
4. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом а і прилеглим кутом α. Діагональ грані, яка містить цей катет, утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм кулі, описаної навколо цієї призми.

Тема 13 Задачі на комбінації многогранників

Наступна тема **Задачі на комбінації многогранника і круглого тіла**

Домашнє завдання:
1. Центри граней правильного октаедра є вершинами куба. Знайти відношення об'ємів октаедра і куба.
2. Обчислити об'єм многогранника, вершинами якого є центри граней куба з ребром а.
3. Центр куба, ребро якого дорівнює а, сполучено з усіма його вершинами. Визначити об'єм і повну поверхню кожної з утворених пірамід.

Завдання для самостійної роботи:
1. Центр верхньої основи правильної чотирикутної призми і середини сторін нижньої основи є вершинами вписаної в призму піраміди, об'єм якої V. Знайти об'єм призми.
2. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини розміщено на апофемах піраміди і чотири – у площині основи. Всі ребра піраміди рівні між собою і кожне дорівнює а. Знайти повну поверхню і об'єм куба.
3. Довжина ребра куба $6\sqrt[3]{2}$. Обчислити об'єм многогранника, вершинами якого є середини ребер куба.

Тема 14 Задачі на комбінації многогранника і круглого тіла

Наступна тема **Задачі на комбінації круглих тіл**

Домашнє завдання:

1. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, більша сторона основи якого дорівнює а. Діагональ паралелепіпеда утворює з його більшою бічною гранню кут β, а з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
2. Радіус основи конуса дорівнює r, а твірна нахилена до площини основи під кутом φ. Навколо цього конуса описано піраміду, в основі якої – прямокутний трикутник з гострим кутом α. Визначте об'єм і бічну поверхню піраміди.
3. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра піраміди рівні. Бічна грань піраміди, яка містить основу рівнобедреного трикутника, утворює з площиною основи кут φ. Знайти бічну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, висота якої H.

Завдання для самостійної роботи:

1. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною с і прилеглими кутами α і β. Діагональ грані, що містить дану сторону, нахилена до площини основи під кутом φ. Знайти об'єм циліндра, вписаного в дану призму.
2. У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює d. Знайти повну поверхню вписаного в піраміду конуса, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α.
3. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Через діагоналі двох бічних граней, що містять сторони кута α проведено переріз, площа якого S. Кут між цими діагоналями дорівнює β. Знайти бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

4. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Визначте повну поверхню конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює h.
5. У конус вписано піраміду, основа якої – прямокутний трикутник. Бічна грань, що проходить через один з катетів, утворює з площиною основи кут α. Знайти об’єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом β.

Тема 15 Задачі на комбінації круглих тіл

Наступна тема **Контрольна робота**

Домашнє завдання:
1. Кут між твірною конуса і його висотою дорівнює β. Відстань від центра описаної навколо конуса кулі до основи висоти дорівнює в. Знайти повну поверхню конуса.
2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 24 см і 15 см, а його висота – 27 см. Знайти об’єм описаної кулі.
3. У циліндр, що вписаний в кулю, вписано кулю. Знайти відношення площ поверхонь і об’ємів цих куль.

Завдання для самостійної роботи:
1. У нижній основі циліндра проведено хорду довжиною а, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут φ. Знайти об’єм описаної навколо циліндра кулі.
2. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Знайти повну поверхню кулі.
3. Навколо кулі описано зрізаний конус, в якого твірна нахилена до основи під кутом α. Визначте повну поверхню зрізаного конуса, якщо радіус кулі дорівнює r.

