

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Рівненський державний гуманітарний університет

Сяський А.О., Семенюк М.В.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
(Статика, Кінематика)

Рівне – 2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Рівненський державний гуманітарний університет

Сяський А.О., Семенюк М.В.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

(Статика, Кінематика)

**Навчальний посібник для студентів
спеціальності «Технологічна освіта»**

Рівне – 2011

Сяський А.О., Семенюк М.В. Технічна механіка (статика, кінематика). Навчальний посібник для студентів спеціальності «Технологічна освіта» – Рівне: Ред.-видав. відділ РДГУ, 2011. – 210 с.

Затверджено до друку кафедрою загальнотехнічних дисциплін і технологій РДГУ (протокол № від травня 2009 р.).

Друкується за рішенням Науково-методичної ради РДГУ (протокол № від 2009 р.).

Рецензенти:

Швабюк В.І., д. т. н., проф., керівник навчально-наукового центра післядипломної освіти Луцького національного технічного університету;

Юсенко А.С., к. т. н., доц., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін і технологій РДГУ;

Кундрат М.М., д. т. н., проф. кафедри обчислювальної математики Національного університету водного господарства і природокористування.

Відповідальний за випуск: Сяський А.О., д. т. н., проф., завідувач кафедри інформатики та прикладної математики.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
ЧАСТИНА ПЕРША. СТАТИКА	6
РОЗДІЛ 1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА	6
1.1. Основні поняття і завдання статички	6
1.2. Аксиоми статички	7
1.3. В'язі та їх реакції	9
1.4. Система збіжних сил	11
1.5. Система двох паралельних сил. Теорія пар на площині	15
1.6. Плоска система сил	21
1.7. Просторова система сил	25
1.8. Центр системи паралельних сил, центр ваги твердого тіла. Геометричні характеристики плоских фігур	33
РОЗДІЛ 2. СТАТИКА ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА	40
2.1. Основні поняття опору матеріалів	40
2.2. Деформація розтягу і стиску	48
2.3. Напружено-деформований стан в точці пружного тіла	59
2.4. Теорії міцності в опорі матеріалів	62
2.5. Деформація зсуву	65
2.6. Кручення круглих стержнів	69
2.7. Деформація згину	77
2.8. Балки рівного опору згину	92
2.9. Складний опір стержнів	95
2.10. Стійкість центрально стиснених стержнів	100
2.11. Міцність матеріалів при повторно-змінних навантаженнях	104
2.12. Контактні напруження	108
ЧАСТИНА ДРУГА. КІНЕМАТИКА	114
ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ	114
РОЗДІЛ 3. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	115
3.1. Способи задання руху точки	115
3.2. Кінематичні характеристики руху точки	116
3.3. Окремі випадки руху точки	120
3.4. Задачі до розділу 3	121
РОЗДІЛ 4. КІНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА	126
4.1. Найпростіші рухи твердого тіла	126
4.2. Плоскопаралельний рух твердого тіла	132
4.3. Задачі до розділу 4	139
РОЗДІЛ 5. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА	144
5.1. Складний рух матеріальної точки	144
5.2. Складний рух твердого тіла	146
5.3. Задачі до розділу 5	151
РОЗДІЛ 6. КІНЕМАТИКА МЕХАНІЗМІВ	157
6.1. Структурний аналіз механізмів та їх класифікація	158
6.2. Кінематичний аналіз плоских важільних механізмів другого порядку однократної рухомості з нижчими кінематичними парами	171
6.3. Кінематичний аналіз плоских механізмів методом графічного диференціювання (кінематичних діаграм)	181
6.3. Механізми для передачі обертального руху	186
6.5. Механізми для передачі обертального руху з гнучкими ланками	193
6.6. Плоскі кулачкові механізми	196
6.7. Кінематичний синтез кулачкових механізмів	203
ЛІТЕРАТУРА	210

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна „Технічна механіка” – комплекс найважливіших загальнотехнічних знань, який складається із трьох частин: статика, кінематика і динаміка.

Об'єднання трьох основних дисциплін “Теоретична механіка”, „Опір матеріалів”, „Теорія механізмів і машин” – в інтегрований курс “Технічна механіка” дає можливість формувати у студентів єдиний погляд на технічні науки і цілісний світогляд. При цьому, на основі глибоких і органічних зв'язків з фізикою, математикою і практикумом в навчальних майстернях, забезпечується плавний перехід від природничих (теоретична механіка) до технічних (опір матеріалів, ТММ) дисциплін, виключається дублювання окремих тем, а також досягається єдиність умовних позначень, символів і термінології.

Структура курсу дозволяє теоретичні положення механіки конкретизувати в практичних задачах опору матеріалів та теорії механізмів і машин, забезпечуючи при цьому логічний перехід від простого до складного.

У першій частині навчального посібника „Статика” вивчається статика абсолютно твердого тіла і статика деформівного твердого тіла (опір матеріалів), що забезпечує викладення програмового матеріалу з єдиних позицій.

При вивченні другої „Кінематика” і третьої „Динаміка” частин курсу об'єкти руху розглядаються у такій послідовності: матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, система матеріальних точок, механізм (система твердих тіл), машина (система механізмів).

Такий підхід до вивчення програмового матеріалу дозволяє на кожному наступному етапі навчання використовувати конкретні знання, здобуті студентами на попередніх.

Навчальний посібник написаний у відповідності з програмою курсу „Технічна механіка”, для студентів спеціальності „Технологічна освіта”.

ЧАСТИНА ПЕРША. СТАТИКА

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Основні поняття і завдання статички

Статикою називається розділ механіки, в якому розглядається рівновага матеріальних тіл під дією заданих сил і задача зведення заданої системи сил до найпростішого виду.

Основні поняття статички ввійшли в науку як результат багатовікової практичної діяльності людини. Вони підтверджені численними дослідженнями і спостереженнями над явищами природи. Щоб глибше вивчати ті чи інші сторони деякого явища, у науці широко використовують метод абстракцій, зосереджуючи основну увагу на найбільш суттєвих сторонах явища, відкидаючи при цьому другорядні. В курсі статички подібного роду абстракціями є поняття матеріальної точки, абсолютно твердого тіла і сили.

Матеріальною точкою (МТ) будемо називати реальне фізичне тіло, розмірами якого в умовах розглядуваної задачі можна знехтувати в порівнянні із розмірами інших тіл. МТ відрізняється від геометричної точки тим, що в першій зосереджена певна кількість речовини. Будь-яке тверде тіло в механіці можна розглядати як систему матеріальних точок (СМТ). Під останньою розуміємо сукупність матеріальних частинок, які певним чином взаємодіють між собою.

Абсолютно твердим тілом (АТТ) називається реальне фізичне тіло, в якому відстані між довільними його точками за всіх умов залишаються незмінними. Іншими словами, АТТ зберігає незмінну геометричну форму як в цілому, так і кожної своєї частини зокрема, тобто не деформується. АТТ можуть вступати у взаємодію, у результаті якої змінюється не тільки їх положення в просторі, але й швидкості їх точок.

Силою в механіці називають кількісну міру взаємодії двох матеріальних тіл. Маючи на увазі задачі статички, ми будемо розуміти під силою дію одного тіла на інше, яка проявляється у вигляді тиску, притягання або відштовхування. Сила – величина векторна. Її дія на тіло визначається: числовим значенням або модулем; напрямком дії; точкою прикладання. Виходячи з цього, можна зробити висновок, що сила в механіці – закріплений вектор.

Величина сили визначається шляхом порівняння її з силою, прийнятою за одиницю виміру. В Міжнародній системі одиниць СІ одиницею сили є ньютон (Н).

Напрямок і точка прикладання сили залежать від характеру взаємодії тіл і їх взаємного розміщення. Наприклад, сила тяжіння, що діє на кожне тіло, напрямлена вертикально вниз (до центра Землі).

Як і кожний вектор, графічно сила зображується напрямленим відрізком із стрілкою. Довжина цього відрізка (AB на рис. 1.1) у вибраному масштабі виражає числове значення, яке будемо позначати символами F або $|\vec{F}|$. A – точка прикладання сили. Пряма AB , вздовж якої напрямлена сила \vec{F} , називається лінією дії сили.

За характером дії сили поділяються на зовнішні, які діють на задане тіло з боку інших матеріальних тіл, і внутрішні (сили взаємодії між частинами тіла). Якщо сила прикладена до тіла в одній його точці, то вона називається зосередженою. Всі інші сили називаються розподіленими. Поняття зосередженої сили умовне, бо практично прикласти силу до тіла в одній його точці неможливо.

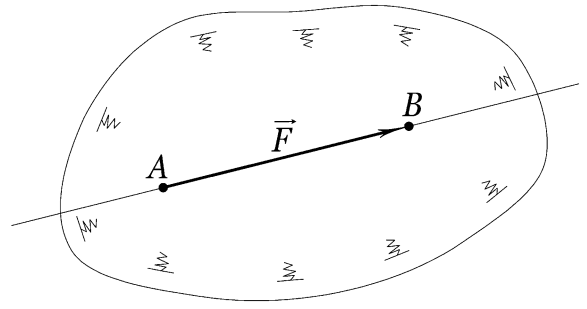


Рис. 1.1. Графічне зображення сили

Розглянемо ряд означень, необхідних для логічного викладу матеріалу:

1. Якщо тверде тіло не зв'язане з іншими тілами і йому можна надати довільне переміщення в просторі, то воно називається вільним. При наявності певних обмежень на його рух, тіло називається невольним. Матеріальні тіла, які обмежують рух даного тіла, називаються в'язями.

2. Сукупність сил, що діють на задане АТТ, будемо називати системою сил.

3. Якщо одну систему сил, що діє на вільне АТТ, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому стану тіла, то такі системи сил називають еквівалентними.

4. Якщо під дією системи сил тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, то такий стан тіла називається рівновагою.

5. Система сил, під дією якої тіло перебуває у рівновазі, називається зрівноваженою, або еквівалентною нулю.

6. Якщо система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається рівнодійною даної системи сил.

Для того, щоб під дією системи сил вільне тіло перебувало у рівновазі (статика вивчає рівновагу твердих тіл під дією прикладених до них сил) необхідно, щоб ці сили задовольняли певним умовам рівноваги. Для їх встановлення, а також для розв'язування інших задач механіки, необхідно вміти додавати сили, тобто замінювати дію на тіло однієї системи сил іншою. Тому в статичці абсолютно твердого тіла розглядаються такі дві основні задачі:

1. Зведення системи сил, що діє на тверде тіло, до найпростішого виду (перша задача статички).

2. Встановлення умов, при виконанні яких АТТ під дією заданої системи сил буде перебувати у рівновазі (друга задача статички).

Задачі статички можуть бути розв'язані шляхом відповідних геометричних побудов (геометричний метод) або за допомогою числових розрахунків (аналітичний метод).

1.2. Аксиоми статички

Застосування методу абстракції і узагальнення результатів багатовікового досвіду, безпосередніх спостережень і виробничої діяльності людини дозволили встановити ряд вихідних положень, які приймаються без математичного доведення і називаються аксіомами. В них зафіксовані основні властивості сил, якими дозволено користуватися при побудові курсу статички АТТ.

Аксиома 1. Під дією двох сил вільне АТТ перебуває у рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили однакові за величиною, протилежні за напрямком і діють вздовж однієї прямої (рис. 1.2).

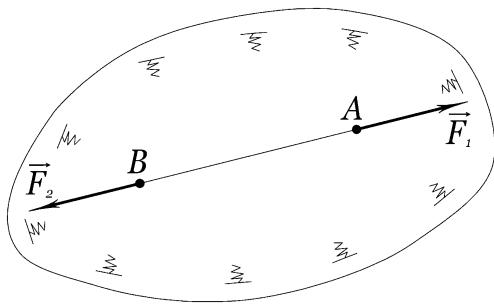


Рис. 1.2. До аксіоми 1

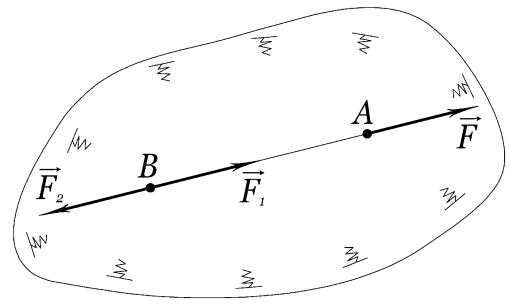


Рис. 1.3. До аксіоми 2

Аксіома 1 визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил. Як показує досвід вільне тіло під дією однієї сили не перебуває у рівновазі.

Аксіома 2. Дія заданої системи сил на АТТ не зміниться, якщо до нього прикласти або відкинути зрівноважену систему сил.

Ця аксіома показує, що дві системи сил, які відрізняються на зрівноважену систему, еквівалентні.

Наслідок. Сила в статиці – ковзний вектор. Це означає, що силу можна довільно переміщати вздовж її лінії дії.

Доведення. Нехай на АТТ діє прикладена в точці A сила \vec{F} (рис. 1.3). Виберемо на лінії дії сили довільну точку B і прикладемо до неї дві зрівноважені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 (аксіома 2) такі, що $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. Сили \vec{F} і \vec{F}_2 за аксіомою 1 утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути. Отже, на тіло буде діяти лише сила \vec{F}_1 , яка дорівнює силі \vec{F} , але прикладена в точці B . Здобутий результат справедливий лише для АТТ.

Аксіома 3. (Аксіома паралелограма). Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці АТТ, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах, і прикладена в цій точці (рис. 1.4).

Вектор \vec{R} , побудований на векторах \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , називається їх сумою

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Його модуль на підставі теореми косинусів визначається за формулою

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \varphi}. \quad (1.2)$$

Аксіома 3 визначає правило додавання двох непаралельних сил, прикладених в одній точці. Вона дозволяє довести теорему про три сили: якщо під дією трьох непаралельних сил, що діють в одній площині, АТТ перебуває у рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай тіло перебуває у рівновазі під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, розміщених в одній площині і прикладених відповідно в точках A_1, A_2, A_3 (рис. 1.5). Перенесемо сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 в точку O і замінимо їх силою \vec{R}_{23} за правилом

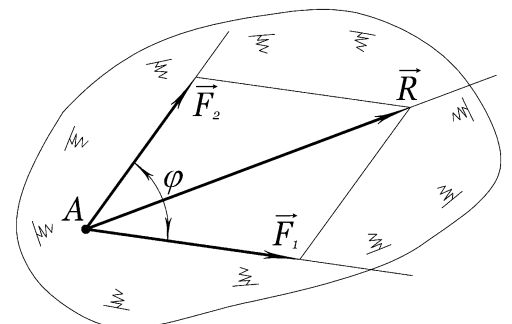


Рис. 1.4. До аксіоми 3

паралелограма. Замість системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ одержимо еквівалентну їй систему \vec{F}_1, \vec{R}_{23} . Оскільки задана система сил зрівноважена, то за аксіомою 1 лінія дії сили \vec{F}_1 проходить через точку O . Теорема доведена. Зауважимо, що обернена теорема не має місця.

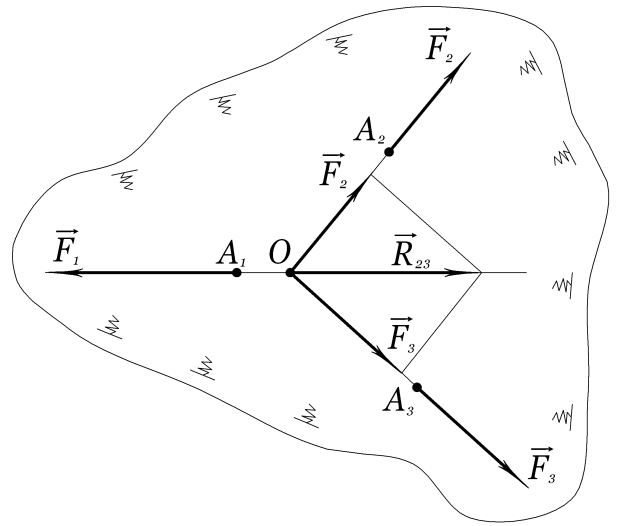


Рис. 1.5. До доведення аксіоми 3

Аксіома 4. Сили взаємодії між двома твердими тілами завжди однакові за величиною, протилежні за напрямком і діють по прямій (рис. 1.6). Аксіома 4 еквівалентна третьому закону Ньютона. Слід відзначити, що сили \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} не утворюють зрівноважену систему сил, бо вони прикладені до різних тіл. На основі даної аксіоми легко довести, що внутрішні сили, які виникають в АТТ, утворюють зрівноважену систему сил і на рівновагу тіла не впливають.

Аксіома 5. Якщо деяка система сил зрівноважена на одному АТТ, то вона буде зрівноважена і на будь-якому іншому тілі. В силу цієї аксіоми форма і розміри тіл несуттєві при розв'язуванні задач статички. Це дає змогу замінювати термін "рівновага АТТ під дією системи сил" на термін "рівновага системи сил".

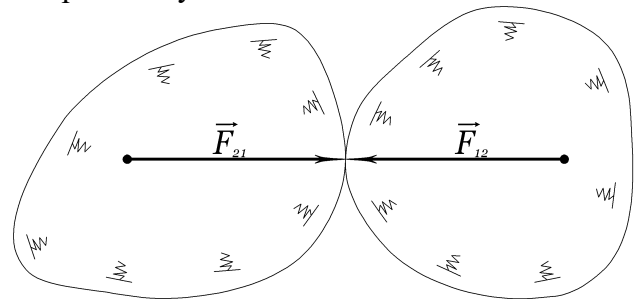


Рис. 1.6. До аксіоми 4

Аксіома 6. (Принцип затвердіння). Якщо деформівне тіло під дією системи сил перебуває у рівновазі, то при його затвердінні рівновага не порушиться. Дана аксіома показує, що при рівновазі абсолютно твердого і деформівного тіл повинні виконуватися одні і ті ж умови рівноваги, однак для деформівного тіла ці умови, будучи необхідними, можуть бути недостатніми.

Розглянемо невідільне АТТ, рух якого обмежений певними в'язами. Сила взаємодії заданого тіла і його в'язі називається силою реакції в'язі або реакцією в'язі. Реакція в'язі завжди напрямлена в бік, протилежний до неможливого руху тіла. Ця обставина полегшує визначення напрямків реакцій при розв'язуванні задач.

Аксіома 7. (Аксіома в'язей). Будь-яке невідільне АТТ можна розглядати як вільне, якщо умовно відкинути в'язі, а їх дію замінити відповідними реакціями.

Оскільки в статичці розглядаються умови рівноваги вільного тіла, тому, щоб застосувати їх до невідільного тіла, потрібно поступити згідно з аксіомою 7.

1.3. В'язі та їх реакції

Конструктивно в'язі можуть бути реалізовані у вигляді різного роду опор, шарнірних з'єднань, тяг. Вважаємо, що вони виготовлені із абсолютно твердих матеріалів і тертя в зонах їх контакту з розглядуваними тілами відсутнє.

Розглянемо найбільш характерні типи в'язей і їх реакцій.

1. *Контакт двох гладких поверхонь.* Гладкою будемо називати поверхню, тертям об яку даного тіла можна знехтувати. Така поверхня не дозволяє тілу рухатись лише по спільному перпендикуляру в точці дотику. Тому реакція в точці контакту двох гладких поверхонь напрямлена так, як показано на (рис. 1.7). До цього типу в'язей можна віднести так званий рухомий каток. Його реакція напрямлена перпендикулярно до опорної поверхні (рис. 1.8).

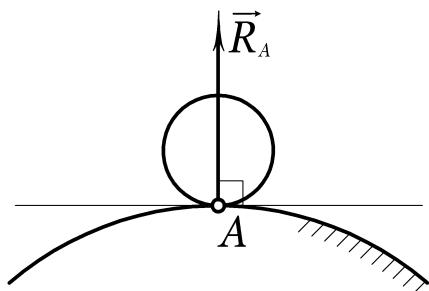


Рис. 1.7. Контакт двох гладких поверхонь

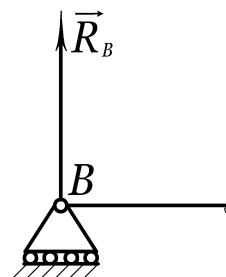


Рис. 1.8. Реакція рухомого катка

2. *Контакт гладкої поверхні і двогранного кута.* Для такої в'язі реакція напрямлена перпендикулярно до гладкої поверхні (рис. 1.9).

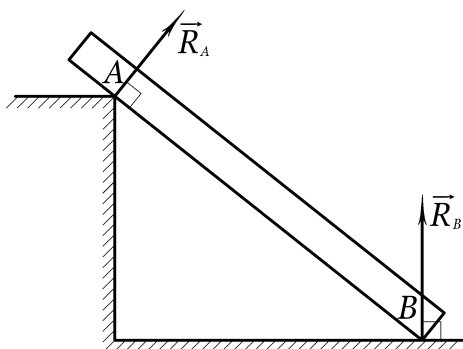


Рис. 1.9. Контакт гладкої поверхні та двогранного кута

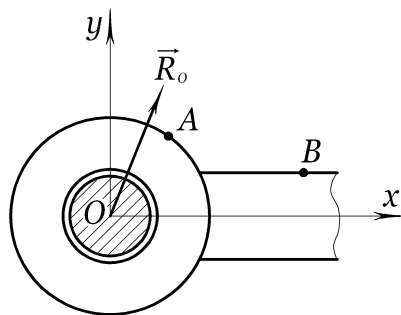


Рис. 1.10. Реакція циліндричного шарніра

3. *Циліндричний шарнір (підшипник).* Розглянемо з'єднання циліндричного болта і тіла, що має циліндричний отвір, діаметр якого дещо більший від діаметра болта (рис. 1.10). Таке з'єднання називається циліндричним шарніром або підшипником. Оскільки тіло AB може лише обертатися навколо осі болта, тому реакція \vec{R} такого шарніра діє в площині, перпендикулярній осі обертання, і проходить через центр O . Циліндричним шарніром можна вважати і нерухому опору (рис. 1.11).

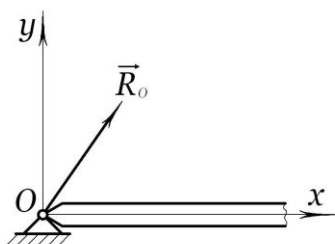


Рис. 1.11. Реакція циліндричного шарніра в нерухомій опорі

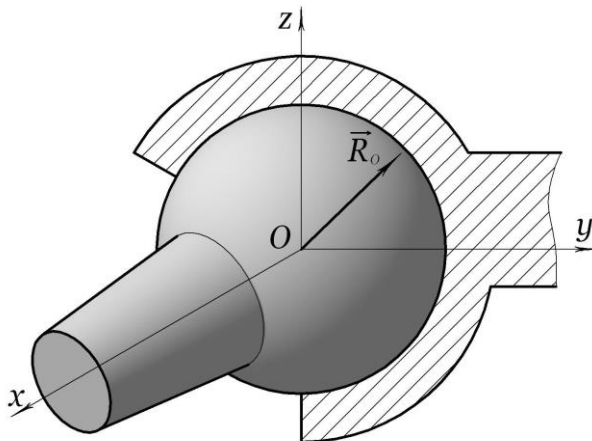


Рис. 1.12. Реакція сферичного шарніра

4. *Сферичний шарнір.* Цей вид в'язі закріплює певну точку тіла так, що вона не може здійснювати жодних лінійних переміщень у просторі. Реакція сферичного шарніра проходить через його центр і може мати довільний напрямок у просторі (рис. 1.12).

5. *Двошарнірне стержневе з'єднання.* Нехай в деякій конструкції в'язю є стержень AB , закріплений на кінцях шарнірами A, B (рис. 1.13). Якщо на стержень не діють зовнішні сили, то реакція напрямлена вздовж його осі. Цей висновок зроблено на підставі аксіоми 1.

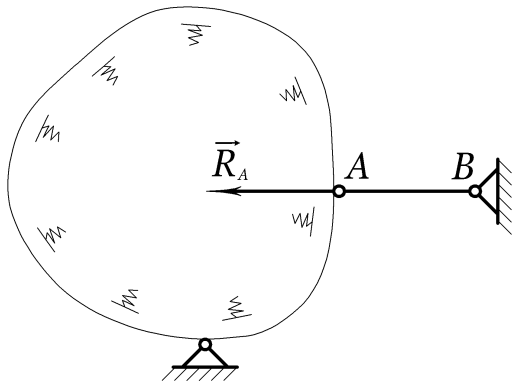


Рис. 1.13. Реакція двошарнірного стержневого з'єднання

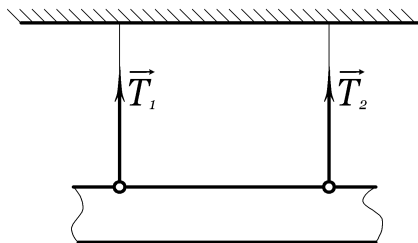


Рис. 1.14. Реакція гнучкої в'язі

6. *Гнучка в'язь (нитка, канат, ланцюг).* Реакція \vec{T} називається натягом. Вона прикладена в точці прикріплення до тіла і напрямлена вздовж нитки. На рис. 1.14 \vec{T}_1, \vec{T}_2 – натяги ниток.

7. *Жорстке зацімлення.* Нехай балка AB одним кінцем замурована в стіні, а інший кінець вільний (рис. 1.15). В даному прикладі реакція зацімлення складається із сили \vec{R}_A і пари сил з моментом m_A .

Визначення реакцій в'язей має важливе практичне значення, бо знаючи їх, згідно з аксіомою 4, будемо знати сили тиску на тіло, тобто ті вихідні дані, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

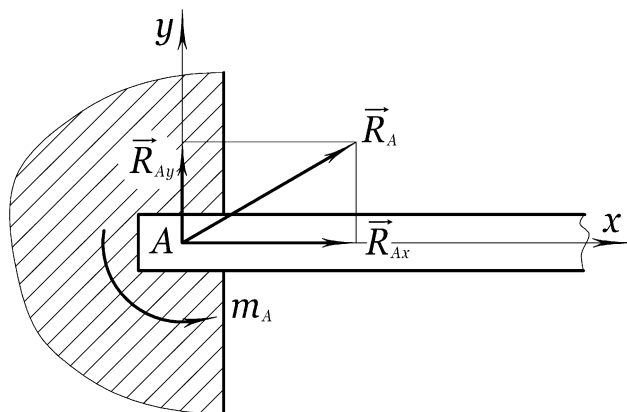


Рис. 1.15. Реакція жорсткого зацімлення

1.4. Система збіжних сил

1.4.1. *Додавання збіжних сил.* Система сил називається збіжною, якщо лінії їх дії перетинаються в одній точці, яка називається центром. Оскільки сила ковзний вектор, то система збіжних сил еквівалентна системі сил, прикладених в одній точці (центрі).

Розглянемо першу і другу задачі статки для системи збіжних сил.

Заміну заданої системи сил, прикладених в одній точці, рівнодійною можна провести шляхом послідовного застосування аксіоми паралелограма. Операцію додавання сил можна виконати, не будуючи кожен раз паралелограм сил. Для цього достатньо до кінця B вектора \vec{F}_1 прикласти початок вектора \vec{F}_2 , потім до кінця C вектора \vec{F}_2 – початок вектора \vec{F}_3 і т.д. Сполучивши центр A з кінцем

останньої сили, одержимо рівнодійну \vec{R} (рис. 1.16). Описаний вище спосіб знаходження рівнодійної збіжної системи сил називається правилом многокутника, ламана $ABCDE$ – силовим многокутником, а відрізок AE – замикальною стороною многокутника.

Якщо в точці O задано n збіжних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то їх рівнодійна \vec{R} прикладена в цій же точці і дорівнює геометричній сумі векторів заданих сил

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.3)$$

Таким чином, розв'язок першої задачі статки може бути сформульований так: довільна збіжна система сил може бути зведена до рівнодійної, яка визначається з рівності (1.3).

1.4.2. Розкладання сил. Розкласти дану силу на складові – означає знайти таку систему сил, для яких задана сила буде рівнодійною. Ця задача невизначена і має єдиний розв'язок лише при виконанні додаткових умов. Розглянемо два найбільш важливі окремі випадки.

1. *Розкладання сили за двома заданими неколінеарними напрямками.* Розкладемо задану силу \vec{F} (рис. 1.17) за напрямками паралельних

прямих AB і AD . Задача зводиться до побудови паралелограма з діагоналлю \vec{F} і сторонами, паралельними прямим AB і AD . Для розв'язку задачі проводимо через точки A, C прямі, паралельні до AB і AD . Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 будуть шуканими складовими.

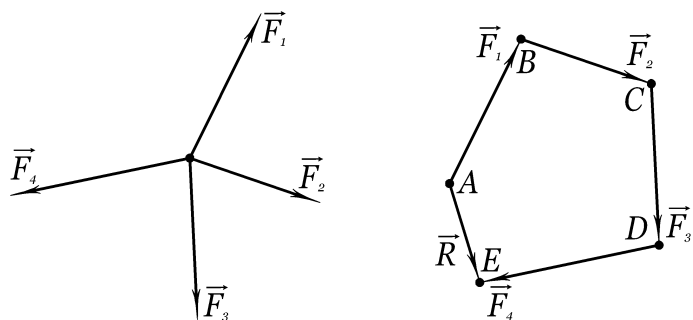


Рис. 1.16. Додавання сил за правилом многокутника

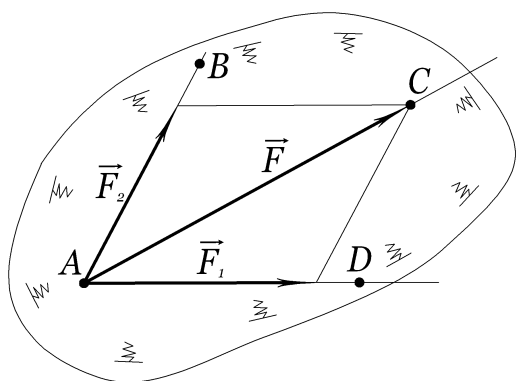


Рис. 1.17. Розкладання сил за двома напрямками

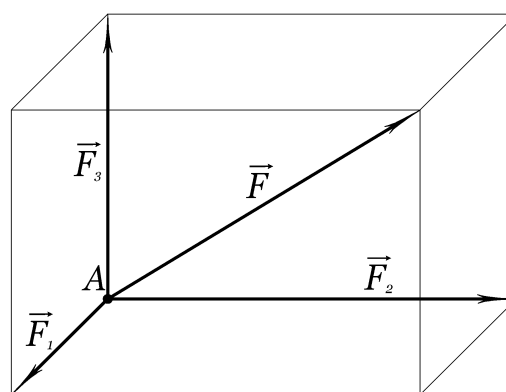


Рис. 1.18. Розкладання сил за трьома напрямками

2. *Розкладання сили за трьома некопланарними напрямками.* Якщо задані напрямки не лежать в одній площині, то задача визначена і зводиться до побудови такого паралелепіпеда, у якого діагональ зображує силу \vec{F} , а його ребра паралельні заданим напрямкам (рис. 1.18). Зауважимо, що розв'язки наведених вище двох задач відповідають теоремам шкільного курсу геометрії про розклад вектора на площині за двома неколінеарними і в просторі за трьома некопланарними векторами.

1.4.3. Проекція сили на вісь і площину. Розглянемо вісь l і силу \vec{F} , що визначається точками A, B (рис. 1.19). Введемо такі означення:

1. Геометричною проекцією сили \vec{F} на вісь l будемо називати вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, точки якого визначаються як ортогональні проекції точок A, B на вісь l

$$\vec{i} \delta_l \vec{F} = \overrightarrow{A_1B_1}. \quad (1.4)$$

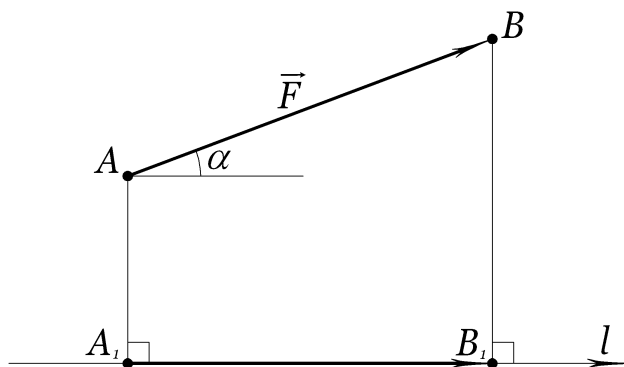


Рис. 1.19. Проекція сили на вісь

2. Алгебраїчною проекцією сили \vec{F} на вісь l називається число із знаком, яке визначається рівністю

$$\vec{i} \delta_l \vec{F} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|. \quad (1.5)$$

Знак «+» вибираємо тоді, коли вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ співнапрямлений з віссю l ($\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$). За величиною проекція сили на вісь дорівнює добутку величини сили \vec{F} на косинус кута між силою і додатнім напрямком осі l

$$\vec{i} \delta_l \vec{F} = F_l = F \cos \alpha. \quad (1.6)$$

При цьому проекція сили буде додатною, якщо відповідний кут гострий, і від'ємною, якщо цей кут тупий. Зауважимо, що при подальшому викладі матеріалу під терміном «проекція сили на вісь» будемо розуміти алгебраїчну проекцію.

2. Проекція сили на площину. Розглянемо силу \vec{F} і площину α (рис. 1.20). Спроектуємо точки A, B , що визначають силу \vec{F} , ортогонально на площину α . Проекцією сили \vec{F} на площину α будемо називати вектор

$$\vec{F}_\alpha = \overrightarrow{A_1B_1}.$$

Величина проекції обчислюється за формулою

$$F_\alpha = F \cos \beta,$$

де β – кут між силою \vec{F} і площиною α .

В деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь буває зручніше знайти спочатку її проекцію на площину, в якій ця вісь розміщена, а потім знайдений вектор спроектувати на вісь. Такий метод носить назву подвійного проектування сили на вісь.

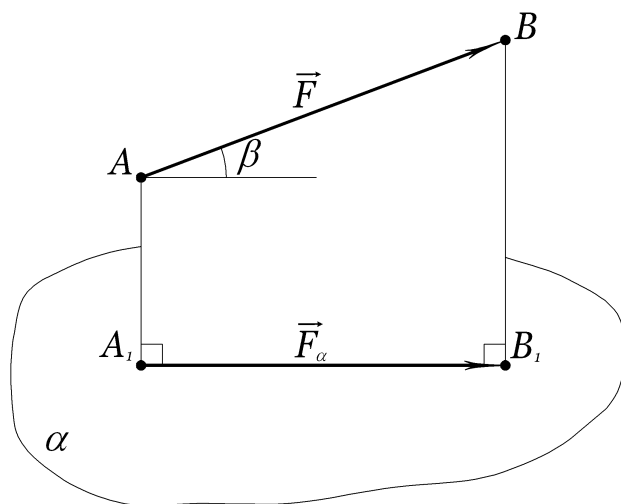


Рис. 1.20. Проекція сили на площину

Для ефективного розв'язання другої задачі статки розглянемо без доведення основні властивості проекцій вектора на вісь: а) рівні вектори мають рівні проекції; б) проекція геометричної суми векторів на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових на цю вісь.

Доведення цих тверджень наводиться у курсі вищої математики (розділ «Векторна алгебра»).

1.4.4. Умови рівноваги системи збіжних сил. Оскільки система збіжних сил зводиться до однієї сили (рівнодійної), то її рівновага можлива лише у випадку $\vec{R} = \vec{0}$. Так як рівнодійна \vec{R} визначається як замикальна сторона силового багатокутника, то у випадку рівноваги він повинен бути замкненим.

Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований з цих сил, був замкнений. Останнє твердження виражає собою геометричну умову рівноваги.

Для встановлення алгебраїчних умов рівноваги виберемо просторову систему координат $Oxyz$, відносно якої задані сили характеризуються такими проекціями

$$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z); \quad \vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}); \quad \dots \quad \vec{F}_n = (F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}),$$

причому на підставі (1.3)

$$R_x = \sum F_{ix}; \quad R_y = \sum F_{iy}; \quad R_z = \sum F_{iz}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (1.7)$$

Прирівнюючи до нуля проекції рівнодійної, одержимо

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0. \quad (1.8)$$

Рівності (1.8) виражають умови рівноваги в алгебраїчній формі: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожен із координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку абсолютної рівноваги тіла (спокою) умови (1.8) забезпечують відсутність переміщення тіла в напрямках координатних осей. Якщо всі сили діють в площині Oxy (плоска система сил), то умови рівноваги (1.8) приймають вигляд

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (1.9)$$

Геометрична умова рівноваги або рівності (1.8) визначають розв'язок другої задачі статки для системи збіжних сил.

Схема розв'язування задач статки

1. Вибираємо тіло (основний об'єкт), рівновага якого буде розглядатися. Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані на інше, то може виникнути необхідність розглянути послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2. Звільняємо тіло від в'язей, замінюючи їх дію невідомими реакціями. Зображуємо всі діючі на тіло задані сили і сили реакцій. При цьому тіло, звільнене від в'язей, слід зобразити окремо.

3. Складаємо умови рівноваги. Вид цих умов залежить від виду системи сил, що діють на розглядуване тіло після його звільнення від в'язей, і методу (графічного чи аналітичного), яким розв'язується задача.

4. Визначаємо шукані величини, перевіряємо правильність розв'язку і досліджуємо здобуті результати.

Приклад 1. Балка AB кінцем A закріплена на нерухомій опорі циліндричним шарніром, а іншим кінцем B покладена на рухомий каток (рис. 1.21). В точці D до неї прикладено силу \vec{F} . Визначити реакції опор в точках A і B .

Розв'язання. Основним тілом, рівновага якого буде розглядатися, вибираємо балку AB . Звільняємо її від в'язей A і B . Реакція в опорі B напрямлена вертикально, а в опорі A напрямком реакції невідомий. Для його знаходження використаємо теорему про три сили. Реакція \vec{R}_A напрямлена вздовж прямої AS . Для визначення кута α розглянемо прямокутний трикутник DBS .

$$DS = \frac{DB}{\cos 60^\circ} = 2DB.$$

Отже, $\triangle ASD$ – рівнобедрений ($AD = DS$), причому $\alpha = 30^\circ$.

Геометричний метод. Умови рівноваги сил $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}$ запишемо у вигляді $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} = \vec{0}$. Побудуємо замкнений трикутник (рис. 1.22) сил, вибираючи для них певний масштаб. З цього трикутника знаходимо $R_A = R_B = F\sqrt{3}$.

Аналітичний метод. Складаємо умови рівноваги плоскої системи збіжних сил (система координат показана на рис. 1.21).

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & \quad R_A \cos \alpha - F \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{iy} = 0; & \quad R_A \sin \alpha + R_B - F \sin 60^\circ = 0. \end{aligned}$$

Покладаючи $\alpha = 30^\circ$, знаходимо $R_A = R_B = F\sqrt{3}$.

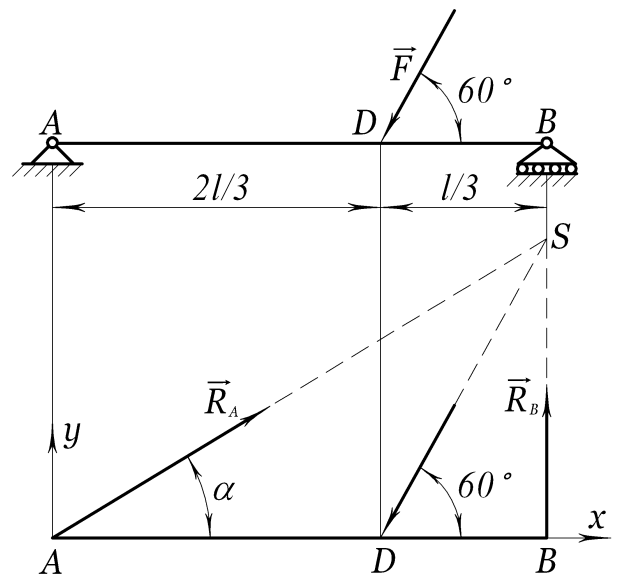


Рис. 1.21. До розв'язування прикладу 1

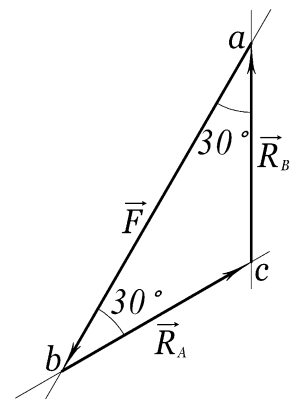


Рис. 1.22. Геометричний метод розв'язку прикладу 1

1.5. Система двох паралельних сил. Теорія пар на площині

Система сил називається плоскою, якщо лінії дії сил лежать в одній площині. Система двох паралельних сил, що діють по різних прямих, завжди плоска.

1.5.1. Додавання двох паралельних сил. На відміну від двох збіжних сил, для додавання паралельних сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , прикладених в точках A, B твердого тіла, не можна безпосередньо використати правило паралелограма. Тут можливі два випадки: 1) сили напрямлені в один бік; 2) сили напрямлені в протилежні боки.

