МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики

М. М. Присяжнюк

Перетворення подібності площини

Посібник для студентів
спеціальності “математика”

Рівне – 2008

Перетворення подібності площини. Посібник для студентів спеціальності „математика”. – Рівне, 2008. – 52 с.

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики ***Дудас В.О.***

Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики
Марач В.С.

Рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики, протокол №7 від 21.02. 2008р.

ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник призначений для студентів першого курсу стаціонарної та дистанційної форм навчання в яких однією із спеціальностей є математика. Буде корисним для вчителів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій, колегіумів.

Посібник містить матеріал з теми «Перетворення подібності площини», який викладено у припущенні, що студент знає шкільний курс геометрії, володіє методом координат, основами векторної алгебри, знайомий з поняттям групи, із загальним поняттям перетворення площини, а також із поняттям переміщення площини.

Спочатку розглядається окремий вид подібності – гомотетія, а потім загальне поняття перетворення подібності.

В посібнику наведено розв’язки типових задач, що пов’язані із поняттям гомотетії і подібності. Наведено приклади застосування гомотетії і подібності взагалі до розв’язування задач на побудову і доведення. В кінці подано список задач для самостійного розв’язування.

Задачі підібрані із збірників, що вказані у списку рекомендованої літератури, значна частина задач складена авторами посібника.

Перетворення подібності площини

При вивченні таких геометричних перетворень площини як паралельне перенесення, осьова симетрія, поворот об’єднують їх в одне загальне поняття – **переміщення**, або рух.

Відомо, що переміщення площини зберігає розміри, а, отже, і форму геометричної фігури.

Проте існують такі перетворення площини, при яких розміри фігури змінюються, але форма зберігається. Це має місце, наприклад, при виготовленні креслення деталі, при складанні плану даної місцевості, при складанні географічних карт, при відображенні кадру на екран у кіно, при виготовленні фотокопій.

У цьому випадку фігура і її образ уже не рівні, але мають однакову форму. Кажуть, що ці дві фігури подібні, а перетворення, яке переводить при цьому одну фігуру в іншу, називають перетворенням подібності, або просто подібністю.

Розглянемо спочатку один окремий випадок подібності, яку називають центральною подібністю, або гомотетією.

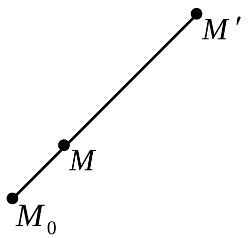
Слово гомотетія походить від грецьких слів homos - однаковий (подібний), thetos – розміщений, отже, homotetos – однаково (подібно) розміщений.

§ 1. Гомотетія і її властивості

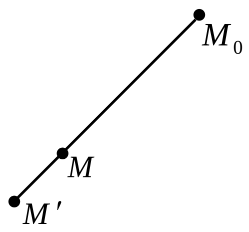
Означення. Гомотетією з центром M_0 і коефіцієнтом $k \neq 0$ називається перетворення площини при якому довільній точці M площини ставиться у відповідність точка M' так, що виконується співвідношення

$$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M} \qquad (1)$$

З рівності (1) випливає, що точки M_0, M і M' належать одній прямій. При цьому, якщо $k > 0$, то вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{M_0M'}$ співнаправленні і точки M і M' – її образ – лежать з одного боку від центра M_0 гомотетії. В цьому випадку гомотетію називають додатною, або гомотетією першого роду (мал..1)



мал.1



мал.2

Якщо ж $k < 0$, то вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{M_0M'}$ протилежно напрямлені і точки M і M' лежать по різні боки від центра гомотетії. В цьому випадку гомотетію називають від'ємною, або гомотетією другого роду (мал.2).

Точку M' називають гомотетичною точці M при гомотетії з центром M_0 і коефіцієнтом k.

Записують це так:

$H_{M_0}^k(M) = M'$ або $H_{M_0}^k:\ M \to M'$.

Якщо $k > 0$, то центр гомотетії називають зовнішнім, якщо ж $k < 0$, то – внутрішнім.

На основі означення гомотетії можна встановити ряд її властивостей. Зупинимося на деяких з них.

1. При гомотетії центр гомотетії відображається на себе , тобто є інваріантною точкою

$H_{M_0}^k(M_0) = M_0$.

Доведення. Із рівності (1), замінивши точку M точкою M_0, маємо:

$$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M_0} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'} = 0 \Rightarrow M' = M_0$$

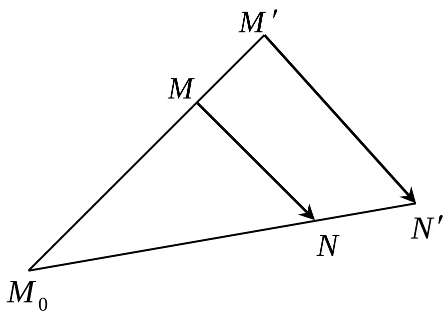
2. Якщо $k \neq 1$, то гомотетія не має інваріантних точок, якщо ж $k = 1$, то будь-яка точка M площини є інваріантною, тобто гомотетія в цьому випадку є тотожним перетворенням.

Доведення. Справді, якщо $k \neq 1$, то із (1) випливає, що $\overrightarrow{M_0M'} \neq \overrightarrow{M_0M}$, тобто точка $M' \neq M$; якщо ж $k = 1$, то $\overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{M_0M}$, а це означає, що $M' = M$.

3. Якщо $H_{M_0}^k$ відображає точки M і N відповідно у точки M' і N', то

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \tag{2}$$

Доведення: Нехай M_0 - центр гомотетії, M і N дві



довільні точки площини, а $M'N'$ відповідно їх образи при даній гомотетії. Маємо:

$$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{M_0N'} = k\overrightarrow{M_0N}$$

Із трикутника $M_0 \quad N' \quad M'$, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M_0N'} - \overrightarrow{M_0M'}$.

Враховуючи (3) , далі маємо :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M_0N'} - \overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0N} - k\overrightarrow{M_0M} =$$
$$= k(\overrightarrow{M_0N} - \overrightarrow{M_0M}) = k\overrightarrow{MN}$$

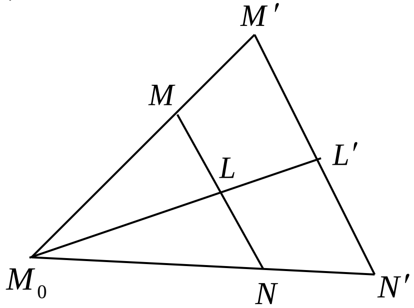
отже $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

4. Якщо $H_{M_0}^k$ відображає точки M , N відповідно у точки M', N', то $|M'N'| = |k||MN|$.

Доведення цієї властивості випливає із властивості 3 шляхом переходу у рівності (2) до модуля.

5. При $H_{M_0}^k$ зберігається просте відношення трьох точок.

Доведення: Нехай M , L , N – три точки прямої $M \quad N$, λ - їх просте відношення, тобто



$\lambda = (M, N, L)$, або $\overrightarrow{ML} = \lambda\overrightarrow{LN}$ Припустимо, що при $H_{M_0}^k$ точки M , L , N переходять
відповідно у точки M', L', N', тоді

$$\overrightarrow{M'L'} = k\overrightarrow{ML} \ , \ \overrightarrow{L'N'} = k\overrightarrow{LN} \ . \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{k}\overrightarrow{M'L'}$$

Із (4) отримуємо
$$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{L'N'} \qquad (5)$$

Підставивши в рівність $\overrightarrow{ML} = \lambda\overrightarrow{LN}$ замість векторів їх значення із (5), маємо

$$\overrightarrow{M'L'} = \lambda\overrightarrow{L'N'} \Rightarrow (M', L', N') = (M, N, L) .$$

6. Гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму.

   Властивість випливає безпосередньо із властивості 3.

7. Пряма, яка проходить через центр гомотетії переходить у себе, тобто є інваріантною.

Властивість випливає із означення гомотетії. Із рівності (1) випливає, що додатня гомотетія зберігає напрям, тобто переводить промінь у спів-напрямлений, а від'ємна гомотетія даний напрям переводить у протилежний. Це свідчить про те, що гомотетія переводить кут у рівний і однаково з ним орієнтований кут.

8. Множина всіх гомотетій з даним центром M_0 і різними коефіцієнтами утворює комутативну групу Нагадаємо, що для доведення властивості потрібно показати, що композиція двох гомотетій із спільним центром і різними коефіцієнтами є гомотетія і, що перетворення обернене до даної гомотетії є також гомотетія.

Доведення: 1.Нехай H – множина всіх гомотетій із центром M_0. Якщо $H_{M_0}^{k_1}(M) = M'$, а $H_{M_0}^{k_2}(M') = M''$,

то $\overrightarrow{M_0M'} = k_1\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{M_0M''} = k_2\overrightarrow{M_0M'}$.

Звідси отримуємо, що $\overrightarrow{M_0M''} = k_1k_2\overrightarrow{M_0M}$.

Отже, $H_{M_0}^{k_1k_2}(M) = M''$, а це означає, що

$H_{M_0}^{k_2} \circ H_{M_0}^{k_1} = H_{M_0}^{k_1k_2}$.

2. Покажемо, що для $H_{M_0}^{k}$ існує обернене перетворення, яке є також гомотетією із тим же центром і коефіцієнтом $\frac{1}{k}$. Справді, якщо $H_{M_0}^{k}(M) = M_1$, то

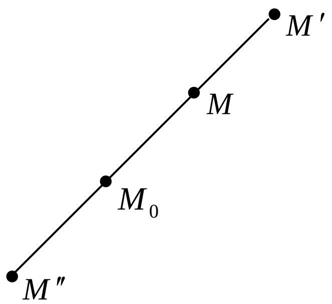
$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$.

Звідти маємо, що $\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{M_0M'}$.

Це означає, що $H_{M_0}^{\frac{1}{k}}(M_1) = M$. Отже, множина всіх гомотетій H із спільним центром і різними коефіцієнтами утворює групу, причому комутативну $H_{M_0}^{k_1} \circ H_{M_0}^{k_2} = H_{M_0}^{k_2} \circ H_{M_0}^{k_1}$, оскільки комутативним є добуток чисел $k_1k_2 = k_2k_1$.
Зауважимо, що $H_{M_0}^{-1} = Z_{M_0}$, тобто $Z_{M_0} \in H$.