Тема 17 Елементарні методи розв'язування логічних задач

Наступна тема **Ігрові задачі**

Завдання для самостійної роботи:

1. Треба поділити 7 яблук на 12 чоловік порівну, розрізуючи кожне яблуко не більше ніж на 5 частин. Як це зробити?
2. У черзі в шкільному буфеті стоять Юра, Коля, Володя, Саша та Олег. Юра стоїть перед Колею, але після Олега. Володя і Олег не стоять поруч, а Саша не знаходиться поруч ні з Олегом, ні з Юрою, ні з Володею. В якому порядку стоять хлопці?
3. На вулиці, ставши в круг, розмовляють 4 дівчинки: Аня, Валя, Галя і Надя. Дівчинка в зеленому платті (не Аня і не Валя) стоїть між дівчинкою в голубому платті і Надею. Дівчинка в білому платті між дівчинкою в рожевому і Валею. В якому платті кожна дівчинка?
4. Є два бідони 17л і 5л. З цистерни треба відлити 13 л бензину. Як це зробити?
5. Чи можна з допомогою двох посудин об'ємом 9 л і 11 л набрати з крана 10 л води?
6. Як розставити 10 крісел вздовж стіни кімнати, щоб біля кожної стіни стояла однакова кількість крісел
7. 10 монет розміщені у формі рівностороннього трикутника. Треба забрати якнайменше монет так, щоб ті, що залишилися, не були вершинами жодного рівностороннього трикутника.
8. Деякий чоловік в залежності від настрою або цілий день говорить правду, або бреше, або чергує правду з брехнею. Які 2 запитання треба йому задати, на які він дасть коротку відповідь так чи ні, щоб взнати його настрій?
9. Із сірників склали неправильну рівність VII+III=V. Як перекласти один сірник, щоб отримати правильну рівність?
10. В місті Рівне кожний десятий математик є музикантом, а кожний одинадцятий музикант є математиком. Кого більше в місті?
11. Серед 9 монет є одна фальшива. Як і з допомогою скількох зважувань можна знайти фальшиву монету на вагах без гир?
12. Розшифруйте ребус ЛІТО+ЛІТО=ПОЛІТ.

13. Відновіть запис:

```
●●●●●●   ●●●
●●●●     ●8●
  ●●●
  ●●●
  ●●●●
  ●●●●
     0
```

14. Казковий богатир бореться з триголовим і трихвостим Змієм–Гориничем. Одним ударом він може зрубати Змію або одну голову, або дві голови, або один хвіст, або два хвости. Якщо зрубає голову, то виросте нова голова, хвіст – 2 нові хвости, 2 хвости – голова, 2 голови – нічого не виросте. Змій буде убитий, коли у нього всі голови будуть відрубані. Чи зможе герой подолати Змія.

Тема 18 Ігрові задачі

Наступна тема **Діофантові рівняння**

1. <u>Вгадайте задумане число</u>. Задумайте трицифрове число і допишіть до нього таке ж число. Отримане 6-цифрове число помножте на 2, результат поділіть на 7, потім на 11 і на кінець на 13. Запитайте отримане число. Як вгадати задумане число.
2. Двоє грають в таку гру: перший називає ціле число від 1 до 10 включно, другий уявно додає до цього числа ще яке-небудь з першого десятка і називає суму. Перший додає знову число з першого десятка і називає суму і т.д. Виграє той, хто назве число 100. Як треба грати, щоб виграти? Хто виграє при правильній грі: той, хто починає, чи партнер?
3. У лівому нижньому кутку шахової дошки стоїть фігура. Одним ходом її дозволяється переставити на одне з трьох сусідніх полів: вправо, вверх чи по діагоналі. Виграє той, хто займе правий кут (ходи робити по черзі). Хто виграє при правильній грі?
4. Напишіть будь-яке велике число, переставте в ньому як завгодно цифри. Від більшого числа відніміть менше. В

отриманій різниці обведіть яку-небудь цифру, а інші назвіть в будь-якому порядку. Як вгадати обведену цифру?