1) Додавання двох сил, напрямлених в один бік. Розглянемо тверде тіло (рис. 1.23), на яке в точках A, B діють дві паралельні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Прикладемо в цих точках зрівноважену систему сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , які напрямлені вздовж AB ($\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$), і додамо їх до сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 за правилом паралелограма. Знайдені сили \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 перенесемо в точку O , в якій перетинаються лінії їх дії, і розкладемо на початкові складові. Після цього в точці O будуть діяти дві зрівноважені сили \vec{P}_1, \vec{P}_2 , які відкидаємо, і дві паралельні сили \vec{F}_1, \vec{F}_2 , що діють по одній прямій. Ці сили перенесемо в точку C і замінимо рівнодійною \vec{R} , величина якої дорівнює

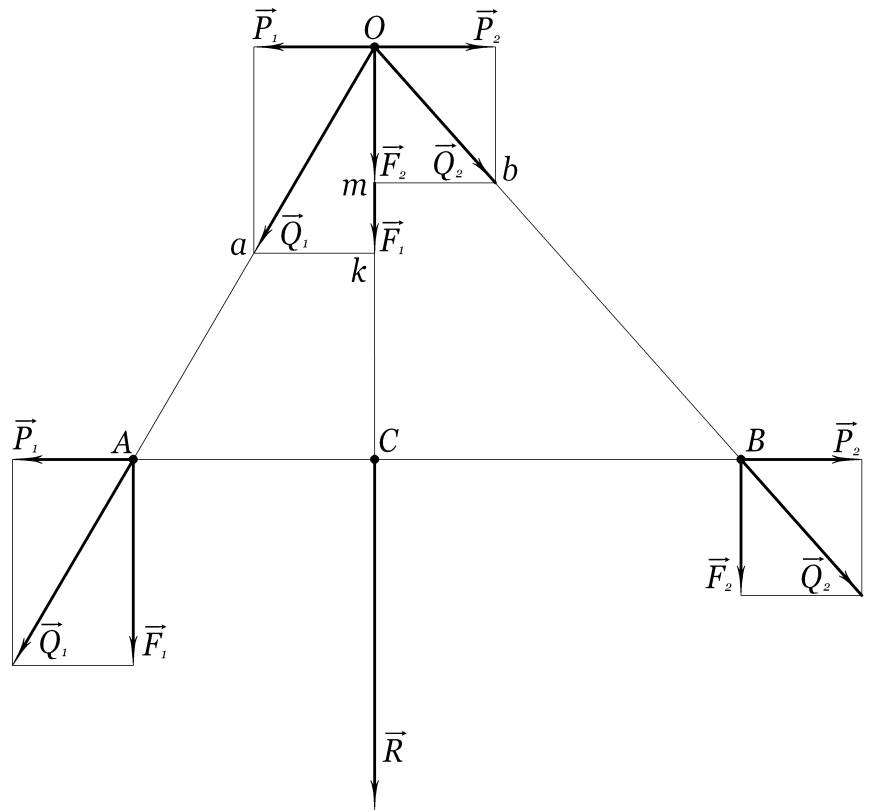


Рис. 1.23. Додавання двох сил, напрямлених в один бік

Рівнодійною \vec{R} буде рівнодійною сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , прикладених в точках A і B . Для визначення положення точки C розглянемо трикутники OAC, OaC, OCB, Omb . З умов подібності відповідних трикутників маємо

$$R = F_1 + F_2 \quad (1.10)$$

Сила \vec{R} буде рівнодійною сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , прикладених в точках A і B . Для визначення положення точки C розглянемо трикутники OAC, OaC, OCB, Omb . З умов подібності відповідних трикутників маємо

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1}; \quad \frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}; \quad P_1 = P_2,$$

або

$$F_1 AC = F_2 BC.$$

За властивостями пропорцій і рівностей $AB = AC + CB$, $R = F_1 + F_2$, знаходимо

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (1.11)$$

Співвідношення (1.11) мають назву правила важеля першого роду. Вони також дозволяють розв'язувати обернену задачу про розклад сили \vec{R} на дві паралельні складові \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Отже, рівнодійна двох співнапрямлених паралельних сил має той самий напрям, що і складові. Її величина визначається за формулою (1.10), а точка прикладення C – із співвідношень (1.11).

2) Додавання двох сил, напрямлених в протилежні боки. Розглянемо дві антипаралельні сили \vec{F}_1, \vec{F}_2 , які прикладені в точках A, B твердого тіла, причому будемо вважати, що $F_1 > F_2$. На прямій AB

з боку більшої сили виберемо точку C і прикладемо в ній зрівноважені сили \vec{R} і \vec{R}' , паралельні силам \vec{F}_1 і \vec{F}_2 (рис. 1.24). При цьому величина цих сил і положення точки C визначаються рівностями

$$R = F_1 - F_2; \quad (1.12)$$

$$\frac{BC}{F_2} = \frac{AC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \quad (1.13)$$

Додавши сили \vec{F}_2 і \vec{R}' за формулами (1.10) і (1.11), визначимо силу \vec{Q} , яка разом з силою \vec{F}_1 утворює зрівноважену систему сил. В результаті цього задані сили будуть замінені рівнодієюю \vec{R} , величина якої і положення точки C визначаються рівностями (1.12), (1.13), причому остання називається правилом важеля другого роду.

Таким чином, система двох різних за величиною паралельних сил, напрямлених в протилежні боки, зводиться до рівнодієюї, яка має напрямок більшої сили, її величина визначається формулою (1.12), а положення точки прикладання – із співвідношень (1.13).

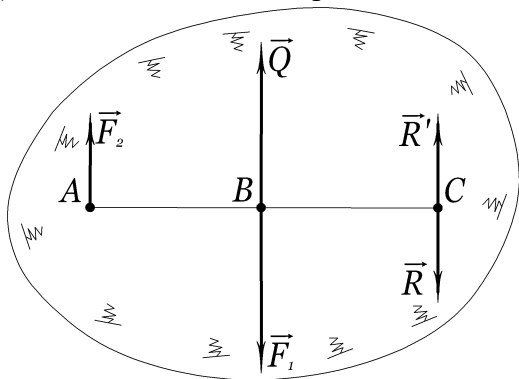


Рис. 1.24. Додавання двох різних сил, напрямлених в протилежні боки

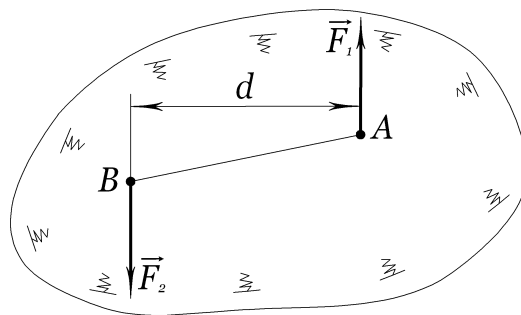


Рис. 1.25. Пара сил

3) *Пара сил.* Розглянемо випадок антипаралельних сил при $F_1 = F_2$ (рис. 1.25). Така система сил називається парюю сил або парюю. Оскільки сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 діють по різних прямих, то згідно з аксіомою 1 пара сил не перебуває у рівновазі. В той же час пара сил не має рівнодієюї. Якщо допустити протилежне, що пара (\vec{F}_1, \vec{F}_2) має рівнодієюю $\vec{Q} \neq \vec{0}$, то сила $-\vec{Q}$ повинна цю пару зрівноважити. На основі теореми про три сили лінії дії сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, -\vec{Q}$ повинні перетинатися в одній точці, що неможливо. Таким чином, пару сил не можна замінити або зрівноважити однією силою. Пара сил – самостійний об'єкт в статиці твердого тіла. Під час дії на тіло вона приводить до його обертання.

Площина, що визначається силами \vec{F}_1, \vec{F}_2 , називається площиною дії пари, а відстань d між лініями дії сил – плечем пари.

Площина, що визначається силами \vec{F}_1, \vec{F}_2 , називається площиною дії пари, а відстань d між лініями дії сил – плечем пари.

1.5.2. Момент сили відносно точки. Нехай в точці A твердого тіла прикладено силу \vec{F} . Виберемо в тілі довільну точку O , яка разом з силою \vec{F} визначає площину α . З цієї точки проведемо перпендикуляр на лінію дії сили (пряму AB). Довжина цього перпендикуляра h називається плечем сили \vec{F} відносно точки O (рис. 1.26).

Моментом сили \vec{F} відносно точки O ($M_O(\vec{F})$) називається число із знаком, що дорівнює добутку величини сили на плече

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1.14)$$

Момент сили відносно точки вважаємо додатним, якщо сила \vec{F} обертає площину α навколо точки O в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки (правило гвинта). Якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою, то момент – від’ємний.

Із означення моменту сили відносно точки випливає:

1) Момент сили відносно точки дорівнює нулю тоді, і тільки тоді, коли лінія дії сили \vec{F} проходить через точку O ($h = 0$).

2) Величина моменту сили відносно точки дорівнює подвоєній площі трикутника, що визначається силою \vec{F} і точкою O .

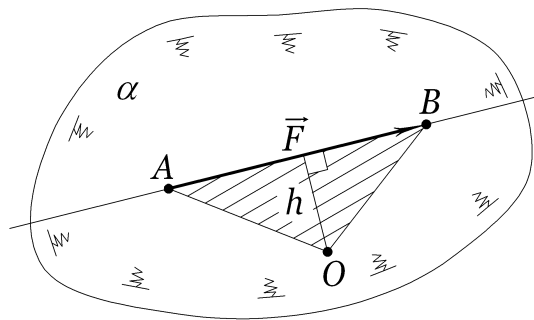


Рис. 1.26. Момент сили відносно точки

Оскільки висота трикутника OAB не зміниться при переміщенні сили \vec{F} по прямій AB , то обертальний ефект від моменту сили буде залежати від її величини, напрямку і плеча. Вимірюється момент сили відносно точки в ньютонметрах (Н·м).

За допомогою поняття моменту сили відносно точки зручніше визначати точку C прикладання рівнодійної системи двох паралельних сил. Враховуючи (1.14), ліві частини рівностей (1.11) і (1.13) можна подати у вигляді

$$M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) = 0. \quad (1.15)$$

Отже, точка прикладання рівнодійної системи двох паралельних сил визначається з умови перетворення в нуль суми моментів цих сил відносно цієї точки. Рівність (1.15) являє собою окремий випадок відомої теореми Варіньона: якщо система двох паралельних сил має рівнодійну, то її момент відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів складових сил відносно цієї точки. Точне доведення теореми буде наведено при розгляді просторової системи сил.

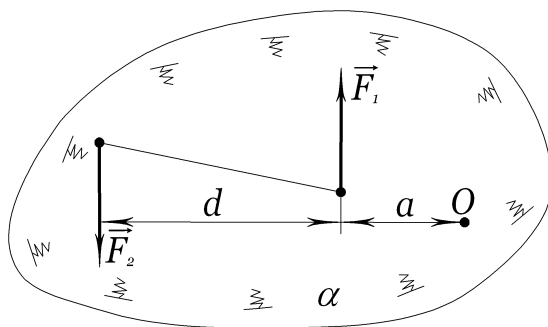


Рис. 1.27. Момент пари

1.5.3. Момент пари. Розглянемо пару сил \vec{F} і \vec{F}' ($F = F'$), які діють в площині α (рис. 1.27). Оскільки пара сил, яка прикладена до твердого тіла, викликає обертальний ефект, то для оцінки його величини необхідно ввести кількісну характеристику пари. Виберемо в площині дії пари довільну точку O і обчислимо суму моментів сил пари відносно цієї точки

$$M_O(\vec{F}) + M_O(\vec{F}') = F(a + d) - Fa = Fd. \quad (1.16)$$

Остання рівність показує, що сума моментів сил пари відносно довільної точки площини α є величина стала і не залежить від вибору точки. Цю величину приймемо за кількісну характеристику пари сил і назовемо моментом пари $M = \pm Fd$.

Моментом пари будемо називати число зі знаком, яке дорівнює добутку однієї із сил пари на плече. Знак моменту пари вибирається за правилом гвинта (рух площини дії пари проти годинникової стрілки). На рисунку 1.27 пара \vec{F} і \vec{F}' має додатний момент. Момент пари вимірюється в тих же одиницях, що і момент сили відносно точки (Н·м).

1.5.4. Еквівалентність пар. Доведемо теорему, яка разом з наслідками, що випливають з неї, визначає основні властивості пар на площині.

Теорема: Дві пари, що діють в одній площині і мають однакові моменти, еквівалентні.

Доведення. Для доведення теореми необхідно показати, що одну пару можна перетворити в іншу за допомогою додавання і розкладання сил.

Розглянемо дві пари сил \vec{F} і \vec{F}' , \vec{P} і \vec{P}' , причому сили \vec{F} і \vec{P} непаралельні (рис. 1.28). Знаходимо точку перетину відповідних ліній дії сил пар. В точку A перенесемо силу \vec{F}' , а в точку B – силу \vec{F} . Розкладемо ці сили за напрямками \vec{AB} і \vec{P} .

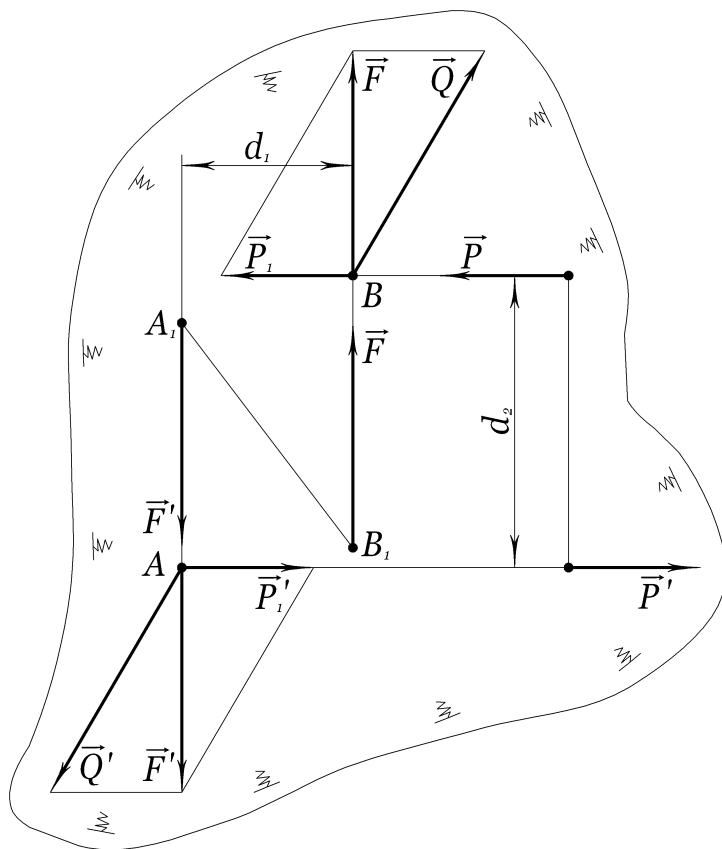


Рис. 1.28. Еквівалентність пар

$$\vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{Q}; \quad \vec{F}' = \vec{P}_1' + \vec{Q}'. \quad (1.17)$$

Оскільки сили \vec{Q} і \vec{Q}' зрівноважені, то їх можна відкинути.

Таким чином, пара (\vec{F}, \vec{F}') перетворена в еквівалентну їй пару (\vec{P}_1, \vec{P}_1') . Момент цієї пари, згідно з теоремою Варіньона, дорівнює

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{P}_1) = P_1 d_2. \quad (1.18)$$

Пари (\vec{P}, \vec{P}') і (\vec{P}_1, \vec{P}_1') мають однакові моменти $P_1 d_2 = P d_2$. Тому $P = P_1$. Теорема доведена.

У випадку паралельності сил \vec{F} і \vec{P} , для доведення теореми слід використовувати правила додавання і розкладання паралельних сил. Із доведеної теореми випливають такі властивості пар на площині:

- 1) не змінюючи впливу на тіло, пару сил можна довільно переміщати в площині її дії;

2) в заданій парі можна довільно змінювати величину сил або плече, залишаючи незмінним її момент.

З цих властивостей випливає, що дія пари на тверде тіло характеризується лише її моментом. Тому, особливо в техніці, пару сил зображують круговою стрілкою, яка вказує напрямок обертання, не зображаючи сил пари. На 1.29 показано, що на тіло діє сила \vec{F} і пара з моментом m .

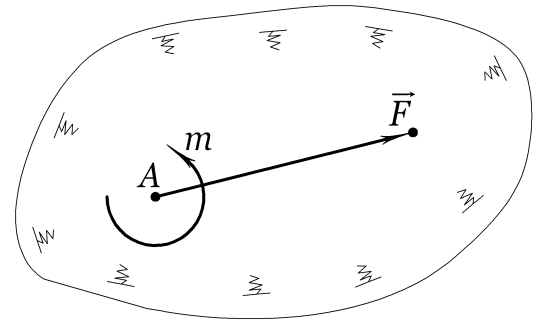


Рис. 1.29. Зображення пари сил

1.5.5. Додавання пар, розміщених в одній площині.

Умови рівноваги системи пар. *Теорема:* система пар, розміщених в одній площині, еквівалентна одній парі, що діє в тій же площині. Момент цієї пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар.

Доведення. Для спрощення доведення допустимо, що на тверде тіло в одній площині діє три пари з моментами m_1, m_2, m_3 (рис. 1.30). На підставі попередньої теореми замінимо задані пари трьома парами з спільним плечем $AB = d$ і тими ж самими моментами

$$m_1 = P_1 d; \quad m_2 = P_2 d; \quad m_3 = P_3 d.$$

З останніх рівностей сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ визначаються однозначно. Додавши окремо сили, прикладені в точках A і B , одержимо в точці B силу \vec{R} , а в точці A – силу \vec{R}' , які за величиною дорівнюють

$$R = R' = P_1 - P_2 + P_3.$$

Це означає, що систему трьох пар ми замінили однією парою (\vec{R}, \vec{R}') з моментом $M = Rd = P_1 d - P_2 d + P_3 d$. Такий же результат одержимо при довільному числі пар. Теорема доведена.

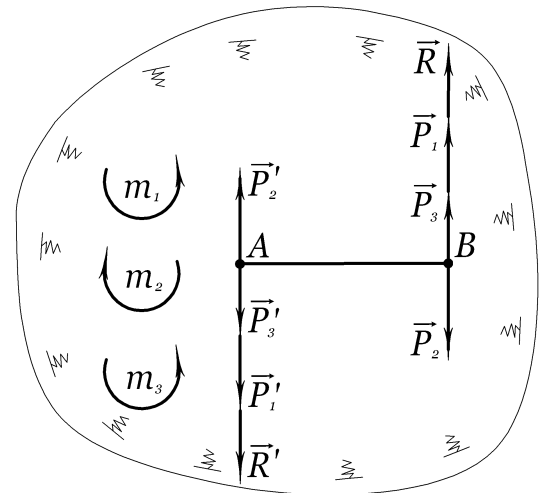


Рис. 1.30. Додавання пар сил

Таким чином, розв'язок першої задачі статки для системи пар на площині можна сформулювати так: довільна система пар на площині може бути зведена до однієї пари, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1.19)$$

Із доведеної теореми випливає, що для рівноваги системи пар на площині необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0. \quad (1.20)$$

Співвідношення (1.20) визначає розв'язок другої задачі статки для системи пар на площині. За механічним змістом умова (1.20) забезпечує відсутність обертання твердого тіла в площині дії пар.

Приклад 2. На горизонтальну балку AB довжиною l діє пара сил з моментом m_1 . Визначити реакції опор, якщо ліва опора A – нерухомий шарнір, а права опора B – рухомий циліндричний каток (рис.1.31).

Розв'язування. Опора B шарнірно рухома, тому реакція \vec{R}_B напрямлена перпендикулярно до лінії руху катка. Напрямок реакції \vec{R}_A невизначений. Оскільки зовнішню пару сил можна зрівноважити тільки парою, то реакції \vec{R}_A і \vec{R}_B повинні утворювати пару сил ($R_A = R_B$).

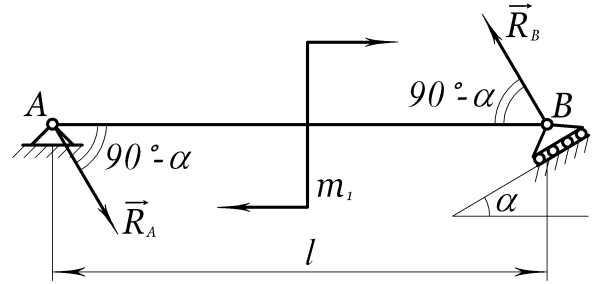


Рис. 1.31. До розв'язування прикладу 2

Запишемо умову рівноваги системи пар

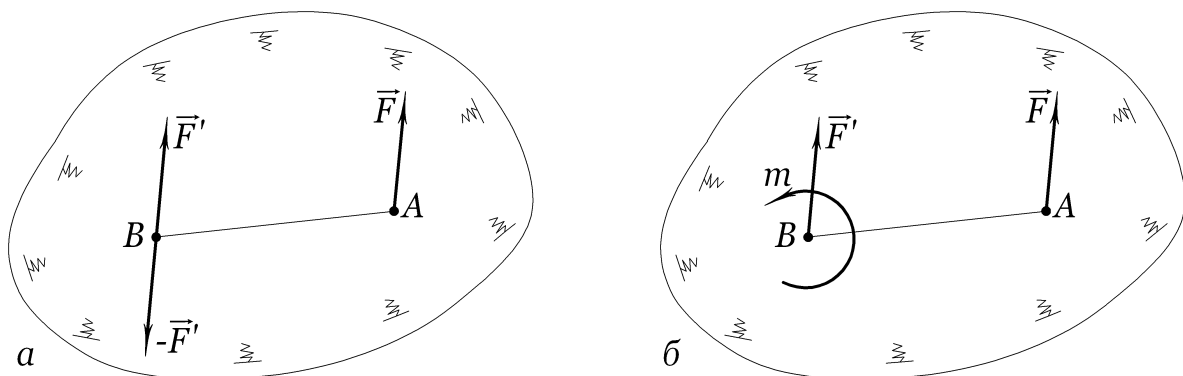
$$-m_1 + R_B l \cos \alpha = 0.$$

З даної рівності знаходимо

$$R_A = R_B = \frac{m_1}{l \cos \alpha}.$$

1.6. Плоска система сил

Якщо всі сили, що діють на тверде тіло, розміщені в одній площині, то така система сил називається плоскою. Оскільки нам відомі алгоритми знаходження рівнодійної системи збіжних сил і системи двох паралельних сил, то при розв'язуванні першої задачі статички для плоскої системи сил необхідно знайти метод її зведення до одного центра. Такий метод визначає теорема: силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна паралельно перенести в довільну точку тіла, додаючи при цьому пару сил з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно нової точки прикладання.



Доведення. Нехай,

Рис. 1.32. До доведення теореми

сила \vec{F} прикладена в

точці A твердого тіла (рис. 1.32а). Виберемо довільну точку B тіла і прикладемо в ній зрівноважену систему сил $(\vec{F}', -\vec{F}')$ таких, що $\vec{F}' = \vec{F}$. Здобута система трьох сил містить силу \vec{F}' , прикладену в точці B , і пару сил (\vec{F}, \vec{F}') з моментом $m = M_B(\vec{F})$. Отриманий результат можна зобразити так, як показано на рисунку 1.32б (силу \vec{F} на цьому рисунку слід вважати відкинутою). Теорема доведена.

1.6.1. Зведення плоскої системи сил до найпростішого виду. Нехай на тверде тіло діє система

сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, розміщених в одній площині і прикладених відповідно в точках A_1, A_2, \dots, A_n . Виберемо на цій площині довільно точку O , яку назовемо центром зведення. Використовуючи теорему про паралельне перенесення сили, зведемо всі задані сили в точку O . В результаті цього на тіло буде діяти збіжна система сил $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ з центром в точці O і система пар з моментами $m_1 = M_O(\vec{F}_1), m_2 = M_O(\vec{F}_2), \dots, m_n = M_O(\vec{F}_n)$ (рис. 1.33).

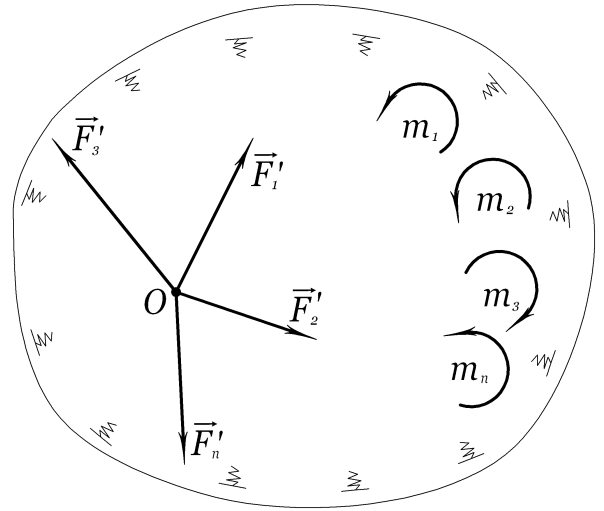


Рис. 1.33. Зведення плоскої системи сил до найпростішого вигляду

Збіжну систему сил замінимо однією силою

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (1.21)$$

а систему пар однією парою, момент якої визначається рівністю

$$M_0 = \sum M_O(\vec{F}_i). \quad (1.22)$$

Сила \vec{R} дорівнює геометричній сумі всіх сил системи і називається головним вектором; величина M_0 – головним моментом системи сил. Головний момент дорівнює сумі моментів всіх заданих сил відносно центра O .

Виходячи з вищесказаного, розв'язок першої задачі статки для плоскої системи сил подаємо так: довільна плоска система сил, що діє на АТТ, може бути зведена до однієї сили (головного вектора) і однієї пари (головного моменту).

Відзначимо, що головний вектор \vec{R} не залежить від вибору центра і може бути знайдений за формулою (1.21) аналітично або геометрично побудовою силового многокутника. Величини M_0 визначається формулою (1.22) і залежить від вибору точки O . Наведений вище метод зведення плоскої системи сил до одного центра називається методом Пуансо.

Розглянемо часткові випадки розв'язку першої задачі статки для плоскої системи сил.

1) $\vec{R} = 0, M_0 \neq 0$. Так як $\vec{R} = \vec{0}$, то силовий многокутник, побудований на заданих силах, замкнений. У цьому випадку задана система сил еквівалентна одній парі з моментом M_0 . Якщо змінити центр зведення на іншу точку O_1 , то момент M_{O_1} рівнодійної пари знову дорівнює M_0 . Якщо допустити протилежне $M_0 \neq M_{O_1}$, то це означало б, що дві пари, еквівалентні одній і тій же системі сил, не еквівалентні між собою. А це неможливо.

2) $\vec{R} \neq 0, M_0 = 0$. Це означає, що система сил еквівалентна одній силі \vec{R} , яка прикладена в точці O . Цю силу тепер слід називати не головним вектором, а рівнодійною. Отже, якщо головний

вектор відмінний від нуля, а головний момент заданих сил відносно точки O дорівнює нулю, то система сил еквівалентна рівнодійній, лінія дії якої проходить через точку O . В даному випадку має місце теорема Варіньона:

Якщо плоска система сил має рівнодійну, то її момент відносно будь-якої точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил заданої системи відносно цієї точки

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n). \quad (1.23)$$

Точне доведення даної теореми буде приведено при вивченні просторової системи сил.

3) $\vec{R} \neq 0, M_o \neq 0$. В цьому випадку пару з моментом M_o можна зобразити двома силами \vec{R}' і \vec{R}'' , вибираючи $\vec{R}' = \vec{R}$, а $\vec{R}'' = -\vec{R}$ (рис. 1.34). При цьому повинна виконуватись умова

$$\dot{I}_o = Rd. \quad (1.24)$$

Відкинувши зрівноважену систему сил (\vec{R}, \vec{R}'') , знаходимо, що система сил замінена однією рівнодійною $\vec{R}' = \vec{R}$, яка проходить через точку C . Її положення однозначно визначається рівністю (1.24) і знаком моменту M_o .

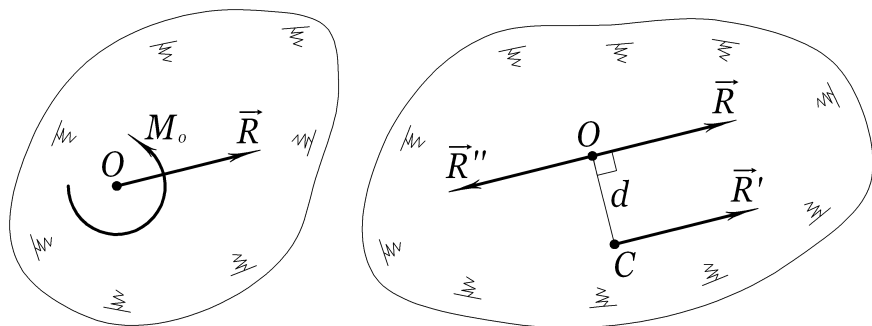


Рис. 1.34. Зведення плоскої системи сил при $\vec{R} \neq 0, M_o \neq 0$

Розглянуті випадки показують, що довільна плоска система сил, яка не перебуває у рівновазі, може бути зведена до однієї сили (рівнодійної), або однієї пари.

1.6.2. Умови рівноваги плоскої системи сил. Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувалися умови

$$\vec{R} = \vec{0}; M_o = 0. \quad (1.25)$$

Враховуючи рівності (1.21), (1.22) і властивості проєкцій сил на координатні осі, дістанемо

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_o(\vec{F}) = 0. \quad (1.26)$$

Рівності (1.26) виражають алгебраїчні умови рівноваги в основній формі: для рівноваги довільної плоскої системи необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на координатні осі і сума їх моментів відносно будь-якої точки в площині дії сил, дорівнювали нулю. За механічним змістом перші дві умови (1.26) виражають відсутність переміщень твердого тіла вздовж координатних осей, а третя – відсутність обертання в площині дії сил.

Крім основної форми рівноваги (1.26) на практиці широко використовуються і інші, еквівалентні основній, форми рівноваги плоскої системи сил, які ми наводимо без доведення.

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно двох різних точок A, B і сума їх проєкцій на вісь x , не перпендикулярну до AB , дорівнювали нулю

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum F_{ix} = 0. \quad (1.27)$$

Третя форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів відносно трьох не колінеарних точок A, B, C дорівнювали нулю

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.28)$$

Із умов (1.26)-(1.27) можна одержати відповідні умови рівноваги системи паралельних сил на площині. Якщо допустити, що всі сили, які діють на тіло, паралельні осі Oy (рис. 1.35), то перша рівність в (1.26) і остання в (1.27) перетворяться в тотожності виду $0 \equiv 0$. В результаті умови рівноваги системи паралельних сил приймуть вигляд:

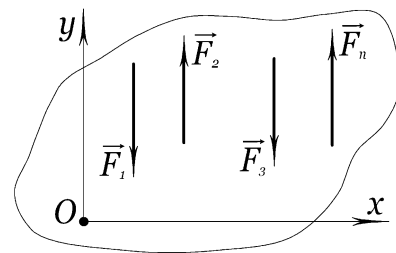


Рис. 1.35. Система паралельних сил

Основна форма умов рівноваги:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad (1.29)$$

Друга форма умов рівноваги

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.30)$$

При цьому точки A і B не повинні належати прямій, паралельній силам.

Умови рівноваги важеля. Важелем будемо називати тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, розміщених в площині, перпендикулярній до осі обертання (рис. 1.36). Найпростішими є важелі першого і другого роду. Розглядаючи рівновагу важеля, додамо до заданих сил складові реакції циліндричного шарніра \vec{R}_{ix} і \vec{R}_{iy} . Умови рівноваги плоскої системи сил виду (1.26) приймуть вигляд

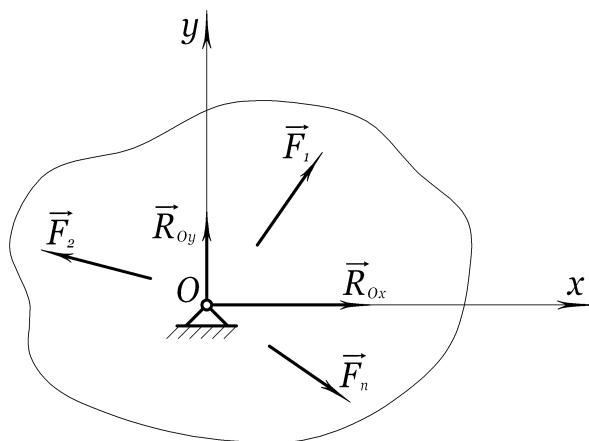


Рис. 1.36. Важіль

$$R_{ix} + \sum F_{ix} = 0; \quad R_{iy} + \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.31)$$

Перші дві рівності (1.31) служать для визначення реакцій R_{ix} та R_{iy} , а остання не містить невідомих сил, тому є умовою рівноваги важеля.

1.6.2. Рівновага системи твердих тіл. Статичний розрахунок інженерних споруд в багатьох випадках зводиться до розгляду умов рівноваги конструкції, яка складається із системи твердих тіл, з'єднаних між собою певними в'язами, які ми будемо називати внутрішніми. Ці в'язи є складовими частинами конструкції. Метод розв'язку таких задач полягає в тому, що конструкцію розчленяють на окремі тіла і складають умови рівноваги для кожного з них, розглядаючи їх як вільні. При цьому реакції внутрішніх в'язей для контактуючих тіл будуть попарно однакові за величиною і протилежні за напрямком.

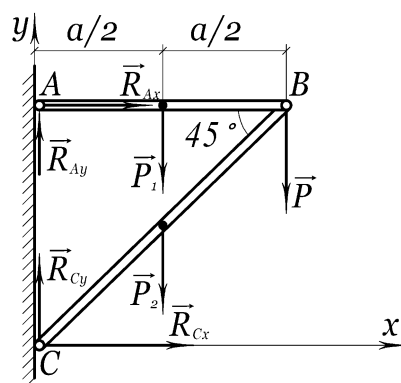


Рис. 1.37. До розв'язування прикладу 3

Приклад 3. Кронштейн складається із двох стержнів AB і BC , з'єднаних в точці B і прикріплених до вертикальної стінки в точках A, C шарнірно. Вага стержня $AB - P_1 = 150\text{Н}$, а стержня $BC - P_2 = 120\text{Н}$. В точці B прикладена сила $P = 300\text{Н}$. Розміри показані на рис. 1.37. Визначити реакції шарнірів A і C , вважаючи стержні однорідними.

Розв'язування. Умовно відкинемо в'язі, замінивши їх дію невідомими реакціями. Розглянемо рівновагу кронштейна під дією сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}, \vec{P}_{Ax}, \vec{P}_{Ay}, \vec{P}_{Cx}, \vec{P}_{Cy}$.

Запишемо умови рівноваги плоскої системи сил

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= R_{Ax} + R_{Cx} = 0; \\ \sum F_{iy} &= R_{Ay} + R_{Cy} - P_1 - P_2 - P = 0; \\ \sum M_C(\vec{F}_i) &= -R_{Ax} \cdot a - P_1 \frac{a}{2} - P_2 \frac{a}{2} - Pa = 0. \end{aligned}$$

Отримано три рівняння, які містять чотири невідомих $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Cx}, \vec{R}_{Cy}$. Для розв'язку задачі використаємо той факт, що при рівновазі кронштейна, зрівноваженими будуть кожен стержень окремо. Записавши моментну умову рівноваги відносно шарніра B (щоб не ввійшли реакції в точці B) для стержня AB , знаходимо

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = P_1 \frac{a}{2} - R_{Ay} a = 0.$$

Розв'язуємо систему чотирьох рівнянь і визначаємо

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= \frac{P_1}{2} = 75\text{Н}; & R_{Ax} &= -P - \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = -435\text{Н}; \\ R_{Cx} &= -R_{Ax} = 430\text{Н}; & R_{Cy} &= P_1 + P_2 + P - R_{Ay} = 495\text{Н}. \end{aligned}$$

В наведеній задачі ми не розчленяли кронштейн на два тіла, бо не було потреби визначати реакції в шарнірі B .

1.7. Просторова система сил

Щоб перейти до розв'язування задач статки для системи сил, довільно розміщених в просторі, необхідно уточнити і розширити ряд введених раніше понять.

1.7.1. Момент сили відносно точки як вектор.

Момент сили \vec{F} відносно точки O , як характеристика її обертального ефекту, визначається трьома елементами: 1) величиною, яка дорівнює добутку величини сили на плече; 2) площиною дії моменту, що визначається точкою O і лінією дії сили \vec{F} ; 3) напрямком повороту в площині

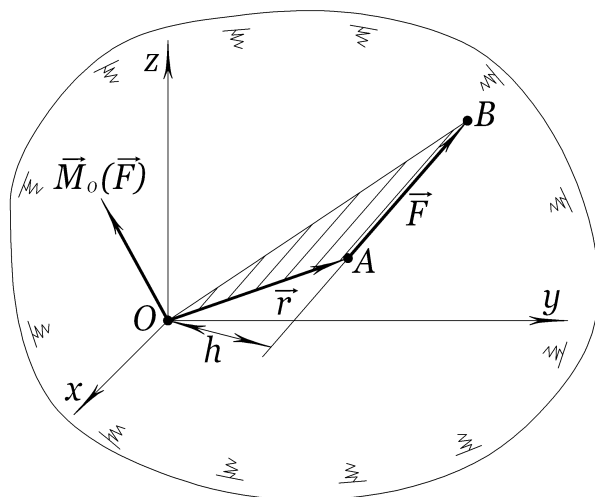


Рис. 1.38. Момент сили відносно точки як вектор

дії моменту (рис. 1.38).

При вивченні плоскої системи сил задані сили і точка розміщена в одній площині, тому необхідність кожного разу задавати площину дії моменту відпадає. Момент задається як скалярна алгебраїчна величина, яка дорівнює $\pm Fh$, де знак вказує напрям повороту.

У випадку довільної просторової системи сил положення площини дії моменту можна задавати вектором, перпендикулярним до неї. Якщо одночасно величина цього вектора дорівнюватиме величині моменту, а напрямок узгодити з напрямком повороту в площині дії моменту, то такий вектор визначить всі елементи, що характеризують момент сили \vec{F} відносно точки O .

Вектором-моментом сили \vec{F} відносно точки O називається вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, прикладений в точці O , величина якого дорівнює добутку величини сили F на плече h , напрямлений він перпендикулярно до площини дії моменту в той бік, який визначається правилом гвинта. Величина моменту сили відносно точки дорівнює подвоєній площі трикутника AOB .

Використовуючи властивості векторного добутку двох векторів, вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ подамо у вигляді

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = [\vec{r}\vec{F}],$$

де вектор $\vec{r} = O\vec{A}$ називається радіус вектором точки A відносно центра O .

Допустимо, що через точку O проведено координатні осі x, y, z (рис. 1.38). Нехай вектори \vec{F} , \vec{r} характеризуються проекціями $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$, а точка A має координати (x, y, z) . Тоді, враховуючи, що $r_x = x, r_y = y, r_z = z$, одержимо за відомою формулою векторної алгебри

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

Тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей.

Нехай

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k}. \quad (1.33)$$

Тоді, розкриваючи в (1.32) визначник справа за елементами першого рядка, знаходимо проекції вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на координатні осі

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y; \quad M_{Oy} = zF_x - xF_z; \quad M_{Oz} = xF_y - yF_x. \quad (1.34)$$

Формула (1.33) дозволяє за (1.34) знайти вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$.

1.7.2. Момент сили відносно осі.

Розглянемо силу \vec{F} , що діє на АТТ. Нехай це тіло може обертатися навколо деякої осі z (рис. 1.39). Проведемо довільну площину xu перпендикулярно до осі z і спроектуємо на неї силу \vec{F} .

Моментом сили відносно осі z називається момент проєкції \vec{F}_1 сили \vec{F} на площину, перпендикулярну осі z відносно точки перетину площини xu і осі z

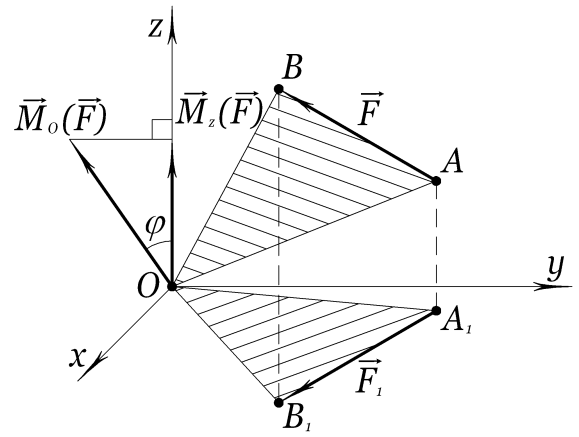


Рис. 1.39. Момент сили відносно осі

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1). \quad (1.35)$$

З наведеного означення випливає, що момент сили відносно осі – вектор, напрямлений вздовж осі z за правилом гвинта. Його величина визначається подвоєною площею трикутника OA_1B_1 .

Якщо сила \vec{F} ненульова, то її момент відносно будь-якої осі дорівнює нулю у двох випадках:

- а) лінія дії сили перетинає вісь (в цьому випадку точки O, A_1, B_1 лежать на одній прямій);
- б) сила паралельна осі (точки A_1, B_1 співпадають).

В обох випадках сила і вісь розміщені в одній площині.

Встановимо зв'язок між моментом сили \vec{F} відносно точки O і моментом сили \vec{F} відносно осі z , що проходить через цю точку. Виходячи з геометричного змісту моменту сили відносно точки і осі, можна записати

$$M_O(\vec{F}) = 2S_{OAB}; \quad M_z(\vec{F}) = 2S_{OA_1B_1}. \quad (1.36)$$

Оскільки OA_1B_1 є проєкція OAB на площину xu , то

$$S_{OA_1B_1} = S_{OAB} \cos \varphi, \quad (1.37)$$

де φ – кут між площинами трикутників OA_1B_1 і OAB .

На підставі (1.36) та (1.37) можна записати

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \varphi. \quad (1.38)$$

В результаті ми довели таке твердження: проєкція вектора – моменту сили відносно деякої точки на вісь, що проходить через цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї ж осі.

Враховуючи останнє твердження і співвідношення (1.34), запишемо аналітичні вирази для моментів сили $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ відносно координатних осей

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x, \quad (1.39)$$

де x, y, z – координати точки A прикладання сили \vec{F} .

Оскільки момент сили \vec{F} відносно осі z не залежить від положення точки O на цій осі, то вектор $\vec{M}_z(\vec{F})$ – ковзний вектор.