Доведемо теорему про зв'язок додатної і від'ємної гомотетій.

Теорема: *Від'ємну гомотетію з центром M_0 і коефіцієнтом $k < 0$ можна подати у вигляді композиції додатної гомотетії з тим же центром і коефіцієнтом $|k|$ та відображення від точки M_0, тобто $H_{M_0}^{-|k|} = Z_{M_0} \circ H_{M_0}^{|k|}$.*



Доведення: Приймемо точку M_0 за центр гомотетії.

Нехай
$$H_{M_0}^{|k|}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'} = |k|\overrightarrow{M_0M'}, \quad (6)$$
$$H_{M_0}^{-|k|}(M) = M'' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M''} = -|k|\overrightarrow{M_0M}. \quad (7)$$
$$(6),(7) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'} = |k|\frac{1}{-|k|}\overrightarrow{M_0M''} = -\overrightarrow{M_0M''}$$,тобто
$$\overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M''}. \quad (8)$$

Рівність (8) говорить про те, що точки M' і M'' симетричні відносно точки M_0, а звідти випливає, що точку M'' можна отримати із точки M шляхом виконання $H_{M_0}^{-|k|}(M) = M'$ а потім $Z_{M_0}(M') = M''$.

Отже, маємо. $H_{M_0}^{-|k|} = Z_{M_0} \circ H_{M_0}^{|k|}$

Для практичної побудови образів симетричних фігур при гомотетії корисно знати способи задання гомотетії і вміти будувати образи точок при різних способах задання гомотетії.

Із означення і властивостей гомотетії випливає, що гомотетія повністю визначається, якщо задано:

а) центр гомотетії і її коефіцієнт;

б) центр гомотетії і пару відповідних точок;

в) коефіцієнт гомотетії і пару відповідних точок;

г) дві пари відповідних точок.

Розглянемо декілька задач.

Задача 1. Побудувати точку M', гомотетичну даній точці M, якщо задано центр гомотетії M_0 і коефіцієнт k.

Побудова. Розглянемо задачу для $k > 0$.

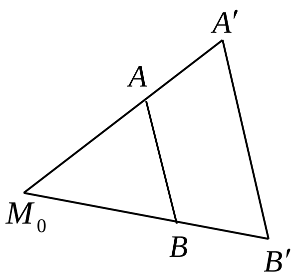
1) Нехай $k = n$, $n \in N$. Від початку M_0 променя M_0M послідовно відкладаємо n відрізків довжиною M_0M, кінець останнього визначить точку M'.

2) Нехай $K = \frac{1}{n}$, $n \in N$. Використовуючи теорему Фалеса, відрізок M_0M ділимо на n рівних відрізків довжиною $\frac{1}{n}M_0M$, кінець першого відрізка визначить точку M'.

3) Нехай $k = \frac{m}{n}$, m, $n \in N$. В довільному порядку виконуємо побудови 1) і 2) випадків:

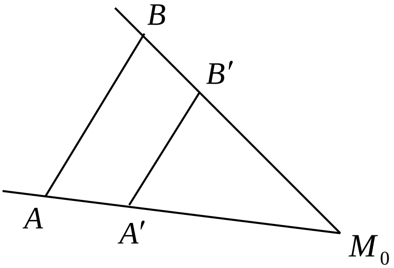
$$M_0M' = m\frac{1}{n}M_0M \quad .$$

Задача 2. Побудувати точку B', гомотетичну даній точці B, якщо задано центр гомотетії M_0 і пару гомотетичних точок A і A'.



Побудова. Нехай M_0 – центр гомотетії, а A і A' – дві відповідні точки. Проведемо прямі M_0B і AB Через точку A проводимо пряму, паралельну до AB $M_0B \bigcap A'B' = B'$.

Задача 3. За даним коефіцієнтом k побудувати зовнішній центр гомотетії, яка відображає дану точку A на дану точку A'



Побудова. Через дану точку A під довільним кутом до прямої AA' проводимо промінь AB. При гомотетії з коефіцієнтом k цей промінь переходить у промінь $A'B' \parallel AB$ на цих променях відрізки $AB = m$ і $A'B' = n$ так, що $\frac{m}{n} = k$.

Тоді $AA' \bigcap BB' = M_0$ – центр гомотетії. Якщо $k < 0$, то побудови будуть відрізнятися тим, що точки M і M' прийдеться будувати по різні боки від точки M_0.

(Самостійно розгляньте задачі 1,2,3 для випадку коли $k < 0$).

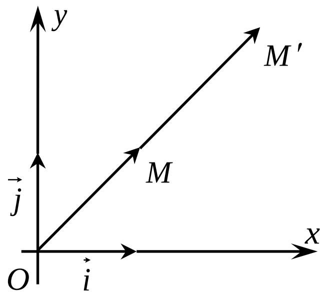
Вміючи будувати образ довільної точки, ви зможете побудувати образи геометричних фігур. Якщо фігура Φ' є образом фігури Φ в деякій гомотетії, то говорять, що Φ' гомотетична фігурі Φ.

Зауваження. Відношення гомотетичності симетричне, тобто якщо фігура Φ' гомотетична Φ, то і Φ гомотетична Φ'. Тому про такі фігури говорять, що вони взаємногомотетичні. Для механічної побудови гомотетичних фігур використовують прилади які називаються пантографами. Ними зручно користуватися для збільшення або зменшення розмірів фігури.

Аналітичне вираження гомотетії.

Для виведення формул аналітичного вираження гомотетії розглядаємо два випадки:

1) нехай центр гомотетії M_0 збігається із початком координат, тобто $M_0 = 0$. M – довільна точка площини, яка при гомотетії H_0^k переходить у точку M', причому точка M має координати (x, y), а $M'(x', y')$. За означенням гомотетії маємо: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Звідси, перейшовши до координат, одержуємо формули координатного задання гомотетій, тобто зв'язок між координатами образу і прообразу при гомотетії з центром у початку координат.



$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

2) Нехай точка M_0 не збігається з початком системи координат і має координати (x_0, y_0).

Точки M і M' мають відповідно координати (x, y), і $M'(x', y')$.

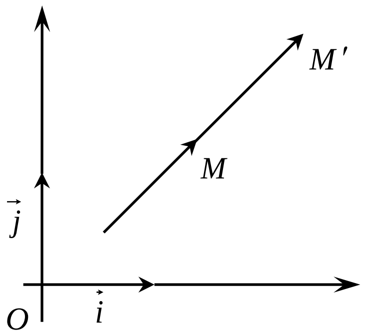
За означенням гомотетії маємо:

$$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M} \qquad (9)$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{M_0M'}$ і $\overrightarrow{M_0M}$.

Маємо: $\overrightarrow{M_0M'} = (x' - x_0, y' - y_0)$,

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)\,.$$



Тепер із рівності (9), шляхом переходу до координат, отримуємо

$x' - x_0 = k(x - x_0)$,

$y' - y_0 = k(y - y_0)$, звідси

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

Це і є формули аналітичного задання гомотетії із коефіцієнтом k і центром у довільній точці $M_0(x_0, y_0)$

Використовуючи формули аналітичного вираження гомотетї доведіть самостійно такі її властивості:

1. Пряма, що проходить через центр гомотетії переходить у себе, тобто є інваріантною.
2. Пряма, яка не проходить через центр гомотетії переходить у паралельну пряму.
3. Паралельні прямі переходять у паралельні.
4. Коло переходить у коло.

§ 2 Приклади розв'язування типових задач

<u>**Задача 1.**</u> *В даній прямокутній декартовій системі координат запишіть координатне задання гомотетії з центром в точці* $A(3,5)$ *і коефіцієнтом* $k = 2$.

Розв'язання. Формули гомотетії з центром у довільній точці (x_0, y_0) і коефіцієнтом k мають вигляд

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

В нашому випадку $x_0 = 3, y_0 = 5, k = 2$ і формули гомотетії набирають вигляду: $\begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = 2y - 5. \end{cases}$

<u>Задача 2.</u> Знайти образ M' точки $M(1,2)$ при гомотетії H_A^2, якщо $A(2,3)$.

Розв'язання. Запишемо спочатку формули гомотетії (див. задачу 1). Маємо: $\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 3. \end{cases}$

Для знаходження образу M' точки $M(1,2)$ підставимо замість x і y у формулах гомотетії координати точки-прообразу M .

Отримаємо: $\begin{matrix} x' = 2 \cdot 1 - 2 = 0, & x' = 0. \\ y' = 2 \cdot 2 - 3 = 1, & y' = 1. \end{matrix}$

Таким чином маємо $M'(0,1)$.

<u>Задача 3.</u> *Знайти прообраз В точки $B'(2,9)$ при гомотетії з центром в точці $C(2,5)$ і коефіцієнтом $k = 4$.*

Розв'язання. Формули аналітичного вираження гомотетії в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = 4x - 6 \\ y' = 4y - 15. \end{cases}$$

Замість x' і y' тепер підставляємо координати точки-образу $B'(2,9)$. Отримуємо $\begin{cases} 2 = 4x - 6 \\ 9 = 4y - 15, \end{cases}$

звідси $\begin{cases} 4x = 8 \\ 4y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6. \end{cases}$

Точка B має координати $(2;6)$.

<u>Задача 4.</u> *Знайти образ прямої $y = -2x + 6$ при перетворенні H_A^3, якщо $A(1;1)$.*

Розв'язання. Алгоритм розв'язання задачі наступний:

1. Записуємо координатне задання гомотетії

$$H_A^3:\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 2. \end{cases}.$$

2. Визначаємо з отриманої системи x і y:

$$x = \frac{x'+2}{3}, y = \frac{y'+2}{3}.$$

3. В рівняння прямої $y = -2x + 6$ замість x і y підставляємо їх значення із пункту 2):

$\dfrac{y'+2}{3} = -2 \cdot \dfrac{x'+2}{3} + 6,$ $y' + 2 = -2x' - 4 + 18,$ $y' = -2x' + 12$. Отже, образом прямої $y = -2x + 6$ є пряма $y = -2x + 12$.

<u>Задача 5.</u> *Знайти прообраз прямої* $x + 2y + 3 = 0$ *при гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом* $k = 2$.