5. Одноразовий фокус: У таблиці 4х4 виписані числа від 1 до 16. Виберіть в таблиці будь-яке число і обведіть його кружечком. Викресліть рядок і стовпчик, на яких розташоване це число. Із решти чисел виберіть ще число і знову так само викресліть. Знову виберіть число і викресліть. Залишиться одне число. Додаємо всі отримані числа і відгадуємо суму.
6. Як відгадати дату, місяць і рік народження: Порядковий номер місяця народження помножити на 100, додати число народження, помножити результат на 2 , додати 8, помножити на 5, додати 4, помножити на 10, додати 4 і додати кількість повних років. Як за отриманим результатом вгадати дату народження?
7. Швидке добування кубічного кореня. Задумайте двоцифрове число і піднесіть його до кубу. Як за названим результатом вгадати число?
8. Я задумав ціле число, що не перевищує 1000. Як, задавши не більше 10 запитань, на які можна дати відповідь „так" чи „ні", можна взнати задумане число?
9. Чи можна покрити шахову дошку 31 кісточкою доміно, залишивши вільними дві крайні клітинки однієї діагоналі?

Тема 19 Діофантові рівняння

Наступна тема **Використання графів при розв'язуванні**

1. Знайти цілі розв'язки рівняння: а) $y^3-x^3=91$; б) $y^3+x^3=35$.
2. Знайти натуральні розв'язки рівняння: а) $y^2-x^2=1980$; б) $x^3-y^3=xy+61$.
3. Довести, що рівняння немає розв'язків на множині натуральних чисел: а) $x^3-x=3y^2+1$; б) $x^2=2y^2$; в) $x^2+x-1=3^{2y+1}$.
4. Знайти цілі розв'язки рівняння: а) $7(x+z+xyz)=10(1+yz)$; б) $17(xyzt+xy+xt+zt+1)=54(yzt+y+t)$.
5. Знайти трицифрове ціле число, яке в 12 разів більше від суми своїх цифр.

6. У шаховому турнірі беруть участь лише майстри і гросмейстери, причому майстрів у тричі більше, ніж гросмейстерів. Будь-які два учасники мають зіграти між собою лише одну партію. За виграш – одне очко, нічию – 0,5 очок, поразку – нуль. Майстри набрали очок в 1,2 рази більше, ніж гросмейстери. Скільки було майстрів і гросмейстерів, якщо майстри із гросмейстерами не зіграли жодної партії в нічию.
7. Групу туристів вирішили розмістити в автобусах так, щоб в кожному була однакова кількість пасажирів. Спочатку розсаджували по 22 людини, але при цьому не знайшлося місця одному туристові. Після того, як один з автобусів від'їхав порожнім, всі туристи розсілися порівну в автобусах, що залишилися. Скільки спочатку було автобусів і скільки туристів, коли відомо, що кожний автобус розраховано не більше, як по 32 людини.

Тема 20 Використання графів при розв'язуванні задач

Наступна тема **Задачі на принцип Діріхле, парності та правило крайнього**

1. Зобразити конверт, не відриваючи олівець від паперу.
2. Водій снігоочисної машини помітив. Що коли кожною вулицею міста він проїде лише один раз, то закінчить свою роботу на тому перехресті, де містить гараж. З якого перехрестя має почати роботу водій і на якому перехресті міститься гараж?
3. Шість школярів беруть участь в шаховому турнірі, який проводиться в один круг. Довести, що серед них завжди знайдуться три учасники турніру, які провели вже всі зустрічі між собою або ще не зіграли один з одним жодної партії.
4. На географічній карті вибрано 5 міст. Відомо, що серед них із будь-яких трьох знайдуться два, які з'єднано авіалініями і два, які не з'єднано. Довести, що : 1) кожне місто з'єднане авіалініями лише з двома містами; 2) вилетівши з будь-якого міста, можна, облетівши інші по разу, повернутися назад.

5. На площині 17 точок сполучені відрізками (кожна з кожною), кожен з яких пофарбований у один з трьох кольорів. Довести, що існує трикутник із сторонами одного кольору.