1.7.3. Теорема про перенесення пари сил в паралельну площину. В п.1.4.4. було доведено, що дві пари, розміщені в одній площині, еквівалентні, якщо вони мають однакові моменти. Доведемо тепер іншу теорему: дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести із заданої площини в будь-яку іншу площину, їй паралельну. Доведення: Нехай пара (\vec{F}, \vec{F}') розміщена в площині I (рис. 1.40).

Розглянемо площину II, яка паралельна площині I, і виберемо в ній відрізок CD , який дорівнює і паралельний AB . В точках C і D прикладемо чотири попарно зрівноважені сили $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$, $\vec{F}'_1 = \vec{F}'_2 = \vec{F}'$. Побудований чотирикутник $ABCD$ паралелограм, діагоналі якого діляться в точці O навпіл. Додамо паралельні сили \vec{F} і \vec{F}_2 , \vec{F}' і \vec{F}'_2 . Вони заміняться відповідно рівнодійними \vec{R} і \vec{R}' , які внаслідок їх зрівноваженості можна відкинути. В

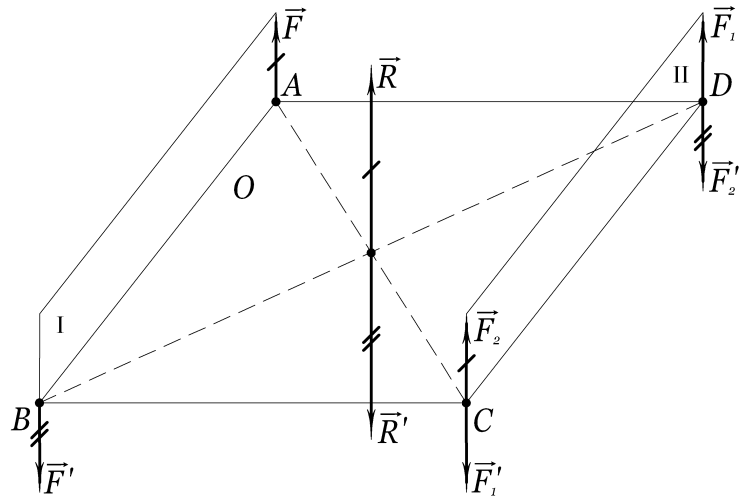


Рис. 1.40. Перенесення пари сил в паралельну площину

результаті пара (\vec{F}, \vec{F}') замінилася такою ж парою (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) , але розміщеною в площині II.

Із доведеної теореми випливає, що дві пари сил, які мають однакові моменти і розміщені в паралельних площинах, еквівалентні.

1.7.4. Момент пари як вектор. Дія пари сил на тверде тіло буде визначена, якщо відомі: 1) величина моменту пари; 2) площина дії пари; 3) напрямок повороту в цій площині. При розгляді пар в просторі для характеристики кожної з них необхідно задавати всі ці три елементи. Їх можна визначити однозначно, якщо момент пари сил зобразити вектором \vec{M} , величина якого дорівнює Fd , напрямок перпендикулярний до площини дії пари і визначається за правилом гвинта (рис. 1.41).

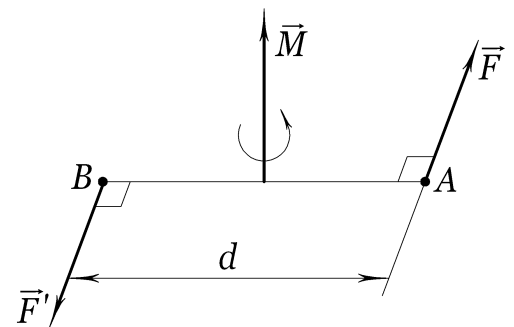


Рис. 1.41. Момент пари як вектор

Оскільки пару сил можна довільно переносити в площині дії або в паралельну до неї площину, то вектор \vec{M} може бути прикладений в довільній точці твердого тіла (такий вектор називається вільним).

1.7.5. Додавання пар в просторі. Умови рівноваги системи пар. Правило додавання пар, які діють на тверде тіло в різних площинах, визначається теоремою: довільна система пар, що діє на тверде тіло, еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар.

Доведемо теорему спочатку для системи двох пар (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) , (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) , моменти яких відповідно дорівнюють \vec{M}_1 і \vec{M}_2 . Розглянемо на лінії перетину площин дії пар відрізок AB . Користуючись

властивостями пар, зобразимо задані пари зведеними до відрізка AB (рис. 1.42). При цьому повинні виконуватися співвідношення

$$F_1 \cdot AB = M_1, \quad F_2 \cdot AB = M_2.$$

Додаючи сили, які прикладені в точках A, B , переконуємося, що пари (\vec{F}_1, \vec{F}_1') і (\vec{F}_2, \vec{F}_2') замінюються парою (\vec{R}, \vec{R}') . Визначимо момент \vec{M} цієї пари. Розглянемо рівність $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Помножимо її векторно зліва на вектор \vec{AB} і, врахувавши, що момент пари дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання іншої, на основі формули (1.32) одержимо

$$\vec{M} = [\vec{AB} \times \vec{R}] = [\vec{AB} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] = [\vec{AB} \times \vec{F}_1] + [\vec{AB} \times \vec{F}_2].$$

З іншого боку

$$[\vec{AB} \times \vec{F}_1] = \vec{M}_1; \quad [\vec{AB} \times \vec{F}_2] = \vec{M}_2.$$

Тоді

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (1.40)$$

Отже, момент рівнодійної пари зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \vec{M}_1 і \vec{M}_2 , як на сторонах.

Якщо на тверде тіло діє система пар з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ то послідовно застосовуючи формулу (1.40), отримаємо, що задана система пар еквівалентна одній парі з моментом

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n. \quad (1.41)$$

Це розв'язок першої задачі статки для системи пар. Використовуючи правило додавання вільних векторів, вектор \vec{M} можна знайти як замикальну сторону многокутника, побудованого на векторах $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ (моментного многокутника).

Одержані результати дозволяють сформулювати геометричні і алгебраїчні умови рівноваги системи пар, що діють на тверде тіло. Оскільки при рівновазі тіла повинно бути $\vec{M} = \vec{0}$, то моментний многокутник буде замкненим. Це геометрична умова рівноваги. Алгебраїчні умови рівноваги знайдемо, прийнявши до уваги, що $\vec{M} = \vec{0}$ тільки тоді, коли $M_x = 0; M_y = 0; M_z = 0$, або в розгорнутому вигляді

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0. \quad (1.42)$$

Рівності (1.42) визначають розв'язок другої задачі статки для системи пар і виражають відсутність обертань твердого тіла відносно координатних осей. Якщо всі пари розміщені в одній площині (або в паралельних площинах), то їх додавання зводиться до алгебраїчної операції (див.п.1.4.5).

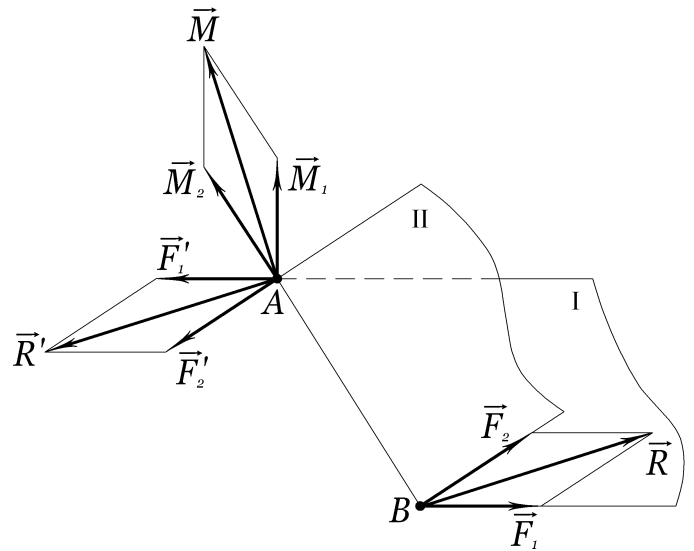


Рис. 1.42. Додавання пар в просторі

1.7.6 Зведення просторової системи сил до заданого центра. Застосуємо одержані вище результати до розв'язку першої задачі статки для довільної системи сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, що діє на тверде тіло. Оскільки теорема про паралельне перенесення сили (п.1.5) має місце для сил, довільно розміщених у просторі, то вибравши за центр зведення точку O , прикладемо до неї всі сили, додаючи при цьому відповідні пари. Тоді на тверде тіло (рис.1.43) буде діяти збіжна система сил $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$, прикладених в точці O , і система пар, моменти яких дорівнюють

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \quad \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \quad \dots \quad \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n). \quad (1.43)$$

Збіжна система сил замінюється однією силою \vec{R} , яка прикладена в точці O і визначається рівністю

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (1.44)$$

Система пар замінюється однією парою, момент якої згідно з (1.41), визначається за формулою

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n). \quad (1.45)$$

Як і у випадку плоскої системи сил, вектор \vec{R} називається головним вектором заданої системи сил, а вектор \vec{M}_O – головним моментом відносно точки O .

Таким чином, розв'язок першої задачі статки для довільної системи сил формулюється так: будь-яка система сил, що діє на тверде тіло, може бути зведена до однієї сили \vec{R} (головного вектора) і однієї пари з моментом \vec{M}_O (головного моменту). При цьому головний вектор не залежить від вибору центра зведення O .

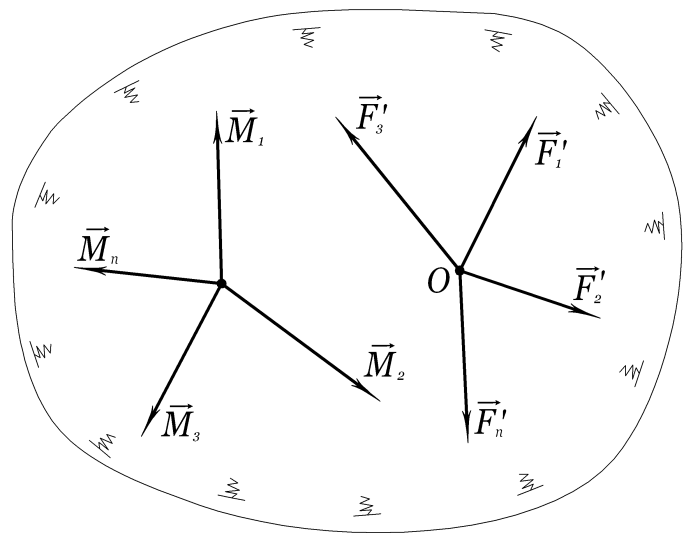


Рис. 1.43. Зведення просторової системи сил до заданого центра

Враховуючи формули (1.7) і (1.38), знаходимо вирази для проєкцій головного вектора \vec{R} і головного моменту \vec{M}_O

$$R_x = \sum F_{ix}; \quad R_y = \sum F_{iy}; \quad R_z = \sum F_{iz}; \quad (1.46)$$

$$M_{Ox} = \sum M_x(\vec{F}_i); \quad M_{Oy} = \sum M_y(\vec{F}_i); \quad M_{Oz} = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (1.47)$$

Розглянемо часткові випадки зведення просторової системи сил до найпростішого виду:

1) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$. Система сил зводиться до однієї пари, момент якої обчислюється за формулою (1.45), причому його величина не залежить від вибору центра зведення.

2) Якщо для даної системи сил $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$, то вона зводиться до рівнодійної \vec{R} , яка проходить через центр O . Її величина визначається за формулою (1.44).

3) $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, але $\vec{R} \perp \vec{M}_O$. У цьому випадку система сил зводиться до рівнодійної \vec{R}' , яка не проходить через центр O' . Дійсно, при $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ пара сил, що зображується вектором \vec{M}_O , і сила \vec{R} діють в одній площині (рис. 1.44). Сили пари виберемо так, щоб одна з них дорівнювала $-\vec{R}$, а положення іншої визначимо із співвідношення $R \cdot OO' = M_O$. Відкинувши зрівноважені сили \vec{R} і $-\vec{R}$, одержимо рівнодійну \vec{R}' , величина якої визначається за формулою (1.44).

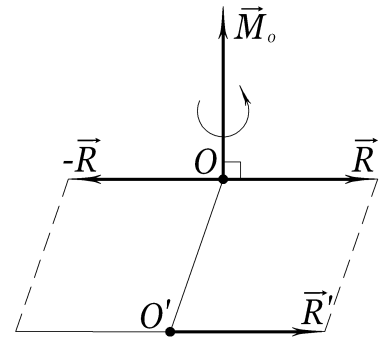


Рис. 1.44. Зведення просторової системи сил при $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$

4) Нехай для заданої системи $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, причому вектор $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$ (рис. 1.45а). Це означає, що система сил зводиться до сили \vec{R} і пари (\vec{P}, \vec{P}') , яка діє в площині, перпендикулярній до сили (рис. 1.45б). Така сукупність сили і пари називається динамою, а пряма, вздовж якої діє вектор \vec{R} , віссю динами. Далі спрощення цієї системи неможливе, бо, при перенесенні пари сил, система залишається незмінною, а при перенесенні сили з центра O в точку C до моменту \vec{M}_O буде додаватися момент $\vec{M}_C(\vec{R})$, який перпендикулярний до вектора \vec{R} , а отже, і до \vec{M}_O . В результаті момент $\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{M}_C(\vec{R})$ буде збільшуватися. Таким чином, задану систему не можна звести до однієї сили або до однієї пари. Вільне тіло під дією динами буде здійснювати тільки складний (гвинтовий) рух.

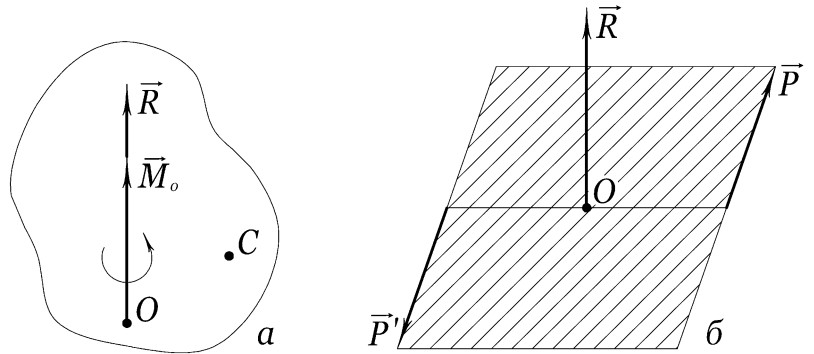


Рис. 1.45. Зведення просторової системи сил до динами

5) Якщо для заданої системи $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, і при цьому вектори \vec{R} і \vec{M}_O не перпендикулярні і не паралельні, то така система зводиться до динами, вісь якої не проходить через центр O . Дійсно, розклавши вектор \vec{M}_O на складові $\vec{M}_1 \parallel \vec{R}$ і $\vec{M}_2 \perp \vec{R}$, ми знаходимо систему (\vec{R}, \vec{M}_2) , яку згідно з випадком «3» можна замінити силою \vec{R}' , прикладеною в точці O' . Ця сила і пара з моментом \vec{M}_1 визначають динаму, вісь якої паралельна силі \vec{R} і проходить через точку O' (рис. 1.46).

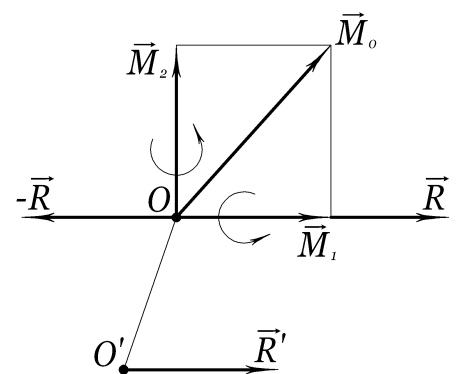


Рис. 1.46. Зведення просторової системи сил при $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$

Таким чином, ми прийшли до такого висновку: якщо просторова система сил не перебуває в рівновазі, то вона може бути зведена до однієї сили (рівнодійної), або однієї пари, або динами.

1.7.7. Умови рівноваги просторової системи сил. Рівновага системи сил буде забезпечена, якщо головний вектор \vec{R} і головний момент \vec{M}_O дорівнюють нульовому вектору. Так як останні визначаються побудовою силового і моментного многокутників, то геометричні умови рівноваги системи сил можна сформулювати так: для того, щоб просторова система сил перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб силовий і моментний многокутники були замкнені. Алгебраїчні умови рівноваги одержимо, проєктуючи рівності (1.44) і (1.45) при $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$, на координатні осі

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \quad (1.48)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.49)$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на координатні осі і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

Рівності (1.48), (1.49) визначають розв'язок другої задачі статики для просторової системи сил. При цьому рівності (1.48) забезпечують відсутність переміщень твердого тіла вздовж координатних осей, а (1.49) – відсутність обертань навколо цих осей.

Із умов рівноваги (1.48), (1.49) можна отримати відомі умови рівноваги для збіжної або плоскої системи сил. Для прикладу розглянемо випадок системи паралельних сил, що діють в напрямку осі z . Тоді проєкції цих сил на осі x і y , а також їх моменти відносно осі z тотожно дорівнюватимуть нулю і умови рівноваги (1.48), (1.49) приймуть вид

$$\sum F_{iz} = 0; \quad \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.50)$$

1.7.8. Теорема Варіньона. Нехай на тверде тіло діє система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.47), яка зводиться до рівнодійної \vec{R} , що проходить через точку O і визначається рівністю

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (1.51)$$

Помножимо (1.51) векторно зліва на вектор $\vec{r} = \vec{O_1O}$

$$[\vec{r}\vec{R}] = [\vec{r}\vec{F}_1] + [\vec{r}\vec{F}_2] + \dots + [\vec{r}\vec{F}_n].$$

Враховуючи (1.32), з попередньої рівності одержимо

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_1) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_n). \quad (1.52)$$

Ми довели теорему Варіньона: якщо система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якої точки O_1 дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно цієї ж точки.

Проектуючи рівність (1.52) на координатні осі, ми отримаємо відповідні теореми про момент рівнодійної відносно координатних осей.

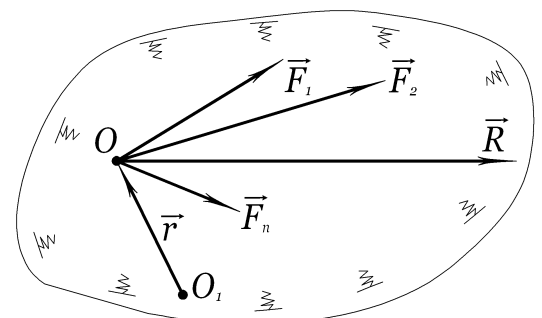


Рис. 1.47. Теорема Варіньона

Приклад 4. Однорідна прямокутна плита вагою $P = 300\text{ Н}$ утримується у горизонтальному положенні сферичним шарніром A , петлею D і невагомою вірвовкою CE довжиною 1 м (рис. 1.48). $BC = 30\text{ см}$, $CD = 40\text{ см}$. Визначити реакції в'язей.

Розв'язування. Відкинемо в'язі A, D і вірвовку CE , змінивши їх дію реакціями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_D, \vec{Z}_D, \vec{T}$.

Запишемо умови рівноваги просторової системи сил

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= X_A - T \cos \alpha \sin \beta = 0; \\ \sum F_{iy} &= Y_A + Y_D - T \cos \alpha \cos \beta = 0; \\ \sum F_{iz} &= Z_A + Z_D + T \sin \alpha - P = 0; \\ \sum M_x(\vec{F}_i) &= \left(T \sin \alpha - \frac{P}{2} \right) DC = 0; \\ \sum M_y(\vec{F}_i) &= \left(\frac{P}{2} - Z_D - T \right) AD = 0; \\ \sum M_z(\vec{F}_i) &= Y_D AD = 0. \end{aligned}$$

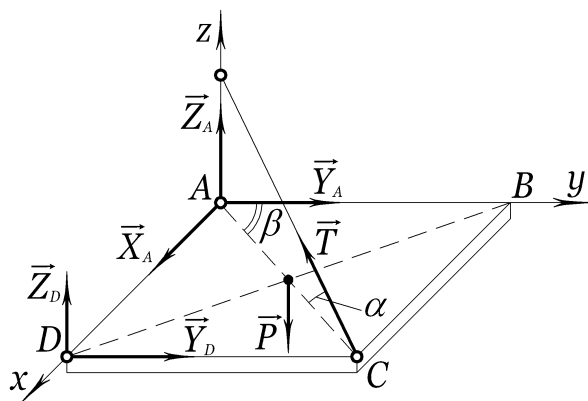


Рис. 1.48. До розв'язування прикладу 4

Визначаємо величини $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \beta$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= AB / AC = 0,8; & \sin \beta &= CD / AC = 0,6; \\ \cos \alpha &= AC / CE = 0,5; & \sin \alpha &= AE / CE = \sqrt{3} / 2; \end{aligned}$$

Підставивши одержані значення в умови рівноваги, знаходимо

$$Y_D = Z_D = 0; \quad T = \frac{P}{2 \sin \alpha} = 100\sqrt{3}\text{ Н};$$

$$X_A = T \cos \alpha \sin \beta = 30\sqrt{3}\text{ Н}; \quad Y_A = T \cos \alpha \cos \beta = 40\sqrt{3}\text{ Н}; \quad Z_A = P - T \sin \alpha = 150\text{ Н}.$$

Оскільки всі результати додатні, то напрямки реакції на рис. 1.48 вказані правильно.

1.8. Центр системи паралельних сил, центр ваги твердого тіла. Геометричні характеристики плоских фігур

1.8.1 Центр системи паралельних сил. Розглянемо систему паралельних сил спеціального виду, які мають один напрямок і фіксовані точки прикладання. Розв'яжемо першу задачу статки для такої системи сил.

Нехай на тверде тіло діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, прикладені відповідно в точках A_1, A_2, A_3 і напрямлені в один бік (рис. 1.49).

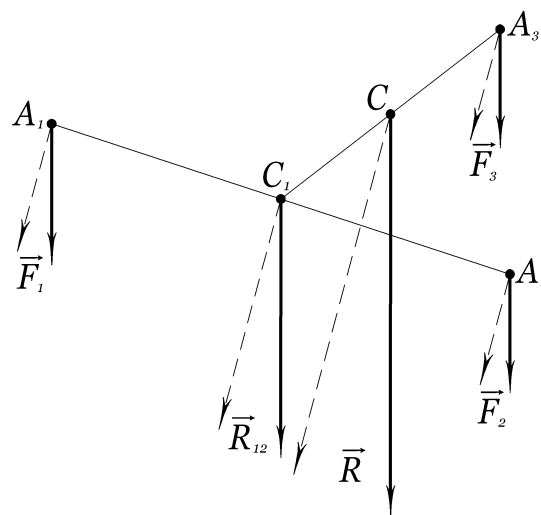


Рис. 1.49. Центр системи паралельних сил

Рівнодійна \vec{R}_{12} сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 має той же напрямок, що й сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 . Її величина дорівнює

$$R_{12} = F_1 + F_2, \text{ а точка прикладання } C_1 \text{ належить відрізьку } A_1A_2 \text{ і визначається із співвідношення}$$

$$A_1C_1 \cdot F_1 = A_2C_1 \cdot F_2. \quad (1.53)$$

Аналогічно знаходимо рівнодійну \vec{R} сил \vec{F}_3 і \vec{R}_{12} . Її величина дорівнює сумі величин сил \vec{R}_{12} і \vec{F}_3 : ($R = F_1 + F_2 + F_3$), а точка прикладання C належить відрізьку C_1A_3 і задовольняє умову

$$A_3C \cdot F_3 = C_1C \cdot R_{12} \quad (1.54)$$

Напрямок сили \vec{R} збігається з напрямком заданих сил.

Аналогічно можна знайти величину і точку прикладання рівнодійної довільного числа паралельних сил.

Штрихові лінії на рис. 1.49 показують, що положення точки прикладання рівнодійної не зміниться, якщо всі сили повернути відносно точок прикладання, залишаючи їх при цьому паралельними.

Точка C , в якій прикладена рівнодійна системи паралельних сил, називається її центром.

Визначимо координати центра системи паралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, прикладених в точках $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. Координати точки C позначимо через x_c, y_c, z_c . Повернемо сили так, щоб вони стали паралельними осі z (рис. 1.50) і застосуємо до даної системи сил теорему Варіньона про момент рівнодійної відносно осей x, y

$$R_{y_c} = \sum F_i y_i; \quad R_{x_c} = \sum F_i x_i. \quad (1.55)$$

Звідки

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}. \quad (1.56)$$

Якщо повернути сили так, щоб вони стали паралельними осі x , то на підставі теореми Варіньона про момент рівнодійної відносно осі y дістанемо

$$z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R} = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (1.57)$$

Формули (1.56)-(1.57) дозволяють визначати координати центра системи паралельних сил за заданими координатами точок їх прикладання.

1.8.2. Центр ваги твердого тіла. Будь-яке тверде тіло можна розглядати як сукупність великого числа маленьких частинок. На кожную з них діє напрямлена вертикально вниз (до центра Землі) сила тяжіння. Якщо розміри тіла малі в порівнянні з радіусом Землі, то сили тяжіння, що діють на частинки, можна вважати паралельними. Причому ці сили зберігають свій напрямок при довільних поворотах тіла (рис. 1.51).

Рівнодійна сил тяжіння всіх частин тіла дорівнює їх сумі $P = \sum P_i$ і називається вагою тіла, а точка C її прикладання – центром ваги цього тіла. На підставі формул (1.56), (1.57) координати центра ваги у вибраній системі координат $Oxuz$ визначаються співвідношенням

$$x_c = \sum P_i x_i / P; \quad y_c = \sum P_i y_i / P; \quad z_c = \sum P_i z_i / P, \quad (1.58)$$

де x_i, y_i, z_i – координати точки прикладання сили тяжіння P_i . Відзначимо, що згідно з означенням, центр ваги – геометрична точка, в окремих випадках вона може бути розміщена за межами тіла.

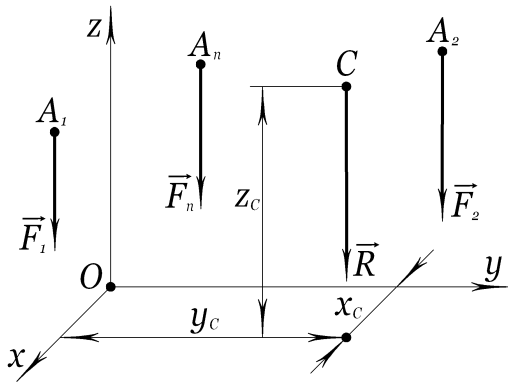


Рис. 1.50. Визначення координат центра паралельних сил

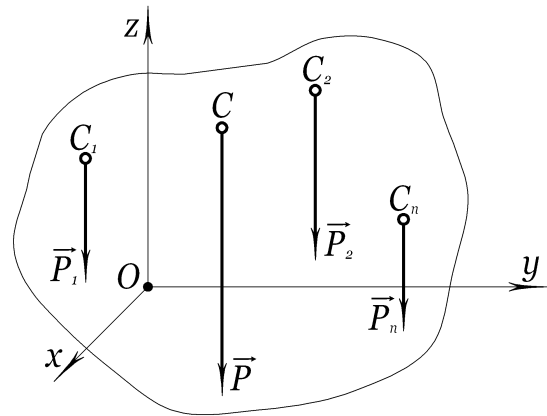


Рис. 1.51. Центр ваги твердого тіла

1.8.3. Координати центрів ваги однорідних тіл. Для однорідного тіла вага кожної його частини пропорційна об'єму тіла, тобто $P_i = \gamma V_i$, де γ – вага одиниці об'єму.

Підставивши значення P_i і P у формули (1.58), знаходимо

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}. \quad (1.59)$$

Точку $C(x_c, y_c, z_c)$, координати якої визначаються формулами (1.59), називають центром ваги тіла об'єму V .

Якщо тверде тіло являє собою однорідну тонку пластинку сталої товщини, то врахувавши, що $\gamma S = P$, $\gamma S_i = P_i$, із формул (1.58) знаходимо

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \quad (1.60)$$

Тут γ – вага одиниці площі пластини, S – площа всієї пластини, а S_i – площі її частин. Величини x_c, y_c називаються координатами центра ваги плоскої фігури.

Аналогічно отримуємо формули для координат центра ваги лінії

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L}. \quad (1.61)$$

де L – довжина всієї лінії, l_i – довжини її частин.

Як видно із формул (1.59) – (1.61), координати центра ваги однорідного тіла не залежать від його фізичних характеристик, а залежать лише від геометричних параметрів.

Розглянемо основні методи визначення координат центрів ваги плоских фігур:

1) Симетрія. Якщо плоска фігура має вісь або центр геометричної симетрії, то її центр ваги розміщений відповідно на осі або в центрі симетрії. Із властивостей симетричних фігур випливає, що

центр ваги круга, кільця, кола, паралелограма, прямокутника, квадрата розміщений в їх геометричному центрі.

2) Розбиття. Якщо тіло можна розбити на скінчене число фігур, для кожної з яких положення центра ваги відомо, то координати центра ваги складеної фігури обчислюються за формулами (1.60). Якщо при цьому тіло має вирізи, то площа вирізаної частини приймається від'ємною.

На завершення відзначимо, що центр ваги трикутника розміщений в точці перетину його медіан, а координати центрів ваги інших однорідних фігур можна знайти в технічних довідниках.

Задача 1.1. Визначити положення центра ваги круглої пластинки радіусом r з вирізом радіусом $r/2$ (рис. 1.52).

Розв'язування. Оскільки задана фігура має вісь симетрії, то центр ваги розміщений на осі x ($y_c = 0$). Для визначення координати x_c уявимо фігуру як суцільний круг радіусом r додатної площі і круг радіусом $r/2$ від'ємної площі. При цьому

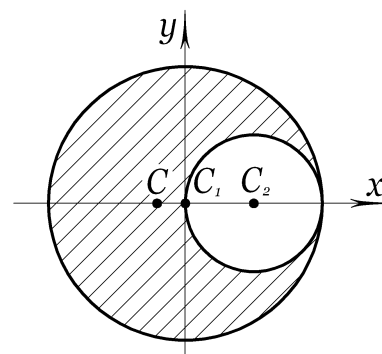


Рис. 1.51. До розв'язку задачі 1.1.

$$x_1 = 0; S_1 = \pi r^2; \quad x_2 = 0,5r; \quad S_2 = -\pi r^2/2.$$

Підставивши здобуті значення у формули (1.60), знаходимо

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = -\frac{r}{6}; \quad y_c = 0.$$

Точка C розміщена лівіше від точки O .

1.8.4. Геометричні характеристики плоских фігур. Розглянемо плоску фігуру з площею S , яка віднесена до прямокутної декартової системи координат Oxy (рис. 1.53).

Статичними моментами площі фігури відносно відповідних координатних осей називаються інтеграли виду

$$S_x = \iint_{(S)} y dS; \quad S_y = \iint_{(S)} x dS, \quad (1.62)$$

де x, y – відстані від центра ваги елементарної площадки dS , до осей y і x відповідно. Розмірність статичного моменту m^3 .

Оскільки в більшості інженерних задач інтегрування можна замінити сумуванням шляхом розбиття фігури на частинки, для яких відомі площі і положення центрів ваги, то формули (1.62) можна подати у вигляді

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_i x_i. \quad (1.63)$$

Тут n – кількість частин фігури; S_i – площі їх частин; x_i, y_i – координати центрів ваги частин фігури.

Урахувавши при цьому формули (1.60), знаходимо, що положення центра ваги плоскої фігури відносно вибраної системи координат, визначається співвідношенням

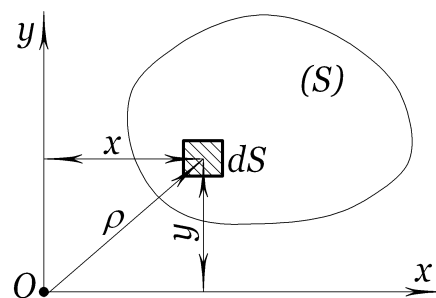


Рис. 1.53. До визначення геометричних характеристик плоских фігур

$$x_c = S_y/S; \quad y_c = S_x/S. \quad (1.64)$$

Залежності (1.64) показують, що статичні моменти плоскої фігури відносно координатних осей, які проходять через центр її ваги, дорівнюють нулю.

Осьовими моментами інерції I_x, I_y фігури відносно осей x, y (рис. 1.53) називаються інтеграли виду

$$I_x = \iint_{(S)} y^2 dS; \quad I_y = \iint_{(S)} x^2 dS. \quad (1.65)$$

Полярним моментом інерції I_p фігури (рис. 1.53) називається інтеграл виду

$$I_p = \iint_{(S)} \rho^2 dS, \quad (1.66)$$

де ρ – відстань від центра елементарної площадки dS до початку системи координат (полюса).

Розмірність осьових і полярного моментів інерції фігури – м⁴. Їх величина завжди додатна і не може дорівнювати нулю.

Урахувавши співвідношення $x^2 + y^2 = \rho^2$, із (1.65), (1.66), одержимо залежність

$$I_p = I_x + I_y, \quad (1.67)$$

яка показує, що полярний момент інерції плоскої фігури дорівнює сумі осьових.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури (рис. 1.53) відносно осей x, y називається інтеграл виду

$$I_{xy} = \iint_{(S)} xy dS. \quad (1.68)$$

Його розмірність така ж, як для осьових і полярного моментів, але величина може бути додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Зокрема, якщо фігура симетрична хоча б відносно однієї з осей x, y , то відцентровий момент дорівнює нулю.

Координатні осі, що проходять через центр ваги фігури, і відцентровий момент відносно яких дорівнює нулю, називаються її головними центральними осями.

Радіусом інерції i_x фігури відносно осі x називається величина, яка дорівнює $i_x = \sqrt{I_x/S}$, звідки

$$I_x = i_x^2 S. \quad (1.69)$$

Отже, момент інерції плоскої фігури відносно будь-якої осі дорівнює добутку її площі на квадрат радіуса інерції відносно цієї ж осі. Розмірність радіуса інерції – м. Аналогічно визначаються полярний і відцентровий радіуси інерції.

Осьовим моментом опору фігури називається частка від ділення осьового моменту інерції на відстань від даної осі до найбільш віддаленої від неї точки фігури

$$W_x = I_x/h_x; \quad W_y = I_y/h_y, \quad (1.70)$$

де h_x, h_y – найбільші відстані від осей x, y відповідно до точок фігури. Розмірність цієї величини – м³.

Величина $W_p = I_p/h_p$ називається полярним моментом опору (h_p – найбільша відстань від точки фігури до полюса).

Для ілюстрації сказаного вище розглянемо приклади визначення геометричних характеристик плоских фігур, які найчастіше зустрічаються на практиці.

Прямокутний переріз (рис. 1.54а). Вважаємо, що координатні осі x, y є головними і центральними ($I_{xy} = 0$). Виділимо елементарну площадку $dS = bdy$ у вигляді смужки, паралельної осі x . Тоді на основі формул (1.65) дістанемо

$$I_x = \iint_{(S)} y^2 dS = bh^3/12.$$

Аналогічно обчислюємо $I_y = bh^3/12$. Полярний момент інерції I_p знаходимо за формулою (1.67).

$$I_p = I_x + I_y = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2).$$

Підставляючи в (1.70) $h_x = h/2$; $h_y = b/2$, одержимо вирази для осьових моментів опору прямокутника

$$W_x = bh^2/6; \quad W_y = bh^2/6.$$

Знаючи момент інерції, за формулами (1.69) можна визначити відповідні радіуси інерції

$$i_x = \sqrt{I_x/S} = b\sqrt{3}/6; \quad i_y = \sqrt{I_y/S} = h\sqrt{3}/6.$$

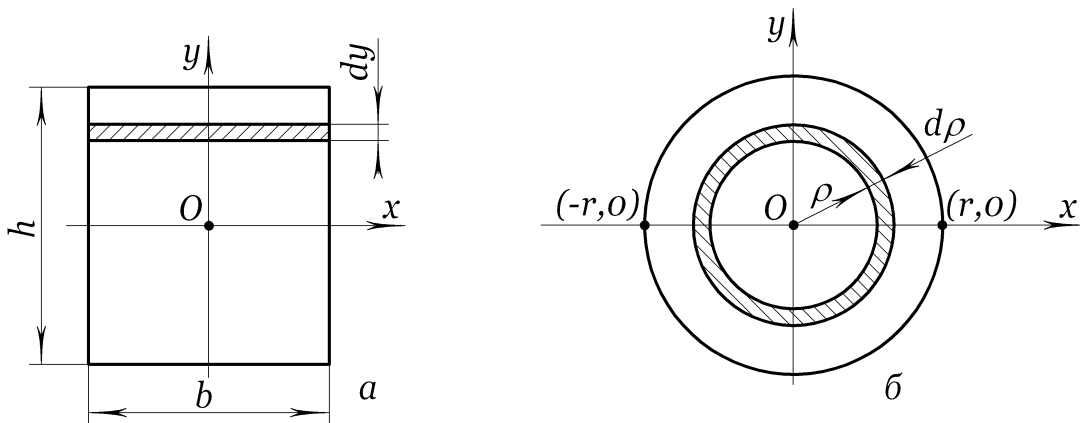


Рис. 1.54. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

Круглий переріз (рис. 1.54б). Нехай задана фігура віднесена до головних центральних осей x, y . Для зручності елемент площі dS вибрано у вигляді кільця змінного радіуса ρ завтовшки $d\rho$ (площа цього кільця заштрихована).

Полярний момент інерції круга, на підставі формули (1.66), дорівнює

$$I_p = \iint_{(S)} \rho^2 dS = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4.$$

Осьові моменти інерції однакові, тому, на підставі (1.67), одержимо

$$I_x = I_y = I_p / 6 = \pi d^4 / 64.$$

Полярний момент опору обчислюємо за формулою

$$W_p = 2I_p / d = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3.$$

Зауважимо, що при заміні системи координат всі геометричні характеристики фігури зміняться.

Геометричні характеристики інших плоских фігур наводяться у відповідних довідниках.

РОЗДІЛ 2. СТАТИКА ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

2.1. Основні поняття опору матеріалів

Усі елементи машин або споруд повинні працювати без небезпеки руйнування або значної зміни геометричних параметрів під дією зовнішніх сил. Ці сили прикладені безпосередньо до елемента або передаються через зв'язані з ним сусідні елементи. Для безпечної роботи кожний елемент повинен бути такого розміру і форми, щоб витримував діючі на нього навантаження, не руйнуючись, тобто був міцним; щоб при дії робочих навантажень не давав великих і недопустимих змін форми і розмірів, тобто був жорстким; щоб зберігав надану йому початкову форму (не випучувався) – був стійким.

Розділ механіки, який вивчає загальноінженерні методи розрахунку елементів споруд і машин на міцність, жорсткість та стійкість, має назву опір матеріалів. Опір матеріалів – наука, в якій на підставі експериментальних даних про властивості матеріалів, з одного боку, та законів статички АТТ і вищої математики – з іншого, розглядаються загальні методи розрахунку раціональних розмірів та форм елементів інженерних конструкцій з урахуванням величини і характеру діючих на них навантажень, що відповідають наведеним вище вимогам.

Усі реальні елементи конструкцій і машин під дією на них зовнішніх сил змінюють свою форму і розміри – деформуються. Дія зовнішніх сил на деформіває тіло порушує природні відстані між молекулами, за рахунок чого змінюється міжмолекулярна взаємодія і всередині тіла виникають додаткові сили, які протидіють деформації і намагаються повернути частинки тіла в початкове положення. Ці внутрішні сили називаються силами пружності або силами опору матеріалу (звідки походить назва відповідної технічної дисципліни).

Властивість усунення деформацій після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю матеріалу. Якщо тверде тіло після зняття зовнішнього навантаження повністю відновлює свою форму і розміри, то його називають абсолютно пружним, а відповідні деформації, що зникають після зняття навантаження – пружними деформаціями. Деформація, яка частково залишається після зняття навантаження, називається пластичною.

На перший погляд може здатися, що забезпечення міцності того чи іншого елемента може бути реалізоване за рахунок механічного збільшення його розмірів. В дійсності, збільшення розмірів елементів конструкції, а відповідно і збільшення її ваги може бути причиною руйнування споруди в процесі її побудови. Збільшення ваги рухомих деталей механізмів і машин приводить до небажаного збільшення розмірів елементів конструкцій транспортних машин (літаків, суден, ракет). Завищення розмірів їх ланок приводить до перевитрат матеріалів і пального. Тому, прагнучи забезпечити необхідну міцність і надійність машин та споруд, слід виготовляти їх по можливості легкими і економічними. Ці завдання розв'язують на підставі теорії, що розглядається в курсі опору матеріалів.

Як і курс статички АТТ, опір матеріалів будуватимемо на аксіоматичній основі. Це означає, що в першу чергу потрібно виділити перелік основних об'єктів розрахунку і гіпотез (аксіом), в яких будуть зафіксовані суттєві властивості матеріалів, з яких виготовлені основні об'єкти, і допущення про характер їх деформації.

Сукупність елементів машин і споруд, які зустрічаються на практиці, може бути зведена до кількох узагальнених типів:

1. Стержні або бруси (рис. 2.1) являють собою тверді деформівні тіла призматичної форми, у яких один із розмірів (довжина) значно (хоча б на один порядок) перевищує два інші (поперечні) розміри. Якщо один з поперечних розмірів стержня набагато перевищує інший, то такий стержень називається тонкостінним. Тонкостінні стержні – двотаври, швелери, кутники широко використовуються в будівництві, а спеціальні прокатні профілі – в судно-автіабудуванні.