Розв'язання. Оскільки дана пряма є образом шуканої, то рівняння її запишеться так: $x' + 2y' + 3 = 0$. Записавши тепер аналітичне задання гомотетії

$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases},$ отримуємо прообраз $2x + 2 \cdot 2y + 3 = 0,$ тобто $2x + 4y + 3 = 0.$

<u>Задача 6.</u> *Точка* A, *що належить прямій* $2x - 3y - 6 = 0$, *відображається гомотетією з центром* $M_0(1;1)$ *і коефіцієнтом* $k = 2$ *в точку* A', *яка належить прямій* $6x + 5y - 30 = 0$. *Знайти координати точок* A *і* A'.

Розв'язання. Аналітичне задання гомотетії має вигляд $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$. Знайдемо образ прямої $2x - 3y - 6 = 0$ при даній гомотетії (див. задачу 4). $x=\dfrac{x'-1}{2}, y=\dfrac{y'+1}{2}$. Далі маємо: $2\cdot\dfrac{x'-1}{2}-3\cdot\dfrac{y'+1}{2}-6=0$, $\dfrac{2x'-2}{2}-\dfrac{3y'+3}{2}-6=0$ $2x'-3y'-17=0$. Отже, образом прямої $2x-3y-6=0$ є пряма $2x-3y-17=0$. Знайдемо точку перетину прямих $2x-3y-17=0$ *і* $6x+5y-30=0$.

Розв'язавши систему $\begin{cases}2x-3y-17=0\\6x+5y-30=0\end{cases}$, отримуємо точку

$$A'\left(\frac{25}{4};-\frac{3}{2}\right).$$

Для точки A' знайдемо прообраз A. (див. задачу3).

$$\frac{25}{4}=2x+1,\quad 2x=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4},\quad x=\frac{21}{8}$$

$$-\frac{3}{2}=2y-1,\quad 2y=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{4}$$

Таким чином маємо: $A\left(\frac{21}{8};-\frac{1}{4}\right)$ і $A'\left(\frac{25}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

Зауваження. Для розв'язання задачі можна спочатку знайти прообраз прямої $6x+5y-30=0$. Потім точку A знайти як точку перетину прямої $2x-3y-6=0$ і прообразу прямої $6x+5y-30=0$, A' буде образом точки A при даній гомотетії (див. задачу 2).

<u>Задача 7.</u> *Записати аналітичне задання перетворення*

$$R_0^{\alpha}\circ H_c^{2}\text{, якщо } C(1;1),\quad O(0;0),\quad \alpha=60^{\circ}.$$

Розв'язання. Дане перетворення є композицією гомотетії і повороту, тому запишемо спочатку аналітичне задання гомотетії (див. задачу 1) $H_c^2:\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-1. \end{cases}$ Аналітичне задання повороту із центром у початку координат має вигляд: $\begin{cases} x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$. В даному випадку формули набирають вигляду:

$$\begin{cases} x'' = x'\cos 60^\circ - y'\sin 60^\circ \\ y'' = x'\sin 60^\circ + y'\cos 60\circ \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}.$$

Композиція $R_0^\alpha \circ H_c^2$ виразиться

співвідношенням $\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}(2x-1) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2y-1) \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2x-1) + \dfrac{1}{2}(2y-1). \end{cases}$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо

$$\begin{cases} x'' = x - \sqrt{3}y + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ y'' = \sqrt{3}x + y - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{cases}$$

Отже, перетворення $R_0^{60^\circ} \circ H_c^2$ задається аналітично так:

$$\begin{cases} x'' = x - \sqrt{3}y + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ y'' = \sqrt{3}x + y - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{cases}$$

Зауваження. В останніх формулах x'' і y'' замінено відповідно на x' і y'.

<u>Задача 8.</u> *Записати формули перетворення* $f = H_M^{-3} \circ T_{\vec{a}}$, *де* $M(2;2)$, $\vec{a}(2;5)$. *Знайти його інваріантні точки.*

Розв'язання. Запишемо спочатку формули перетворення $T_{\vec{a}}$, тобто паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$. Ці формули мають вигляд: $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$, де (x_0, y_0) – координати вектора перенесення. В даному випадку маємо:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 5 \end{cases} \quad H_M^{-3} : \begin{cases} x'' = -3x' + 8 \\ y'' = -3y' + 8, \end{cases}$$

$$H_M^{-3} \circ T_{\vec{a}} : \begin{cases} x'' = -3(x + 2) + 8 \\ y'' = -3(y + 5) + 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -3x + 2 \\ y'' = -3y - 7. \end{cases}$$

Отже , дане перетворення аналітично виражається так:

$$\begin{cases} x' = -3x + 2 \\ y' = -3y - 7. \end{cases}$$

Для знаходження інваріантних точок покладемо $x = x'$ *і* $y = y'$. Маємо $\begin{cases} x = -3x + 2 \\ y = -3y - 7. \end{cases}$ Звідти $x = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{7}{4}$. Отже, маємо одну нерухому (інваріантну) точку $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$.

<u>Задача 9.</u> *Довести ,що перетворення* $f = H_A^{\frac{1}{2}} \circ H_B^2$ де $A(4;1), B(2;3)$ є паралельне перенесення.

Розв'язання. Запишемо формули $H_B^2 : \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$ і.

$$H_A^{\frac{1}{2}} : \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2} x' + 2 \\ y'' = \dfrac{1}{2} y' + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Тепер формули $H_A^{\frac{1}{2}} \circ H_B^2$ матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}(2x-2)+2 = x+1 \\ y'' = \frac{1}{2}(2y-3)+\frac{1}{2} = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x+1 \\ y'' = y-1. \end{cases}$$

Отримані формули виражають паралельне перенесення на вектор $(1;-1)$. Отже перетворення $H_A^{\frac{1}{2}} \circ H_B^2$ є паралельне перенесення.

<u>Задача 10.</u> *Довести, що перетворення* $\begin{cases} x' = -3x+4 \\ y' = -3y-4 \end{cases}$ *є гомотетія.*

Доведення. Формули гомотетії з центром $(x_0; y_0)$ і коефіцієнтом $k \neq 0$ мають вигляд: $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$.

Дане перетворення запишемо так:

$$\begin{cases} x' = -3x + (1-(-3))\cdot 1 \\ y' = -3y + (1-(-3))\cdot(-1) \end{cases}.$$

Звідси отримуємо, що $k = -3$; $x_0 = 1$; $y_0 = -1$. Отже, дане перетворення є гомотетією із центром в точці $(1;-1)$ і коефіцієнтом $k = -3$.Довести, що перетворення $\begin{cases} x' = -3x+4 \\ y' = -3y-4 \end{cases}$ є гомотетією можна іншим чином. Нехай при даному перетворенні $M(x_1; y_1) \to M'(x_1'; y_1')$, *а* $N(x_2; y_2) \to N'(x_2'; y_2')$,

причому:

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 4 \\ y_1' = -3y_1 - 4 \end{cases}; \begin{cases} x_2' = -3x_2 + 4 \\ y_2' = -3y_2 - 4 \end{cases}.$$

Тоді $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$,

$\overrightarrow{M'N'} = (-3x_2 + 4 + 3x_1 - 4 - 3; -3y_2 - 4 + 3y_1 + 4)$,

$\overrightarrow{M'N'} = (-3(x_2 - x)_1; 3(y_2 - y_1))$. Отже, $\overrightarrow{M'N'} = -3\overrightarrow{MN}$.

Це означає, що дане перетворення є гомотетією з коефіцієнтом $k = -3$.

<u>Задача 11.</u> *Знайти образ трикутника* ABC, $A(2;2)$, $B(-2;-1)$, $C(3;-2)$ *при гомотетії* H_M^3, *де* $M(1;2)$.

Розв'язання. Запишемо аналітичне вираження гомотетії

$H_M^3 \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$. Знаходимо тепер образи вершин при даній гомотетії (див. задачу 2).

$$A': \begin{matrix} x' = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \\ y' = 3 \cdot 3 - 4 = 2 \end{matrix} \qquad A'(4;2)$$

$$B': \begin{matrix} x' = 3 \cdot (-2) - 2 = -8 \\ y' = 3 \cdot (-1) - 4 = -7 \end{matrix} \qquad B'(-8;-7)$$

$$C': \begin{matrix} x' = 3 \cdot 2 - 2 = 7 \\ y' = 3 \cdot (-2) - 4 = -10 \end{matrix} \qquad C'(7;-10)$$

Отже, образом трикутника ABC при перетворенні H_M^3 є трикутник $A'B'C'$, де $A'(4;2)$, $B'(-8;-7)$, $C'(7;-10)$.

<u>Задача 12.</u> *Записати формули перетворення* $f = H_M^2 \circ W_l^{\vec{a}}$, $O(0;0)$, $\vec{a}(-2;2)$, $l: x + y = 0$.

Розв'язання. Запишемо спочатку формули аналітичного задання ковзної симетрії $W_l^{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ S_l$.

Для цього запишемо формули осьової симетрії. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка площини, а $M'(x';y')$ – її образ при симетрії відносно прямої $l: x + y = 0$. Знайдемо координати точки O, використавши формули поділу відрізка пополам: $O\left(\frac{x + x'}{2}; \frac{y + y'}{2}\right)$.

Точка O належить прямій l, тому її координати задовольняють рівняння $x+y=0$. Маємо:

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}=0 \Rightarrow x'+y'+x+y=0.$$

Вектор $\overrightarrow{M'M}(x-x';y-y')$ ортогональний до напрямного вектора $\vec{p}(-1;1)$ прямої $x+y=0$, тому запишемо $(-1)\cdot(x-x')+1\cdot(y-y')=0$.

Із системи $\begin{cases} x'+y'+x+y=0 \\ x'-y'-x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$. Отже, формули аналітичного вираження S_l мають вигляд: $\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$.

Запишемо формули паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-2;2)$, $T_{\vec{a}}:\begin{cases} x''=x'-2 \\ y''=y'+2 \end{cases}$.

Тоді формули перетворення $W_l^{\vec{a}}=T_{\vec{a}}\circ S_l$ запишуться так:

$$\begin{cases} x''=-y-2 \\ y''=-x+2 \end{cases}$$

Аналітичне вираження гомотетії H_O^2 має вигляд: $\begin{cases} x'''=2x'' \\ y'''=2y'' \end{cases}$.