Тема 21 Задачі на принцип Діріхле, парності та правило крайнього

Наступна тема **Задачі з цілою і дробовою частинами**

1. У місті 2,5 млн жителів. Науковці вважають. Що в кожної людини менш як 200 тис волосин на голові. Довести, що існує 13 жителів з однаковою кількістю волосин на голові.
2. У змаганнях з бігу приймають участь 100 спортсменів. Відомо, що серед будь-яких 12 з них знайдуться двоє знайомих між собою. Довести, що як би не роздавали учасникам стартові номери, знайдуться два знайомі спортсмени, чиї номери починаються з однакової цифри.
3. У футбольній першості дві команди повинні зіграти між собою один матч. Довести, що в будь-який момент змагання знайдуться дві команди, що зіграли на той момент однакову кількість матчів.
4. Довести, що хоча б одна із основ перпендикулярів, опущених з даної внутрішньої точки опуклого многокутника на його сторони, лежить на самій стороні, а не на її продовженні.
5. На конгресі серед вчених є знайомі. При цьому будь-які двоє вчених, що мають однакову кількість знайомих, не мають спільних знайомих. Довести, що є вчений, в якого на конгресі точно один знайомий.
6. В деякому місті з будь-якої станції метро можна проїхати(можливо з пересадками) на будь-яку іншу. Рух в метро двосторонній. Довести, що можна закрити одну станцію(без права проїзду через неї) так, щоб з будь-якої станції, що залишилися, можна було проїхати на будь-яку іншу.

7. На площині розташовані n точок так, що будь-який трикутник з вершинами в цих точках має площу не більшу 1. Довести, що всі ці точки можна помістити в трикутник площею 4.
8. Довести. Що в будь-якого опуклого многогранника знайдуться дві грані з однаковим числом ребер.
9. У крамницю завезли 25 ящиків з трьома сортами яблук. Довести, що серед них є хоча б 9 ящиків з яблуками однакового сорту.
10. У квадраті зі стороною 1 м розмістили 51 точку. Довести, що якісь 3 з них можна покрити квадратом зі стороною 20 см.

Тема 22 Задачі з цілою і дробовою частинами

Наступна тема **Функціональні рівняння**

1. Розв'язати рівняння:

   а) $[x]^2+5[x]-3=4([x]-1)+7$;

   б) $\frac{[x]-1}{[x]+1}+\frac{[x]-3}{[x]-1}=\frac{7}{6}$;

   в) $4(\{x\}-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}(\{x\}+\frac{1}{3})=\{x\}+\frac{3}{2}$;

   г) $6\{x\}^2-5\{x\}+1=0$;

   д) $[4x-2,4]=3$;

   е) $[\frac{1}{2}x-1]=1,01$;

   є) $[\sqrt{\frac{1}{2}x-3}]=5$;

   ж) $[x]=2\{x\}+4$;

   з) $[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$.

2. Розв'язати нерівність:

   а) $[x]\{x\}<1$;

б) $\frac{x}{[x]} < \frac{\{x\}}{x}$.

3. Серед перших n натуральних чисел скільки існує таких, які не діляться ні на 3, ні на 4?

4. Скільки існує натуральних чисел, менших від 1000, які не діляться ні на 3, ні нв 5, ні на 7?

5. Побудувати графік функції:

а) $y=[x^2]$; б) $y=\{\sin x\}$; в) $y=[\sin x]$; г) $y=\frac{x}{[x]}$; д) $y=[\frac{1}{x}]$; е) $y=x[x]$; є) $y=x\{x\}$

Тема 23 Функціональні рівняння

Наступна тема **Нестандартні геометричні задачі**

1. Знайти функцію f з областю визначення D(f)=R\{0}, що задовольняє функціональне рівняння $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$.
2. Знайти функцію f з областю визначення D(f)=R\{$\frac{1}{2}$; 1}, що задовольняють функціональне рівняння: а) $f(x)+xf(\frac{x}{2x-1})=2$; б) $f(x)+xf(\frac{x}{x-1})=2$.
3. Знайти функцію f з областю визначення D(f)=R\{-2; 0; $\frac{1}{3}$}, що задовольняють функціональне рівняння $2f(\frac{x}{x-1})-3f(\frac{3x-2}{2x+1})=\frac{13x-4}{2x-3x^2}$.
4. Розв’язати рівняння 3f(x)-2f(x-y)-f(x+y)=y, де f(0)=0.

5. Розв’язати рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$, причому $f(1)=1$; $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}f(x)$.