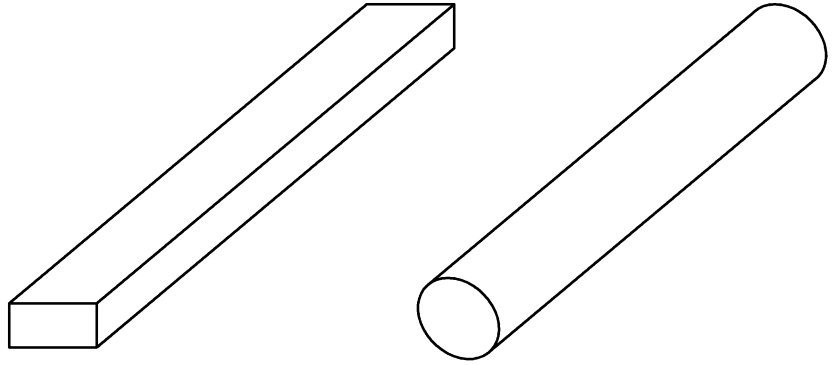


Рис. 2.1. Стержні або бруси

2. Пластина являє собою тіло призматичної або циліндричної форми (рис. 2.2), у якого один з характерних розмірів значно менший від двох інших.

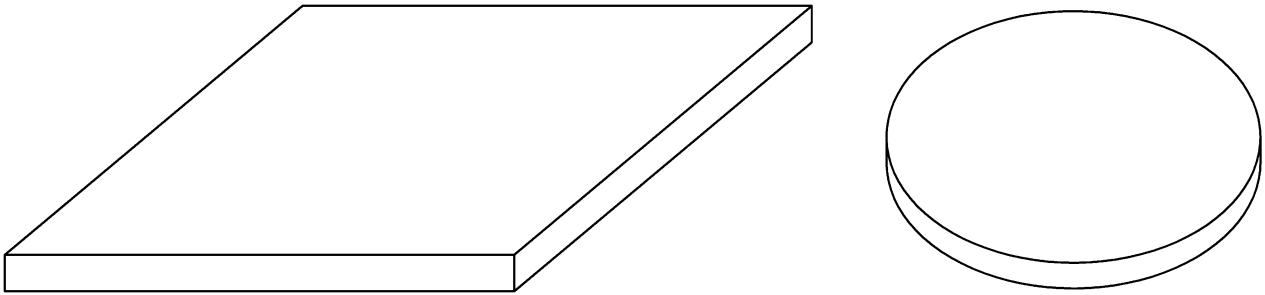


Рис. 2.2. Пластини

До пластин можуть бути віднесені залізобетонні плити міжповерхових перекриттів будівель, фундаментні плити, диски турбомашин, плоскі днища резервуарів та інші.

3. Оболонками будемо називати пластини з викривленими серединними поверхнями (рис. 2.3). До оболонок відносять резервуари циліндричної і сферичної форм, куполи будівель.

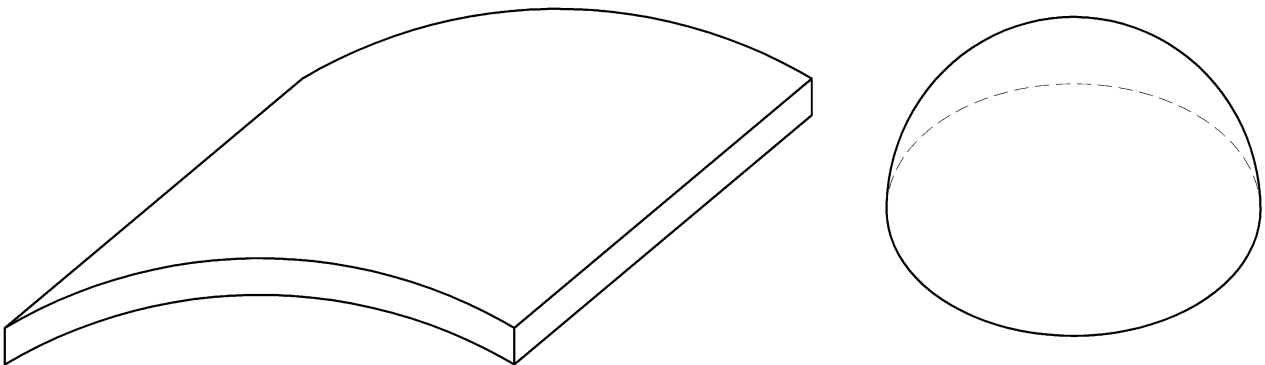


Рис. 2.3. Оболонки

В скороченому курсі опору матеріалів основним об'єктом розрахунку є стержень. Суттєвої різниці між стержнем і брусом немає. Стержень відрізняється меншими поперечними розмірами.

Розглянемо уявний розріз стержня деякою площиною. Одержана при цьому плоска геометрична фігура називається перерізом стержня. Множина центрів ваги всеможливих перерізів стержня називається його віссю. Оскільки центр ваги плоскої фігури є геометрична точка, то вісь стержня може

бути матеріальною, якщо проходить у межах матеріалу стержня (вісь суцільного циліндричного стержня) і нематеріальною, якщо проходить поза матеріалом (вісь трубчастого циліндричного стержня).

Поперечним або нормальним перерізом стержня називається переріз, перпендикулярний до осі стержня. Всі інші перерізи називаються похилими або косими.

За виглядом осі стержні поділяються на: прямолінійні і криволінійні, замкнені і незамкнені; за формою поперечного перерізу – на товстостінні і тонкостінні. На рис. 2.4. круглий і прямокутний перерізи – товстостінні стержні, всі інші – тонкостінні.

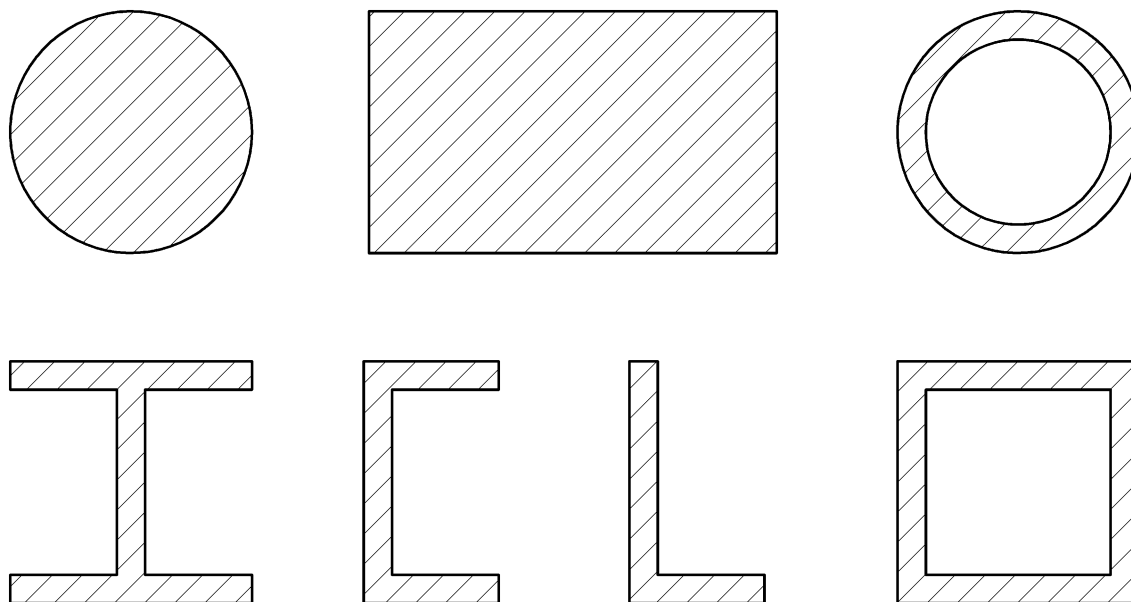


Рис. 2.4. Поперечні перерізи стержнів

Усі реальні тіла під дією зовнішніх сил здатні деформуватися. Величина деформації оцінюється значенням зміни геометричних розмірів по відношенню до недеформованого стану тіла. На практиці допускаються малі деформації деталей машин і споруд, а також незначна зміна початкової форми.

У курсі опору матеріалів розрізняють такі чотири основні види простих деформацій: розтяг або стиск, зсув (зріз), кручення і згин.

Деформація розтягу (стиску) характеризується зміною початкової довжини стержня (рис. 2.5) на величину Δl внаслідок дії на стержень зрівноваженої системи двох осьових сил P . При $\Delta l > 0$ маємо деформацію розтягу, при $\Delta l < 0$ – деформацію стиску. Величина Δl називається абсолютним видовженням (вкороченням), а відношення $\varepsilon = \Delta l/l$ – відносним видовженням (вкороченням) стержня. Величина ε безрозмірна і характеризує абсолютне видовження стержня одиничної довжини при заданому навантаженні.

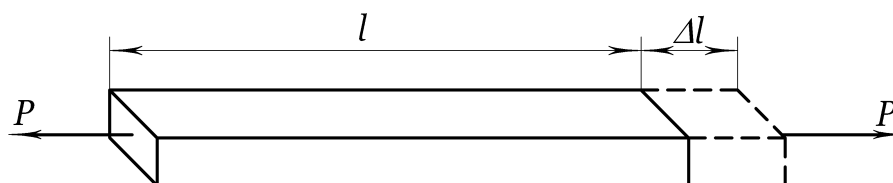


Рис. 2.5. Деформація розтягу стержня

На розтяг або стиск працюють такі елементи конструкції, як колони, канати, стержні ферм і інші.

Якщо зовнішні сили зміщують два близькі плоскі паралельні перерізи стержня один відносно іншого, то така деформація називається зсувом або зрізом (рис. 2.6). Прикладом деталі, що працює в

умовах зсуву, є заклепка або болт.

Деформація зсуву характеризується абсолютним зсувом ΔS . Величина, яка дорівнює відношенню абсолютного зсуву до відстані між площинами, що зсуваються, називається відносним зсувом

$$\Delta S/a = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$$

(тут враховано, що при малих деформаціях кут зсуву γ малий).

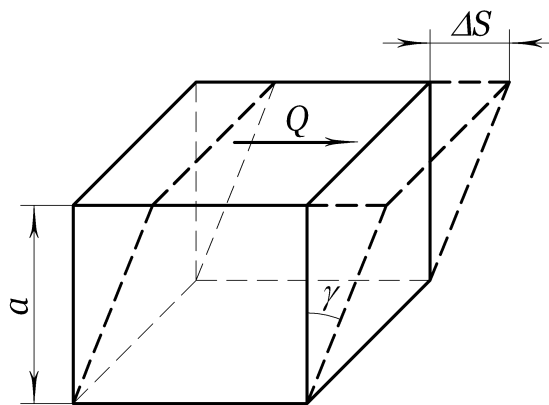


Рис. 2.6. Деформація зсуву

Деформація кручення викликається зрівноваженою системою пар, що діють в площинах, перпендикулярних осі стержня. Прикладом стержнів, що працюють на кручення, є вали машин.

Деформація кручення вала довжиною l характеризується взаємним поворотом кінцевих перерізів на кут φ , який називається повним кутом закручування стержня (рис. 2.7).

Відносним або погонним кутом закручування називається величина $\theta = \varphi/l$.

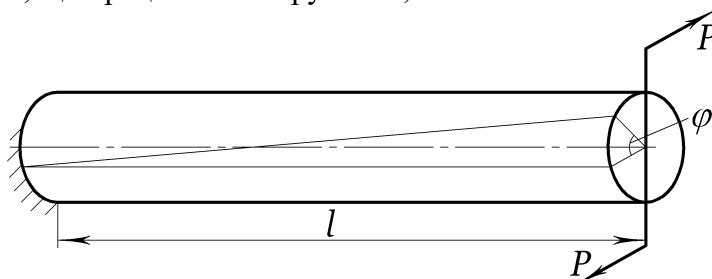


Рис. 2.7. Деформація кручення

Деформація згину являє собою викривлення осі стержня під дією зовнішнього навантаження у поздовжніх площинах перерізу стержня. Згин характеризується лінійними зміщеннями точок осі стержня (прогинами y) і кутами повороту перерізів φ відносно своїх початкових положень (рис. 2.8).

Стержні, що перебувають в умовах згину, називають балками. Це можуть бути балки міжповерхових перекриттів і мостів, зубці шестерень, листові ресори і інші.

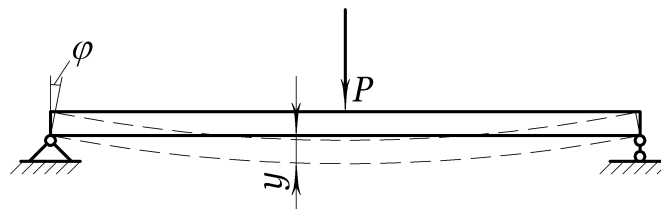


Рис. 2.8. Деформація згину

Крім вищеназваних простих видів деформацій,

можливі складні види, коли зовнішніми навантаженнями викликається поява одночасно кількох різних видів простих деформацій (наприклад, згин з крученням, згин з розтягом або стиском).

На відміну від абсолютно твердих тіл, рівновага яких розглядається в статичі, опір матеріалів вивчає реальні деформівні тіла. Тому між цими двома дисциплінами існує суттєва різниця. В опорі матеріалів не можуть бути використані методи перетворення системи сил, що діє на стержень.

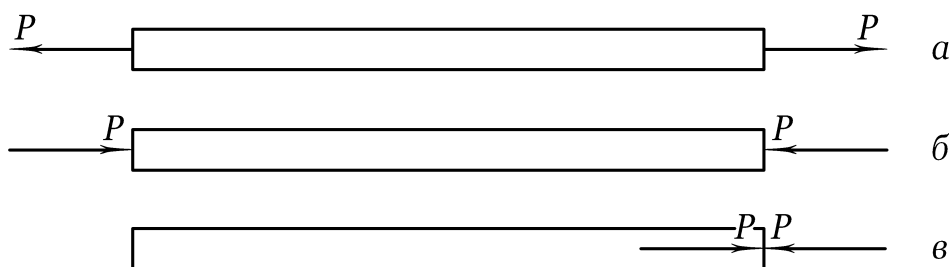


Рис. 2.9. Схеми навантаження стержнів на деформацію розтягу-стиску

Розглянемо деякі схеми навантаження стержнів. Так, під час дії на стержень системи двох зрівноважених сил (рис. 2.9) стержень *a*) буде розтягуватися, стержень *б*) – стискуватися, стержень *в*) –

не деформується. З точки зору статички твердого тіла всі ці випадки рівноцінні. Наведений приклад показує, що в опорі матеріалів силу не можна переносити вздовж лінії її дії.

При згині балки за схемами, показаними на рис. 2.10, ми одержимо різні деформації, хоча обидва випадки з точки зору статички АТТ еквівалентні. Це означає, що в опорі матеріалів недопустима заміна однієї системи сил іншою еквівалентною.

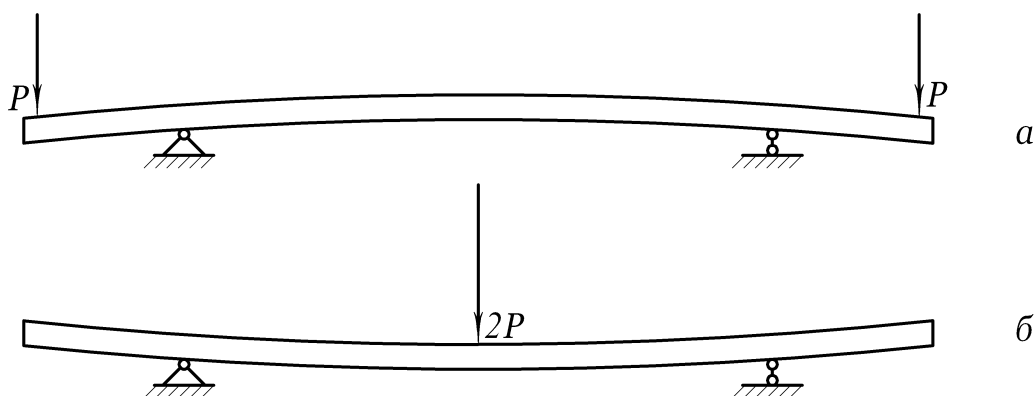


Рис. 2.10. Схеми навантаження стержнів на деформацію згину

На рис. 2.11 наведено приклади, які ілюструють неможливість в опорі матеріалів перенесення пари сил в площині її дії.

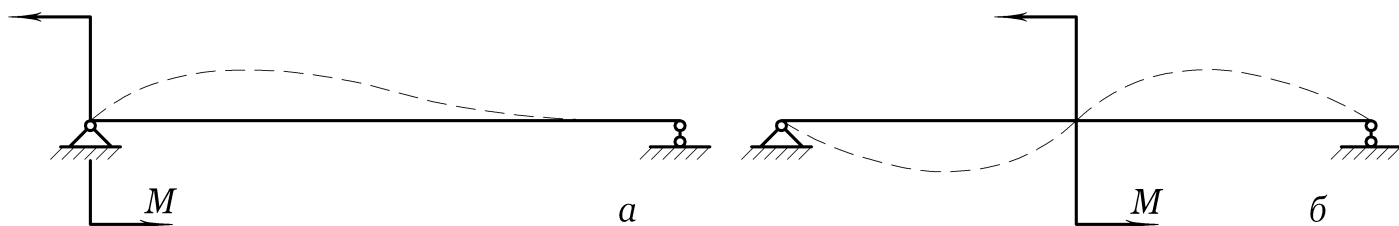


Рис. 2.11. Ілюстрація неможливості перенесення пари сил в площині її дії

Для спрощення розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість доводиться використовувати певні допущення і гіпотези про властивості матеріалів і характер деформацій. Це дозволяє при нехтуванні факторами, що мають другорядне значення, у конкретних випадках підібрати прості розрахункові схеми і при застосуванні відносно простих математичних методів отримати необхідні розрахункові формули. Основні допущення про властивості матеріалу такі:

Гіпотеза 1. Вважаємо, що матеріалу стержня властива суцільність. Це означає, що весь об'єм стержня заповнений матеріалом (відсутність порожнин).

Гіпотеза 2. Матеріал стержня вважаємо однорідним (довільні як завгодно малі його частини мають однакові властивості) і ізотропним (фізико-механічні властивості матеріалу однакові в усіх напрямках).

До ізотропних матеріалів можна віднести метали, бетон, окремі види пластмас. Якщо в різних напрямках властивості матеріалу неоднакові, то він називається анізотропним (деревина, скло, пластики).

Гіпотеза 3. Вважаємо, що матеріалу в певних межах навантаження властива абсолютна пружність, тобто після зняття зовнішнього навантаження повністю зникають відповідні деформації.

Нижче наведені основні допущення про характер деформацій:

Гіпотеза 4. Деформації, які виникають в пружних тілах під дією зовнішніх сил, дуже малі в порівнянні з початковими розмірами тіла (велика відносна жорсткість матеріалу).

Це допущення дозволяє в багатьох випадках не враховувати зміну розмірів тіла при деформації і зв'язану з цим зміну в розміщенні сил.

Гіпотеза 5. Припускається існування лінійної залежності між діючими на пружне тіло навантаженнями і деформаціям, які виникають при цьому (закон Гука).

Твердження 4 і 5 справедливі в певних межах навантаження.

Гіпотеза 6. Плоскі перерізи стержня, перпендикулярні до його осі, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі деформованого стержня. Це допущення в опорі матеріалів називається гіпотезою плоских перерізів.

Гіпотеза 7. Внаслідок малості переміщень, які виникають в стержнях, лінійній залежності деформацій від зовнішніх навантажень, можна припустити, що зовнішні сили діють незалежно одна від одної. Це твердження відоме під назвою принципу незалежності дії сил. Суть його полягає в наступному: ефект дії на стержень системи сил дорівнює сумі ефектів від дії кожної сили окремо.

Інші допущення і гіпотези стосовно до окремих видів деформації будуть наведені при вивченні відповідних розділів курсу.

Зупинимося коротко на класифікації зовнішніх сил. Зовнішні сили бувають об'ємні – прикладені до всіх внутрішніх точок тіла (наприклад, власна вага, сили інерції), і поверхневі – прикладені до поверхні тіла або його частини.

Розрізняють чотири типи поверхневих сил:

1) Сили, неперервно розподілені по куску поверхні (рис 2.12). Такі сили називають тиском. До них може бути віднесено снігове і вітрове навантаження, тиск газу в циліндрі двигуна внутрішнього згоряння, тиск пари на стінки парового котла. Одиниця вимірювання – Па (Н/м^2).

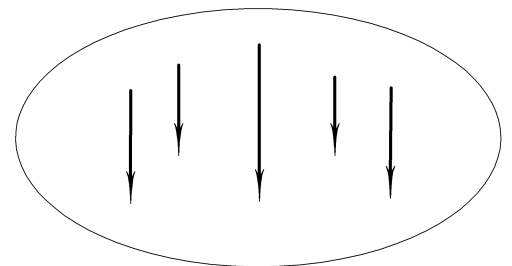


Рис. 2.12. Сили, неперервно розподілені на поверхні

2) Сили, неперервно розподілені по лінії (рис. 2.13). Навантаження цього типу називається погонним або лінійним. Воно характеризується інтенсивністю q з одиницею вимірювання – Н/м .

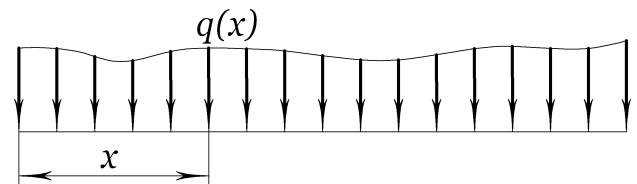


Рис. 2.13. Сили, неперервно розподілені по лінії

3) Зосереджені сили, що діють на нескінченно малій площадці. Одиниця вимірювання такої сили – Н .

4) Зосереджений момент M являє собою пару сил з моментом M , прикладену в одній точці. Одиниця вимірювання такого навантаження $\text{Н}\cdot\text{м}$. Одиниця вимірювання об'ємних сил – Н/м^3 .

За характером прикладення в часі зовнішні сили поділяються на статичні і динамічні. **Статичними** називаються такі навантаження, які плавно змінюються від нуля до свого кінцевого значення і далі залишаються незмінними. При дії статичних навантажень прискорення елементів конструкцій відсутні, або настільки малі, що ними можна знехтувати.

Динамічними називають такі навантаження, швидкість зростання яких приводить до появи значних прискорень елементів конструкцій.

За часом дії динамічні навантаження можна розділити на три види:

1. Прикладені раптово (час зростання десяті частки секунди). Такого типу навантаженнями є сила тяги тепловоза чи електровоза при зрушенні його з місця, наростання тиску газів в циліндрі двигуна внутрішнього згорання.

2. Ударні навантаження, час дії яких соті і тисячні частки секунди. Під час дії ударних навантажень виникають великі сили інерції. Прикладами ударних сил є навантаження на сваю при її забиванні в ґрунт, навантаження на цвях при забиванні його молотком.

3. Повторно-змінні або циклічні навантаження, які періодично повторюються. Прикладом таких навантажень є сили, що діють на шток поршня і шатун у двигуні внутрішнього згорання.

Всі динамічні навантаження менш сприятливі для роботи елементів конструкцій, ніж статичні.

Як уже відзначалося, зовнішні сили, що діють на тіло, викликають в ньому додаткові внутрішні сили (силу опору матеріалу). Оскільки вони діють у внутрішніх точках стержня, то їх не можна виміряти, а тільки визначити методом перерізів, суть якого полягає в тому, що зовнішні сили, прикладені до умовно відрізаної частини тіла, зрівноважуються внутрішніми силами, які виникають в перерізі і замінюють дію відкинутої частини на залишену. Теоретичною основою методу перерізів служить відоме твердження статички: якщо тверде тіло перебуває у рівновазі, то зрівноважена кожна його частина.

Розглянемо стержень, що перебуває у рівновазі під дією системи сил P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 2.14а). Деякою площиною переріжемо його умовно на дві частини I і II. Оскільки зовнішнє навантаження на кожную частину визначає простору систему сил, то внутрішні сили на основі розв'язку першої задачі статички зводяться до головного вектора \vec{R} і головного моменту \vec{M} .

Записавши для однієї з частин I або II умови рівноваги просторової системи сил, одержимо шість рівнянь для визначення компонентів головного вектора і головного моменту внутрішніх сил.

Метод перерізів дозволяє визначити статичний еквівалент внутрішніх сил пружності, але не дає

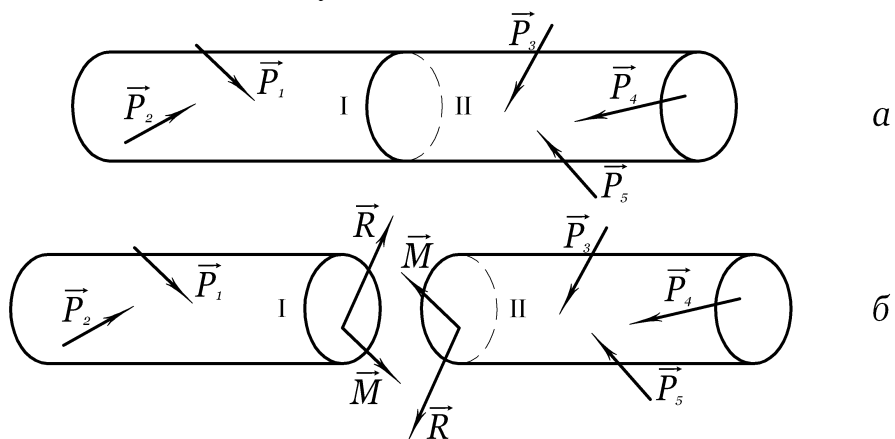


Рис. 2.14. Ілюстрація методу перерізів

можливості виявити закон їх розподілу по перерізу. Для цього необхідні додаткові припущення про характер деформації. Ці припущення вводять при вивченні різних видів деформації стержня. При дії на стержень просторової системи сил із рівнянь рівноваги (1.48) – (1.49) можна знайти в поперечному перерізі три складові сили N_z, Q_x, Q_y головного вектора \vec{R} , які напрямлені вздовж координатних осей,

і три складові M_x, M_y, M_z головного моменту \vec{M} (рис. 2.15). Вказані сили і моменти є внутрішніми силовими факторами, що виникають в поперечному перерізі стержня. Вони називаються: N_z – поздовжня сила; Q_x, Q_y – поперечні сили; M_x, M_y – згинальні моменти, M_z – крутильний момент.

В залежності від зовнішнього навантаження окремі внутрішні силові фактори можуть дорівнювати нулю. Так, при деформації розтягу або стиску відмінною від нуля буде лише поздовжня сила N_z , а при зсуві Q_x , або Q_y не дорівнюють нулю. Якщо $M_z \neq 0$, а всі інші силові фактори дорівнюють нулю, то виникає деформація кручення. При наявності в поперечному перерізі лише одного із моментів M_x або M_y виникає деформація чистого згину. Якщо в перерізі діє декілька силових факторів, то маємо складну деформацію.

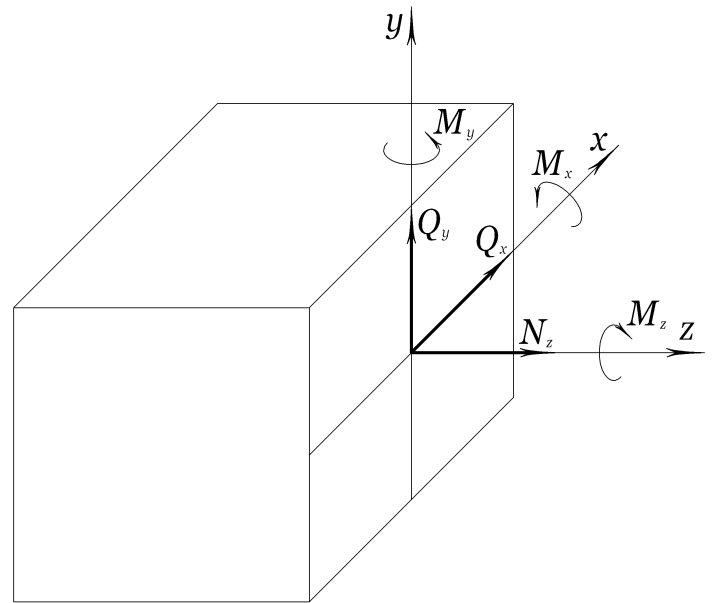


Рис. 2.15. Складові головного вектора і моменту

Оскільки внутрішні сили по перерізу стержня розподілені нерівномірно, то для характеристики їх інтенсивності вводять поняття напруження. Внутрішня сила, що припадає на одиницю площі перерізу стержня в околі деякої його точки A , називається напруженням в цій точці. Оскільки напруження являє собою відношення внутрішньої сили, що діє на деяку площадку, до її площі, то одиниця вимірювання напруження – Па (Н/м^2).

Через одну і ту ж точку тіла можна провести безліч перерізів, що розділяють стержень на дві частини. Напруження в цій точці для кожного з перерізів у загальному випадку будуть різними. Таким чином, напруження в заданій точці залежить від орієнтації проведеного через цю точку перерізу, тому не можна говорити про напруження, не вказуючи на переріз, в якому вони виникають.

Напруження в точці характеризується величиною і напрямком, тобто являє собою закріплений вектор, який нахилений до перерізу під певним кутом.

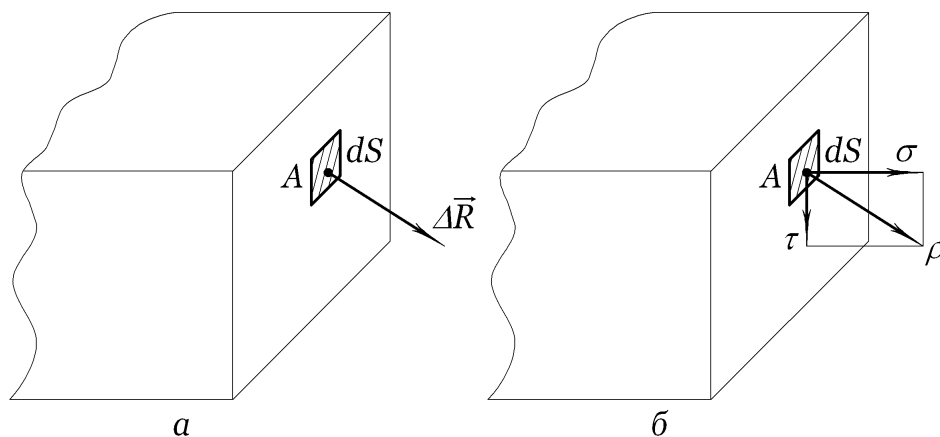


Рис. 2.16. Дотичні і тангенціальні напруження

Нехай в точці A перерізу стержня на малій площадці ΔS діє сила $\Delta \vec{R}$ під деяким кутом до площадки (рис. 2.16а). Середнє напруження p_c , що виникає в цій точці, обчислюється за формулою

$$p_c = \frac{\Delta R}{\Delta S}.$$

Розкладемо повне напруження $p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S}$ на нормальну до площадки ΔS і дотичну до неї складові (рис. 2.16б). Складову по нормалі до площадки називають нормальним напруженням в заданій точці перерізу і позначають буквою σ ; дотичну складову називають дотичним напруженням і позначають буквою τ .

Виходячи з означення напруження в точці перерізу, приходимо до висновку, що поява нормальних напружень в околі точки зумовлена деформацією розтягу або стиску, а поява дотичних напружень – деформацією зсуву.

2.2. Деформація розтягу і стиску

2.2.1. Напруження в поперечних перерізах. Якщо до торців прямолінійного стержня прикладено дві зрівноважені сили, що діють вздовж його осі, то в стержні виникає деформація розтягу або стиску (рис. 2.17а). У більшості випадків практики власна вага стержня мала у порівнянні з зовнішніми силами, тому нею можна знехтувати при визначенні напружень і деформацій.

Прийmemo додаткові робочі гіпотези, характерні для розтягу або стиску, які підтверджуються даними експериментів і результатами точного розв'язку даної задачі в теорії пружності:

1. Вважаємо, що стержень складається із однакових поздовжніх волокон, які можуть лише розтягуватися або стискуватися, не чинячи бокового тиску одне на одне.

2. Зовнішні сили діють вздовж осі стержня.

3. Стержень має форму призми або циліндра сталого поперечного перерізу.

На підставі наведених припущень і гіпотези плоских перерізів (перерізи після деформації залишаються плоскими і лише переміщуються паралельно своєму недеформованому положенню) робимо висновок, що нормальні напруження σ в поперечному перерізі розподілені рівномірно. Їх величину знайдемо, розділивши поздовжню силу N , що діє в розглядуваному перерізі, на його площу S

$$\sigma = \frac{N}{S}. \quad (2.1)$$

Поздовжня сила N методом перерізів завжди може бути виражена через зовнішні сили.

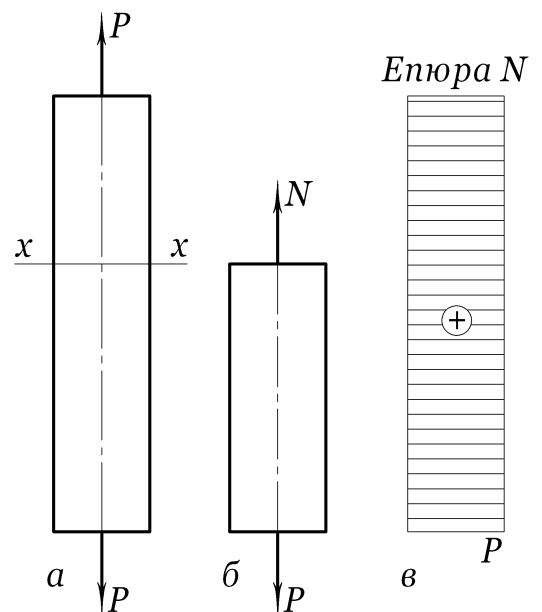


Рис. 2.17. Напруження в поперечних перерізах

Визначимо її в поперечних перерізах стержня, зображеного на рис. 2.17а. Умовно розріжемо стержень довільним перерізом $x - x$. Розглянувши рівновагу нижньої частини (рис. 2.17б), знаходимо $N = P$.

Силу N будемо вважати додатною, якщо вона приводить до розтягу стержня, а у випадку стиску – від’ємною. Зміну поздовжньої сили по довжині стержня зручно подавати у вигляді діаграми, яка називається епюрою. Для стержня, зображеного на рис. 2.17а, епюра побудована на рис. 2.17в.

Якщо на стержень діє система сил, то епюра N матиме стрибкоподібну форму. Розглянемо приклад побудови епюри поздовжніх сил.

Задача 2.1. Стержень одним кінцем жорстко зацімлений і навантажений осьовими силами P_1, P_2, P_3 (рис. 2.18а). Побудувати для цього стержня епюру поздовжніх сил, якщо $P_1 = P, P_2 = 3P, P_3 = 5P$

Розв’язання. Розбиваємо стержень на три ділянки, межі яких визначаються точками прикладання заданих сил. Запишемо вирази N на кожній із ділянок, враховуючи те, що поздовжня сила в будь-якому перерізі стержня дорівнює

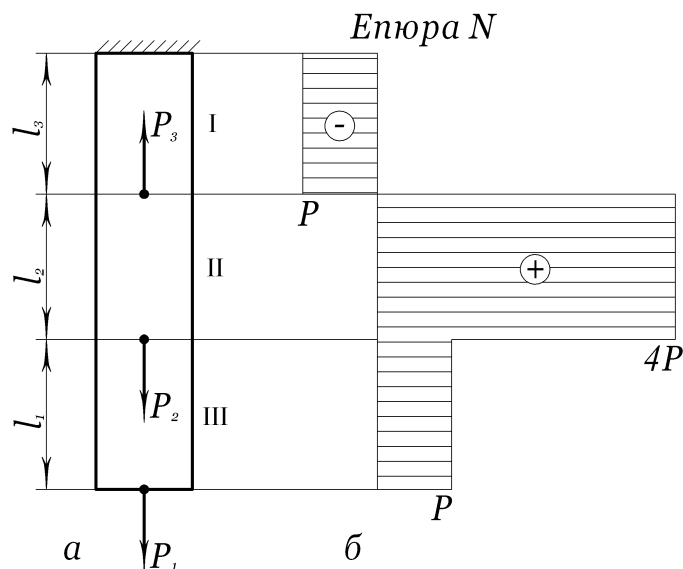


Рис. 2.18. До розв’язку задачі 2.1.

алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які діють нижче від розглядуваного перерізу: I ділянка $N = P_1 = P$; II ділянка $N = P_1 + P_2 = 4P$; III ділянка $N = P_1 + P_2 - P_3 = -P$. Епюра N побудована на рис. 2.18б.

Відзначимо, що в даному прикладі побудову епюри N починали з нижнього (вільного) кінця. Якщо починати побудову з верхнього, то попередньо необхідно визначити реакцію в зацімленні. Якщо стержень має ступінчасту форму (на кожній з ділянок площа поперечного перерізу різна), то процес визначення поздовжніх сил такий самий, як і для стержня сталого перерізу.

Для побудови епюри нормальних напружень по довжині стержня необхідно, згідно з формулою (2.1), поділити епюру поздовжніх сил N на площу поперечного перерізу стержня S . У випадку ступінчастого стержня слід врахувати, що для кожної ділянки значення S різні.

Зауважимо, що формула (2.1) справедлива лише для стержнів сталого поперечного перерізу. У випадку порушення призматичної форми стержня, розподіл напружень в поперечному перерізі нерівномірний і формула (2.1) виражатиме лише середнє напруження. Якщо переріз стержня ослаблений отвором (рис. 2.19), напруження також розподілені нерівномірно, причому біля контуру отвору спостерігається значне збільшення (концентрація) напружень в порівнянні з напруженнями в стержні без отвору. Те ж саме спостерігається при наявності щілин, викружок, різкого переходу від одного

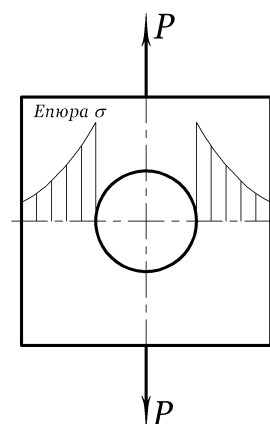


Рис. 2.19. Концентрація напружень

поперечного розміру до іншого.

Зростання напружень у наведених прикладах має локальний характер, тому таке напруження називається місцевим. Відношення місцевого напруження, що визначається формулою (2.1) з урахуванням ослаблення площі перерізу, до напруження в суцільному стержні називається коефіцієнтом концентрації напружень.

Концентрація напружень при статичному навантаженні небезпечна лише для стержнів з крихкого матеріалу.

2.2.2. Деформації при розтягу або стиску. Для більшості конструкційних матеріалів між величиною абсолютного видовження (вкорочення) Δl і поздовжньою силою N , що виникає в стержні сталого перерізу, існує залежність

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}, \quad (2.2)$$

яка встановлена експериментально і справедлива в певних межах навантаження. Постійна E являє собою фізичну характеристику матеріалу, яка називається модулем пружності матеріалу або модулем Юнга. Величина ES , що входить в (2.2), називається жорсткістю стержня при розтягу або стиску і має розмірність сили.

Врахувавши, що $\varepsilon = \Delta l/l$ відносне видовження, а $\sigma = N/S$ нормальне напруження в поперечному перерізі, співвідношення (2.2) подамо у вигляді

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.3)$$

Рівність (2.3), яка еквівалентна (2.2), виражає собою закон Гука (встановлений англійським фізиком Р.Гуком у 1660 році).

Визначимо фізичний зміст модуля Юнга. Поклавши в (2.3) $\varepsilon = 1$ ($\Delta l = l$), дістанемо $\sigma = E$. Остання рівність показує, що модуль Юнга визначає, які нормальні напруження потрібно створити в перерізах стержня, щоб його довжина збільшилась (зменшилась) в два рази. На практиці таких напружень реалізувати не можна. Числові значення E для різних матеріалів встановлюються експериментально і наводяться в довідниках.

Закон Гука справедливий не для всіх конструкційних матеріалів. Деякі з них – чавун, скло, окремі види пластмас мають при незначних напруженнях помітні відхилення від закону Гука. Незважаючи на це, в силу гіпотези 5, умовно приймемо в опорі матеріалів, що цей закон справедливий у всіх випадках.

Розтяг і стиск викликають поперечну деформацію стержня, причому при розтягу стержня його поперечні розміри зменшуються, а при стиску – збільшуються. Позначимо через $\Delta b = b_1 - b$ (де b , b_1 - недеформований і деформований поперечні розміри) абсолютну зміну поперечного розміру, а через $\varepsilon' = \Delta b/b$ – відносну поперечну деформацію стержня. Експериментами встановлено, що відношення поперечної деформації ε' до поздовжньої ε для даного матеріалу при розтягу-стиску в певних межах навантаження є сталим

$$\nu = -\varepsilon'/\varepsilon.$$

Ця величина називається коефіцієнтом Пуассона. Діапазон його зміни від 0 до 0,5. Середнє значення коефіцієнта Пуассона для металів дорівнює 0,3. Якщо відомо ν , то за формулою (2.4) можна, знаючи поздовжню деформацію, знайти поперечну. Це означає, що формули (2.1) – (2.4) дозволяють визначити форму і розміри деформованого стержня, на який діє задане зовнішнє осьове навантаження.

Розглянемо задачу про визначення зміщень точок, розміщених на осі стержня. Якщо на стержень діє одна зовнішня сила, то видовження навантаженої ділянки визначається формулою (2.2). У випадку дії на стержень системи сил її пряме застосування неможливе через зміну величини N по довжині стержня. Для визначення повного видовження стержня потрібно знайти за формулою (2.2) видовження кожної його ділянки, а результати алгебраїчно додати.

Для стержня, зображеного на рис. 2.18а, розрахункова формула має вигляд $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, причому $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ – видовження окремих ділянок.