Тепер можна записати формули перетворення: $f=H_O^2\circ W_l^{\vec{a}}:\begin{cases} x'''=-2y-4 \\ y'''=-2x+4 \end{cases}$.

Отже, формули перетворення f мають вигляд: $\begin{cases} x'=-2y-4 \\ y'=-2x+4 \end{cases}$.

<u>Задача 13.</u> *В репері R дано координати точок $A(2;1)$, $B(3;-2)$, $C(1;0)$, $A'(-1;-5)$, $B'(-3;1)$, $C'(1;-3)$. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ гомотетичні і написати формули гомотетії $H \mid H(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$.*

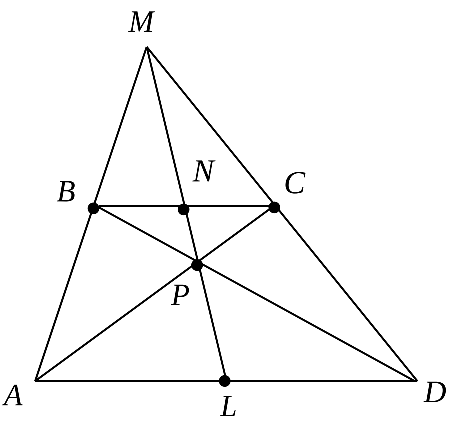
Розв'язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}(1;-3)$, $\overrightarrow{AC}(-1;-1)$, $\overrightarrow{BC}(-2;-2)$, $\overrightarrow{A'B'}(-2;6)$, $\overrightarrow{A'C'}(2;2)$, $\overrightarrow{B'C'}(4;-4)$.

Маємо, що $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{A'C'}$. Отже, сторони AB і $A'B'$, AC і $A'C'$, BC і $B'C'$ даних трикутників є паралельними, а самі трикутники – гомотетичними із коефіцієнтом гомотетії $k=-2$. Знайдемо тепер центр гомотетії $(x_0;y_0)$, для цього скористаємося формулами гомотетії і парою A і A' відповідних точок:

$$\begin{cases} x'=-2x+3x_0 \\ y'=-2y+3y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=-4+3x_0 \\ -5=-2+3y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

Таким чином формули аналітичного задання гомотетії мають вигляд: $\begin{cases} x'=-2x+3 \\ y'=-2y+3 \end{cases}$.

Гомотетію часто використовують для розв'язання геометричних задач на доведення і побудову. Якщо при розв'язанні даної геометричної задачі використовували властивості гомотетії, то кажуть, що задачу розв'язали методом гомотетії. За допомогою цього методу розв'язують задачі, умови яких містять дані про форми і розміри шуканої фігури. Не беручи до уваги даних про розміри, маємо задачу на дослідження деякої фігури, гомотетичної до шуканої. Дослідивши, чи побудувавши цю фігуру, вибираємо належним чином центр гомотетії і визначаємо її коефіцієнт на основі даних про розміри. Тоді шукана фігура буде вже образом знайденої фігури при вибраній гомотетії.



Розглянемо декілька прикладів:

Задача 14. *Довести, що в довільній трапеції точка перетину продовжень бічних сторін ,точка перетину діагоналей і середини основ лежать на одній прямій.*

Розв'язання. Нехай $ABCD$ - довільна трапеція, а M,P,N,L вказані в умові чотири точки. Розглянемо гомотетію

$H_M^{k_1}$, де $k_1=\dfrac{AD}{BC}$. Маємо: $H_M^{k_1}(B)=A$, $H_M^{k_1}(C)=D$, тоді

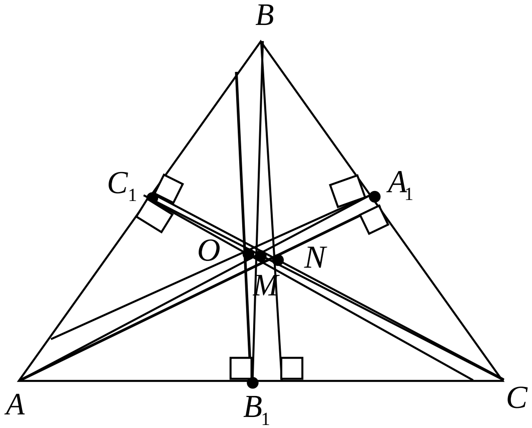
$H_M^{k_1}(BC)=AD$, $H_M^{k_1}(N)=L$ (як середини гомотетичних відрізків.)

Звідси випливає, що точки M,L,N належать прямій.

Розглянемо тепер гомотетію $H_P^{k_2}$, де $k_2=-\dfrac{AD}{BC}$.

Отримуємо $H_P^{k_2}(B)=D$, $H_P^{k_2}(C)=A$, тоді $H_P^{k_2}(BC)=DA$,а $H_P^{k_2}(N)=L$. Це означає, що точки P,N,L належать прямій. Із розглянутих гомотетій випливає, що точки M,P,N,L належать одній прямій.

Задача 15. *Довести, що для довільного трикутника ABC, точка N перетину висот, точка M перетину медіан і точка O – центр описаного кола лежать на одній прямій і що M лежить між O та N, поділяючи відрізок ON у відношенні $\lambda=\dfrac{1}{2}$.*



Доведення. Розглянемо гомотетію $H_M^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$H_M^{\frac{1}{2}}(A)=A_1$,

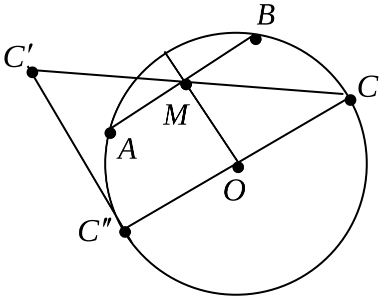
$H_M^{\frac{1}{2}}(B)=B_1$,

$H_M^{\frac{1}{2}}(C)=C_1$, де

A_1,B_1,C_1 – відповідно середини сторін трикутника.

Прямі, що містять висоти трикутника переходять у серединні перпендикуляри до сторін. Так, зокрема, пряма $CN \to C_1O$, тому, що $H_M^{\frac{1}{2}}(N) = O$. Оскільки гомотетичні точки і центр гомотетії колінеарні, то N, O, M – точки однієї прямої, причому M належить відрізку ON і $OM : MN = 1 : 2$.

Задача 16. *На колі дано три точки ABC, і побудовано точки C' і C'' симетричні точці C відносно середини відрізка AB та центра кола відповідно. Доведіть, що відрізок $C'C'' \perp AB$.*

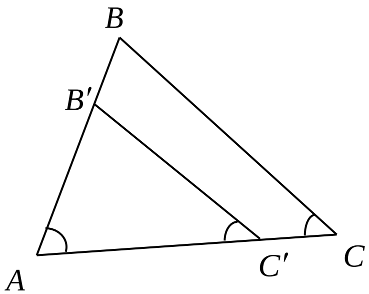


Доведення.

Із $Z_M(C) = C'$ і $Z_O(C) = C''$ маємо, що $CC' = 2CM$, а $CC'' = 2CO$. Розглянемо гомотетію H_C^2: $H_C^2(M) = C'$, $H_C^2(O) = C''$, $H_C^2(OM) = C''C'$. Звідси отримуємо, що $C''C' \parallel OM$.

Оскільки $OM \perp AB$ (OM належить радіусу кола, що проходить через середину хорди), то $C''C' \perp AB$.

Задача 17. *Побудувати трикутник за периметром і двома кутами.*



Розв'язання.

Нехай трикутник ABC шуканий і його периметр $2p$. Будуємо за двома даними кутами довільний трикутник $AB'C'$, подібний до шуканого (див. мал.). Периметр трикутника $AB'C'$ позначимо $2p'$. Якщо тепер візьмемо точку A за центр гомотетії з коефіцієнтом $k = \frac{p}{p'}$, то побудуємо шуканий трикутник ABC як образ трикутника $AB'C'$ при H_A^k. Задача завжди має єдиний розв'язок.

§3. Перетворення подібності і його властивості

Нехай дано деяке число $k > 0$ і дві довільні точки M , N площини.

Означення. *Перетворенням подібності площини називається таке перетворення площини, при якому точки M , N переходять відповідно у точки M', N' так, що виконується умова:*

$$\rho(M', N') = k \cdot \rho(M, N) \qquad (1)$$

Із (1) випливає, що перетворення подібності змінює відстані між двома точками в одному і тому самому відношенні $k > 0$.Число k називається коефіцієнтом подібності.

Якщо $k = 1$, то перетворення подібності є переміщенням. Отже, переміщення є окремим випадком перетворення подібності із коефіцієнтом k

Фігура Φ та її образ Φ' при перетворенні подібності є подібними фігурами: $\Phi \sim \Phi'$.

Означення. *Дві фігури Φ і Φ' називаються подібними, якщо існує перетворення подібності, яке переводить одну фігуру в іншу.*

<u>Теорема 1.</u> *Кожне перетворення подібності з коефіцієнтом подібності k є композицією гомотетії з тим же коефіцієнтом k та переміщення.*

Доведення. Розглянемо дві довільні точки M , N площини і перетворення подібності p з коефіцієнтом подібності k таке, що $p(M) = M'$, $p(N) = N'$.

Звідси маємо: $$\left|\overrightarrow{M'N'}\right| = k\left|\overrightarrow{MN}\right| \qquad (2)$$

Задамо тепер довільну точку O і розглянемо гомотетію H_O^k. Нехай $H_O^k(M) = M''$, $H_O^k(N) = N''$, тоді
$\left|\overrightarrow{M''N''}\right| = k\left|\overrightarrow{MN}\right|$ (3).

Із (2) і (3) випливає, що $\left|\overrightarrow{M'N'}\right| = \left|\overrightarrow{M''N''}\right|$.

Це означає, що перетворення, яке переводить точки M'', N'' відповідно у точки M', N', є переміщенням. Позначимо його f.

Переміщення f є композицією гомотетії $H_O^{\frac{1}{k}}$ і перетворення подібності p, тобто

$$f = p \circ H_O^{\frac{1}{k}}, \text{ тому } f \circ H_O^k = p\left(H_O^{\frac{1}{k}} \circ H_O^k\right) \text{ і } p = f \circ H_O^k.$$

Доведена теорема дає можливість сформулювати властивості перетворення подібності. Цими властивостями будуть ті властивості, які одночасно мають переміщення і гомотетія. Наприклад, при перетворенні подібності:

1. зберігається просте відношення трьох точок;
2. відрізок переходить у відрізок;
3. пряма переходить у пряму;
4. паралельні прямі переходять у паралельні;
5. кут – у рівний кут;
6. коло – у коло, а круг – у круг.