Врахувавши значення N з прикладу 1, знаходимо за формулою (2.2)

$$\Delta l = \frac{P_1 l_1}{ES} + \frac{(P_1 + P_2) l_2}{ES} + \frac{(P_1 + P_2 - P_3) l_3}{ES}$$

або

$$\Delta l = \frac{P_1(l_1 + l_2 + l_3)}{ES} + \frac{P_2(l_2 + l_3)}{ES} - \frac{P_3 l_3}{ES}.$$

В останньому співвідношенні перший доданок в правій частині є видовження стержня від сили P_1 , другий доданок – видовження від сили P_2 , третій доданок – видовження від сили P_3 .

Отже, ми дістали результат, який збігається з принципом незалежності дії сил: повна деформація стержня дорівнює алгебраїчній сумі деформацій від кожної сили окремо.

2.2.3. Потенціальна енергія деформації. Зовнішні сили, що розтягують або стискають стержень, виконують певну роботу при переміщенні точок їх прикладання. В результаті цього у деформованому стержні накопичується потенціальна енергія деформації, яка після зняття зовнішніх сил повертає стержень у початкове положення.

У межах закону Гука потенціальна енергія деформації \dot{I} дорівнює роботі зовнішніх сил \dot{A} .

При статичному навантаженні сили зростають плавно від нуля до свого кінцевого значення D , тому їх робота, а отже і потенціальна енергія, обчислюється за формулою

$$\dot{I} = \dot{A} = \frac{1}{2} D \Delta l, \quad (2.5)$$

де множник $1/2$ враховує ефективне (середнє) значення сили D .

Підставляючи в (2.5) замість D значення N , а замість Δl значення із (2.2), отримаємо

$$\dot{I} = \frac{N^2 l}{2ES}. \quad (2.6)$$

Питомою потенціальною енергією називається енергія, віднесена до одиниці об'єму

$$\ddot{I}_0 = \frac{\dot{I}}{V} = \frac{N^2 l}{(Sl)2ES} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (2.7)$$

2.2.4. Експериментальне вивчення розтягу-стиску. Для визначення механічних характеристик конструкційних матеріалів, які дозволяють оцінити їх властивості, проводять лабораторні випробування на зразках, виготовлених певним чином із даного матеріалу. У більшості випадків ці зразки мають циліндричну або призматичну (у вигляді полоси) форму.

Спеціальні пристрої, що здійснюють розтяг (розривні машини) або стиск (преси), дозволяють випробовувати зразок аж до його руйнування (розриву чи розчавлювання). В процесі навантаження зразка встановлюється залежність між величиною прикладеного навантаження D і його абсолютним видовженням (вкороченням) Δl , що відповідає даному навантаженню. Цей зв'язок реєструється за допомогою вимірювальних приладів або спеціального діаграмного пристрою, який є в більшості випробувальних машин. Пристрій в автоматичному режимі викреслює діаграму в прямокутних координатах ($D, \Delta l$). Така діаграма називається діаграмою розтягу або стиску. Вона для кожного матеріалу є його характеристикою і відображує механічні властивості.

На рис. 2.20 зображена діаграма розтягу для маловуглецевої сталі типу Ст.3, що має яскраво виражені пластичні властивості. Оскільки величина Δl залежить від довжини стержня і площі поперечного перерізу, то, поділивши координату деформації на l , а силову координату на S , одержимо діаграму розтягу, не зв'язану з геометрією зразка (рис. 2.21). Ця діаграма має п'ять характерних точок, ординати яких визначають механічні характеристики матеріалу: границю пропорційності σ_{ip} , границю пружності σ_{ip} , границю текучості $\sigma_{пц}$, границю міцності (тимчасовий опір) σ_m і розривне напруження σ_p .

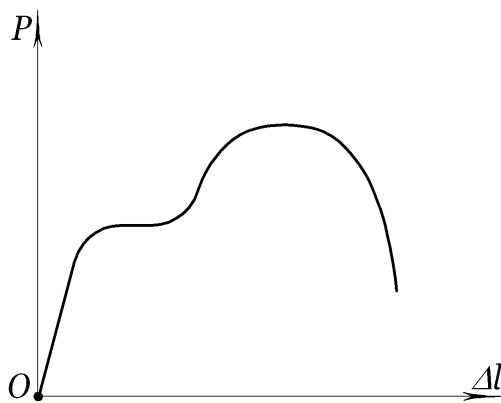


Рис. 2.20. Діаграма розтягу

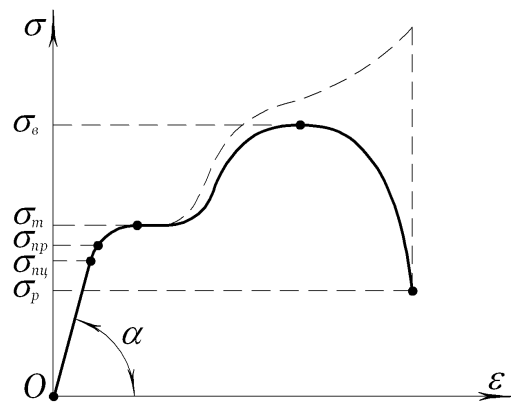


Рис. 2.21. Істинна діаграма розтягу

Границя пропорційності – напруження, яке визначає межу застосування закону Гука. Ділянка діаграми, яка розміщена нижче цієї точки, прямолінійна. Тангенс кута нахилу цієї ділянки до осі абсцис дорівнює модулю Юнга для даного матеріалу $\operatorname{tg} \alpha = \sigma / \varepsilon = E$.

Границі пружності відповідає напруження, при якому закон Гука вже не виконується, але залишкові деформації ще дуже малі (не перевищують 0,03%). На практиці границю пружності часто ототожнюють з границею пропорційності.

Границя текучості – це напруження, при якому різко зростають деформації без прикладання додаткових сил. З появою текучості матеріалу на діаграмі з’являється горизонтальна ділянка – площадка текучості. Не всі пластичні матеріали мають чітко виражену площадку текучості: чим жорсткіший матеріал, тим ця площадка менша або зовсім відсутня.

Границя міцності (тимчасовий опір) являє собою напруження, що відповідає найбільшій силі. При досягненні матеріалом границі міцності в зразку появляється місцеве звуження, що називається шийкою. Поява шийки свідчить про початок руйнування зразка. При збільшенні шийки опір стержня зменшується і він руйнується при силі значно меншій, ніж максимальна.

Розривне напруження – напруження в момент розриву зразка.

Названі вище механічні характеристики матеріалу – величини умовні, оскільки при їх визначенні не враховувалась зміна площі поперечного перерізу зразка. Хоч ця зміна в межах закону Гука дуже мала, однак при появі шийки вона починає помітно зростати.

Якщо побудувати діаграму з врахуванням зміни площі поперечного перерізу, то вона називається істинною діаграмою розтягу. На рис. 2.21 така діаграма зображена штриховою лінією.

Величини $\sigma_{i\delta}, \sigma_{i\delta}, \sigma_{\delta}, \sigma_{\delta}, \sigma_{\delta}$ це характеристики міцності матеріалу. Чим вищі ці характеристики, тим матеріал міцніший. Крім названих величин велике значення мають і характеристики пластичності, до яких можна віднести: відносне залишкове видовження при розриві, відносне зменшення площі перерізу в місці розриву, а також величину площадки текучості на діаграмі.

Відносне залишкове видовження при розриві обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \cdot 100\% ,$$

де l, l_1 – довжина розрахункової частини стержня до випробування і після розриву відповідно.

Відносне зменшення площі перерізу в місці розриву дорівнює

$$\psi = \frac{S - S_1}{S} \cdot 100\% .$$

Тут S – площа перерізу недеформованого зразка, S_1 – площа перерізу в місці розриву.

Чим вищі значення δ і ψ , тим матеріал пластичніший.

Випробування на стиск проводиться на коротких зразках у вигляді кубика або циліндра. Для м’яких маловуглецевих сталей діаграма стиску показана на рис. 2.22.

Характерною особливістю стиску є те, що величини $\sigma_{i\delta}, \sigma_{i\delta}, \sigma_{\delta}$ приблизно такі ж, як і при розтягу. При збільшенні навантаження поза границею текучості відбувається різке розширення зразка внаслідок зростання пластичних деформацій (зразок перетворюється на тонкий диск). Руйнування зразка з появою тріщин для пластичних матеріалів спостерігається рідко.

В зв’язку з тим, що крихкі матеріали (чавун сірий, камінь, бетон, цегла і інші) слабо чинять опір розтягу, а в практичних конструкціях сприймають лише стискаючі сили, то їх випробовують тільки на

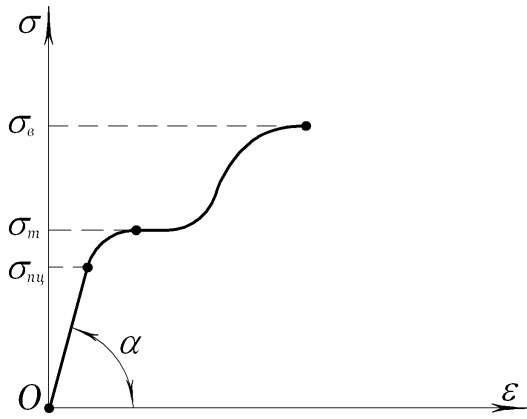


Рис. 2.22. Діаграма стиску

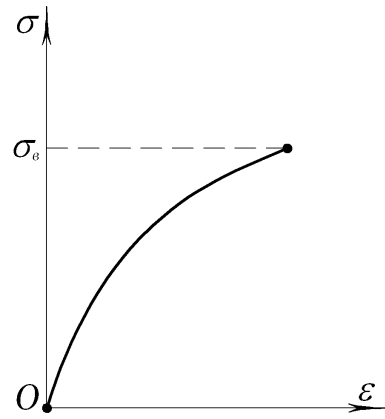


Рис. 2.23. Діаграма стиску крихких матеріалів

стиск. Діаграма стиску для таких матеріалів зображена на рис. 2.23. Ця діаграма має лише одну характерну точку σ_a , яка відповідає максимальній силі, при якій появляються тріщини руйнування. Відзначимо, що навіть при великих навантаженнях для крихких матеріалів закон Гука не виконується.

Кожен із конструкційних матеріалів має свою діаграму випробування на розтяг або стиск, вигляд якої залежить від типу матеріалу, його хімічного складу, механічної і термічної обробки. Основні механічні характеристики найбільш поширених матеріалів наводяться в довідниках.

Якщо зразок з м'якої сталі навантажити до стану, вищого за границю текучості, і зняти навантаження (розвантажити), то діаграма розвантаження буде прямолінійною і паралельною ділянці, що відповідає дії закону Гука (рис. 2.24). Це означає, що при випробуванні зразка аж до його розриву поряд з пластичною деформацією $\epsilon_{i\bar{e}}$ має місце пружна деформація $\epsilon_{i\delta}$.

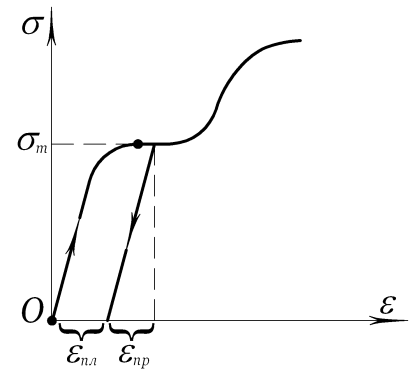


Рис. 2.24. Явище наклепу

Якщо через деякий час зразок повторно навантажити, то діаграма навантаження буде збігатися з діаграмою попереднього розвантаження, при цьому границя текучості помітно збільшується, а поздовжнє видовження при розриві зменшується (матеріал стає більш жорстким). Таке явище називається „наклепом” матеріалу.

2.2.5. Практичний розрахунок на міцність при розтягу-стиску. Для безпечної роботи елементів машин і споруд необхідно для них створити такі умови, які виключали б не тільки можливість руйнування, але й утворення залишкових деформацій, що могли б змінити розрахункову схему машин або споруди.

При розрахунках стержнів на міцність, жорсткість і стійкість ставиться вимога, щоб їх істинний напружено-деформований стан в умовах експлуатації не відповідав би небезпечному стану. Це досягається введенням коефіцієнту запасу, величина якого перш за все залежить від ступеня відповідності прийнятих допущень про розрахункову схему дійсним умовам роботи. Він повинен враховувати можливе відхилення експлуатаційних навантажень від розрахункових, неточність прийнятих методів розрахунку, неточність виготовлення деталей і інше.

Умови міцності вимагають, щоб напруження в перерізах стержня, які виникають внаслідок дії зовнішніх сил, не перевищували допустимих.

Допустимі напруження визначаються як небезпечні (що відповідають небезпечному стану стержня), поділені на коефіцієнт запасу k

$$[\sigma] = \sigma_0/k, \quad [\tau] = \tau_0/k,$$

де $[\sigma]$, $[\tau]$ – допустимі нормальні і дотичні напруження; σ_0 , τ_0 – небезпечні напруження.

Для пластичних матеріалів небезпечним напруженням є границя текучості σ_δ , а для крихких матеріалів – границя міцності σ_a . Величини допустимих напружень для різних матеріалів в залежності від умов роботи регламентуються нормативами і наводяться в довідниках. Виходячи з вищесказаного, умову міцності стержня при розтягу-стиску можна записати у вигляді

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq [\sigma]. \quad (2.8)$$

Вона дає змогу розв'язувати такі інженерні задачі:

1. Проектний розрахунок (вибір перерізу стержня при відомих силах, що діють на нього).
2. Перевірочний розрахунок (визначення істинних напружень в стержні і порівняння їх з допустимими).
3. Визначення величини допустимого навантаження на стержень відомих розмірів.

Розв'язок першої задачі визначається формулою

$$S \geq N/[\sigma], \quad (2.9)$$

яка випливає з (2.8). Знаючи площу перерізу і його форму, можна визначити геометричні розміри перерізу.

Друга задача передбачає задання розмірів стержня і зовнішнього навантаження; потрібно визначити напруження в стержні (за формулою 2.1) і порівняти його з допустимим. Відхилення не повинне перевищувати 5%.

При розв'язуванні третьої задачі для стержня відомих розмірів визначається допустиме зусилля

$$[N] \leq [\sigma]S,$$

після чого методом перерізів визначається і відповідне допустиме зовнішнє навантаження.

Розглянемо приклад розрахунку на міцність з використанням формули (2.8).

Задача 2.2. Визначити площі перерізів сталевих стержнів AB і CB кронштейна, зображеного на рис. 2.25, якщо $P = 50$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа.

Розв'язання. Вирізаємо вузол B , замінюючи дію стержнів внутрішніми силами $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{CB}$, і записуємо умови рівноваги системи збіжних сил

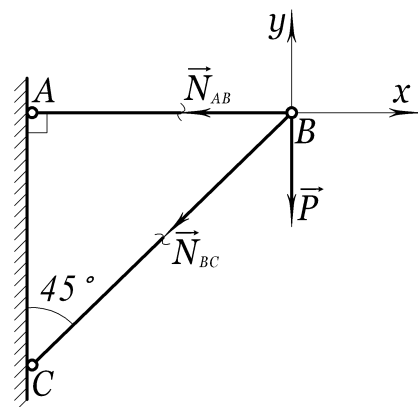


Рис. 2.25. До розв'язку задачі 2.2.

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; & -N_{AB} - N_{CB} \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; & -N_{CB} \sin 45^\circ - P &= 0, \end{aligned}$$

з яких визначаємо

$$N_{AB} = P; \quad N_{CB} = -\frac{P}{\sin 45^\circ}.$$

Знак „-“ вказує на те, що зусилля \vec{N}_{CB} стискаюче. Використовуємо формулу (2.9) для кожного із стержнів

$$S_{AB} \geq N_{AB} / [\sigma] = P / [\sigma] = \frac{50}{160 \cdot 10^3} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$S_{\bar{N}B} \geq N_{\bar{N}B} / [\sigma] = P\sqrt{2} / [\sigma] = \frac{50\sqrt{2}}{160 \cdot 10^3} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Тут враховано, що допустимі напруження на розтяг і стиск для сталі однакові.

Розглянемо важливе практичне питання про вплив власної ваги на розподіл напружень і деформацій прямолінійного стержня.

Формули (2.1)-(2.3) виведенні в припущенні, що власна вага стержня значно менша ніж зовнішні сили, які діють на нього. Однак, при розрахунку довгих (штанги, троси, ланцюги) або масивних (колони, стовпи, стіни, фундаменти) стержнів нехтування їх власною вагою може привести до помилкових результатів.

Розглянемо прямолінійний стержень сталого поперечного перерізу верхній кінець якого жорстко закріплений. До стержня прикладено осьове навантаження, яке викликає деформацію розтягу або стиску. На підставі принципу незалежності дії сил його напружено-деформований стан складається із двох незалежних станів, викликаних власною вагою і системою зовнішніх сил.

Напруження і деформації, викликані системою осьових сил, визначаються за формулами (2.1)-(2.3), тому розглянемо задачу визначення напружено-деформованого стану, викликаного силами власної ваги.

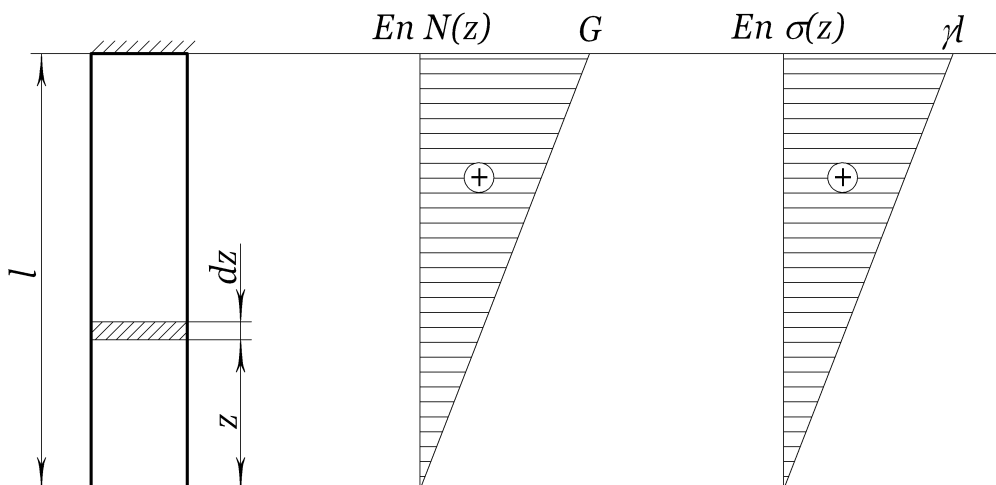


Рис. 2.26. Епюри $N(z)$, $\sigma(z)$ від власної ваги

Нехай l – довжина, S – площа поперечного перерізу, γ – питома вага матеріалу стержня. Його вага дорівнює

$$G = \gamma Sl.$$

Розглянемо довільний поперечний переріз на відстані z від вільного кінця стержня (рис. 2.26). Поздовжня сила $N(z)$ в цьому перерізі дорівнює вазі тієї частини стержня, яка розміщена нижче від розглядуваного перерізу

$$N(z) = \gamma Sz, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (2.10)$$

Нормальні напруження в перерізах стержня визначаються за формулою (2.1)

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{S} = \gamma z, \quad 0 \leq z \leq l \quad (2.11)$$

Епюри $N(z)$ та $\sigma(z)$ наведено на рис. 2.26. Найбільші поздовжні сили і нормальні напруження виникають в місці закріплення стержня.

Оскільки поздовжня сила вздовж осі стержня змінюється за лінійним законом, то використання закону Гука (2.2) для визначення абсолютного його видовження неможливе. Якщо виділити нескінченно малий елемент стержня довжиною dz , то для нього силу $N(z)$ можна вважати сталою і абсолютне видовження цього елемента визначати за формулою (2.2)

$$d(\Delta l) = \frac{N(z) \cdot dz}{ES} = \frac{\gamma \cdot z \cdot dz}{E}. \quad (2.12)$$

Інтегруючи на проміжку $[0; l]$, знаходимо

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma \cdot z \cdot dz}{E} = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.13)$$

Останню формулу можна записати і в іншому вигляді

$$\Delta l = \frac{Gl}{2ES}. \quad (2.14)$$

Порівнюючи (2.2) і (2.14), приходимо до висновку: повне видовження стержня сталого перерізу від власної ваги вдвічі менше ніж видовження від сили, яка дорівнює власній вазі стержня і прикладена до нижнього його кінця.

При розрахунку сталевих стержнів, які мають порівняно високу міцність, вплив власної ваги може проявитися лише при значній їх довжині.

Що стосується кам'яних або бетонних елементів конструкцій, то вплив власної ваги на величину напружень і деформацій суттєвий навіть при невеликій їх висоті. В таких випадках стиснуті елементи із сталим перерізом будуть матеріалозатратними оскільки напруження, які дорівнюють допустимим, виникають в нижній основі елемента. Перерізи, розміщені вище основи будуть недонапруженими. Тому з економічних міркувань їх необхідно зменшувати. Ідеальним був би той стержень, в поперечних перерізах якого виникають однакові нормальні напруження. Для цього він повинен мати по всій

довжині неперервно змінну площу поперечного перерізу (рис. 2.27) Такий стержень називається стержнем рівного опору. Серед всіх інших стержнів він має найменшу вагу.

Надання бічній поверхні стержня криволінійного окреслення значно ускладнює і здорожує його виготовлення. Тому на практиці використовують стержні, близькі за формою до стержнів рівного опору, виготовляючи їх ступінчастими (рис. 2.27). При цьому площу кожної ступені вибирають з таким розрахунком, щоб найбільше напруження в ній дорівнювало допустимому для даного матеріалу.

Розглянемо однорідний триступінчастий стержень нижній кінець якого закріплений, а до верхнього прикладено осьову силу P (рис. 2.28)

Позначимо через l_k, S_k, G_k ($k = 1, 2, 3$) довжину, площу поперечного перерізу і вагу відповідної ділянки стержня. Найбільші поздовжні сили і напруження, які виникають на нижніх поверхнях ділянок, відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} N_1 &= P + G_1; & \sigma_1 &= \frac{P + G_1}{S_1}; \\ N_2 &= P + G_1 + G_2; & \sigma_2 &= \frac{P + G_1 + G_2}{S_2}; \\ N_3 &= P + G_1 + G_2 + G_3; & \sigma_3 &= \frac{P + G_1 + G_2 + G_3}{S_3}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

На підставі (2.9) площі ділянок визначаються за формулами

$$S_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}; \quad S_2 = \frac{P + G_1}{[\sigma] - \gamma l_2}; \quad S_3 = \frac{P + G_1 + G_2}{[\sigma] - \gamma l_3}. \quad (2.16)$$

Тут $[\sigma]$ – допустиме напруження.

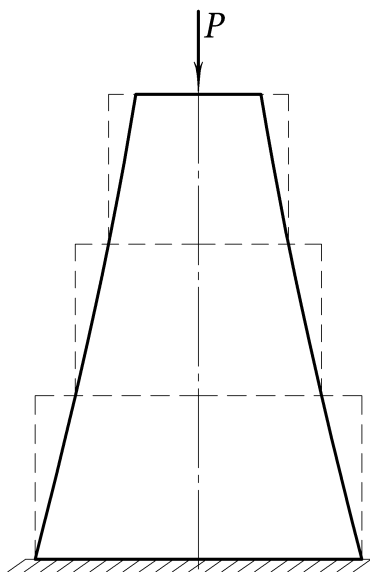


Рис. 2.27. Стержень рівного опору стиску

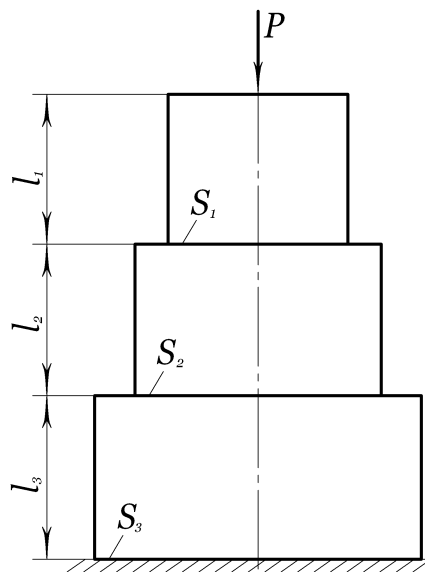


Рис. 2.28. Розрахункова схема ступінчастого

Повне видовження (вкорочення) ступінчастого стержня визначаємо як суму видовжень його ділянок

$$\Delta l = l_1 + l_2 + l_3. \quad (2.17)$$

Вирази для Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 знаходимо на підставі формул (2.2)

$$\Delta l_1 = \frac{l_1}{ES_1} \left[P + \frac{G_1}{2} \right]; \quad \Delta l_2 = \frac{l_2}{ES_2} \left[P + G_1 + \frac{G_2}{2} \right]; \quad \Delta l_3 = \frac{l_3}{ES_3} \left[P + G_1 + G_2 + \frac{G_3}{2} \right]. \quad (2.18)$$

В окремих випадках необхідні для розрахунку стержня внутрішні зусилля не можна знайти методом перерізів через те, що кількість умов статички, які можна записати для відсіченої частини стержня, недостатня. Задачі, в яких зусилля не можуть бути визначені з допомогою рівнянь статички, називаються статично невизначеними. При їх розв'язуванні складають додаткові умови деформування стержня, які називаються рівняннями сумісності деформацій.

У наступних розділах будуть розглядатися лише статично визначені задачі.

2.3. Напружено-деформований стан в точці пружного тіла

2.3.1. Просторовий напружений стан. Напруженим станом тіла в точці називають сукупність напружень, що діють по всеможливих площадках, проведених через цю точку. Як відзначалося в п.2.1, величина повного напруження, що діє в довільній площадці, залежить від її орієнтації.

Для визначення напруженого стану в точці твердого тіла, розглянемо елементарний паралелепіпед з ребрами dx , dy , dz , вирізаний в околі досліджуваної точки. Враховуючи малість його розмірів, приймемо допущення про рівномірний розподіл напружень на гранях паралелепіпеда. Ці напруження будемо вважати прикладеними в точці. Повні напруження, що діють на кожній грані, розкладемо на нормальну складову σ , напрямлену перпендикулярно відповідній грані, і дві дотичні складові τ , які напрямлені вздовж двох інших осей (рис. 2.29). На невидимих гранях паралелепіпеда виникають такі ж самі напруження протилежного знаку. Оскільки даний елемент перебуває у рівновазі, то, записавши моментну умову рівноваги відносно осі x , одержимо

$$(\tau_{zy} - \tau_{yz}) dx dy dz = 0,$$

або

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Аналогічні співвідношення одержимо з моментних умов рівноваги відносно осей y і z

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Таким чином, ми довели закон парності дотичних напружень: на двох взаємно перпендикулярних площадках складові дотичних напружень, які перпендикулярні до спільного ребра площадок, однакові за величиною і протилежні за знаком.

Закон парності дотичних напружень показує, що напружений стан в будь-якій точці тіла визначається шістьма складовими $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$, які діють на трьох взаємно перпендикулярних площадках.

В курсі теорії пружності доводиться, що серед всеможливих площадок, проведених через дану точку напруженого тіла, завжди існують три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження відсутні. Такі площадки називаються головними. Нормальні напруження, що діють на цих

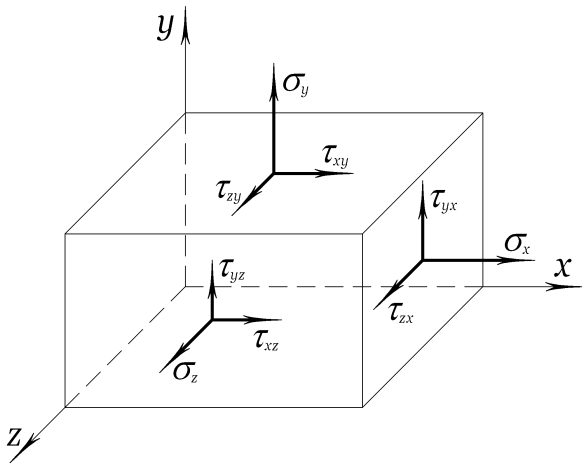


Рис. 2.29. Просторово напружений стан

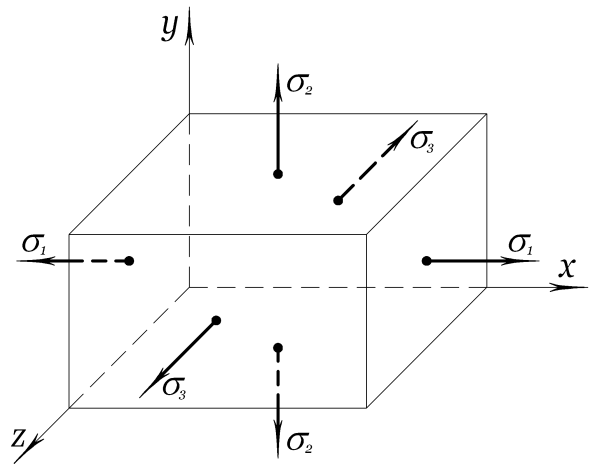


Рис. 2.30. Просторово напружений стан як розтяг-стиск в трьох головних напрямках

площадках, називаються головними напруженнями. Напрямки дії головних напружень називаються головними напрямками.

Отже, у загальному випадку навантаження в кожній точці тіла діють три головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, два з яких мають екстремальні значення: одне з них є найбільшим з усіх нормальних напружень, що діють в площадках, проведених через точку, а інше – найменшим.

Якщо в довільній точці напруженого тіла три головні напруження відмінні від нуля (вважаємо, що $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), то такий напружений стан називається об'ємним або просторовим.

На основі вищесказаного можна зробити висновок: будь-який напружений стан в точці може бути поданий як результат розтягу або стиску в трьох головних напрямках (рис. 2.30).

Якщо одне з головних напружень дорівнює нулю, то такий напружений стан називається плоским, а у випадку коли два головних напруження дорівнюють нулю – лінійним, який нічим не відрізняється від звичайного осьового розтягу (стиску).

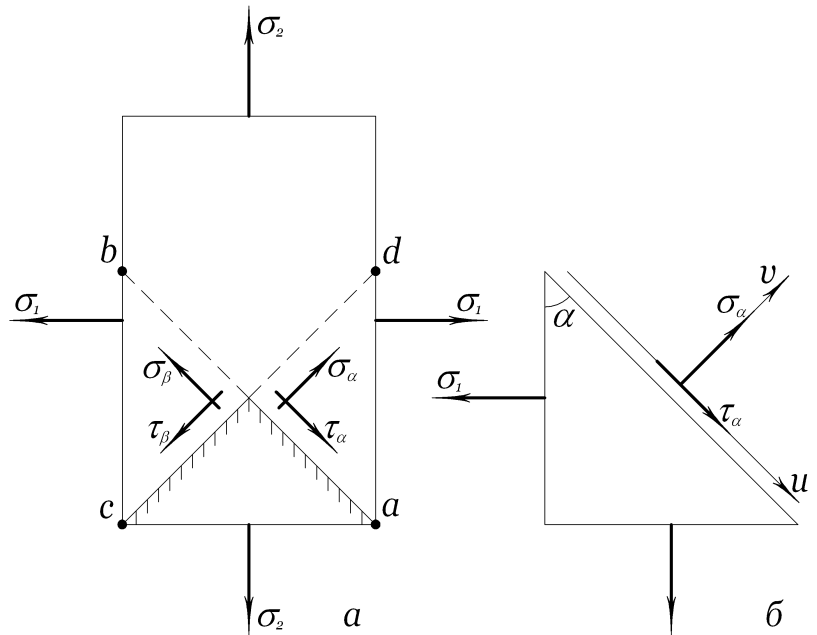


Рис. 2.31. Плоский напружений стан

2.3.2. Плоский напружений стан. Нехай по чотирьох гранях елементарного паралелепіпеда діють головні напруження σ_1 і σ_2 . Грань, вільну від напружень, сумістимо з площиною рис. 2.31а.

Розглянемо довільну площадку ab і визначимо на ній нормальні σ_α та дотичні τ_α напруження. Положення цієї площадки визначається кутом α , який утворює нормаль до площадки з головним напрямком, що відповідає напруженню σ_2 .

Розглянемо рівновагу тригранної призми з основою abc , відрізаної від паралелепіпеда площиною ab (рис. 2.31б).

Координатні осі U, V визначимо напрямками напружень σ_α і τ_α відповідно. Позначимо площу грані ab через dS . Тоді рівняння рівноваги системи збіжних сил матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha dS - \sigma_1 dS \cos^2 \alpha - \sigma_2 dS \sin^2 \alpha &= 0; \\ \tau_\alpha dS - \sigma_1 dS \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_2 dS \cos \alpha \sin \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Розділивши останні рівності на dS , знаходимо після певних перетворень

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Найбільші дотичні напруження, як видно з (2.19), діють на площадках, нахилених під кутом $\sigma = \pi/4$ до головних напрямків і дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).\tag{2.20}$$

Обчислимо напруження, що діють на площадці cd , перпендикулярній до ab . Для цього підставимо в (2.19) замість кута α кут $\beta = \alpha + \pi/2$. В результаті нескладних перетворень знаходимо

$$\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \\ \tau_\beta &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Порівнявши вирази (2.19) і (2.21), одержимо

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2; \quad \tau_\alpha = -\tau_\beta.$$

Перша рівність показує, що сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках є величина стала і дорівнює сумі головних напружень. Інша рівність виражає собою закон парності дотичних напружень.

Якщо в (2.19), (2.20) прийняти $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, то отримаємо відповідні співвідношення для визначення напружень в косих перерізах стержня при його осьовому розтягу або стиску.

2.3.3. Узагальнений закон Гука. Розглянемо деформацію елементарного паралелепіпеда, який перебуває під дією головних напружень σ_1, σ_2 і σ_3 (рис. 2.31).

На підставі принципу незалежності дії сил повна відносна деформація в напрямку дії напруження σ_1 дорівнює алгебраїчній сумі деформацій від кожного з головних напружень

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \nu \sigma_2/E - \nu \sigma_3/E = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Тут враховано, що якщо напруження σ_2 і σ_3 розтягувальні, то в напрямку дії напруження σ_1 вони приводять до стиску (ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу).

Аналогічно визначаються лінійні деформації в інших головних напрямках. Остаточний зв'язок між головними деформаціями і головними напруженнями має вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\quad (2.22)$$

Співвідношення (2.22) називаються узагальненим законом Гука для просторового напруженого стану. У випадку плоского напруженого стану ($\sigma_3 = 0$) ці співвідношення запишуться так

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1). \quad (2.23)$$

Визначимо питому потенціальну енергію деформації, що накопичується в одиничному об'ємі тіла за рахунок пружних деформацій. Розглянемо кубик з ребром одиничної довжини, який перебуває під дією головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Потенціальна енергія, яка накопичується в такому кубіку, визначається сумою робіт всіх сил, що діють по його гранях.

На підставі формули (2.7) маємо

$$A = \dot{I}_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3).$$

Підставляючи замість $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ їх значення із (2.22), одержимо після деяких перетворень

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (2.24)$$

Питому потенціальну енергію можна подати як суму двох складових:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_v + \dot{I}_\delta,$$

де \dot{I}_v – енергія, зумовлена зміною об'єму кубика

$$\dot{I}_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (2.25)$$

\dot{I}_δ – енергія зміни форми

$$\dot{I}_\delta = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3). \quad (2.26)$$

У випадку лінійного напруженого стану

$$\dot{I}_0 = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad \dot{I}_v = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma^2; \quad \dot{I}_\delta = \frac{1+\nu}{3E}\sigma^2. \quad (2.27)$$

2.4. Теорії міцності в опорі матеріалів

Якщо стержень перебуває в умовах лінійного (простого) напруженого стану, то оцінка його міцності може бути здійснена за допомогою співвідношень (2.8)

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_{\delta}$$

або

$$\sigma_3 \leq [\sigma]_{\bar{n}},$$

де $[\sigma]_{\delta}$, $[\sigma]_{\bar{n}}$ – відповідні допустимі напруження при розтягу і стиску, які встановлюються в залежності від граничного стану матеріалу. Оскільки величина головного напруження при лінійному напруженому стані може бути визначена дослідним шляхом, то оцінка міцності стержня досить проста. Якщо напружений стан стержня складний (просторовий або плоский), то при оцінці його міцності необхідно врахувати наявність трьох або двох головних напружень. При цьому небезпечний стан матеріалу залежить не тільки від величин $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, але й від співвідношень між ними.

Через неможливість експериментального визначення критеріїв небезпечного стану при складному напруженому стані користуються певними гіпотезами, які пояснюють причини руйнування матеріалу. Ці гіпотези називаються **теоріями міцності**. Вони дозволяють сформулювати умови міцності при складному напруженому стані, виходячи з умов міцності матеріалу при простому розтягу або стиску.

Загальний запис умови міцності при складному напруженому стані має вигляд

$$\sigma_i \leq [\sigma] \quad (2.28)$$

де σ_i – розрахункове або зведене напруження при складному напруженому стані.

Формули зведених напружень встановлюються відповідними теоріями міцності в залежності від прийнятих гіпотез.

Перша теорія міцності (теорія найбільших нормальних напружень). В основу цієї теорії покладено припущення, що небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли максимальне головне напруження досягає значення, яке відповідає небезпечному стану при простому розтягу або стиску. Для складного напруженого стану $\sigma_i = \sigma_1$ або $\sigma_i = \sigma_3$, тому умова міцності матеріалу, згідно з (2.28) матиме вигляд

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_{\delta}$$

або

$$\sigma_3 \leq [\sigma]_{\bar{n}}. \quad (2.29)$$

Недолік цієї теорії: вона не враховує двох інших головних напружень σ_2, σ_3 або σ_1, σ_2 .

Друга теорія міцності (теорія найбільших відносних деформацій) виходить з гіпотези про те, що причиною руйнування матеріалу є поява найбільших відносних деформацій. За цією теорією складний і простий напружений стан є рівнонебезпечними, якщо найбільші відносні деформації у них однакові $\varepsilon_{\max}^i = \varepsilon_{\max}^{\bar{n}}$.

Використавши формули (2.3) і (2.22), умову рівномірності запишемо так: $\sigma_i = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$.

Тут враховано що $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Якщо при простому напруженому стані допустиме напруження дорівнює $[\sigma]$, то умова міцності при складному напруженому стані на підставі (2.28) виразиться нерівністю

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (2.30)$$

Друга теорія міцності, як і перша, недостатньо підтверджується дослідами, що пояснюється неврахуванням особливостей реальної будови тіл.

Третя теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень) вважає, що причиною руйнування матеріалу є дотичні напруження. В основу цієї теорії покладено припущення про те, що два напружені стани (складний і простий) вважаються рівномірними, якщо найбільші дотичні напруження в них однакові

$$\tau_{\max}^i = \tau_{\max}^{\bar{n}}.$$

Найбільші дотичні напруження, згідно (2.12), визначаються формулами

$$\tau_{\max}^i = \frac{\sigma}{2}; \quad \tau_{\max}^{\bar{n}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Підставляючи в умову рівномірності, одержимо $\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3$.

Якщо $[\sigma]$ – допустиме напруження при простому напруженому стані, то на підставі (2.28), умова міцності при складному напруженому стані прийме вигляд

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.31)$$

Третя теорія міцності відображає настання в матеріалі стану текучості. Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження.

Четверта теорія міцності (енергетична теорія). Згідно з цією теорією, складний і простий напружені стани вважаються рівномірними, якщо в них однакова потенціальна енергія зміни форми, накопичена до моменту настання небезпечного стану $\dot{I}_{\dot{\sigma}}^i = \dot{I}_{\dot{\sigma}}^{\bar{n}}$.

З врахуванням (2.26) і (2.27) умову рівномірності можна записати так:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}.$$

Якщо при простому напруженому стані допустиме напруження дорівнює $[\sigma]$, то умова міцності при складному напруженому стані виразиться співвідношенням

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (2.32)$$

Енергетична теорія міцності відображає настання текучості матеріалу. Вона добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів і набула поширення в інженерній практиці.

Крім названих вище, широке використання при дослідженнях складного напруженого стану мають теорії міцності Мора, П.П. Баландіна, І.М. Миролюбова і інші.

2.5. Деформація зсуву

2.5.1. Чистий зсув. Розглянемо окремий випадок плоского напруженого стану, коли на головних площадках діють однакові за величиною і протилежні за знаком головні напруження $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ (рис.2.32). При такому напруженому стані на площадках, нахилених до головних площадок під кутом $\pi/4$, як видно з формул (2.19), нормальні напруження дорівнюють нулю

$$\sigma_\alpha = \sigma \left(\cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

а дотичні дорівнюють головним

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma) \sin \frac{\pi}{2} = \sigma.$$

Плоский напружений стан, при якому на взаємно перпендикулярних площадках діють тільки дотичні напруження, називається чистим зсувом, а площадки, на яких відсутні нормальні напруження – площадками чистого зсуву.

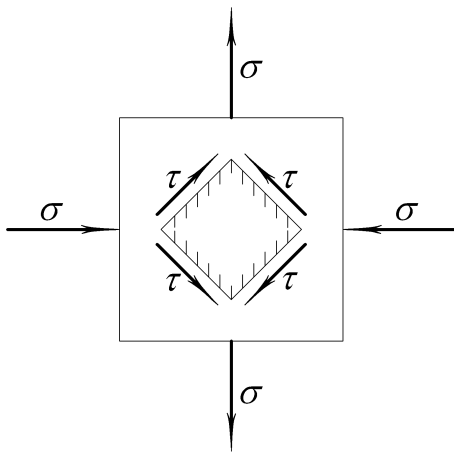


Рис. 2.32. Чистий зсув

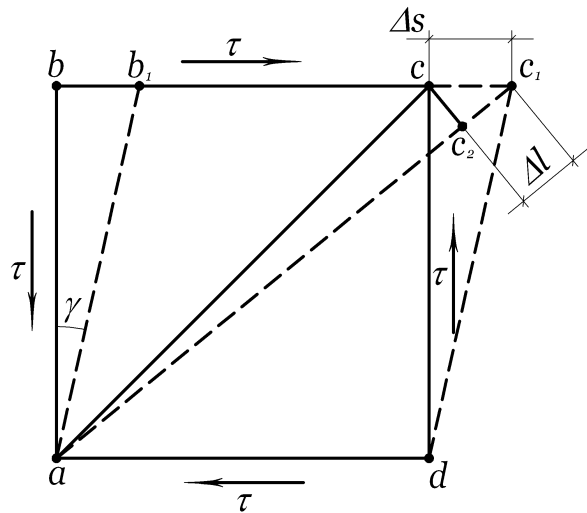


Рис. 2.33. До деформації чистого зсуву

При чистому зсуві прямокутний елемент, вирізаний в околі деякої точки, перебуває в умовах зсуву. Видовження його сторін дорівнюють нулю.

Розглянемо прямокутний кубик, який перебуває в умовах чистого зсуву. На рис. 2.33 зображена тільки його фасадна грань $abcd$. Оскільки деформації кубика малі, тому відрізок абсолютного видовження Δl діагоналі ac приблизно дорівнює C_1C_2 , а трикутник CC_1C_2 можна вважати рівнобедреним і прямокутним $\Delta l = \Delta S \sin 45^\circ$.

Враховуючи, що $\Delta l/l = \varepsilon$ (l довжина діагоналі ac), $\Delta S = dc \cdot \gamma = l \gamma \sin 45^\circ$, одержимо

$$l \varepsilon = l \gamma \sin^2 45^\circ,$$

або

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma.$$

Застосувавши до волокна ac узагальнений закон Гука (2.23) при $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, можна записати

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu).$$

Враховуючи, що при чистому зсуві $\sigma = \tau$, на підставі співвідношення (2.33) отримаємо

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma. \quad (2.33)$$

Ввівши позначення

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.34)$$

із (2.26) знаходимо зв'язок між напруженням τ та деформацією γ

$$\tau = G\gamma, \quad (2.35)$$

який називається законом Гука при зсуві. Величина G залежить від механічних характеристик матеріалу і називається модулем пружності другого роду або модулем зсуву. Вона для різних матеріалів визначається експериментально і наводиться в довідниках.

Для встановлення фізичного змісту модуля зсуву G покладемо в (2.35) $\gamma = 1$ ($\text{tg}\gamma = 1$). Тоді

$$G = \tau.$$

Остання рівність показує, що модуль зсуву визначає дотичне напруження, яке потрібно створити на гранях квадрата, щоб він деформувався у ромб з гострим кутом величиною $\pi/4$. На практиці таких напружень реалізувати не можна.

Співвідношення (2.34) виражає залежність між трьома пружними характеристиками матеріалу: модулем Юнга \mathring{A} , модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν .

Якщо позначити через S площу грані вирізаного кубика, а через Q – сумарну силу, що діє

на його протилежних гранях, то з урахуванням рівностей $\tau = Q/S$ і $\gamma = \Delta S/l$ визначимо пружне лінійне переміщення при зсуві

$$\Delta S = \frac{Ql}{GS}. \quad (2.36)$$

Величина GS називається жорсткістю стержня при зсуві.

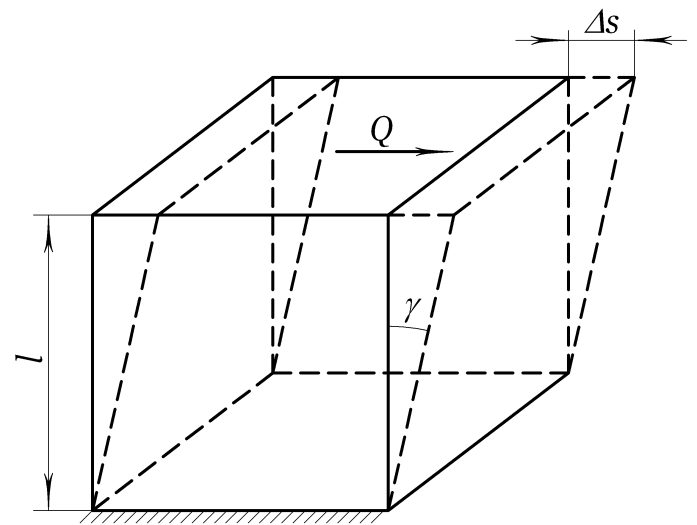


Рис. 2.34. Потенціальна енергія при зсуві

2.5.2. Потенціальна енергія деформації при зсуві. Розглянемо стержень у формі прямокутного паралелепіпеда, зображеного на рис. 2.34. Одну з його граней закріпимо нерухомо, а до інших граней прикладемо статичні дотичні сили Q . Верхня грань зсунеться відносно закріпленої на величину ΔS .

В межах закону Гука робота A , виконана силою Q на переміщенні ΔS , дорівнює потенціальній енергії деформації і обчислюється за формулою $\dot{I} = \dot{A} = \frac{1}{2} Q \Delta S$.

Зусилля, що діють на бокових гранях, перпендикулярні до переміщення ΔS , тому роботи не виконують. Підставляючи замість ΔS його значення із (2.36), одержимо

$$\dot{I} = \frac{Q^2 l}{2GS},$$

де S – площа зсуву.

Питому потенціальну енергію визначимо за формулою

$$\dot{I}_o = \frac{\dot{I}}{V} = \frac{Q^2 l}{2GS(Sl)} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma, \quad (2.37)$$

де $\tau = Q/S$ – дотичні напруження зсуву.

2.5.3. Практичний розрахунок заклепкових з'єднань на зріз і зминання. Прикладом елемента металевих конструкцій, який працює на деформацію, близько до зсуву, може служити заклепка.

Розглянемо роботу заклепки, що з'єднує два металевих листи (рис. 2.35а). Нехай на листи діють сили P , що прикладені перпендикулярно до заклепки і намагаються зсунути листи один відносно другого. При цьому на заклепку передаються навантаження, які при збільшенні сили D зможуть перерізати заклепку по площині mn .

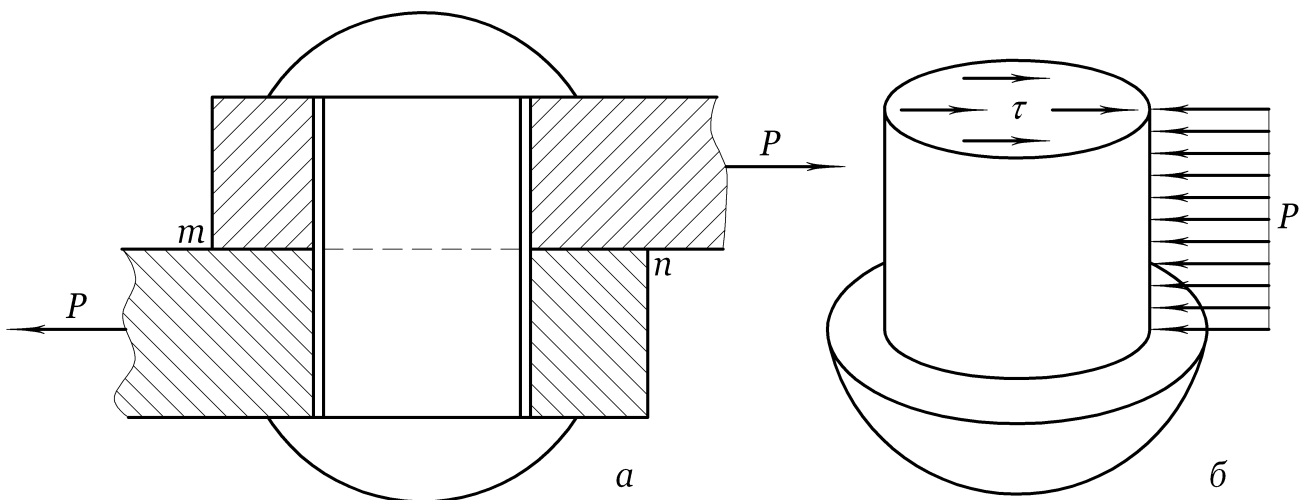


Рис. 2.35. Розрахунок заклепкових з'єднань

Для визначення дотичних напружень, що діють в площині mn , умовно відкинемо верхню частину заклепки, а її дію на нижню замінимо внутрішніми силами (рис. 2.35б). Нехтуючи згином заклепки, і, прийнявши, що дотичні напруження в її перерізі розподілені рівномірно, знаходимо з умов рівноваги нижньої частини

$$\tau_{\varphi\delta} = D/S_{\varphi\delta},$$

де $S_{\zeta\delta}$ – площа поперечного перерізу заклепки.

Якщо позначити через $[\tau_{\zeta\delta}]$ допустиме дотичне напруження матеріалу, то умова міцності заклепки на зріз матиме вигляд

$$\tau_{\zeta\delta} = D/S_{\zeta\delta} \leq [\tau_{\zeta\delta}]. \quad (2.38)$$

Величину допустимого напруження на зріз зазвичай приймають

$$[\tau_{\zeta\delta}] = (0,6 \div 0,8)[\sigma].$$

Якщо заклепкове з'єднання містить n заклепок і k листів, то

$$S_{\zeta\delta} = \frac{\pi d^2}{4} n(k-1).$$

Тоді розрахункова формула (2.38) запишеться так

$$\frac{4\pi}{\pi d^2 n(k-1)} \leq [\tau_{\zeta\delta}]. \quad (2.39)$$

Ця формула при проектному розрахунку дозволяє визначити одну з величин d, n, k або P , якщо всі інші задані (P – сумарне навантаження, що діє з одного боку заклепкового з'єднання).

Оскільки при експлуатації заклепкового з'єднання відбувається стиск двох тіл з циліндричними поверхнями, то в зоні контакту виникають нормальні напруження зминання $\sigma_{\zeta i}$. При великих значеннях $\sigma_{\zeta i}$ може відбуватися зминання заклепки або листа, внаслідок чого отвір або переріз заклепки набере овальну форму. Розрахунок заклепкового з'єднання на зминання проводять наближено: площу зминання умовно замінюють площею діаметрального перерізу $S_{\zeta i} = d\delta_{\min}$, де d – діаметр отвору або заклепки, δ_{\min} – товщина тоншого із листів. Це зумовлено нерівномірним законом розподілу контактних напружень в зоні зминання.

Умова міцності на зминання записується у вигляді

$$\sigma_{\zeta i} = D/S_{\zeta i} \leq [\sigma_{\zeta i}],$$

або

$$\frac{D}{d\delta_{\min} n} \leq [\sigma_{\zeta i}], \quad (2.40)$$

де $[\sigma_{\zeta i}]$ – допустиме напруження матеріалу на зминання. Звичайно приймають $[\sigma_{\zeta i}] = (1,8 \div 2,0)[\sigma]$.

Задача 2.3. Визначити кількість заклепок діаметром $d = 5$ мм, необхідних для з'єднання трьох листів товщиною $\delta = 10$ мм, якщо $D = 120$ кН, $[\tau_{\zeta\delta}] = 100$ МПа, $[\sigma_{\zeta i}] = 240$ МПа (рис. 2.36).

Розв'язування. У даному випадку $k = 3$. З умови міцності на зріз (2.39) знаходимо

$$i_{\sigma\delta} \geq \frac{4P}{\pi d^2 [\tau_{\sigma\delta}] (k-1)} = \frac{4 \cdot 120}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^5 \cdot 2} = 3.$$

На підставі умови задачі внутрішній лист має меншу площу змінання, ніж два зовнішніх, тому

$$\delta_{\min} = 10i\delta.$$

На підставі формули (2.40)

$$n_{\sigma i} \geq \frac{D}{d\delta_{\min} [\sigma_{\sigma i}]} = \frac{120}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 240 \cdot 10^{-3}} = 10.$$

Із двох значень n , визначених з умов міцності на зріз і змінання, вибираємо більше $n = 10$.

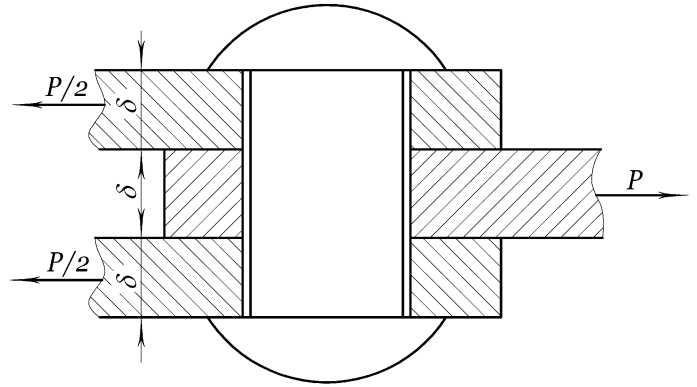


Рис. 2.36. До розв'язку задачі 2.3.

Таким же методом проводиться розрахунок на зріз і змінання болтових з'єднань.

2.6. Кручення круглих стержнів

Деформація кручення викликається зрівноваженою системою пар, що діють в площинах, перпендикулярних до осі стержня (вала). Якщо вал закріплений в підшипниках A, B , то деформації кручення буде зазнавати ділянка CD (рис. 2.37).

Елементарним способом задача про кручення стержня розв'язується лише для стержнів круглого поперечного перерізу.

Наочне уявлення про деформацію кручення можна одержати на моделі круглого гумового стержня, на поверхні якого нанесена сітка напрямних (кола) і твірних (прямолінійні відрізки) (рис. 2.38а). Якщо один кінець стержня закріпити нерухомо, а до іншого прикласти пару сил з моментом $M_{\text{не}}$, то внаслідок деформації напрямні перейдуть самі в себе, твірні циліндра перетворяться в гвинтові лінії, а квадрати на поверхні – в ромби (рис. 2.38б).

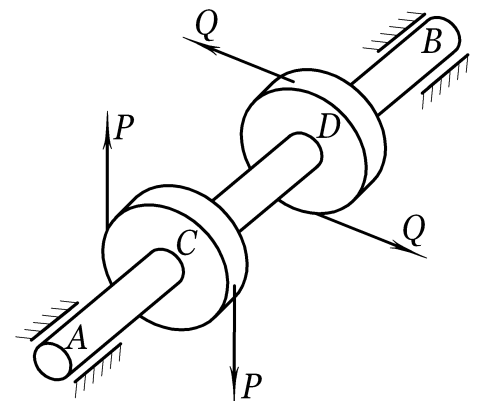


Рис. 2.37. Деформація кручення

Результати точного розв'язку цієї задачі методами теорії пружності і дані експериментальних досліджень дозволяють прийняти такі додаткові робочі гіпотези:

1) Плоскі поперечні перерізи круглого стержня залишаються плоскими в процесі деформації. Вони можуть лише повертатися один відносно одного навколо свого центра.

2) Радіуси поперечних перерізів залишаються прямолінійними.

3) Відстані між двома будь-якими поперечними перерізами не змінюються в процесі деформації.

Ці гіпотези показують, що деформація кручення проявляється у взаємному повороті перерізів і вимірюється в радіанах. Величина цього повороту, як показують досліди, пропорційна відстані між перерізами. Оскільки відстань між поперечними перерізами залишається незмінною, то це означає, що нормальні напруження в них дорівнюють нулю. Дотичні напруження, що виникають в поперечних перерізах, в силу гіпотези 2, вздовж радіусів змінюються за лінійним законом.

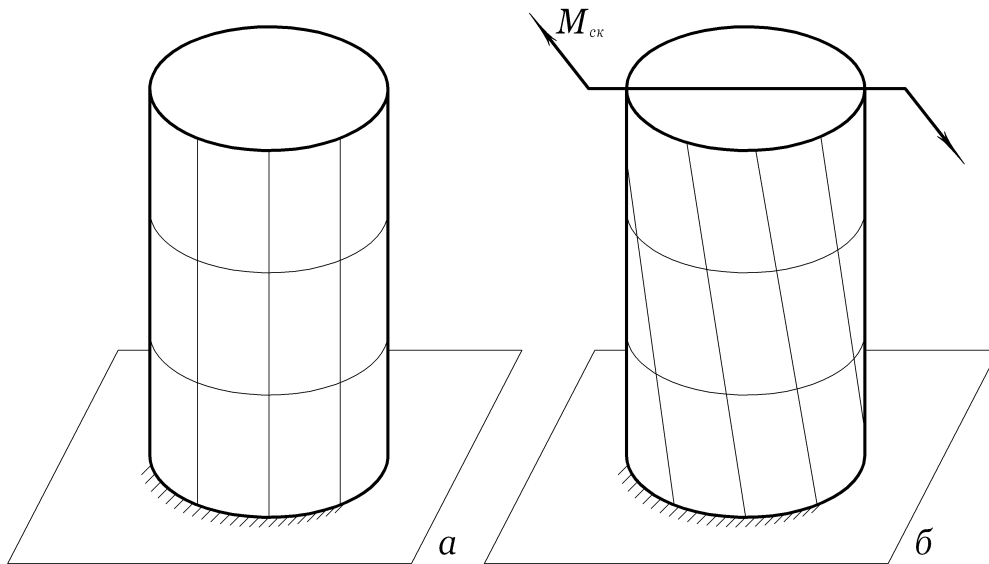


Рис. 2.38. Моделювання деформації кручення

Таким чином, деформацію кручення можна розглядати як чистий зсув, викликаний взаємним поворотом перерізів.

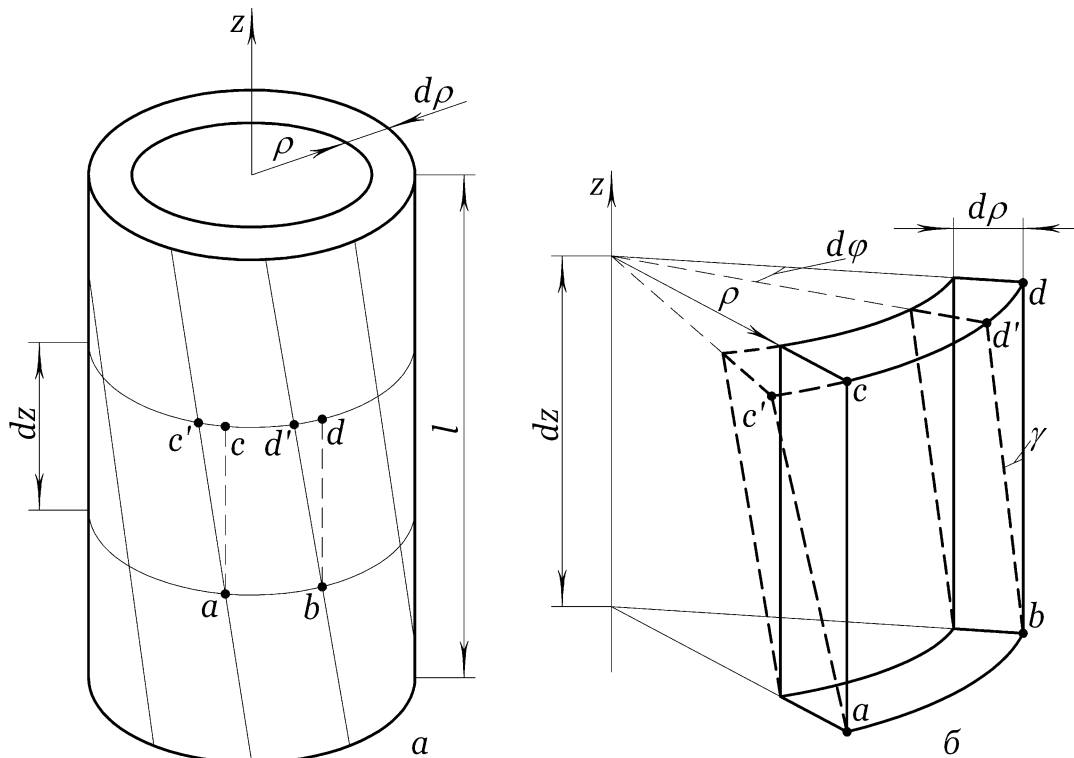


Рис. 2.39. До визначення дотичних напружень при крученні

Якщо один кінець круглого стержня зацімлений, а до другого прикладено скручувальний зовнішній момент $M_{\bar{n}\bar{e}}$, то внутрішні сили в довільному перерізі стержня зводяться до пари сил, момент якої називається крутильним моментом і позначається $M_{\bar{e}\bar{d}}$. За величиною крутильний момент дорівнює скручувальному $M_{\bar{n}\bar{e}}$, але протилежний за знаком. В загальному випадку навантаження крутильний момент в довільному перерізі стержня дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що діють по один бік від розглядуваного перерізу. Якщо один кінець стержня зацімлений, то суму

моментів знаходять з боку незакріпленого кінця (при цьому відпадає необхідність визначати реакцію в зацімленні).

2.6.1. Визначення напружень і деформацій. Для визначення дотичних напружень в поперечних перерізах виділимо із стержня елементарну циліндричну трубку товщиною $d\rho$ з внутрішнім радіусом ρ . Розглянемо елемент $abcd$, вирізаний із цієї трубки (рис. 2.39а). До деформації він являв собою прямокутний паралелепіпед з ребрами dz , ab і $d\rho$. Внаслідок дії в поперечному перерізі крутильного моменту відбувається зсув цього паралелепіпеда на кут γ . На рис. 2.39б деформований паралелепіпед зображено штриховою лінією. Кут зсуву верхньої його грані відносно нижньої співпадає з відносним кутом повороту відповідних перерізів стержня і дорівнює

$$d\varphi = \widetilde{dd}' / \rho = \widetilde{cc}' / \rho$$

де \widetilde{dd}' , \widetilde{cc}' – абсолютний зсув паралелепіпеда.

Відносний зсув обчислюється за формулою

$$\gamma = \frac{\widetilde{dd}'}{dz} = \frac{\widetilde{cc}'}{dz}.$$

Виключимо з двох останніх рівностей величини \widetilde{dd}' і \widetilde{cc}' . Тоді $\rho d\varphi = \gamma dz$ або $\gamma = \rho d\varphi / dz$.

Використавши закон Гука при зсуві (2.27), одержимо формулу для визначення дотичних напружень

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.41)$$

Ця формула показує, що дотичні напруження вздовж радіуса поперечного перерізу змінюються за лінійним законом. На підставі закону парності дотичних напружень, такі ж напруження будуть діяти в поздовжніх перерізах стержня (рис. 2.40). Цим пояснюється поява поздовжніх тріщин при скручуванні стержня із волокнистого матеріалу. Формула (2.41) незручна для практичного використання, оскільки містить невідому величину $d\varphi/dz$.

Виразимо дотичні напруження через внутрішні сили, що виникають в перерізі стержня, тобто через крутильний момент $M_{\text{ск}}$.

У площині поперечного перерізу стержня виділимо елементарну площадку dS і обчислимо момент сил, що діють на неї, відносно центра ваги перерізу (рис. 2.41)

$$dM = \rho\tau dS.$$

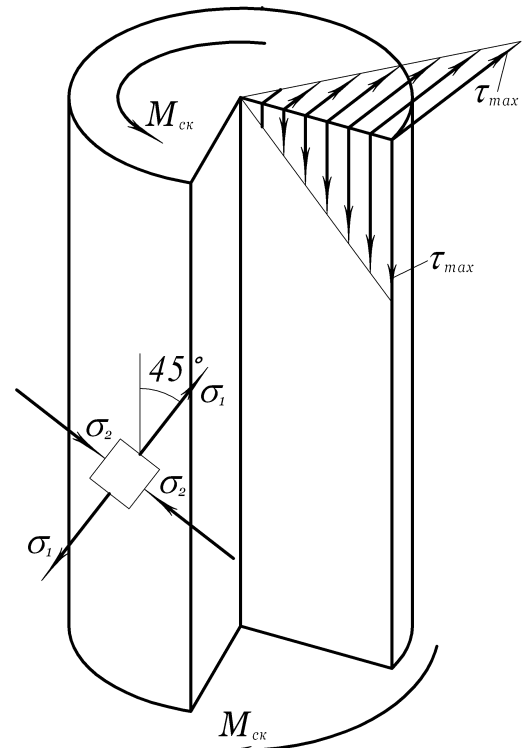


Рис. 2.40. Парність дотичних напружень при крученні

Сумарний крутильний момент $M_{\epsilon\delta}$ знайдемо шляхом інтегрування по площі поперечного перерізу

$$M_{\epsilon\delta} = \iint_{(S)} \rho \tau dS .$$

Підставляючи значення τ із (2.41), і, враховуючи, що для заданого перерізу величина $d\varphi/dz$ стала, одержимо

$$M_{\epsilon\delta} = G \frac{d\varphi}{dz} \iint_{(S)} \rho^2 dS .$$

Вираз $\iint_{(S)} \rho^2 dS$ визначає полярний момент інерції площі перерізу I_p , тому останню рівність можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\epsilon\delta}}{GI_{\delta}} . \quad (2.42)$$

Враховуючи (2.42), із (2.41) одержимо формулу для визначення дотичних напружень в довільній точці поперечного перерізу

$$\tau = \frac{M_{\epsilon\delta} \rho}{I_{\delta}} . \quad (2.43)$$

Як видно з цієї формули, максимальні напруження діють в точках, розміщених на контурі поперечного перерізу ($\rho = r$).

Поклавши в (2.43) $\rho = r$, маємо

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\epsilon\delta} r}{I_{\delta}} = \frac{M_{\epsilon\delta}}{W_{\delta}} . \quad (2.44)$$

де $W_{\delta} = I_{\delta}/r$ – полярний момент опору поперечного перерізу стержня. Нормальні напруження в поперечних перерізах стержня при його крученні дорівнюють нулю.

Вище було встановлено, що по гранях елемента $abcd$ (рис. 2.39а) діють лише дотичні напруження, тобто такий елемент перебуває в умовах чистого зсуву. Враховуючи властивості чистого зсуву (п.2.5.1), робимо висновок, що на площадках, нахилених під кутом $\pi/4$ до осі стержня, діють тільки нормальні напруження σ_1, σ_2 (рис. 2.40), причому $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$. Ці напруження називаються головними напруженнями при крученні.

Для визначення повного кута закручування стержня на ділянці, що деформується, проінтегруємо рівність (2.42) по довжині стержня

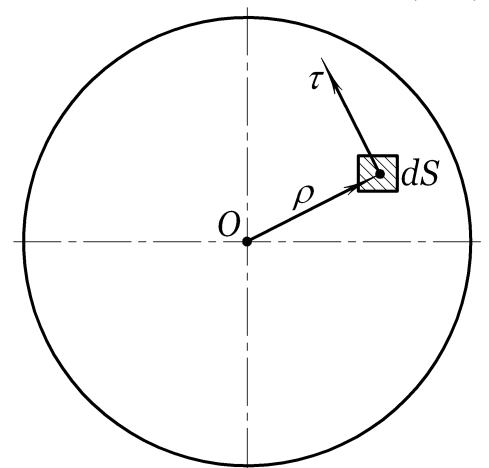


Рис. 2.41. Визначення дотичних напружень через внутрішні сили

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\epsilon\delta} dz}{GI_{\delta}} = \frac{M_{\epsilon\delta} l}{GI_{\delta}}. \quad (2.45)$$

Величина GI_p , яка має розмірність ($\text{Н} \cdot \text{м}^2$), називається жорсткістю стержня на кручення.

Зауважимо, що формула (2.45) має місце тільки при сталому на довжині l крутильному моменту. Якщо крутильний момент по довжині стержня змінюється стрибкоподібно, або стержень має ступінчасту зміну перерізу, то взаємний кут повороту кінців вала визначається сумуванням кутів закручування по ділянках, на яких величини $M_{\epsilon\delta}$ і I_{δ} сталі.

Відносний кут закручування стержня обчислюється за формулою

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{\epsilon\delta}}{GI_{\delta}}. \quad (2.46)$$

2.6.2. Потенціальна енергія деформації при крученні. Якщо при крученні стержня з одним закріпленим кінцем скручувальний момент зростає від нуля до кінцевого значення $M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}}$ плавно, то в межах границі пропорційності має місце формула (2.45). При деформації стержня момент $M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}}$ виконує роботу

$$A = \frac{1}{2} M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}} \varphi,$$

яка дорівнює потенціальній енергії, що накопичується в стержні під час його кручення. Підставляючи замість φ його значення з (2.45), знаходимо формулу для обчислення потенціальної енергії

$$\dot{I} = A = \frac{M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}}^2 l^2}{2GI_{\delta}}. \quad (2.47)$$

При припиненні дії скручувального моменту $M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}}$ потенціальна енергія повертає (розкручує) стержень в початкове (недеформоване) положення.

2.6.3. Розрахунок валів на кручення. Міцність при крученні стержня круглого суцільного або трубчастого поперечного перерізу, згідно з (2.44), визначається умовою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\tilde{n}\tilde{\epsilon}}^{\max}}{W_{\delta}} \leq [\tau], \quad (2.48)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні.

Співвідношення (2.48) служить підставою для:

1. Визначення необхідного діаметра вала за відомим крутильним моментом і допустимим напруженням (проектний розрахунок).
2. Перевірки напружень, що виникають в стержні відомих розмірів при заданому навантаженні (перевірочний розрахунок).

3. Визначення допустимого моменту, який може бути переданий валом з відомим діаметром і заданим допустимим напруженням.

Крім забезпечення умови міцності, при проектуванні валів вимагається, щоб вал мав достатню жорсткість, тобто щоб його відносний кут закручування не перевищував деякої наперед заданої величини $[\theta]$, яка називається допустимим кутом закручування.

Виходячи з формули (2.46), умову жорсткості вала запишемо у вигляді

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{ед}}^{\max}}{GI_{\delta}} \leq [\theta]. \quad (2.49)$$

Розглянемо задачу визначення діаметру суцільного і кільцевого (трубчастого) перерізу з умов міцності і жорсткості.

Для суцільного вала

$$I_{\delta} = \pi d^4 / 32; \quad W_{\delta} = \pi d^3 / 16;$$

для трубчастого

$$I_{\delta} = \pi D^4 / 32 (1 - \alpha^4); \quad W_{\delta} = \pi D^3 / 16 (1 - \alpha^4),$$

де $\alpha = d/D$; d, D – внутрішній і зовнішній діаметри вала. Відповідно підставляючи ці значення в умови міцності (2.48) і жорсткості (2.49), знаходимо.

суцільний вал

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{ед}}^{\max}}{\pi[\tau]}}; \quad d_a = \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{ед}}^{\max}}{\pi G[\theta]}} \quad (2.50)$$

трубчастий вал

$$D_i = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{ед}}^{\max}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}; \quad D_a = \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{ед}}^{\max}}{\pi G[\theta](1 - \alpha^4)}} \quad (2.51)$$

При одночасному розрахунку на міцність і жорсткість вибирають більший діаметр.

Для визначення найбільшого крутильного моменту, що діє в перерізі стержня, необхідно побудувати епюру $M_{\text{ед}}$.

Розглянемо побудову такої епюри для стержня, зображеного на рис. 2.42. Розіб'ємо стержень на чотири характерні ділянки і визначимо крутильний момент на кожній з них методом перерізів

I ділянка $M_{\text{ед}} = 0$;

II ділянка $M_{\text{ед}} = M_1 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

III ділянка $M_{\text{ед}} = M_1 + M_2 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

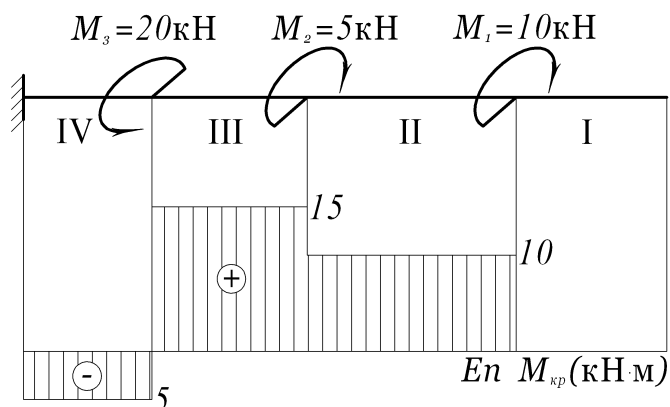


Рис. 2.42. Епюра крутильних моментів

IV ділянка $M_{\varepsilon\delta} = M_1 + M_2 - M_3 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

При цьому враховано, що крутильний момент в будь-якому перерізі стержня дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що діють справа від розглядуваного перерізу. Знак крутильного моменту визначають, виходячи із напрямку зовнішніх моментів. Додатні ординати епюри крутильних моментів відкладаємо вгору, від'ємні – вниз від горизонтальної лінії, яка називається нульовою віссю епюри.

Часто скручувальні моменти доводиться визначати за потужністю D , що передається на вал від двигуна або знімається з нього. Якщо через ω позначити кутову швидкість вала, то формула, яка зв'язує D (кВт), ω (с⁻¹) і $M_{\varepsilon\delta}$ (кН·м) має вид

$$M_{\varepsilon\delta} = D/\omega. \quad (2.52)$$

Задача 2.4. Сталевий вал суцільного перерізу передає потужність $D=15$ кВт при кутовій швидкості $\omega=30$ с⁻¹. Визначити діаметр вала з умов міцності і жорсткості, якщо $[\tau]=80$ МПа; $[\theta]=0,00875$ м⁻¹; $G=8\cdot 10^4$ МПа.

Розв'язання. Визначаємо крутильний момент, що діє в перерізах вала. За формулою (2.52)

$$M_{\varepsilon\delta} = M_{\varepsilon\delta} = \frac{P}{\omega} = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Із (2.50) визначаємо

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{16M_{\varepsilon\delta}^{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 0,5}{3,14\cdot 8\cdot 10^4}} = 31,7\cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_a = \sqrt[4]{\frac{32M_{\varepsilon\delta}^{\max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 0,5}{3,14\cdot 8\cdot 10^7\cdot 0,00875}} = 51,9\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Остаточно приймаємо $d = 52$ мм.

2.6.4. Розрахунок циліндричних пружин з малим кроком. Розглянемо циліндричну пружину з малим кроком, для якої приймаємо позначення: R – середній радіус витків; d – діаметр дроту пружини; n – кількість робочих витків; h – крок пружини. Малим вважається такий крок h , при якому кут підйому витка не перевищує 15° .

Допустимо, що один кінець пружини закріплений, а до іншого прикладено силу P , яка напрямлена вздовж осі пружини (рис. 2.43а).

Для визначення внутрішніх сил, що виникають в

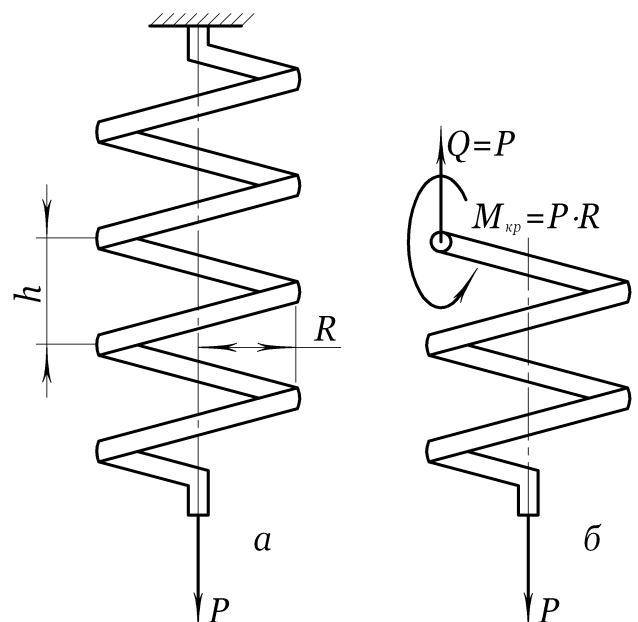


Рис. 2.43. До розрахунку пружини

поперечних перерізах дроту, умовно розріжемо виток площиною, яка проходить через вісь пружини, і розглянемо рівновагу нижньої частини, зображеної на рис. 2.43б.

При малому кроці пружини вважаємо, що переріз витка являє собою круг діаметром d . Оскільки зовнішнє навантаження (сила P) діє вздовж осі пружини, то на основі теореми про паралельне перенесення сили (розд.1 п.6) внутрішні сили в перерізі витка можуть бути замінені поперечною силою $Q = P$ і крутильним моментом $M_{\delta} = PR$, які зрівноважують зовнішню силу P . Сила Q приводить в перерізі витка до деформації зсуву, а момент M_{δ} – до деформації кручення.

В припущенні рівномірного розподілу напружень зсуву по перерізу дротини їх значення обчислюється за формулою,

$$\tau_{\delta} = 4P/(\pi d^2).$$

Максимальні напруження кручення, згідно з (2.34), дорівнюють

$$\tau_i = \frac{M_{\delta}}{W_{\delta}} = \frac{16PR}{\pi d^3}.$$

Максимальні сумарні напруження виникають на поверхні пружини і визначаються за формулою

$$\tau_{\max} = \tau_{\delta} + \tau_i = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right).$$

Для пружин з малим кроком $d/R \ll 1$ нехтують другим доданком в дужках, що еквівалентно нехтуванню впливом поперечних сил, і формула для визначення найбільших дотичних напружень лише від деформації кручення приймає вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (2.53)$$

Міцність пружини за дотичними напруженнями в цьому випадку забезпечується умовою

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (2.54)$$

Для визначення осадки (видовження) λ пружини визначимо потенціальну енергію її деформації під дією сили P (впливом поперечних сил нехтуємо).

Враховавши, що довжина всього стержня пружини $l = 2\pi Rn$, а $M_{\delta} = PR$, $I_{\delta} = \pi d^4/32$, із формули (2.47) знаходимо

$$\dot{\lambda} = \dot{l} = \frac{32D^2 R^3 n}{Gd^4}. \quad (2.55)$$

Робота сили P , яка виконана на переміщенні λ при статичному її прикладанні, дорівнює

$$\dot{A} = \frac{1}{2} D \dot{\lambda}. \quad (2.56)$$

Порівнюючи праві частини в (2.55), (2.56), знаходимо при $D = 2R$

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \quad (2.57)$$

Якщо позначити через $[\lambda]$ допустиму осадку пружини, то умова її жорсткості матиме вигляд

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \leq [\lambda]. \quad (2.58)$$

Задача 2.5. Визначити діаметр d дроту і необхідну кількість витків для пружини з такими даними: $D = 70 \text{ мм}$; $\varnothing = 10 \text{ мм}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $[\lambda] = 10 \text{ мм}$; $[\tau] = 500 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Із розрахункової формули на міцність (2.54) визначаємо діаметр дроту

$$d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10 \cdot 3,5 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 500 \cdot 10^3}} = 1,52 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Число робочих витків визначаємо з умови жорсткості (2.58)

$$n = \frac{Gd^4[\lambda]}{8PD^3} = \frac{8 \cdot 10^7 (1,52 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^3} \approx 2 .$$

2.7. Деформація згину

2.7.1. Загальні поняття про поперечний згин балок. Якщо на призматичний стержень діє система зрівноважених сил, перпендикулярних до його осі і розміщених в одній площині, то виникає деформація поперечного згину, при якій вісь стержня буде викривлятися.

Площина, в якій діють всі сили, в тому числі і опорні реакції, називається силовою площиною.

Площина, що проходить через вісь стержня і одну із головних осей поперечного перерізу стержня, називається головною площиною інерції стержня.

Якщо силова площина збігається з однією із двох головних площин інерції стержня, то згин, який виникає при цьому, називається прямим або плоским згином. У всіх інших випадках згин називається просторовим або косим. Стержень, що зазнає деформації прямого поперечного згину, будемо називати балкою.

Для реалізації згину балка має бути певним чином закріплена. Це здійснюється за допомогою опор, які можна поділити на три групи:

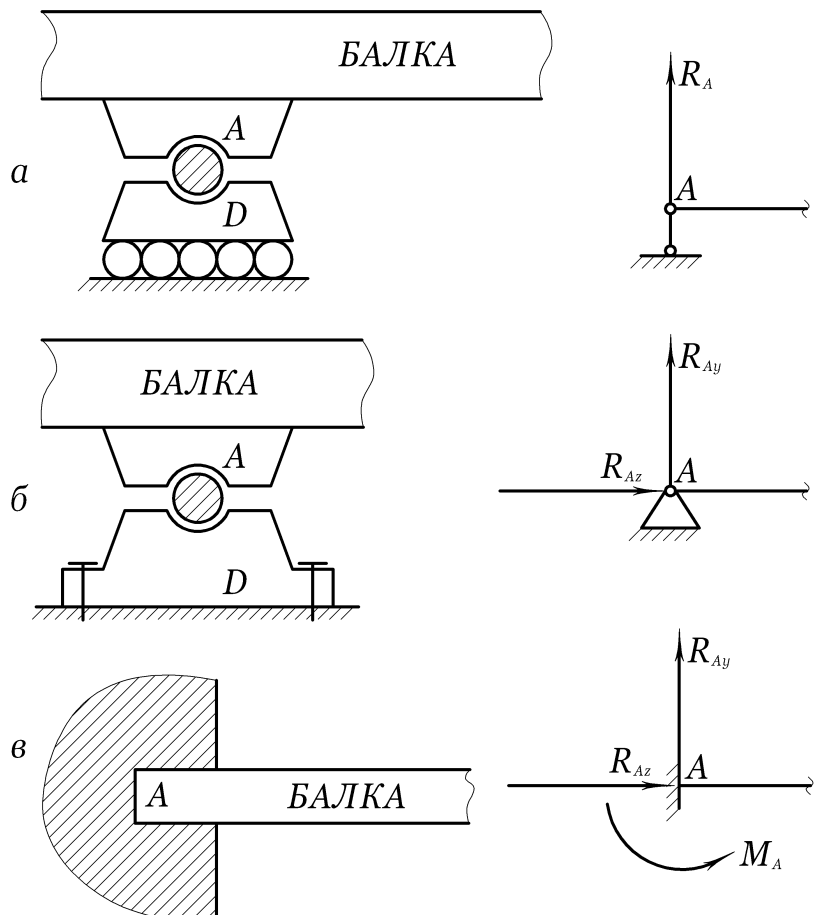


Рис. 2.44. Конструктивні схеми та умовні позначення опор

шарнірно-рухомі, шарнірно-нерухомі, жорстко зацімлені опори.