Знайдемо аналітичне вираження перетворення подібності.

Для цього скористаємося тим, що $p = f \circ H_O^k$, де $O(0;0)$.

$$H_O^k : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

$$f : \begin{cases} x'' = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0 \\ y'' = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}, \text{ де } \varepsilon = \pm 1.$$

$$f \circ H_O^k : \begin{cases} x'' = k\left(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha\right) + x_0 \\ y'' = k\left(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha\right) + y_0. \end{cases} \quad (4)$$

де $\varepsilon = \pm 1$.

Якщо у формулах (4) $\varepsilon = 1$, то маємо перетворення подібності першого роду. В цьому випадку перетворення подібності є композицією гомотетії і переміщення першого роду.

Якщо де $\varepsilon = -1$, то маємо перетворення подібності другого роду, яке є композицією гомотетії і переміщення другого роду. Оскільки переміщення першого роду не змінює орієнтацію фігури, а переміщення другого роду змінює орієнтацію на протилежну, то відповідно і перетворення подібності не змінює орієнтацію, або змінює її на протилежну.

Означення. *Перетворення подібності, що не змінює орієнтацію фігури називається перетворенням подібності першого роду. Якщо ж перетворення подібності змінює орієнтацію фігури на протилежну, то таке перетворення називається перетворенням подібності другого роду.*

Прийнявши до уваги можливість розкладу переміщень в добуток осьових симетрій, можна стверджувати, що кожне перетворення подібності розкладається в добуток гомотетій і не більше як трьох осьових симетрій.

Теорема 2. *Кожне перетворення подібності площини, яке не є переміщенням, має одну і тільки одну нерухому точку.*

Доведення. Нагадаємо, що точка $M(x, y)$ називається нерухомою при перетворенні, якщо вона збігається із своїм образом $M'(x', y')$. Тому координати x, y точки M повинні задовольняти систему рівнянь (4) при $x' = x, y' = y$, тобто

$$\begin{cases} x = k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + x_0 \\ y = k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha) + y_0. \end{cases}$$

Отриману систему запишемо так:

$$\begin{cases} (1 - k\cos\alpha)x + \varepsilon k\sin\alpha y = x_0 \\ -(k\sin\alpha)x + (1 - \varepsilon k\cos\alpha)y = y_0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи $\delta = 1 + \varepsilon k^2 - (1+\varepsilon)k\cos\alpha$. Якщо , $\varepsilon = 1$ то $\delta = 1 + k^2 - 2k\cos\alpha$, а якщо $\varepsilon = -1$, то $\delta = 1 - k^2$. Таким чином, при $k \neq 1$ для всякого α маємо $\delta \neq 0$. Це означає, що система має єдиний розв’язок, а перетворення відповідно одну нерухому точку.

<u>**Наслідок.**</u> Всяке перетворення подібності, яке має більше однієї нерухомої точки, або не має нерухомих точок, є переміщенням.

Користуючись доведеною теоремою і наслідком з неї, можна зробити класифікацію перетворень подібності в залежності від наявності нерухомих точок.

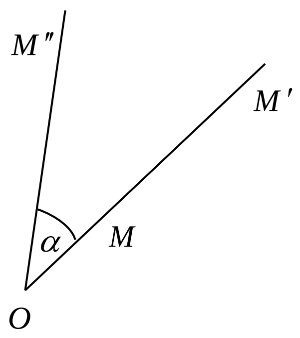
Нехай p – перетворення подібності першого роду, яке має більше однієї нерухомої точки, або не має зовсім. Тоді за наслідком з теореми 2 таке перетворення подібності є переміщенням, тому p – паралельне перенесення .

Розглянемо перетворення подібності p першого роду із коефіцієнтом k, яке має тільки одну нерухому точку. Позначимо цю точку O. Нехай маємо H_O^k,

тоді $p = f \circ H_O^k$. Оскільки p – подібність першого роду, то f – переміщення першого роду, причому $f(0) = 0$. Це означає, що f – поворот навколо точки O. При цьому можливі такі випадки:

1. f – тотожнє перетворення, тобто поворот на кут $\alpha = 0^\circ$. В цьому випадку $p = H_O^k$. Перетворення подібності є гомотетією з коефіцієнтом $k > 0, k \neq 1$.

2. f – центральна симетрія. В цьому випадку $p = f \circ H_O^k$ є гомотетією з від’ємним коефіцієнтом $k_1 = -k$.



3. f – поворот на кут $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq \pm\pi$. Перетворення подібності є композицією гомотетії H_O^k і повороту $R_O^\alpha : f = R_O^\alpha \circ H_O^k$. Тому подібність називають центрально-подібним поворотом (див. мал.).

Таким чином, перетворення подібності, яке має одну нерухому точку є або гомотетією, або центрально-подібним поворотом. Нехай тепер p – перетворення подібності другого роду. Якщо p має більше однієї нерухомої точки, або не має жодної, то згідно теореми 2 подібність є переміщенням, яке є осьовою симетрією. Розглянемо випадок, коли p з коефіцієнтом k має тільки одну нерухому точку O. Зрозуміло, що $k \neq 1$.

Справді, якщо $k = 1$, то p – переміщення другого роду, яке не може мати однієї нерухомої точки.

Нехай маємо H_O^k, тоді за теоремою 1 $p = f \circ H_O^k$, де f – переміщення другого роду. Точка O - нерухома точка переміщення f, тому f - осьова симетрія з віссю, що проходить через точку O. В цьому випадку $p = S_1 \circ H_O^k$ називають центрально-подібною симетрією.

Отже, існують шість видів перетворення подібності, які наведені в наступній таблиці:

№ п\п	Перетворення подібності першого роду	№ п\п	Перетворення подібності другого роду
1.	Гомотетія.	1.	Осьова симетрія
2.	Паралельне перенесення	2.	Ковзна симетрія
3.	Центрально-подібний поворот	3.	Центрально-подібна симетрія

Теорема 3. *Множина всіх перетворень подібності площини утворює групу.*

Доведення. Нехай p_1 і p_2 – два довільні перетворення подібності із коефіцієнтами k_1 і k_2 відповідно, M і N – дві довільні точки площини. Якщо $p_1(M) = M'$, $p_1(N) = N'$, то

$$|M'N'| = k_1|MN| \qquad (6)$$

Аналогічно із того, що $p_2(M') = M''$, $p_2(N') = N''$ маємо:

$$|M''N''| = k_2|M'N'| \qquad (7)$$

Із (6) і (7) отримаємо , що $|M''N''| = k_2 \cdot k_1 |MN|$. Це означає, що композиція $p_2 \circ p_1$ є перетворенням подібності із коефіцієнтом $k_2 \cdot k_1$.

Покажемо тепер, що перетворення , обернене до даного перетворення подібності, є також перетворенням подібності. Справді, із (6) знайдемо, що $|MN| = \frac{1}{k_1}|M'N'|$. Отже перетворення p_1^{-1} є перетворенням подібності із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k_1}$.

Ми показали, що композиція двох перетворень подібності $p_2 \circ p_1$ є перетворення подібності. Це означає, що множина всіх перетворень подібності утворює групу відносно композиції перетворень. Теорема доведена.

Множину всіх перетворень подібності, яка згідно теореми 3 утворює групу, назвемо групою перетворень подібності площини, або, просто, групою подібностей площини.

Властивості фігури, які не змінюються при перетворенні подібності, називаються інваріантними властивостями, або інваріантами групи подібностей. Інваріантами групи подібностей є, наприклад, просте відношення трьох точок, величина кута.

Неважко показати, що множина подібностей першого роду (зробіть це самостійно) утворює групу.

Групу перетворень подібності першого роду називають підгрупою групи подібностей.

Оскільки переміщення і гомотетія є окремими перетвореннями подібності, то групи переміщень і гомотетій є також підгрупами групи подібностей. Очевидно, що множина подібностей другого роду групи не утворює, оскільки композиція двох перетворень подібності другого роду є перетворенням подібності першого роду. Справді, перетворення подібності другого роду p_1 переводить фігуру Φ у протилежно орієнтовну Φ'. Перетворення подібності другого роду p_2 переводить фігуру Φ' в протилежно орієнтовну Φ''. Тоді фігури Φ і Φ'' – однаково орієнтовані, а це означає, що композиція $p_2 \circ p_1$ є композиція першого роду.

Розглянемо питання про подібність трикутників.

<u>Теорема 4.</u> *Для того, щоб трикутник ABC був подібним до трикутника $A'B'C'$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності:*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad (8)$$

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

Доведення.

I. *Необхідність.* Дано, що $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Доведемо, що виконуються рівності (8). Із подібності трикутників випливає, що існує перетворення подібності p із коефіцієнтом подібності $k > 0$, таке, що $\Delta A'B'C' = p(\Delta ABC)$. Маємо, $A'B' = kAB, B'C' = kBC$

$A'C' = kAC \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$. Оскільки при подібності кут переходить у рівний йому кут, то $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$. Необхідність доведено.

II. *Достатність.* Нехай виконуються рівності (8). Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Для цього розглянемо гомотетію H_O^k, де O – довільна точка, $k = A'B' : AB$. Нехай $H_O^k(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$, тоді $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Використовуючи рівність $k = A'B' : AB$ і (8) отримуємо: $A'B' = A_1B_1$, $B'C' = B_1C_1$, $A'C' = A_1C_1$.

Із того, що $H_O^k(\angle A) = \angle A_1$ маємо $\angle A_1 = \angle A$, тому $\angle A' = \angle A_1$. Аналогічно отримуємо, що $\angle B' = \angle B_1$, $\angle C' = \angle C_1$.

Отже, в трикутниках $A'B'C'$ і $A_1B_1C_1$ рівні відповідні сторони і кути, тому вони рівні, а також подібні.

Маємо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'B'C'$, тому $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Теорему доведено.

Вказана вище ознака в шкільних курсах геометрії нерідко приймається за означення подібності трикутників. Там доводиться три ознаки подібності трикутників, які дають можливість встановити подібність трикутників ABC і $A'B'C'$ за деякими із рівностей (8).