Конструктивні схеми і умовні позначення названих опор зображені на рис. 2.44.

Шарнірно-рухома опора (рис. 2.44а) дає можливість балці повертатися відносно осі катка і переміщатися вздовж осі балки. В опорі виникає одна реакція R_A , напрямлена перпендикулярно до осі балки.

У шарнірно-нерухомій опорі (рис. 2.44б) подушка D закріплена, що виключає горизонтальне (вздовж осі балки) переміщення. Шарнірно-нерухома опора накладає на балку дві в'язі, тому реакція може бути зображена двома складовими R_{Ay} , R_{Az} .

Жорстко зацімлена опора (рис. 2.44в) виключає можливість обертання балки і переміщення в площині її згину. При цьому виникають дві реактивні сили R_{Ay} і R_{Az} та реактивний момент M_A .

Для визначення величин реакцій, що виникають в опорах балок, використовують умови рівноваги плоскої системи сил. Якщо всі реакції опор можуть бути визначені з рівнянь статичної твердого тіла, то такі балки називаються статично визначеними. Балки, для яких число опорних реакцій перевищує число умов рівноваги, називаються статично невизначеними.

У даному розділі ми будемо розглядати лише статично визначені балки двох типів, зображених на рис. 2.45 (а – двохопорна балка, б – консольна балка). Порядок визначення опорних реакцій такий же, як і при розв'язуванні задач статички.

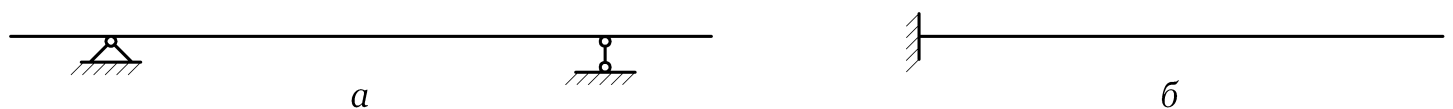


Рис. 2.45. Двохопорна та консольна балки

Зауважимо, що при прямому поперечному згині горизонтальні складові опорних реакцій дорівнюють нулю, якщо зовнішні сили діють перпендикулярно до осі балки.

Розглянемо двохопорну балку, зображену на рис. 2.46. Вісь z напрямимо вздовж осі балки, а вісь y – вертикально вниз. Оскільки навантаження поперечне, то реакції R_A і R_B будуть вертикальними. Запишемо моментні умови рівноваги для системи паралельних сил відносно точок A і B

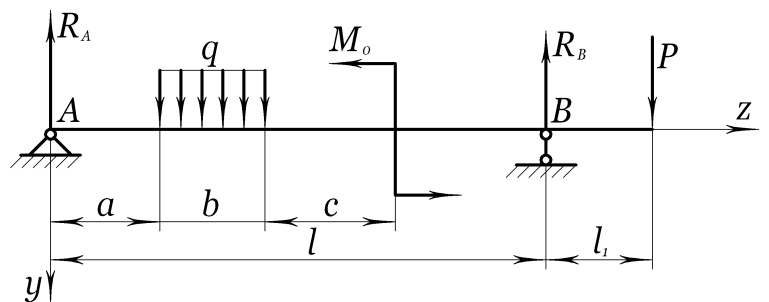


Рис. 2.46. Реакції балки при зовнішньому навантаженні перпендикулярно осі балки

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - M_0 - R_B \cdot l + P(l_1 + l) = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = R_A l - qb\left(l - a - \frac{b}{2}\right) - M_0 + Pl_1 = 0.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо

$$R_A = \frac{qb\left(l - a - \frac{b}{2}\right) + M_o - Pl_1}{l}, \quad R_B = \frac{qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - M_o + P(l + l_1)}{l}.$$

Додавши останні рівності

$$R_A + R_B = qb + P \quad (\sum F_{iy} = 0),$$

одержали силову умову рівноваги. Це означає, що опорні реакції визначені правильно.

2.7.2. Поперечна сила і згинальний момент. Для визначення напружень, що виникають в перерізах балки, необхідно знати внутрішні силові фактори в цих перерізах. Для їх визначення, як і в інших випадках деформації стержня, користуємось методом перерізів.

Розглянемо балку, навантажену зрівноважено системою вертикальних сил і пар, що діють в одній із головних площин інерції балки (в цю систему включено і опорні реакції) (рис. 2.47).

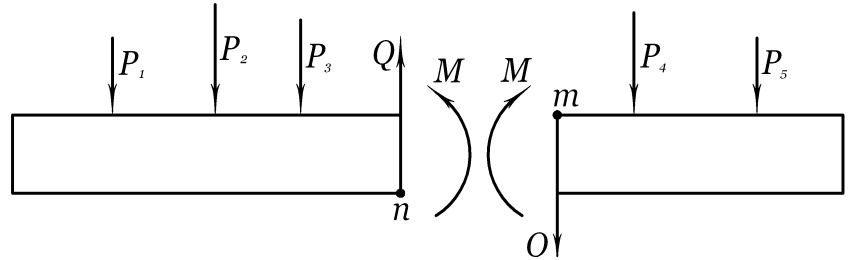


Рис. 2.47. Поперечна сила та згинальний момент

Пари сил, що діють на балку, можуть бути подані двома силами, а розподілене навантаження – системою великої кількості однакових паралельних сил.

Допустимо, що поперечним перерізом mn балка розділена на дві частини. Оскільки система сил, що діє на одну з частин балки, може бути зведена до однієї вертикальної сили і пари сил, то внутрішні сили, що діють в перерізі mn , повинні зводитися до сили Q і пари сил з моментом M_{ca} .

Сила Q називається поперечною силою, а момент M_{ca} – згинальним моментом, що діють в розглядуваному перерізі.

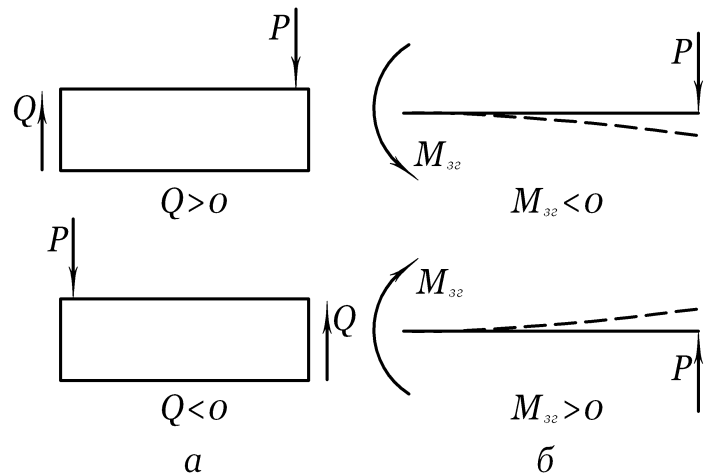


Рис. 2.48. Визначення напрямків сили та моменту

Для визначення поперечної сили Q складемо силову умову рівноваги для системи паралельних сил, які діють на ліву частину балки

$$-P_1 + P_2 + P_3 - Q = 0,$$

звідки

$$Q = -P_1 + P_2 + P_3. \quad (2.59)$$

Для визначення згинального моменту M_{ca} складемо моментну умову рівноваги відносно центра ваги перерізу mn всіх сил і пар, що діють на ліву частину балки

$$M_o(\vec{P}_1) + M_o(\vec{P}_2) + M_o(\vec{P}_3) - M_{ca} = 0,$$

або

$$M_{\zeta\bar{a}} = M_o(\vec{P}_1) + M_o(\vec{P}_2) + M_o(\vec{P}_3). \quad (2.60)$$

Рівності (2.59), (2.60) визначають правила, для знаходження поперечної сили і згинального моменту.

Поперечна сила в довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил (включаючи і опорні реакції), що діють на балку з одного боку від розглядуваного перерізу.

Згинальний момент у довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил і пар, що діють на балку з одного боку від розглядуваного перерізу відносно центра його ваги.

Для того, щоб величини Q і $M_{\zeta\bar{a}}$, обчислені при розгляді лівої і правої частин балки, мали однакові значення, необхідно дотримуватися певного правила знаків.

Поперечну силу Q будемо вважати додатною, якщо зовнішня сила P , що її викликає, обертає розглядувану частину балки відносно центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою (рис. 2.48а). Згинальний момент, викликаний силою P , вважаємо додатним, якщо ця сила згинає розглядувану частину балки опуклістю вниз (рис. 2.48б).

Поперечна сила і згинальний момент, будучи функціями зовнішнього навантаження, змінюються по довжині балки. Для знаходження їх максимальних значень необхідно будувати графіки Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ по довжині балки. Такі графіки називаються епюрами поперечних сил і згинальних моментів.

Розглянемо приклади побудови епюр Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ для різних типів навантаження на балку.

I. Двохопорна балка.

а) Нехай зовнішнє навантаження на балку складається із зосередженої сили P (рис. 2.49). Для визначення опорних реакцій R_A і R_B складаємо моментні умови рівноваги відносно точок A, B відповідно

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = R_B(a+b) - Pa = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = R_A(a+b) - Pb = 0,$$

звідки

$$R_A = \frac{Pb}{a+b}; \quad R_B = \frac{Pa}{a+b}.$$

Додавши дві останні рівності $R_A + R_B = P$ одержимо силову умову рівноваги $\sum F_{iy} = 0$. Це означає, що реакції визначені правильно.

Побудову епюр Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ будемо проводити на характерних ділянках. Вибираючи довільний переріз ділянки, віддалений від опори на відстань z , запишемо на основі правил визначення Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ їх аналітичні вирази (на I ділянці розглядаємо ліву частину балки, на ділянці II – праву).

I ділянка $Q = R_A$; $M_{\zeta\bar{a}} = R_A \cdot z_1$; $0 \leq z_1 \leq a$.

II ділянка $Q = -R_B$; $M_{\zeta\bar{a}} = R_B \cdot z_2$; $0 \leq z_2 \leq b$.

Оскільки вирази для Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ на кожній ділянці лінійні, то для побудови епюр достатньо визначити шукані величини на межах ділянок.

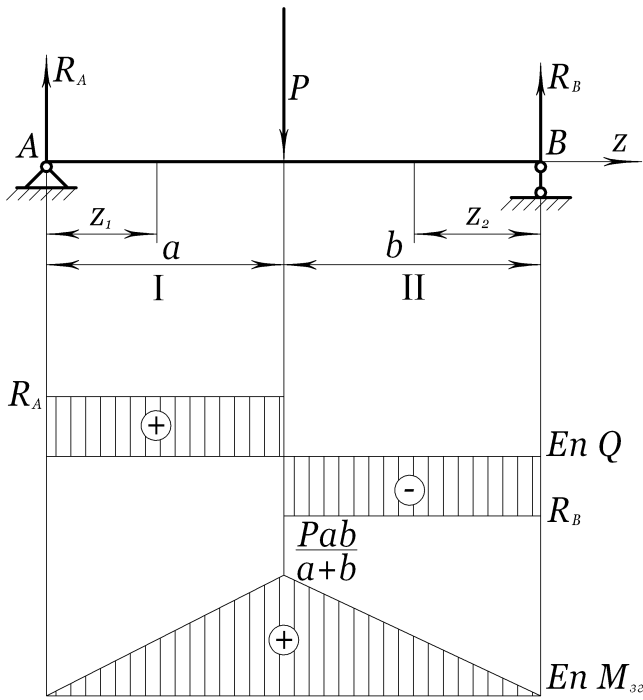


Рис. 2.49. Двохопорна балка
завантажена зосередженою силою

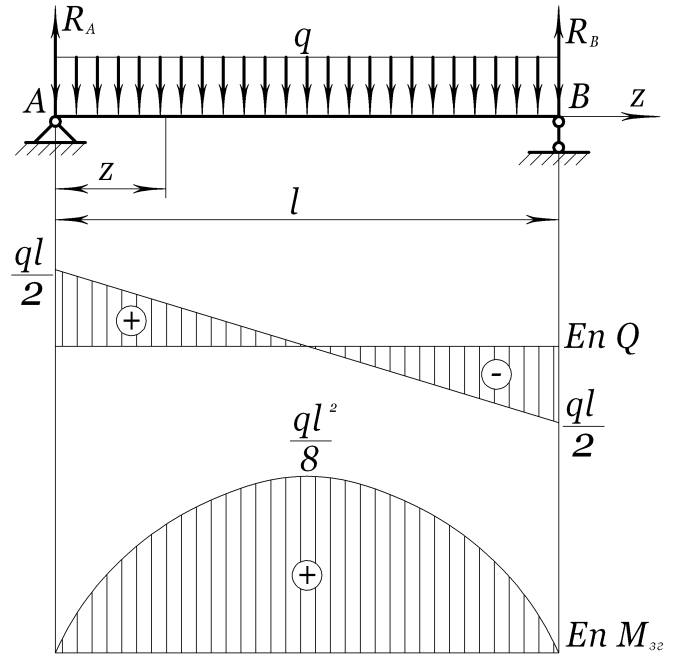


Рис. 2.50. Двохопорна балка
завантажена рівномірним навантаженням

I ділянка $Q(0) = Q(a) = R_A$; $M_{сз}(0) = 0$; $M_{сз}(a) = \frac{Pab}{a+b}$

II ділянка $Q(0) = Q(b) = -R_B$; $M_{сз}(0) = 0$; $M_{сз}(b) = \frac{Pab}{a+b}$

Епюри Q і $M_{сз}$, побудовані за здобутими результатами, зображено на рис. 2.49.

б) Якщо балка завантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 2.50),

то, виходячи з умов симетрії задачі, знаходимо $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

Розглянемо довільний переріз на відстані z від опори A . Запишемо в цьому перерізі вирази для Q і $M_{сз}$, замінюючи розподілене навантаження на ділянці довжиною z рівнодійною qz , яка прикладена в центрі ділянки

$$Q = R_A - qz; \quad M_{сз} = R_A \cdot z - qz \cdot \frac{z}{2}, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Обчислимо числові значення Q і M на кінцях балки

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2}; \quad M_{сз}(0) = M_{сз}(l) = 0.$$

Оскільки згинальний момент змінюється за параболічним законом, то його найбільше значення буде в центрі балки ($z = l/2$)

$$M_{сз}^{\max} = M(l/2) = \frac{1}{8}ql^2.$$

За числовими даними на рис. 2.50 побудовано епюри Q і $M_{сз}$.

в) Розглянемо випадок навантаження двохопорної балки парою сил з моментом M_0 (рис. 2.51).

На підставі розв'язку прикладу 2 (розділ 1) знаходимо $R_A = R_B = M_0/l$.

Запишемо аналітичні вирази для Q і $M_{\zeta\bar{a}}$ на кожній ділянці.

I ділянка $Q = -R_A$; $M_{\zeta\bar{a}} = -R_A \cdot z_1$; $0 \leq z_1 \leq a$

II ділянка $Q = -R_B$; $M_{\zeta\bar{a}} = -R_B \cdot z_2$; $0 \leq z_2 \leq l - a$

Визначимо поперечні сили та згинальні моменти на межах ділянок і будуємо відповідні епюри.

I ділянка $Q(0) = Q(a) = -R_A$; $M_{\zeta\bar{a}}(0) = 0$; $M_{\zeta\bar{a}}(a) = -M_0 a/l$.

II ділянка $Q(0) = Q(l-a) = -R_B$; $M_{\zeta\bar{a}}(0) = 0$; $M_{\zeta\bar{a}}(l-a) = -M_0(l-a)/l$.

II. Консольна балка.

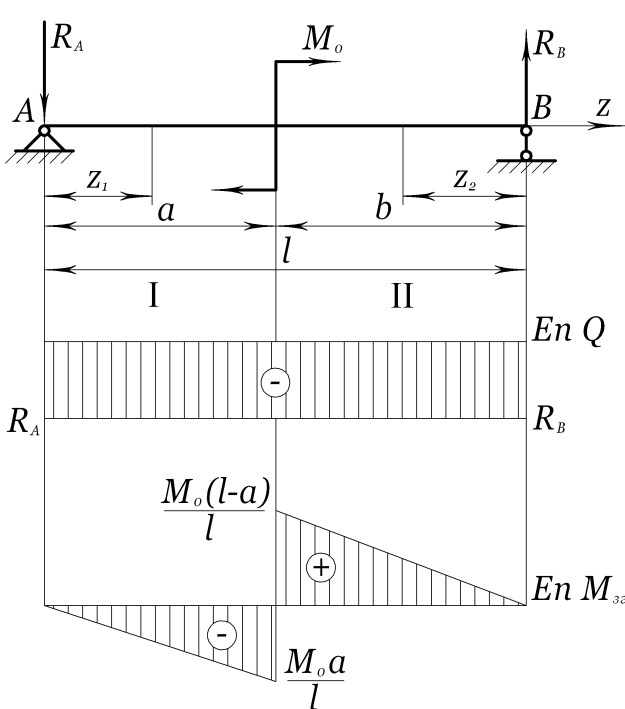


Рис. 2.51. Двохопорна балка
завантажена парою сил

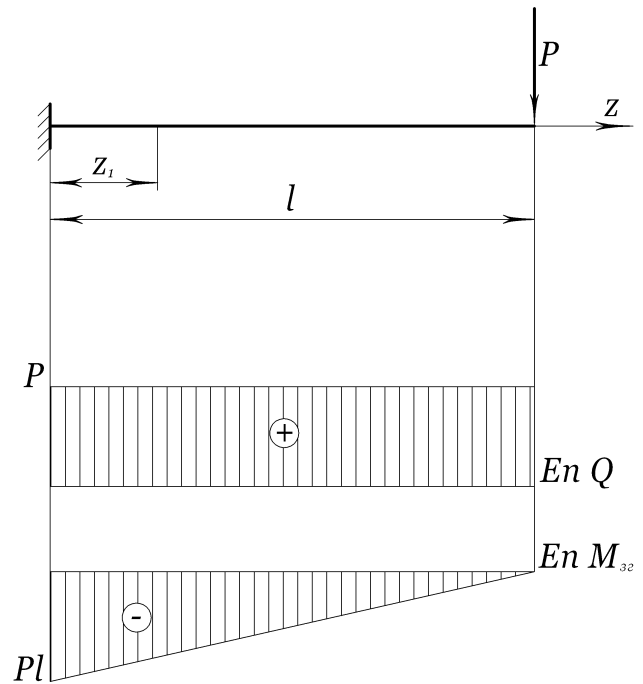


Рис. 2.52. Консольна балка
завантажена зосередженою силою

а) Консоль, навантажена на кінці зосередженою силою (рис. 2.52)

$$Q = P; \quad M_{\zeta\bar{a}} = -P(l - z); \quad 0 \leq z \leq l$$

Визначаємо значення Q і M на кінцях балки

$$Q(0) = Q(l) = P; \quad M_{\zeta\bar{a}}(0) = -Pl; \quad M_{\zeta\bar{a}}(l) = 0.$$

б) Побудуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, навантаженої на кінці парою сил з моментом M_0 (рис. 2.53)

$$Q = 0; \quad M_{\zeta\bar{a}} = M_0$$

У даному випадку в поперечних перерізах балки виникає тільки згинальний момент. Такий згин

називається чистим згином.

в) Нехай балка навантажена по всій довжині рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 2.54).

$$Q = q(l - z); \quad M_{\zeta\bar{\alpha}} = -q(l - z)\frac{(l - z)}{2}; \quad 0 \leq z \leq l$$

Визначаємо значення Q і $M_{\zeta\bar{\alpha}}$ на кінцях балки і будуємо епюри

$$Q(0) = ql; \quad Q(l) = 0; \quad M_{\zeta\bar{\alpha}}(0) = -\frac{ql^2}{2}; \quad M_{\zeta\bar{\alpha}}(l) = 0.$$

Наведені вище приклади дають певну залежність між видом епюр поперечних сил та згинальних моментів і зовнішнім навантаженням. Якщо на балку діє система зовнішніх сил, то, використавши принцип незалежності дії сил, епюри Q і $M_{\zeta\bar{\alpha}}$ будують шляхом алгебраїчного додавання відповідних епюр від кожної зовнішньої сили окремо.

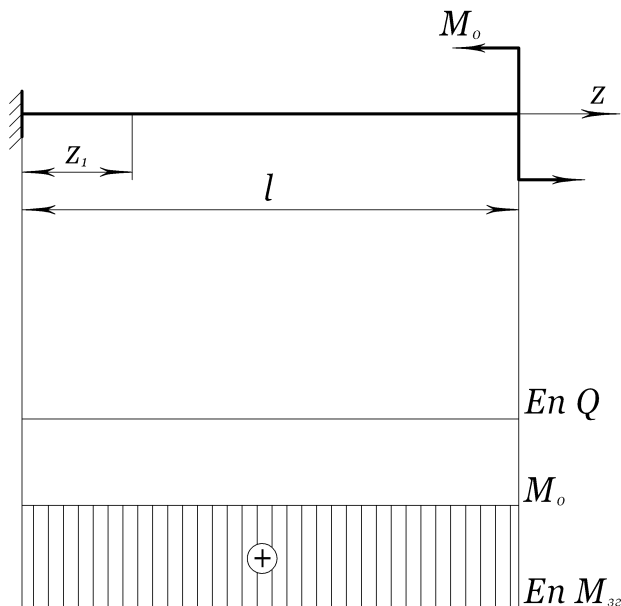


Рис. 2.53. Консольна балка завантажена парою сил

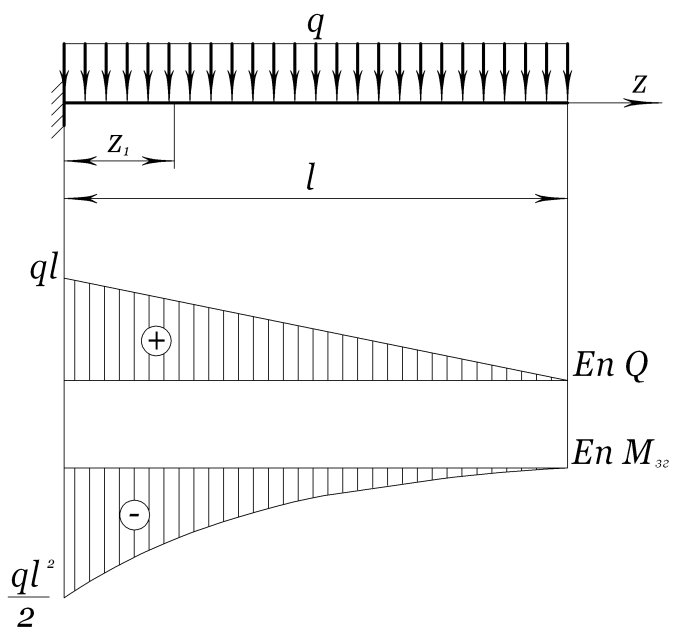


Рис. 2.54. Консольна балка завантажена рівномірним навантаженням

2.7.3. Нормальні напруження при чистому згині. Розглянемо випадок прямого згину балки, коли в її поперечних перерізах діє лише згинальний момент, однаковий по всій довжині балки, а поперечна сила дорівнює нулю. Така деформація називається чистим згином.

Нехай на фасадну грань призматичної балки нанесена прямокутна сітка (рис. 2.55а). Після згину моментами M , прикладеними на кінцях балки, вона набере вигляду, зображеного на рис. 2.55б. При цьому спостерігається, що первісно вертикальні прямі mn , m_1n_1 залишаються прямими, але обертаються одна відносно одної на деякий кут $\Delta\varphi$; причому в опуклій частині балки відстані між вертикальними лініями збільшуються, а в протилежній – зменшуються. Ширина перерізу у верхній частині збільшується. Проведений експеримент дозволяє прийняти такі додаткові припущення, покладені в основу елементарної теорії чистого згину:

1. Вважаємо, що балка складається із поздовжніх волокон, які можуть лише розтягуватися або стискуватися, не чинячи взаємного бокового тиску (цим і пояснюється різна ширина перерізу у верхній і нижній частинах балки).

2. Плоскі до деформації перерізи не викривляються, при деформації вони повертаються один відносно одного.

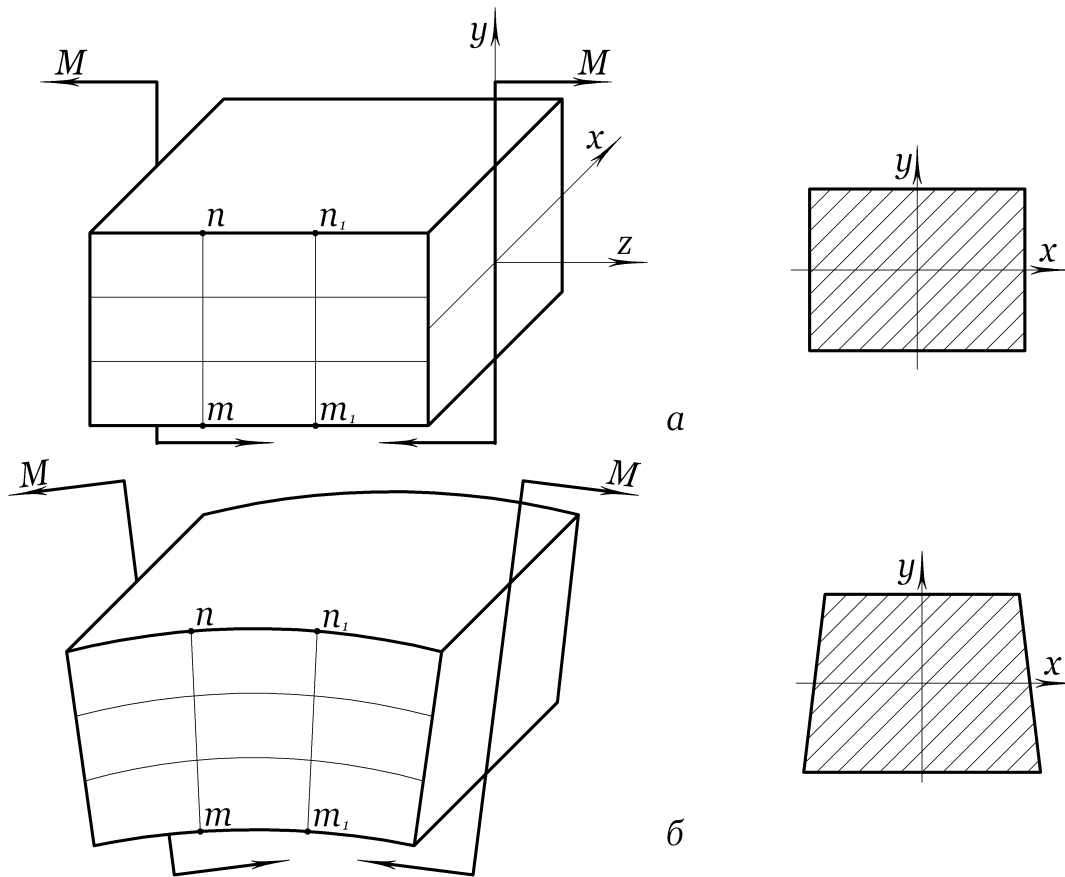


Рис. 2.55. До нормальних напружень при чистому згині

Оскільки деформація розтягу і стиску по висоті перерізу балки змінюється неперервно, то можна допустити, що всередині балки існує шар волокон, який розділяє зони розтягу і стиску. Цей шар називається нейтральним. Його перетин з поперечним перерізом балки визначає лінію, відносно якої відбувається поворот поперечних перерізів. Ця лінія називається нейтральною лінією поперечного перерізу. Усі волокна нейтрального шару не змінюють своєї довжини (не напружені), тому нормальні напруження в точках нейтральної лінії відсутні.

Для визначення нормальних напружень, що виникають при чистому згині, розглянемо деформацію частинки балки довжиною dz , виділеної двома поперечними перерізами mn і m_1n_1 (рис. 2.56а).

В деформованому стані ця частинка матиме вигляд, зображений на рис. 2.56б. Нехай нейтральному шару на цьому рисунку відповідає лінія ab . Якщо позначити через ρ радіус кривини нейтрального шару, а кут взаємного повороту перерізів mn і m_1n_1 через $d\varphi$, то для волокна a_1b_1 , віддаленого від нейтрального шару на відстань y , маємо $a_1b_1 = (\rho + y)d\varphi$.

Враховуючи, що $ab = dz = \rho d\varphi$, визначимо абсолютне видовження волокна a_1b_1

$$\Delta l = \overline{a_1b_1} - \overline{ab} = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi,$$

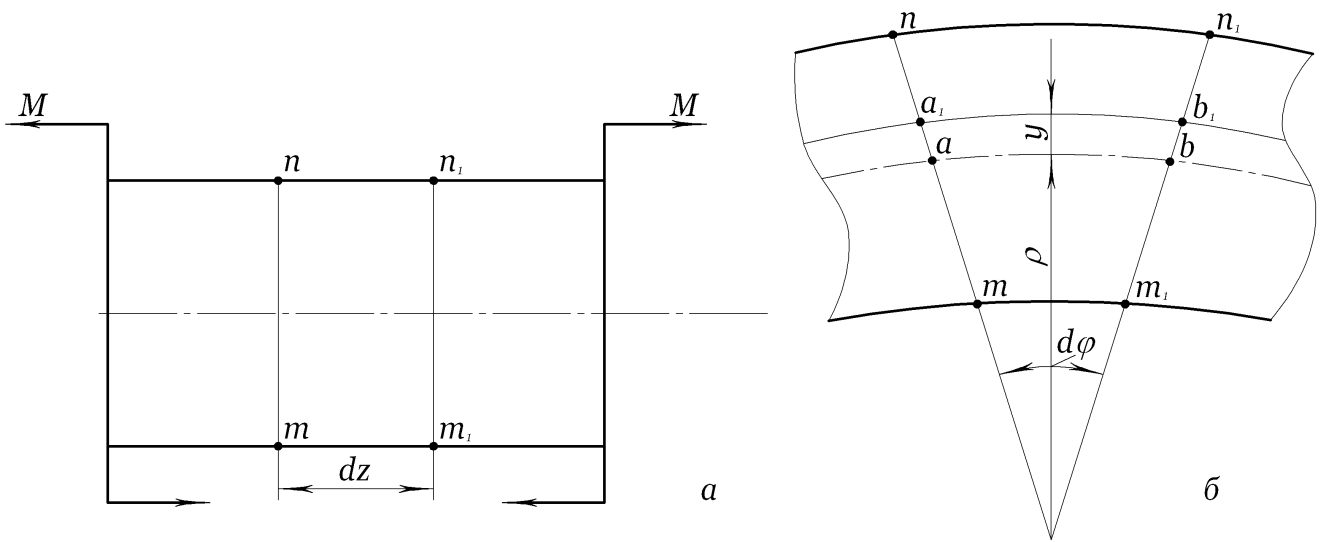


Рис. 2.56. До визначення нормальних напружень при чистому згині

або відносне видовження

$$\varepsilon = \Delta l / \overline{ab} = y / \rho.$$

Застосувавши закон Гука при розтягу-стиску (2.3), визначаємо відповідне нормальне напруження волокна

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (2.61)$$

Формула (2.61) виражає лінійний закон розподілу нормальних напружень по висоті балки. Як показують численні експерименти, по ширині балки (при заданому y) нормальні напруження однакові.

Виразимо нормальні напруження, що виникають в перерізах балки, через згинальний момент M . Розглянемо довільний переріз балки, для якого одну з координатних осей (x) направимо вздовж нейтральної осі. Вісь Z напрямимо по осі балки. Виберемо на відстані y від нейтральної осі елементарну площадку dS (рис.2.57). Нормальна сила, що діє на неї, дорівнює σdS , або з урахуванням (2.61)

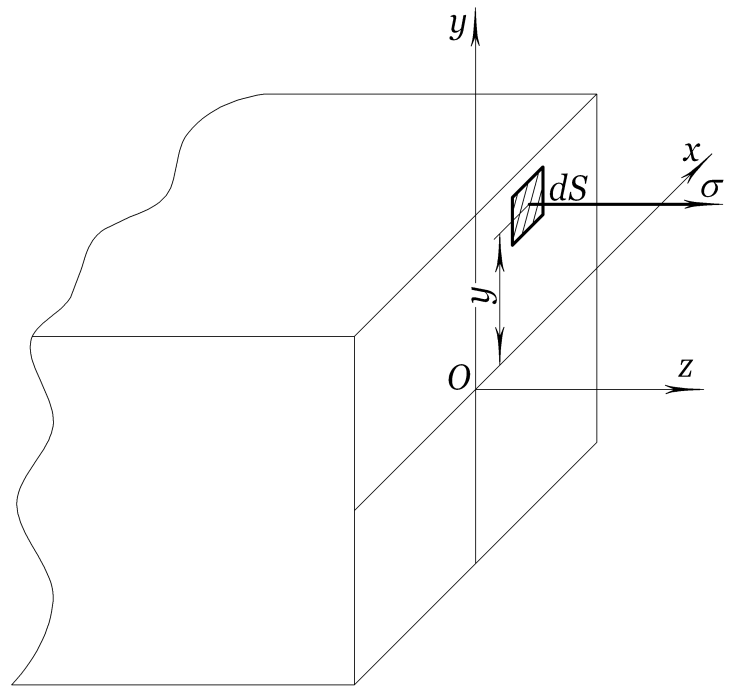


Рис. 2.57. До визначення нормальних напружень

$$\sigma dS = E \frac{y}{\rho} dS. \quad (2.62)$$

Враховуючи, що внутрішні сили при чистому згині зводяться тільки до згинального моменту, одержимо

$$\iint_{(S)} \sigma dS = 0; \quad \iint_{(S)} \sigma y dS = M.$$

Враховуючи (2.62) із останніх співвідношень визначаємо

$$\iint_{(S)} \frac{Ey}{\rho} dS = \frac{E}{\rho} \iint_{(S)} y dS = \frac{E}{\rho} S_x = 0,$$

$$\iint_{(S)} \frac{E}{\rho} y^2 dS = \frac{E}{\rho} \iint_{(S)} y^2 dS = \frac{E}{\rho} I_x = M.$$

З першої рівності знаходимо, що $S_x = 0$. Використовуючи властивості осевого статичного моменту площі, приходимо до висновку, що нейтральна вісь перерізу (вісь x) проходить через центр його ваги. Із другої рівності маємо

$$\frac{1}{\rho} = \frac{My}{I_x}. \quad (2.63)$$

Вираз (2.63) визначає залежність між згинальним моментом і кривиною балки. Величина EI_x називається жорсткістю балки при згині.

Підставляючи (2.63) в (2.62), знаходимо основну формулу для визначення нормальних напружень при чистому згині

$$\sigma = \frac{My}{I_x}. \quad (2.64)$$

На рис. 2.58 зображена еюра нормальних напружень по висоті перерізу балки. Максимальні напруження виникають в точках, найбільш віддалених від нейтральної осі ($y = y_{\max}$).

Враховуючи в (2.64), що $I_x/y_{\max} = W_x$, одержимо

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}. \quad (2.65)$$

Дотичні напруження в поперечних перерізах балки при її чистому згині дорівнюють нулю.

2.7.4. Напруження при поперечному згині. Формули (2.64) і (2.65) виведені для чистого згину. При поперечному згині балки в її перерізах, крім згинального моменту, виникає поперечна сила, яка приводить до появи дотичних напружень. На основі закону парності дотичних напружень останні виникають і в поздовжніх перерізах балки. Ці

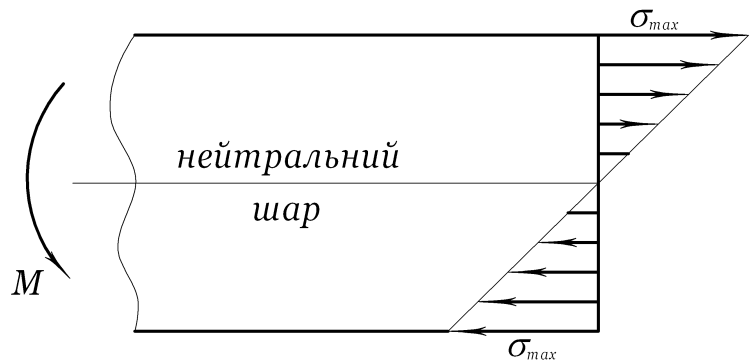


Рис. 2.58. Нормальні напруження при поперечному згині

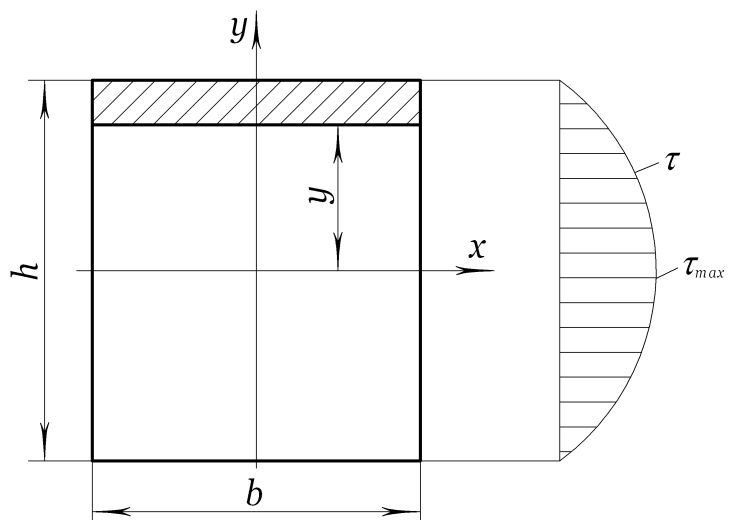


Рис. 2.59. Дотичні напруження при поперечному згині

напруження викликають деформацію зсуву, внаслідок чого поперечні перерізи балки при її згині не залишаються плоскими.

Як показує досвід і теоретичні дослідження поперечного згину, викривлення поперечних перерізів практично не впливають на величину нормальних напружень. Тому для їх визначення користуємося тими ж формулами (2.64), (2.65), що й при чистому згині. При цьому величина M змінюється вздовж осі балки і визначається шляхом побудови епюри $M_{c\bar{a}}$.

Дотичні напруження в точках перерізу, віддалених від нейтральної осі на відстань y , в припущенні їх рівномірного розподілу по ширині балки, визначаються за формулою Журавського, яка наводиться без доведення

$$\tau = \frac{Q(z)S_x^y}{bI_x}, \quad (2.66)$$

де $Q(z)$ – поперечна сила в розглядуваному перерізі балки; S_x^y – статичний момент відносно нейтральної осі тієї частини перерізу, яка розміщена вище або нижче розглядуваного рівня волокон (на рис. 2.59 заштрихована); I_x – осьовий момент інерції перерізу відносно нейтральної осі; b – ширина перерізу на рівні розглядуваних волокон. Розподіл дотичних напружень по висоті балки залежить від форми поперечного перерізу. На рис. 2.59 зображена епюра τ для прямокутного перерізу.

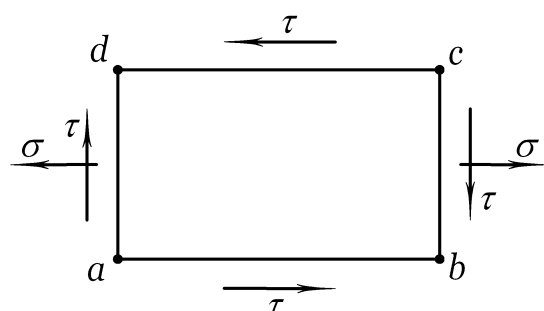


Рис. 2.60. Плоский напружений стан при поперечному згині

Найбільші дотичні напруження виникають в точках, розташованих на нейтральній лінії. В точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії, дотичні напруження дорівнюють нулю.

Оскільки при поперечному згині нормальні і дотичні напруження однакові по ширині балки, а боковий взаємний тиск волокон відсутній, то в кожній точці балки має місце плоский напружений стан. Для перевірки цього твердження виріжемо в околі розглядуваної точки елементарний паралелепіпед, дві грані якого паралельні поперечним перерізам, а дві інші – паралельні нейтральному шару. Фасадна грань $abcd$ такого паралелепіпеда зображена на рис. 2.60.

По гранях ad і bc діють нормальні σ і дотичні τ напруження, що визначаються формулами (2.64), (2.66). За законом парності дотичні напруження τ будуть діяти і по гранях ab і cd .

Головні напруження σ_1 і σ_2 при цьому визначаються за формулами

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (2.67)$$

2.7.5. Вибір перерізів і перевірка міцності при згині. При розрахунку балок на міцність за допустимими напруженнями виходять з умови міцності для нормальних напружень

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.68)$$

де M_{\max} – найбільший згинальний момент, що діє в одному із перерізів балки (визначається шляхом побудови епюри); W_x – момент опору перерізу балки відносно нейтральної осі.

При проектному розрахунку балки всі зовнішні навантаження, що діють на балку, та їх розміщення відомі. Відомими вважаються також форма поперечного перерізу і матеріал балки.

Прийнявши за допустиме напруження $[\sigma]$, визначаємо з умови (2.68) необхідний момент опору

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (2.69)$$

за яким визначаються розміри поперечного перерізу так, щоб дійсний момент опору був близьким до заданого.

Якщо балка виготовлена з прокатного профілю, то відповідний номер профілю вибираємо із таблиць сортаменту в залежності від необхідного моменту опору W_x .

Формула для перевірки міцності балки за дотичними напруженнями, згідно з (2.66), має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\max}}{b I_x} \leq [\tau]. \quad (2.70)$$

Тут Q_{\max} – найбільша поперечна сила; S_x^{\max} – статичний момент верхньої частини поперечного перерізу відносно нейтральної осі; d – ширина перерізу вздовж нейтральної осі; I_x – осьовий момент інерції перерізу.