Аналогічна ознака подібності має місце і для опуклих многокутників:

два однойменних опуклих многокутники подібні тоді і тільки тоді, коли між їх вершинами можна встановити таку відповідність, щоб відповідні кути були рівні, а їх відповідні сторони пропорційні.

§ 4. Приклади розв'язування задач

Задача 1. *Написати формули подібності* p *першого роду, якщо* $p(A)=A'$, $p(B)=B'$, $A(1,1)$, $A'(1,1)$, $B(2,1)$, $B'(-2,-2)$. *Знайти коефіцієнт подібності і інваріантні точки.*

Розв'язання.

Формули перетворення подібності першого роду мають вигляд:

$$\begin{cases} x = k\left(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha\right) + x_0 \\ y = k\left(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha\right) + y_0. \end{cases}$$

.Звідси, підставивши замість x, y координати точок A і B, а замість x', y' – координати точок A' і B', отримуємо:

$$\begin{cases} 1 = k\cos\alpha - k\sin\alpha + x_0, \\ 1 = k\sin\alpha + k\cos\alpha + y_0, \\ -2 = 2k\cos\alpha - k\sin\alpha + x_0, \\ -2 = 2k\sin\alpha + k\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Віднявши від третього рівняння системи перше, а від четвертого – друге, отримуємо:

$$\begin{cases} k\cos\alpha = -3, \\ k\sin\alpha = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2\cos^2\alpha = 9, \\ k^2\sin^2\alpha = 9, \end{cases} \Rightarrow k^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = 18 \Rightarrow k = 3\sqrt{2}.$$

Знайшовши тепер $x_0 = 1,\quad y_0 = 7$,

$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, запишемо формули перетворення подібності

$$\begin{cases} x' = 3\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y\right) + 1, \\ y' = 3\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y\right) + 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3x + 3y + 1, \\ y' = -3x - 3y + 7. \end{cases}$$

Для знаходження інваріантних точок покладемо в останній системі $x' = x, \quad y' = y$. Маємо:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3x + 3y + 1, \\ y = -3x - 3y + 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 3x + 4y = 7, \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}7, \quad y = 0{,}6.$$

Отже, дане перетворення подібності задається формулами: $\begin{cases} x' = -3x + 3y + 1, \\ y' = -3x - 3y + 7. \end{cases}$

Коефіцієнт подібності $k = 3\sqrt{2}$, інваріантна точка $(0{,}7;0{,}6)$.

Задача 2. *Довести, що перетворення* $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 1, \\ y' = 4x - 3y + 1. \end{cases}$ *є подібністю. Визначити коефіцієнт подібності і рід.*

Розв'язання. Відомо, що якщо перетворення площини задається формулами

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi) + x_0 \\ y' = k(x\sin\varphi + \varepsilon y\cos\varphi) + y_0. \end{cases} \text{ де } \varepsilon = \pm 1.$$

то це перетворення є подібністю. Використовуючи формули даного перетворення, запишемо:

$$\begin{cases} k\cos\varphi = 3, \\ k\sin\varphi = 4. \end{cases} \Rightarrow k = 5, \cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$

Тоді дані формули запишуться так:

$$\begin{cases} x' = 5\left(\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y\right) + 1, \\ y' = 5\left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y\right) + 1. \end{cases}$$

Отже , дане перетворення є перетворенням подібності другого роду $(\varepsilon = -1)$ із коефіцієнтом $k = 5$.

Довести, що дане перетворення є перетворенням подібності можна по іншому. Нехай при даній подібності $M(x_1, y_1) \to M'(x_1', y_1')$, $N(x_2, y_2) \to N'(x_2', y_2')$, тоді: $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4y_1 + 1, \\ y_1' = 4x_1 - 3y_1 + 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2' = 3x_2 + 4y_2 + 1, \\ y_2' = 4x_2 - 3y_2 + 1. \end{cases}$

Маємо: $\rho(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$

$$\rho(M', N') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =$$

$$= \sqrt{(3x_2 + 4y_2 + 1 - 3x_1 - 4y_1 - 1)^2 + (4x_2 - 3y_2 + 1 - 4x_1 + 3y_1 - 1)^2} =$$

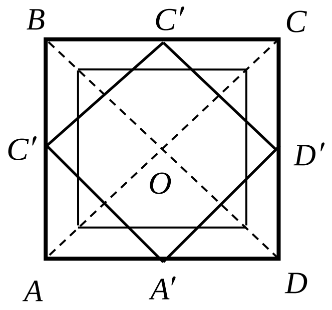
$$= \sqrt{(3(x_2 - x_1) + 4(y_2 - y_1))^2 + (4(x_2 - x_1) - 3(y_2 - y_1))^2} =$$

$$= \sqrt{25(x_2 - x_1)^2 + 25(y_2 + y_1)^2} = 5\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, отримали, що $\rho(M', N') = 5\rho(M, N)$. Отже, дане перетворення є перетворенням подібності другого роду $(\varepsilon = -1)$ із коефіцієнтом $k = 5$.

<u>Задача 3.</u> *Дано квадрат $ABCD$. Написати формули перетворення подібності p, яке квадрат $ABCD$ відобразить у квадрат $A'B'C'D'$, де A', B', C', D' – середини відповідно сторін AD, AB, BC, CD, якщо центри квадратів містяться у точці $O(0;0)$ і $AB = 6$.*

Розв’язання. Розглянемо гомотетію H_O^k, де



$k = \dfrac{A'B'}{AB}$. Ця гомотетія переведе квадрат $ABCD$ у квадрат $EFMN$, який буде рівний квадрату $A'B'C'D'$. Справді, $A'B' = kAB$. Із властивостей гомотетії маємо, що $EF = kAB$. Звідси $EF = A'B'$. Поворот $R_O^{+45^\circ}$ переводить квадрат $EFMN$ в квадрат $A'B'C'D'$.

Отже квадрат $ABCD$ можна перевести в квадрат $A'B'C'D'$ композицією гомотетії і повороту, яка є перетворенням подібності $p = R_O^{+45^\circ} H_O^k$. Запишемо формули аналітичного задання перетворення p. Із прямокутного трикутника $A'AB'$ $A'B' = 3\sqrt{2}$, тому $k = \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$H_O^k : \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y. \end{cases}$$

$$R_O^{+45^\circ} : \begin{cases} x'' = x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ, \\ y'' = x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2} y', \\ y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2} y'. \end{cases}$$

$$R_O^{+45^\circ} : H_O^k : \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2} y, \\ y'' = \dfrac{1}{2} x + \dfrac{1}{2} y. \end{cases}.$$

Отже, перетворення подібності, яке переводить квадрат $ABCD$ в квадрат $A'B'C'D'$ задається формулами:

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y, \\ y'' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

Задача 4. *Довести, що дві параболи є подібними.*

Доведення. Нехай в ортонормованому репері $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ параболи γ_1 і γ_2 задані відповідно рівняннями $y^2 = 2p_1 x$ і $y^2 = 2p_2 x$. Розглянемо переміщення площини f, яке переводить репер $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ у репер $R' = \{O', \vec{i'}, \vec{j'}\}$. При цьому переміщенні парабола γ_1 переходить у параболу γ_1', яка у репері R' має таке ж рівняння $y^2 = 2p_1 x$. Нехай парабола γ_2 у репері R' має рівняння $y'^2 = 2p_2 x'$.

Гомотетія з центром O' і коефіцієнтом $k = \dfrac{p_2}{p_1}$ в репері R' задається формулами $x' = \dfrac{p_2}{p_1}x$, $y' = \dfrac{p_2}{p_1}y$. Образом параболи γ_1' в цій гомотетії є парабола $\gamma_2 : \gamma_2' = 2p_2 x'$. Отже, подібність $p = f \circ H_O^k$ переводить параболу γ_1 у параболу γ_2, тому ці параболи є подібними.

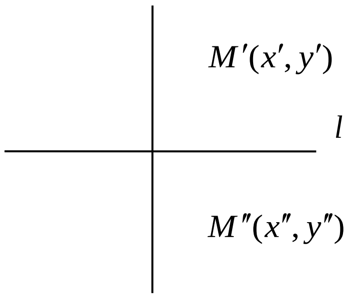
Задача 5. *Записати формули перетворення* $q = S_l \circ f^{-1}$, *де* $l : x - y = 0$, $f : \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ Довести, що q – подібність.

Розв'язання. Знайдемо формули перетворення f^{-1}. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ відносно x і y Маємо, що

$x=\frac{1}{2}\left(x'+y'\right),\ \ y=\frac{1}{2}\left(-x'+y'\right)$ Отже, формули перетворення f^{-1}

мають вигляд $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y, \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y. \end{cases}$

Знайдемо тепер формули симетрії S_l . За формулами поділу відрізка $M'M''$ (див. мал.) пополам знайдемо координати точки M :



$$M\left(\frac{x'+x''}{2},\frac{y'+y''}{2}\right).$$

Координати точки M повинні задовольняти рівняння прямої l тому, $x''-y''+x'-y'=0$. Вектор $\overrightarrow{M'M''}$ ортогональний до напрямного вектора $\vec{a}=(1{,}1)$ прямої l. Запишемо

$$1\left(x''-x'\right)+1\left(y''-y'\right)=0\Rightarrow x''+y''-x'-y'=0.$$

Розв’язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x''-y''+x'-y'=0, \\ x''+y''-x'-y'=0. \end{cases}$$

Отримуємо $S_l:\begin{cases} x''=y', \\ y''=x'. \end{cases}$

Для композиції $q=S_l\circ f^{-1}$ маємо формули :

$$\begin{cases} x''=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y, \\ y''=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$$

Покажемо, що q є перетворенням подібності. Нехай $A\left(x_1,y_1\right)$ і $B\left(x_2,y_2\right)$ – дві довільні точки, а $A'\left(x_1',y_1'\right)=q\left(A\left(x_1,y_1\right),B'\left(x_2',y_2'\right)\right)=q\left(B\left(x_2,y_2\right)\right)$. Тоді

$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Оскільки

$$\begin{cases} x_1'=-\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1, \\ y_1'=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2'=-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2, \\ y_2'=\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2, \end{cases} \text{ то}$$

$$\rho(A',B')=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho(A,B).$$

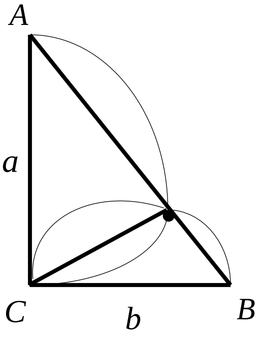
Таким чином, для довільних двох точок площини A,B і їх образів A',B' має місце співвідношення $\rho(A',B')=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho(A,B)$ Це означає, що перетворення q є перетворенням подібності другого роду $(\varepsilon=-1)$ із коефіцієнтом $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Застосування перетворень подібності, зокрема, гомотетії, як окремого виду подібності, значно допомагає при розв'язуванні деяких задач на доведення, обчислення, побудову. Приклади розв'язання задач із використанням гомотетії ми уже розглянули в §2. Розглянемо ще декілька прикладів прикладів на використання подібності.

Зауважимо, що якщо при розв'язуванні задачі використовували перетворення подібності, то говорять, що дану задачу розв'язали методом подібності. Отже, метод гомотетії, розглянутий в §2, виглядає тепер уже як частковий випадок методу подібності, котрий в свою чергу є частковим випадком загального методу розв'язування геометричних задач – методу геометричних перетворень.

Задача 6. *Дано прямокутний трикутник ABC. На катетах AC і BC, довжини яких відповідно a і b, як на діаметрах, побудовано два кола. Знайдіть відстань між точками перетину цих кіл.*

Розв'язання.

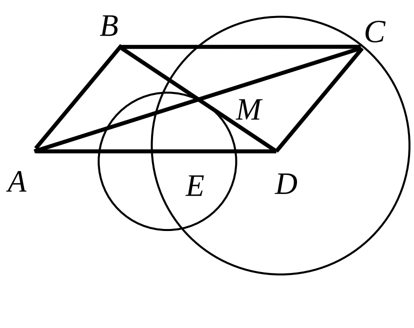


Покажемо, що точка D належить гіпотенузі трикутника. Справді, $\angle CDB = \angle CDA = 90^\circ$ (як вписані кути, що спираються на діаметри CB і AC даних кіл).

Отже, $\angle ADB = 180^\circ$, тому B, D, A лежать на одній прямій, причому точка D є основою перпендикуляра, проведеного із вершини C на гіпотенузу.

Трикутники CDB і ACB подібні, оскільки $\angle BCD = \angle CAD$ (як кути із відповідно перпендикулярними сторонами). Із подібності вказаних трикутників маємо $\frac{CD}{AC} = \frac{CB}{AC}$ тобто $\frac{CD}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; отже, $CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 7. *Дано паралелограм $ABCD$ в якому дві вершини A і D нерухомі, а вершини B і C рухаються. По якій лінії буде рухатися точка M перетину діагоналей паралелограма.*



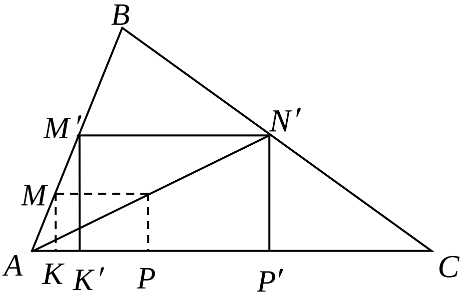
Розв'язання. Точка C буде рухатися по колу $U(D, DC)$. Оскільки точка A – фіксована і M – середина AC, то $M = H_A^{\frac{1}{2}}(C)$. Нехай $H_A^{\frac{1}{2}}(D) = E$, тоді

$H_A^{\frac{1}{2}}(U) = U'$, де $U' = \left(E, \frac{DC}{2}\right)$. Так, як точка C рухається по колу U, то образ її, точка M буде рухатись по образу кола U, тобто по колу

$$U' = \left(E, \frac{DC}{2}\right).$$

<u>Задача 8.</u> *Дано трикутник ABC. Вписати в даний трикутник квадрат так, щоб дві його вершини лежали на основі AC трикутника, а дві інші – відповідно на сторонах AB і BC трикутника.*

Розв'язання. Побудуємо квадрат $KMNP$, такий, що дві його вершини K і P лежать на стороні AC, а третя M – на стороні AB (див. мал.)



Проведемо промінь AN. Нехай $N' = AN \cap BC$.

Розглянемо H_A^k, де $k = \frac{AN'}{AN}$, тоді

$H_A^k(KM) = K'M'$,

$H_A^k(MN) = M'N'$,

$H_A^k(PN) = P'N'$, $H_A^k(KP) = K'P' \Rightarrow H_A^k(KMNP) = K'M'N'P'$. Звідси випливає побудова шуканого квадрата :

1. Будуємо квадрат $KMNP$.
2. Проводимо AN, отримуємо точку $N' = AN \cap BC$.
3. Проводимо $N'P' \| NP$, $N'M' \| NM$, $M'K' \| MK$.
4. $K'M'N'P$ – шуканий квадрат.

Задача має єдиний розв'язок, якщо ні один із кутів при основі AC не є тупим. Якщо ж один з цих кутів тупий, то задача не має розв'язків.

§ 5. Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти образ прямої d при гомотетії H_O^k, якщо:

1. $d: \ 3x - y - 5 = 0$, $O(1,2)$ $k = 2$,
2. $d: \ x + 4y + 3 = 0$, $O(3,2)$ $k = 3$,
3. $d: \ 2x + 5y - 7 = 0$, $O(0,3)$, $k = -2$,
4. $d: \ 5x - 2y + 3 = 0$, $O(2,4)$, $k = \frac{1}{3}$,
5. $d: \ x - 7y + 10 = 0$, $O(2,2)$ $k = -\frac{1}{3}$.

2.Знайти прообраз прямої d при гомотетії H_O^k, якщо:

1. $d: \ x + 4y + 6 = 0$, $O(2,0)$, $k = 3$,
2. $d: \ 5x + 3y + 7 = 0$, $O(3,1)$, $k = 4$,
3. $d: \ 4x - 2y + 9 = 0$, $O(1,4)$, $k = \frac{1}{2}$,
4. $d: \ x - 3y + 4 = 0$, $O(2,4)$, $k = -3$,
5. $d: \ 7x + 2y + 9 = 0$, $O(2,5)$, $k = -\frac{1}{3}$.

3. Точка A, що належить прямій d, відображається гомотетією H_O^k на точку A'. Знайти координати точок A і A', якщо:

1. $d: \ 2x + 3y + 6 = 0$, $O(0,0)$, $k = -3$, $A'(x,3)$,
2. $d: \ 2x + y + 1 = 0$, $O(0,0)$, $k = 2$, $A'(2,y)$,
3. $d: \ x + 2y - 4 = 0$, $O(1,0)$, $k = -2$, $A'(x,4)$,
4. $d: \ 3x - 2y - 5 = 0$, $O(1,1)$, $k = 3$, $A'(x,-5)$,
5. $d: \ 5x - 3y + 7 = 0$, $O(2,4)$, $k = \frac{1}{2}$, $A'(3,y)$.

4. Знайти координати точок M і M' відповідних при гомотетії H_A^k, які належать відповідно лініям d_1 і d_2, якщо:

1. $d_1: \quad y = 2x + 1$, $\quad d_2: \quad y = x^2 + 3$, $\quad A(0,0)$, $\quad k = 2$,
2. $d_1: \quad y = x - 2$, $\quad d_2: \quad y = 3x - 1$, $\quad A(1,2)$, $\quad k = -2$,
3. $d_1: \quad y = x^2 - 4x + 3$, $\quad d_2: \quad y = -x^2 - 6x - 10$, $\quad A(0,0)$, $\quad k = -3$,
4. $d_1: \quad y = 3x + 5$, $\quad d_2: \quad y = -x + 4$, $\quad A(3,2)$, $\quad k = 4$,
5. $d_1: \quad y = -\dfrac{3}{2}x + 2$, $\quad d_2: \quad y = x + 3$, $\quad A(2,1)$, $\quad k = 3$.

5.Записати аналітичне задання перетворення $R_M^\alpha \circ H_N^k$, якщо:

1. $M(1,2)$, $\quad N(1,1)$, $\quad \alpha = 30^\circ$, $\quad k = 2$,
2. $M(3,1)$, $\quad N(0,0)$, $\quad \alpha = 60^\circ$, $\quad k = -2$,
3. $M(0,0)$, $\quad N(2,1)$, $\quad \alpha = 45^\circ$, $\quad k = \dfrac{1}{2}$,
4. $M(3,5)$, $\quad N(2,2)$, $\quad \alpha = -30^\circ$, $\quad k = 3$,
5. $M(2,2)$, $\quad N\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\quad \alpha = -45^\circ$, $\quad k = -2$.

6. Записати формули перетворення $f = H_M^k \circ T_a$ і знайти його інваріантні точки, якщо:

1. $M(1,1)$, $\quad k = 2$, $\quad \vec{a} = (3,4)$,
2. $M(2,3)$, $\quad k = 3$, $\quad \vec{a} = (0,5)$,
3. $M(0,0)$, $\quad k = -3$, $\quad \vec{a} = (2,7)$,
4. $M(3,5)$, $\quad k = \dfrac{1}{2}$, $\quad \vec{a} = (1,6)$,
5. $M(-2,-1)$, $\quad k = -\dfrac{1}{3}$, $\quad \vec{a} = (3,4)$.

7. Записати формули перетворення $f = H_M^k \circ S_l$, де:

1. $M(0,0)$, $\quad k = 2$, $\quad l: \ x + y + 1 = 0$,
2. $M(1,2)$, $\quad k = 4$, $\quad l: \ 2x + y + 1 = 0$,
3. $M(3,3)$, $\quad k = -2$, $\quad l: \ 2x - y = 0$,
4. $M(0,1)$, $\quad k = -3$, $\quad l: \ x - y = 0$,

5. $M(0,0)$, $k=-\frac{1}{2}$, $l:\ x-4y+6=0$.

8. Записати формули перетворення $f=H_M^k\circ W_l^a$, якщо:

1. $M(0,0)$, $k=\frac{1}{2}$, $\vec{a}=(-2,3)$, $l:\ 3x+2y+4=0$,
2. $M(1,1)$, $k=4$, $\vec{a}=(1,3)$, $l:\ x+3y-1=0$,
3. $M(0,2)$, $k=-3$, $\vec{a}=(3,4)$, $l:\ 2x-y+5=0$,
4. $M(3,0)$, $k=2$, $\vec{a}=(5,3)$, $l:\ 4x+3y-2=9$,
5. $M(4,5)$, $k=-4$, $\vec{a}=(0,2)$, $l:\ x-2y+3=0$.

9. Записати формули перетворення $f=H_M^k\circ R_N^\alpha\circ T_a$, якщо:

1. $M(0,0)$, $N(0,0)$, $k=4$, $\alpha=60^\circ$, $\vec{a}=(1,2)$,
2. $M(1,2)$, $N(0,0)$, $k=2$, $\alpha=45^\circ$, $\vec{a}=(3,0)$,
3. $M(3,0)$, $N(1,1)$, $k=\frac{1}{3}$, $\alpha=30^\circ$, $\vec{a}=(0,4)$,
4. $M(0,2)$, $N(2,3)$, $k=-\frac{1}{2}$, $\alpha=-45^\circ$, $\vec{a}=(2,3)$,
5. $M(2,2)$, $N(3,1)$, $k=3$, $\alpha=90^\circ$, $\vec{a}=(5,4)$.

10. Довести, що дане перетворення є гомотетія:

1) $\begin{cases} x'=-2x+3, \\ y'=-2y-3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'=4x-6, \\ y'=4y+3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+1, \\ y'\frac{1}{2}y+2. \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x'=-\frac{1}{3}x+4, \\ y'=-\frac{1}{3}y+2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x'=3x-6, \\ y'=3y-4. \end{cases}$

11. Довести, що перетворення $f=H_A^{k_1}\circ H_B^{k_2}$ є гомотетія:

1. $A(1,2)$, $B(1,1)$, $k_1=2$, $k_2=3$,
2. $A(0,0)$, $B(3,4)$, $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{3}$,

3. $A(2,3)$, $B(2,1)$, $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{3}$,

4. $A(3,\frac{1}{2})$, $B(4,5)$, $k_1 = -3$, $k_2 = 5$,

5. $A(0,3)$, $B(4,2)$, $k_1 = -2$, $k_2 = -3$.

12. Знайти образ трикутника ABC при перетворенні $f = H_M^k \circ R_N^\alpha$, якщо:

1. $M(0,0)$, $N(1,2)$, $A(2,1)$, $k = 2$, $B(3,4)$, $C(1,6)$, $\alpha = 60^\circ$,
2. $M(1,2)$, $N(1,1)$, $A(-2,4)$, $k = 3$, $B(0,3)$, $C(1,7)$, $\alpha = 45^\circ$,
3. $M(2,4)$, $N(0,0)$, $A(3,-3)$, $k = \frac{1}{2}$, $B(-1,-3)$, $C(1,1)$, $\alpha = 30^\circ$.

13. Гомотетія задана двома парами відповідних точок A, B і A', B'. Знайти центр гомотетії і її коефіцієнт, якщо:

1. $A(2,1)$, $B(3,4)$, $A'(4,-1)$, $B'(7,8)$,
2. $A(1,1)$, $B(0,2)$, $A'(7,4)$, $B'(9,2)$,
3. $A(3,2)$, $B(0,0)$, $A'(5,\frac{20}{3})$, $B'(4,6)$.

14. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ гомотетичні і знайти формули аналітичного задання гомотетії $N(ABC) = A'B'C'$, якщо:

1. $A(5,4)$, $B(-1,2)$, $C(5,1)$,
   $A'(9,-10)$, $B'(-3,2)$, $C'((9,0)$,
2. $A(3,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$,
   $A'(-11,1)$, $B'(5,13)$, $C'(-3,-1)$,
3. $A(-2,3)$, $B(5,2)$, $C(-3,-1)$,
   $A'(\frac{32}{5},\frac{12}{5})$, $B'(5,\frac{17}{5})$, $C'(\frac{33}{5},\frac{16}{5})$.

15. Два квадрата $ABCD$ і $A'B'C'D'$ мають спільний центр M, а їх сторони відповідно паралельні. Запишіть формули гомотетій, якими один із квадратів можна відобразити на інший, якщо:

1. $M(1,1)$, $A'B' : AB = 3:1$,
2. $M(2,5)$, $A'B' : AB = 5:2$,

3. $M(3,4)$, $A'B' : AB = 1;2\sqrt{5}$.

16. Дано правильний трикутник ABC в якому M – точка перетину медіан, A', B', C' – відповідно середини сторін AB, BC, AC. Записати формули всіх перетворень подібності, якими один із трикутників ABC і $A'B'C'$ можна відобразити на інший, якщо:

1. $M(0,0)$, $AB = 4$,
2. $M(2,3)$, $AB = 6$,
3. $M(1,4)$, $AB = 10$.

17. Дано два правильні трикутники ABC і AMN такі, що M є AC. Вказати всі перетворення подібності, якими один із даних трикутників можна відобразити на інший.

18. Знайти формули перетворення подібності f першого роду, якщо:

1. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A(0,2)$, $B(2,3)$, $A'(-1,7)$, $B'(2,16)$,
2. $f(M) = M'$, $f(N) = N'$, $M(1,0)$, $N(1,1)$, $M'(4,3)$, $N'(0,6)$,
3. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A(1,2)$, $B(-1,0)$ B, $A'(2,1)$, $B'((-2,0)$,
4. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A(0,0)$, $B(1,1)$ B, $A'(5,1)$, $B'(5,7)$.

19. Знайти формули перетворення подібності f другого роду, якщо:

1. $f(1,0) = (4,3)$, $f(2,1) = (11,4)$,
2. $f(0,1) = (6,-8)$, $f(2,0) = (8,3)$,
3. $f(0,0) = (-1,1)$, $f(3,4) = (4,1)$,
4. $f(1,2) = (12,-1)$, $f(2,0) = (7,9)$,
5. $f(2,1) = (1,0)$, $f(3,0) = (-1,2)$.

20. Довести, що перетворення f є подібністю, визначити коефіцієнт подібності і інваріантні точки, якщо:

1. $f:\begin{cases} x' = 3x - 4y + 1, \\ y' = 4x + 3y + 1. \end{cases}$

2. $f:\begin{cases} x' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}, \\ y' = x + \sqrt{3}y + 1. \end{cases}$

3. $f:\begin{cases} x' = 3x - 3y + 5, \\ y' = 3x + 3y + 1. \end{cases}$

4. $f:\begin{cases} x' = -4x + 2\sqrt{5}y + 2, \\ y' = -2\sqrt{5}x - 4y + 1. \end{cases}$

21. Записати формули перетворення $f = g^{-1} \circ S_l$ де $l : x + y = 0$, $g : f : \begin{cases} x' = 3x - 4y + 1, \\ y' = 4x + 3y - 1. \end{cases}$ Довести, що f – подібність.

22. Доведіть, що будь-які два кола гомотетичні.

24. Доведіть, що при будь-яких a, b, $a^2 + b^2 \neq 0$ відображення $\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = bx + ay. \end{cases}$ є подібністю першого роду. Визначити коефіцієнт подібності.

25. Доведіть, що при будь-яких a, b, $a^2 + b^2 \neq 0$ відображення $\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = bx - ay. \end{cases}$ є подібністю другого роду. Визначити коефіцієнт подібності.

26. Доведіть, що квадрат подібності другого роду є гомотетія.

27. Доведіть, що якщо в трикутниках ABC і $A'B'C'$ виконуються рівності: $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$, то такі трикутники подібні.

28. Доведіть, що якщо в трикутниках ABC і $A'B'C'$ виконуються рівності: $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$, $\angle BCA = B'C'A'$, то такі трикутники подібні.

29. В ортонормованому репері R дано координати вершин: $A(0,3)$, $B(4,0)$, $C(1,-1)$, $A'(-6,-6)$, $B'(0,2)$, $C'(-\frac{26}{5},-\frac{8}{5})$ трикутників ABC і $A'B'C'$. Доведіть, що трикутники ABC і $A'B'C'$ подібні. Знайдіть формули подібності.

30. У площині дано чотирикутник та точку M. Доведіть, що чотири точки, симетричні M відносно середин сторін чотирикутника, є вершинами паралелограма.

31. В трикутнику ABC проведені висоти AA_1 і BB_1. Доведіть, що трикутники A_1B_1C і ABC подібні.

31. В даний трикутник вписати ромб з даним гострим кутом так, щоб одна з його сторін лежала на основі AC трикутника, а дві його вершини – на бічних сторонах AB і BC.

32. Дано кут і всередині нього точку P. Через точку P провести пряму так, щоб відрізок прямої, який відтинає сторони кута, ділився б точкою P у відношенні $1:3$.

33. Побудувати коло, що дотикається сторін кута і проходить через дану точку.

Рекомендована література

1. Атанасян Л. С. Геометрія. ч.І. – Київ: Вища школа, 1976. – 480с.
2. Атанасян Л. С., Базылев В.Т. Геометрия. ч.І. – М.: Просвещение,1986. – 422 с.
3. Атанасян Л. С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. ч.І. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
4. Аргунов Б.И. Преобразования плоскости. – М.: Просвещение,1976. – 234 с.
5. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. – М.: Учпедгиз, 1957. – 212 с.
6. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Преобразования. Векторы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964. – 280 с.
7. Коба В.І. Нікулін М.А. Найпростіші геометричні перетворення. – Київ: Радянська школа, 1978. – 94 с.
8. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1978. – 160 с.
9. Тесленко І. Ф. Геометричні побудови.- Київ: Радянська школа, 1956. – 112 с.
10. Хахамов Л.Р. Преобразования плоскости. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. – 96 с.
11. Яковець В.П., Боровик В.М., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія. Університетська книга, Суми, 2004. – 390 с.
12. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П., Геометрия. ч.1. – М.: Просвещение, 1974.
13. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии. – М.: Просвещение, 1980.

ЗМІСТ

Примітки

Навчальне видання

ПРИСЯЖНЮК Михайло Миколайович

Перетворення
подібності площини

ПОСІБНИК
для студентів спеціальності „математика”

Підписано до друку _________. Формат 84х16/16. Папір офс. № 1.
Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 2,18. Замовлення ______

Редакційно-видавничий відділ РДГУ
33028, м. Рівне, вул. С.Бандери, 12