Міцність балки за головними напруженнями перевіряють в залежності від прийнятої теорії міцності за однією із формул (2.29)-(2.32) при $\sigma_3 = 0$. Якщо вибрати першу теорію міцності, то розрахункова формула матиме вигляд

$$\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.71)$$

Приклад 6. Для сталевій консольній балки, зображеної на рис. 2.61, підібрати двотавровий переріз з умови міцності за нормальними напруженнями. Перевірити міцність вибраної балки за дотичними і головними напруженнями згідно з першою теорією міцності, якщо $a = 1\text{ м}$, $b = 2\text{ м}$, $c = 0,5\text{ м}$, $d = 1\text{ м}$, $P = 10\text{ кН}$, $q = 5\text{ кН/м}$, $\dot{I}_0 = 8\text{ кН}\cdot\text{м}$, $[\sigma] = 160\text{ МПа}$, $[\tau] = 80\text{ МПа}$.

Побудову епюр починаємо з вільного кінця балки. При ньому нема потреби визначати реакції в зацімленні. Визначаємо значення Q і

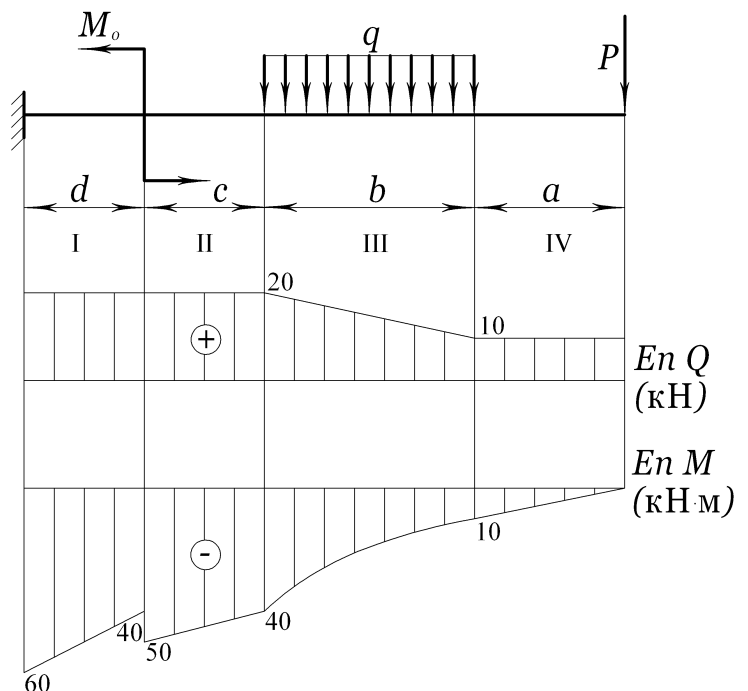


Рис. 2.61. До розв'язування прикладу 6

$M_{\zeta\bar{a}}$ на межах ділянок, а потім сполучимо ці точки відповідними лініями.

I ділянка

$$Q^i = Q^{\bar{e}} = D; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^i = 0; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^{\bar{e}} = -D\bar{a};$$

II ділянка

$$Q^i = D; \quad Q^{\bar{e}} = D + qb; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^i = -Pa; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^{\bar{e}} = -D(a+b) - qb^2/2;$$

III ділянка

$$Q^i = Q^{\bar{e}} = D + qb; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^i = -D(a+b) - qb^2/2; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^{\bar{e}} = -D(a+b+\bar{n}) - qb(c+b/2);$$

IV ділянка

$$Q^i = Q^{\bar{e}} = D + qb; \quad \dot{I}_{\zeta\bar{a}}^i = -D(a+b+\bar{n}) - qb(c+b/2) + \dot{I}_0;$$

$$\dot{I}_{\zeta\bar{a}}^{\bar{e}} = -D(a+b+\bar{n}) - qb(c+b/2+d) + M_0.$$

Епюри Q і $M_{\zeta\bar{a}}$, побудовані за одержаними даними, наведені на рис. 2.61. При цьому

$M_{\max} = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $Q_{\max} = 20 \text{ кН}$. Необхідний момент опору W_x визначаємо за формулою (2.69)

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60}{160 \cdot 10^3} = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Із таблиці сортаменту (ГОСТ 8239-72) вибираємо двотавр № 27 для якого

$$W_x = 371 \text{ см}^3; \quad I_x = 5010 \text{ см}^4; \quad d = 0,6 \text{ см}; \quad S_x^{\max} = 210 \text{ см}^3.$$

Знаходимо реальні нормальні напруження, що виникають в перерізі з найбільшим згинальним моментом

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{0,371 \cdot 10^{-3}} = 162 \text{ МПа}.$$

Розходження з допустимими напруженнями становить

$$(162 - 160)/160 \cdot 100\% = 1,25\%,$$

що допускається нормативами.

Перевіряємо умову міцності балки за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\max}}{d I_x} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,21 \cdot 10^{-3}}{0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,501 \cdot 10^{-4}} = 14 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\tau_{\max} < [\tau]$, то умова міцності (2.70) виконується.

Обчислимо головне напруження при $y = h/2 - t = 125,2 \text{ мм}$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 75,1 + 0,5 \sqrt{150,2^2 + 4 \cdot 3,6^2} = 154,4 \text{ МПа}$$

Воно відрізняється від допустимого на $(160 - 154,4)/160 \cdot 100\% = 3,5\%$, що передбачено нормативами.

2.7.6. Визначення прогинів і кутів повороту при згині балок. У випадку малих деформацій при прямому згині силова площина збігається з головною площиною балки. Прямолінійна вісь балки при згині не видовжується, а лише викривляється по лінії $y = f(z)$, яка називається пружною лінією. Відхилення будь-якої точки пружної лінії балки від первісної прямої осі називається її прогином. Кут, на який повертається переріз по відношенню до свого початкового положення, називається кутом повороту (рис. 2.62).

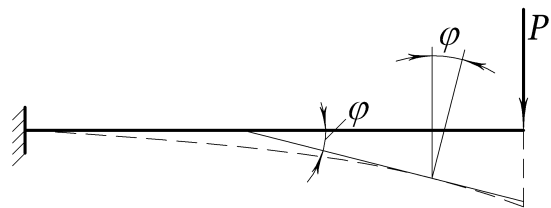


Рис. 2.62. Прогини і кути повороту при згині

Пружна лінія за своїм фізичним змістом неперервна і плавна (диференційована) в усіх точках. Для малих деформацій

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi = dy/dz.$$

Вище було встановлено, що кривина пружної лінії визначається співвідношенням (2.63)

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M_{\zeta\bar{a}}(z)}{EI_x}.$$

З курсу вищої математики відомо, що кривизна плоскої кривої $y = y(z)$ обчислюється за формулою

$$\frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{y''(z)}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3}.$$

Тоді

$$\frac{y''(z)}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3} = \pm \frac{M_{\zeta\bar{a}}(z)}{EI_x}.$$

Рівняння (2.75) називається диференціальним рівнянням пружної лінії балки. Оскільки воно нелінійне, то його інтегрування пов'язано із значними математичними труднощами. В більшості інженерних задач доводиться мати справу з малими прогинами балки. У таких випадках тангенси кутів нахилу дотичної до осі z будуть малі ($y'(z) \ll 1$) і з (2.75) одержимо наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки

$$y''(z) = \pm \frac{M_{\zeta\bar{a}}(z)}{EI_x}.$$

Знак в правій частині залежить від вибору системи координат. Якщо вісь y напрямити вниз, що практикується в багатьох інженерних задачах, то знаки $y''(z)$ і $M(z)$ будуть завжди протилежні. Тому надалі ми будемо приймати знак мінус

$$y''(z) = -\frac{M_{\bar{c}\bar{a}}(z)}{EI_x}. \quad (2.76)$$

Диференціальні рівняння (2.76), (2.72) дають можливість визначити прогини і кути повороту перерізів балки сталого поперечного перерізу аналітичним методом. Суть цього методу полягає в безпосередньому інтегруванні диференціального рівняння зігнутої осі

$$\begin{aligned} EI_x y'(z) &= EI_x \varphi(z) = -\int M(z) dz + C; \\ EI_x y(z) &= -\int \left(\int M(z) dz \right) dz + Cz + D, \end{aligned} \quad (2.77)$$

де C і D – сталі інтегрування. Для їх визначення використовують граничні умови, що впливають з характеру закріплення опорних перерізів.

При наявності кількох характерних ділянок навантаження записуються відповідні диференціальні рівняння для кожного з них. Інтегрування цих рівнянь приводить до появи додаткових сталих, для визначення яких необхідно записувати умови неперервності і плавності зігнутої осі на межах ділянок. Отже, для багатьох ділянок навантаження задача стає досить складною, і її розв'язок пов'язаний з громіздкими обчисленнями.

На прикладі покажемо, як інтегруванням рівняння (2.76) можна визначити прогини і кути повороту консольної балки, навантаженої по всій довжині рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 2.54).

Згинальний момент в перерізі балки, віддаленому на відстані z від закріпленого кінця, дорівнює

$$M_{\bar{c}\bar{a}}(z) = -q(l-z)^2/2.$$

Підставляючи його значення в рівняння (2.76), одержимо

$$y''(z) = \frac{q(l-z)^2}{2EI_x}.$$

Інтегруємо останнє рівняння по z

$$y'(z) = \varphi(z) = \frac{q}{2EI_x} \left(l^2 z - lz^2 - \frac{z^3}{3} + C \right). \quad (2.78)$$

Після повторного інтегрування, знаходимо

$$y(z) = \frac{q}{2EI_x} \left(\frac{l^2 z^2}{2} - \frac{lz^3}{3} + \frac{z^4}{12} + Cz + D \right). \quad (2.79)$$

Лівий кінець балки ($z=0$) зацімлений, тому його прогин і кут повороту дорівнюють нулю.

Граничні умови задачі мають вигляд

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

Вони дозволяють визначити сталі C і D у виразах (2.78) і (2.79)

$$C = D = 0.$$

Таким чином, прогини і кути повороту балки визначаються формулами

$$\varphi(z) = \frac{q}{2EI_x} \left(\frac{z^3}{3} - lz^2 + l^2 z \right);$$

$$y(z) = \frac{q}{2EI_x} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{lz^3}{3} + \frac{l^2 z^2}{2} \right).$$
(2.80)

Визначимо прогин і кут повороту вільного кінця балки.

Покладаючи в (2.80) $z = l$, знаходимо

$$\varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EI_x}; \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI_x}.$$

2.8. Балки рівного опору згину

Безпосереднє інтегрування рівняння пружної лінії балки змінної жорсткості на згин (2.76)

можливе лише в тих випадках, коли вираз $\frac{M_{\text{с} \bar{a}}(z)}{E \cdot I_{\bar{o}}(z)} = f(z)$ можна записати у вигляді функції, зручної

для інтегрування. Прикладом такого випадку може служити консольна балка рівного опору згину. Характерна ознака такої балки: найбільші нормальні напруження однакові по всій довжині балки і дорівнюють

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{с} \bar{a}}(z)}{W_{\bar{o}}(z)} = [\sigma].$$
(2.81)

Позначимо через $W_0 = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ момент опору перерізу з найбільшим згинальним моментом M_{\max} .

Момент опору довільного перерізу, розміщеного на відстані z від закріпленого кінця балки, можна визначити за формулою

$$W_x(z) = \frac{W_0 M(z)}{M_{\max}}.$$
(2.82)

Розглянемо випадок консольної балки, зображеної на рис. 2.63

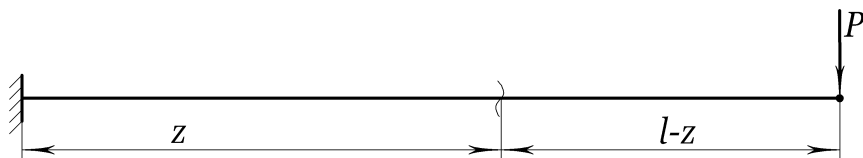


Рис. 2.63. Консольна закріплена балка із силовим навантаженням на кінці

Згинальний момент $M_{\text{с} \bar{a}}(z)$ в розглядуваному перерізі дорівнює

$$M_{\text{с} \bar{a}}(z) = P(l - z), \quad M_{\max} = Pl, \quad 0 \leq z \leq l,$$
(2.83)

а формула для визначення моменту опору перерізу на підставі (2.82) записується у вигляді

$$W_x(z) = \frac{W_0(l - z)}{l}.$$
(2.84)

Якщо переріз має форму прямокутника зі сторонами $h(z)$, $b(z)$, то

$$W_0 = \frac{b_0 h_0^2}{6}, \quad W_x(z) = \frac{b(z) \cdot h^2(z)}{6}, \quad (2.85)$$

де b_0, h_0 – розміри поперечного перерізу балки в закріпленні.

1. Якщо балка має сталу товщину $h(z) = h_0 = const$, то із співвідношень (2.85) знаходимо

$$b(z) = \frac{b_0(l-z)}{l}. \quad (2.86)$$

У даному випадку ширина балки змінюється за лінійним законом. Вигляд балки рівного опору змінної ширини зображено на рис. 2.64. Її найбільша ширина в місці закріплення визначається з умови міцності (2.81)

$$b_0 = \frac{6Pl}{h_0^2[\sigma]}. \quad (2.87)$$

Тоді

$$b(z) = \frac{6P(l-z)}{h_0^2[\sigma]}. \quad (2.88)$$

Розміри тих перерізів, в яких згинальний момент близький до нуля, вибирають з умови міцності за дотичними напруженнями. На рис. 2.64 ця частина балки зображена штриховою лінією.

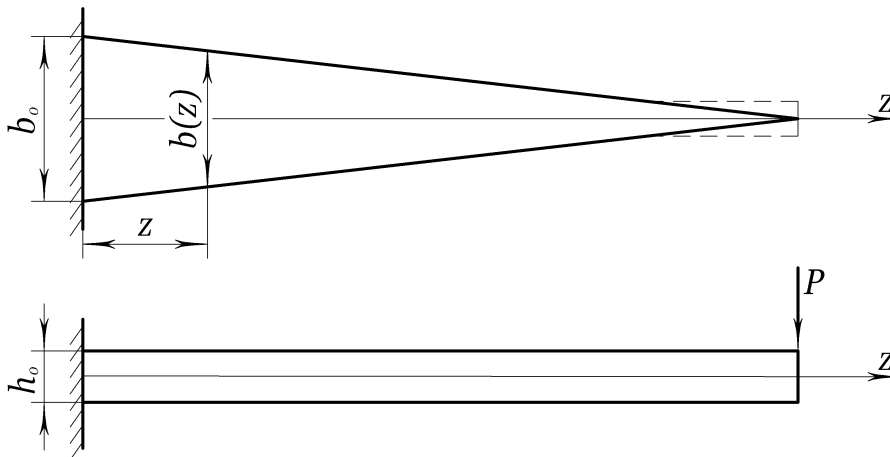


Рис. 2.64. Балка рівного опору згину сталюї товщини

2. Для балки сталюї ширини $b(z) = b_0 = const$ маємо

$$h^2(z) = h_0^2 \frac{l-z}{l}$$

або

$$h(z) = h_0 \sqrt{\frac{l-z}{l}}. \quad (2.89)$$

Найбільша висота балки в місці закріплення визначається з умови міцності (2.81)

$$h_0 = \sqrt{\frac{6Pl}{b_0[\sigma]}}. \quad (2.90)$$

Закон зміни висоти запишеться у вигляді

$$h(z) = \sqrt{\frac{6P(l-z)}{b_0[\sigma]}}. \quad (2.91)$$

У даному випадку висота балки окреслення квадратичною параболою (рис. 2.65)

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки сталої товщини (2.76), зображеної на рис. 2.63, на підставі (2.83) можна записати у вигляді

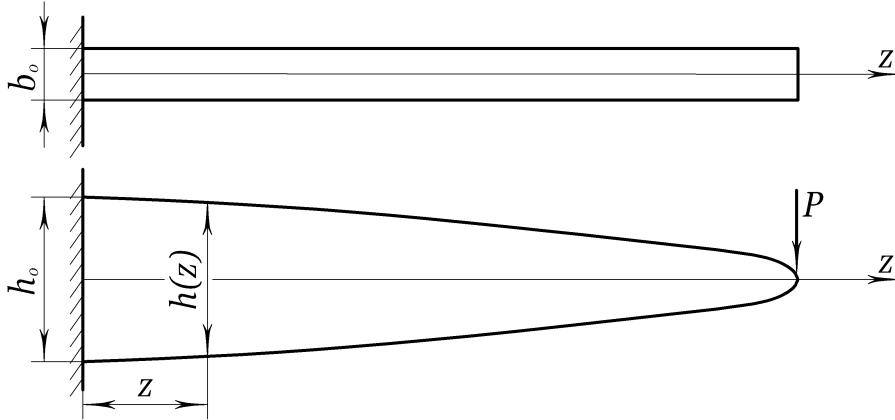


Рис. 2.65. Балка рівного опору згину сталої ширини

$$y''(z) = \frac{P(l-z)}{E \cdot I_x(z)}, \quad (2.92)$$

де

$$I_x(z) = \frac{b(z)h_0^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3 (l-z)}{12l}.$$

Тоді рівняння (2.92) запишеться так

$$y''(z) = \frac{Pl}{E \cdot I_x(0)}. \quad (2.93)$$

Умови закріплення балки мають вигляд

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad (2.94)$$

Інтегруючи рівняння (2.93), знаходимо

$$y'(z) = \frac{Plz}{E \cdot I_x(0)} + C_1; \quad y(z) = \frac{Plz^2}{2E \cdot I_x(0)} + C_1z + C_2. \quad (2.95)$$

Підставляючи (2.95) в граничні умови (2.94), визначаємо

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Таким чином, функція прогину має вигляд

$$y(z) = \frac{Plz^2}{2E \cdot I_x(0)}. \quad (2.96)$$

Максимальне значення прогину при $z = l$

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{2E \cdot I_x(0)}$$

у 1,5 рази більше ніж для аналогічної балки сталого поперечного перерізу. Це означає, що балка рівного опору згину має більшу гнучкість ніж балка сталої жорсткості. На її виготовлення необхідно витратити вдвічі менше матеріалу.

2.9. Складний опір стержнів

Як уже відзначалося вище, при дії на стержень просторової системи сил в кожному його перерізі виникає шість внутрішніх силових факторів $(N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y)$, зображених на рис. 2.15.

Простому опору стержня відповідають прості види деформації: якщо відмінна від нуля лише сила N_z – то розтяг або стиск; при наявності Q_x та Q_y – зсув; при наявності лише M_z – кручення; якщо лише $M_x \neq 0$ або $M_y \neq 0$ – то чистий згин.

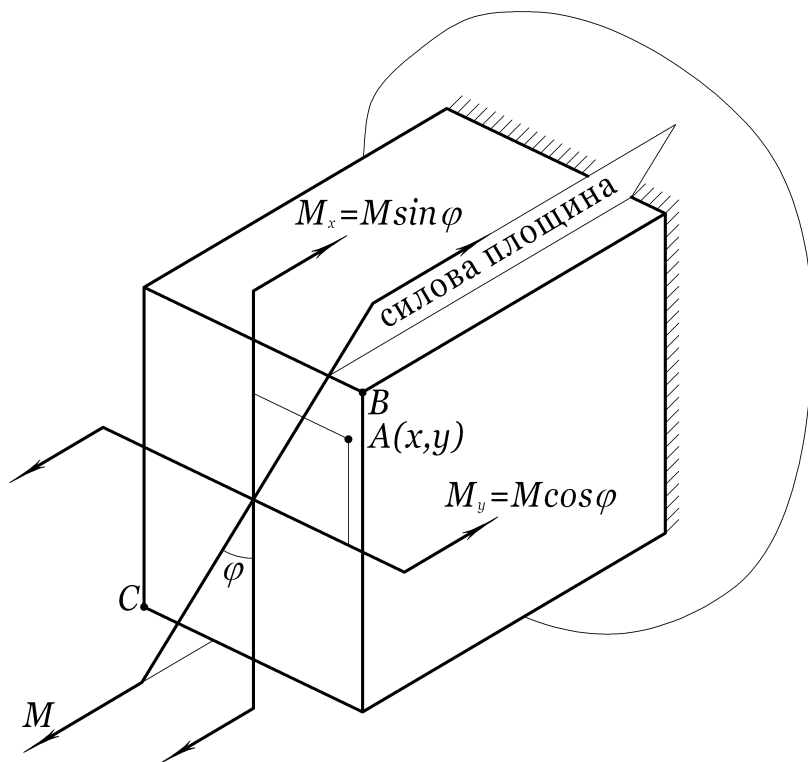


Рис. 2.66. Косий згин

При певних видах навантаження в стержні виникають складні деформації, що являють собою сукупність усіх чотирьох простих або їх комбінацій. Напруження і переміщення при складному опорі визначаються на основі принципу незалежності дії сил, як алгебраїчна або геометрична сума напружень чи деформацій від кожного силового фактору окремо. У більшості випадків впливом поперечних сил Q_x та Q_y нехтують.

2.9.1. Косий згин. Якщо силова площина не співпадає з жодною із головних площин інерції балки, то такий випадок згину називається косим. Нехай в довільному перерізі балки діє згинальний момент M . Розкладемо його на дві складові M_x і M_y , що діють в головних площинах. Це дає змогу подати косий згин балки як сукупність двох прямих згинів в головних площинах.

Нормальні напруження в довільній точці $A(x, y)$ знаходимо як суму напружень від моментів M_x і M_y за формулою (2.64)

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (2.97)$$

Знак кожного з доданків залежить від того, яке напруження – розтягувальне чи стискальне – викликає кожний з моментів в розглядуваній точці.

Якщо переріз має симетричну форму (прямокутник, двотавр), то найбільші напруження виникають в кутових точках. На рис. 2.66 такими є точки B і C , в яких від кожного моменту виникають, напруження одного знаку. Умову міцності в таких точках, згідно з (2.68), можна записати у вигляді

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.98)$$

Для знаходження найбільш напружених точок перерізу довільної форми необхідно спочатку визначити положення нейтральної лінії. Її рівняння одержимо з (2.97), поклавши $\sigma(x, y) = 0$

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0. \quad (2.99)$$

Оскільки ліва частина (2.99) визначає вираз першого степеня відносно x, y то нейтральною лінією є пряма, яка проходить через центр ваги перерізу (початок координат). Її положення визначається кутовим коефіцієнтом $\text{tg}\beta$, де β – кут нахилу нейтральної лінії до осі x (рис. 2.67).

З рівняння (2.99) маємо

$$\text{tg}\beta = \frac{y}{x} = -\frac{I_x M_y}{I_y M_x}. \quad (2.100)$$

З іншого боку

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{M \sin \varphi}{M \cos \varphi} = \text{tg}\varphi. \quad (2.101)$$

Підставляючи (2.101) в (2.100), знаходимо

$$\text{tg}\beta = -\frac{I_x}{I_y} \text{tg}\varphi. \quad (2.102)$$

З цієї рівності випливає, що положення нейтральної лінії залежить від геометрії поперечного перерізу (I_x/I_y) і від положення силової лінії ($\text{tg}\varphi = M_y/M_x$). Знак « \leftarrow » показує, що кутові коефіцієнти силової та нейтральної ліній – різних знаків. Це означає, що нейтральна лінія проходить через ті квадранти перерізу, в яких моменти M_x і M_y викликають напруження різних знаків.

При $I_x \neq I_y$ кут β не дорівнює куту φ , тобто силова лінія не перпендикулярна до нейтральної лінії, як це було при прямому згині. В окремих перерізах $I_x = I_y$ (квадрат, круг), $\varphi = \beta$, тому нейтральна лінія перпендикулярна до силової площини і косий згин неможливий.

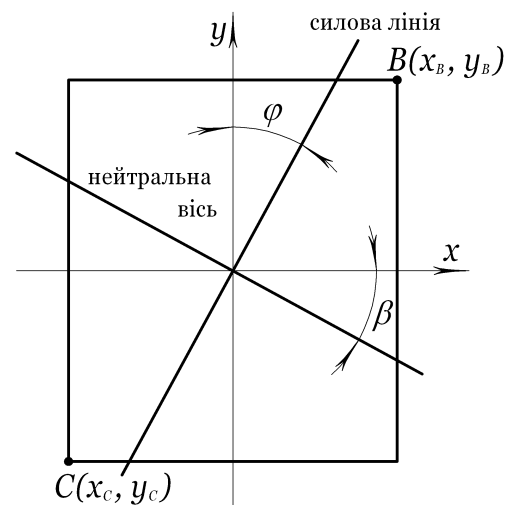


Рис. 2.67. Силова лінія і нейтральна вісь

Якщо положення нейтральної лінії буде відоме, то найбільш напруженими будуть точки, максимально віддалені від неї. Знаючи їх координати, відповідні напруження можна визначити за формулою (2.97). Тоді умови міцності в точках $B(x_B, y_B)$ і $C(x_C, y_C)$ приймуть вигляд

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x} y_B + \frac{M_y}{I_y} x_B \leq [\sigma]_{\bar{n}}; \quad \sigma_C = \frac{M_x}{I_x} y_C + \frac{M_y}{I_y} x_C \leq [\sigma]_{\delta}. \quad (2.103)$$

Практичний розрахунок балки у випадку косоного згину може бути реалізований за такою схемою:

1) Задане навантаження розкладається на складові, що діють в головних площинах балки; 2) Будуються епюри згинальних моментів M_x і M_y в кожній з головних площин і визначаються значення M_x і M_y в небезпечному перерізі; 3) Визначається положення небезпечних точок в перерізі і записуються умови міцності типу (2.98) або (2.103). Ці умови використовуються як для перевірки на міцність, так і для вибору перерізу.

Задача визначення прогинів балки при косому згині зводиться до задачі визначення прогинів при прямому згині в двох головних площинах.

Якщо відомі переміщення осі балки в напрямках головних осей f_x , f_y , то повне переміщення f визначається як геометрична сума складових

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (2.104)$$

Повне переміщення в будь-якому перерізі відбувається в напрямку, перпендикулярному до нейтральної лінії. Це означає, що при косому згині площина прогинів не збігається з силовою площиною.

2.9.2. Згин з розтягом (стиском). Нехай від дії зовнішнього навантаження в поперечному перерізі стержня виникають три силові фактори N_z , M_x , M_y (рис. 2.68).

Згідно з принципом незалежності дії сил, напруження в довільній точці з координатами (x, y) визначаються за формулою

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N_z}{S}, \quad (2.105)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня.

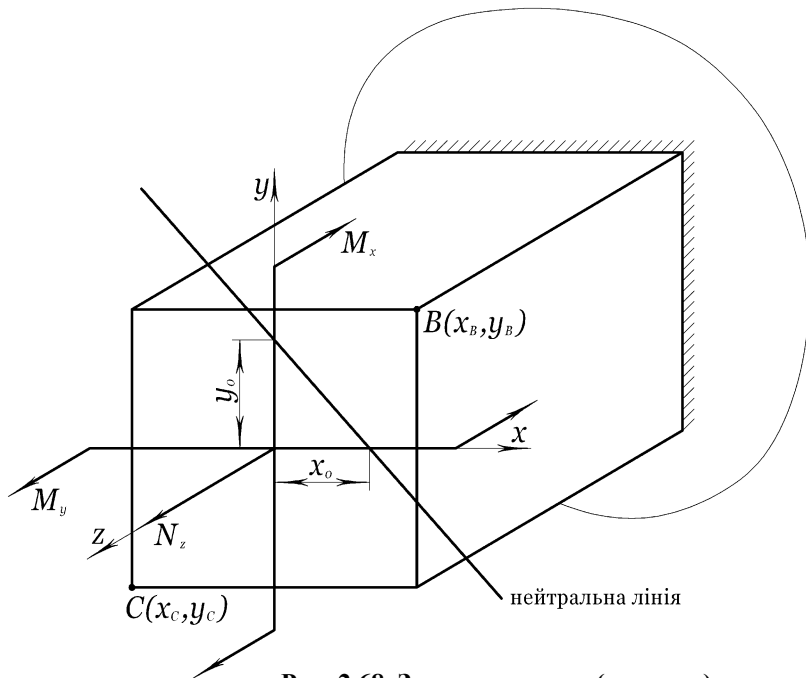


Рис. 2.68. Згин з розтягом (стиском)

Знак кожного з доданків залежить від того, якого знаку напруження в даній точці викликає відповідний силовий фактор.

Визначаємо рівняння нейтральної лінії перерізу, поклавши в (2.105) $\sigma(x, y) = 0$

$$\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N_z}{S} = 0. \quad (2.106)$$

Рівняння (2.106) має перший порядок відносно змінних x, y і визначає пряму, яка не проходить через початок координат (центр ваги перерізу). Її положення визначається двома відрізками x_0 і y_0 , що відсікаються нею на осях.

Поклавши в (2.106) $x = x_0; y_0 = 0$, знаходимо

$$x_0 = -\frac{I_x}{M_x} \frac{N_z}{S}. \quad (2.107)$$

Аналогічно визначаємо y_0 поклавши в (2.80) $x = 0, y = y_0$.

$$y_0 = -\frac{I_y}{M_y} \frac{N_z}{S}. \quad (2.108)$$

Формули (2.107), (2.108) показують, що положення нейтральної лінії залежить від геометрії поперечного перерізу ($I_x/S, I_y/S$) і зовнішнього навантаження (N_z, M_x, M_y). В залежності від цих величин нейтральна лінія може, знаходитись в межах перерізу (тоді вона поділяє його на розтягнуту і стиснуту частини) або може бути за межами перерізу. В останньому випадку нормальні напруження у всіх точках перерізу мають один знак.

Після побудови нейтральної лінії знаходять найбільш віддалені від неї точки (на рис. 2.68 точки $B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$), в яких виникають максимальні нормальні напруження. Умови міцності в цих точках мають вигляд

$$\sigma_B = \frac{N_z}{S} + \frac{M_y}{I_y} x_B + \frac{M_x}{I_x} y_B \leq [\sigma]_C; \quad \sigma_C = \frac{N_z}{S} + \frac{M_y}{I_y} x_C + \frac{M_x}{I_x} y_C \leq [\sigma]_P. \quad (2.109)$$

Якщо наперед відомо, що найбільшим є розтягувальне напруження, то достатньо порівняти з допустимим лише це напруження. Якщо всі напруження мають один знак (нейтральна лінія розміщена за межами перерізу), то з двох крайніх точок перевіряють на міцність лише одну – найбільш віддалену від нейтральної лінії.

Практичний розрахунок балок при згині з розтягом (стиском) проводиться за такою ж схемою, як і у випадку косоного згину.

Повне переміщення точок осі балки визначається як геометрична сума прогинів f_x, f_y в напрямках головних осей перерізу і переміщення перерізу f_z в напрямку осі балки

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}. \quad (2.110)$$

2.9.3. Згин із крученням круглого стержня. Згин з крученням є окремий випадок складного опору, коли стержень перебуває під дією згинального M і крутильного $M_{кр}$ моментів. Найбільші дотичні напруження від крутильного моменту діють в кожній точці на контурі перерізу, а найбільші нормальні напруження від згинального моменту – лише в двох діаметрально протилежних точках A і B (рис. 2.69). Ці точки будуть найбільш напруженими, а отже, і найбільш небезпечними. Максимальні напруження в них визначаються за формулами

$$\sigma = M/W; \quad \tau = M_{кр}/W_p, \quad (2.111)$$

де $W = \frac{\pi d^3}{32}$ – осьовий момент опору круглого перерізу.

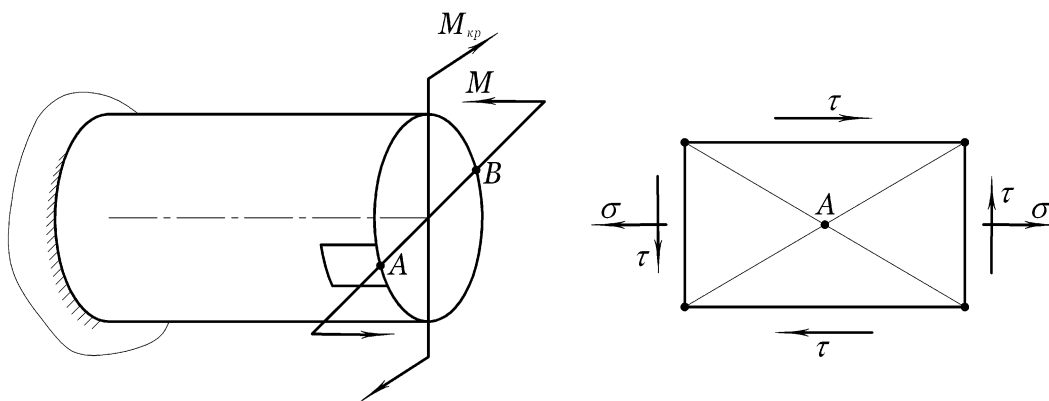


Рис. 2.69. Згин з крученням

На відміну від розглянутих вище випадків складного опору, при згині з крученням напружений стан в небезпечних точках не можна розглядати як лінійний.

Виділимо в околі точки A елемент матеріалу (рис. 2.69). Він перебуває в умовах плоского напруженого стану тому перевірку на міцність необхідно виконувати, користуючись відповідними теоріями міцності. При цьому головні напруження визначаються за формулами (2.67).

Оскільки дотичними напруженнями не можна знехтувати, то перша теорія міцності не має змісту.

Згідно з другою теорією, умова міцності (2.30) при $\sigma_3 = 0$, $\nu = 0,3$ приймає вигляд

$$0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.112)$$

За третьою теорією міцності умова (2.31) запишеться так

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.113)$$

За четвертою теорією міцності розрахункова формула (2.32) запишеться у вигляді

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.114)$$

Заміняючи в (2.112) – (2.114) величини σ і τ їх значеннями із (2.111) і, враховуючи, що для круглого перерізу $W_p = 2W$, одержимо умову міцності при згині з крученням

$$M_p/W \leq [\sigma]. \quad (2.115)$$

де M_p – розрахунковий момент, який визначається у відповідності з вибраною теорією міцності: за другою теорією

$$M_{\delta} = 0,35M + 0,65\sqrt{M^2 + M_{\delta\delta}^2};$$

за третьою теорією

$$M_{\delta} = \sqrt{M^2 + M_{\delta\delta}^2};$$

за четвертою теорією

$$M_{\delta} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\delta\delta}^2}.$$

Нерівність (2.115) має такий самий вигляд, як і при згині балок.

Оскільки при крученні стержня його вісь залишається прямолінійною, то його повний прогин може бути визначений за формулою (2.104).

2.10. Стійкість центрально стиснених стержнів

Розглянемо тонкий довгий стержень (розміри поперечного перерізу малі в порівнянні з довжиною), який стискається вздовж осі силою D (рис. 2.70). Якщо сила D невелика, то стержень буде зберігати прямолінійну форму і перебувати в умовах центрального стиску або стійкої рівноваги. При збільшенні стискаючої сили прямолінійна форма рівноваги може виявитися нестійкою і стержень буде випучуватися (згинатися). Це явище має назву поздовжнього згину або біфуркації.

Значення стискальної сили, при якій починається перехід від стійкої прямолінійної форми рівноваги до криволінійної, називається критичною силою.

Якщо стискальна сила менша від критичної, то стержень працює на стиск; при силі, більшій за критичну, стержень перебуває в умовах стиску і згину. Навіть при незначному перевищенні стискальної

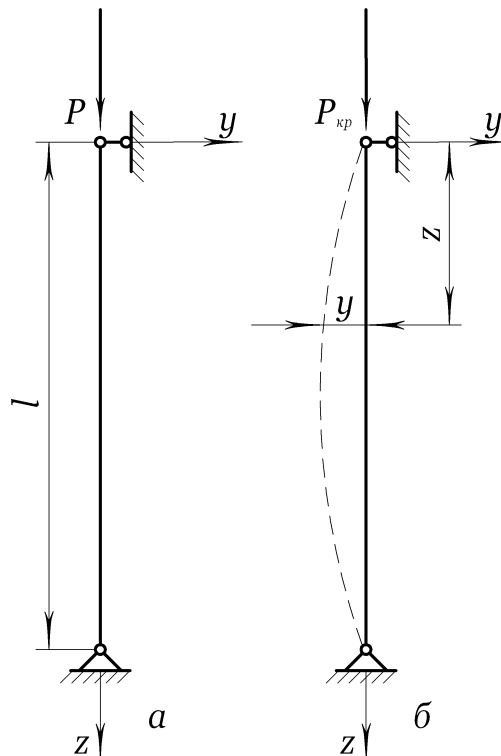


Рис. 2.70. Центрально стиснений стержень

Рис. 2.71. До виведення формули Ейлера

сили критичного значення прогини стержня зростають надзвичайно швидко і стержень або руйнується,

або повністю втрачає свою жорсткість. Тому з точки зору практичних розрахунків критична сила повинна розглядатися як руйнівне навантаження.

Допустима стискальна сила повинна бути в декілька разів менша, ніж критична. Цю умову стійкості прямолінійної форми рівноваги можна записати так

$$[P] = \frac{P_{\epsilon\delta}}{n_y}, \quad (2.116)$$

де $[P]$ – допустиме значення стискаючої сили; $P_{\epsilon\delta}$ – критична сила; n_y – коефіцієнт запасу стійкості.

Якщо критичну силу $P_{\epsilon\delta}$ поділити на площу поперечного перерізу стержня S , то визначимо критичне напруження

$$\sigma_{\epsilon\delta} = P_{\epsilon\delta} / S. \quad (2.117)$$

Критичне напруження при поздовжньому згині відіграє таке ж значення, як σ_δ або σ_a при звичайному розтягу або стиску. З урахуванням коефіцієнту запасу міцності воно не повинне перевищувати границю пропорційності.

2.10.1. Формула Ейлера. Розглянемо стержень, шарнірно закріплений на кінцях і стиснутий силою P (рис. 2.71а). Такий випадок закріплення будемо називати основним. Якщо стискальна сила досягне значення $P_{\epsilon\delta}$, то стержень прийме криволінійну форму рівноваги (рис. 2.71б). При цьому можна вважати, що зміщення верхнього кінця стержня і його прогини малі в порівнянні з довжиною l . У цьому випадку диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, згідно з (2.76), матиме вигляд

$$EIy''(z) = -M(z). \quad (2.118)$$

Якщо переміщення стержня не обмежені, то він буде згинатися в площині найменшої жорсткості, яка у випадку сталого значення E буде дорівнювати EI_{\min} .

Враховуючи, що $M(z) = P_{\epsilon\delta}y$, із (2.118) знаходимо однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''(z) + k^2 y(z) = 0, \quad (2.119)$$

де

$$k^2 = \frac{P_{\epsilon\delta}}{EI_{\min}}. \quad (2.120)$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$y(z) = A \sin kz + B \cos kz. \quad (2.121)$$

Сталі інтегрування A і B визначимо із граничних умов закріплення стержня, які в даному випадку записуються так

$$\begin{aligned} z = 0; & \quad y(0) = 0; \\ z = l; & \quad y(l) = 0. \end{aligned}$$

З першої умови знаходимо $B = 0$, тоді

$$y = A \sin kz.$$

Друга гранична умова приводить до рівності

$$A \sin kl = 0.$$

Оскільки $A \neq 0$, бо в протилежному випадку стержень матиме прямолінійну форму рівноваги ($y \equiv 0$), то $\sin kl = 0$. Звідси знаходимо

$$kl = n\pi,$$

або

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Тут n – ціле невід'ємне число.

Враховуючи позначення (2.120), знаходимо критичну силу

$$P_{\text{ед}} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\text{min}}}{l^2}. \quad (2.122)$$

Випадок $n = 0$ не відповідає фізичній суті задачі. Тоді мінімальна критична сила буде при $n = 1$

$$P_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l^2}. \quad (2.123)$$

Формула (2.123) вперше була здобута Л. Ейлером наприкінці XVII століття.

Рівняння зігнутої осі, що визначається критичною силою (2.123), має вигляд

$$y = A \sin \frac{\pi}{l} z.$$

і відповідає одній півхвилі синусоїди. Постійна A , яка дорівнює прогину стержня, залишається невідомою. Для її визначення нема додаткових умов.

Якщо виходити з точного диференціального рівняння зігнутої (2.75), то сталу A можна визначити. При цьому критична сила буде такою ж, як і знайдена Ейлером із спрощеного рівняння. На цей цікавий факт вперше звернув увагу відомий російський вчений Ф.С. Ясинський.

При інших способах закріплення кінців стержня формулу для визначення критичної сили можна знайти шляхом співставлення форми зігнутої осі даного стержня з формою, яка є у стержня з шарнірно закріпленими кінцями. Якщо на зігнутій осі стержня вибрати ділянку, що має форму однієї півхвилі синусоїди, то ця ділянка працюватиме в таких же умовах, як і стержень основної форми відповідної довжини. Позначивши довжину цієї ділянки через $l_{\text{сд}}$ за формулою (2.123) визначаємо величину критичної сили.

$$P_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l_{\text{сд}}^2}. \quad (2.124)$$

На (рис.2.72) зображено найбільш характерні випадки закріплення кінців стержня, відмінні від основної форми.

Таким чином, при довільному способі закріплення кінців стержня формулу для визначення критичної сили можна подати у вигляді (2.124). Виразивши зведену довжину співвідношенням $l_{\text{зв}} = \mu l$, запишемо формулу Ейлера для загального випадку

$$P_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (2.125)$$

де μ – коефіцієнт зведення довжини стержня. Його значення для конкретних випадків закріплення стержня наведено на рис.2.72. Для основної форми стержня $\mu = 1$.

Формула (2.125) показує, що величина критичної сили залежить від матеріалу стержня (E), його довжини (l), геометрії поперечного перерізу (I_{min}) і способу закріплення кінців стержня (μ).

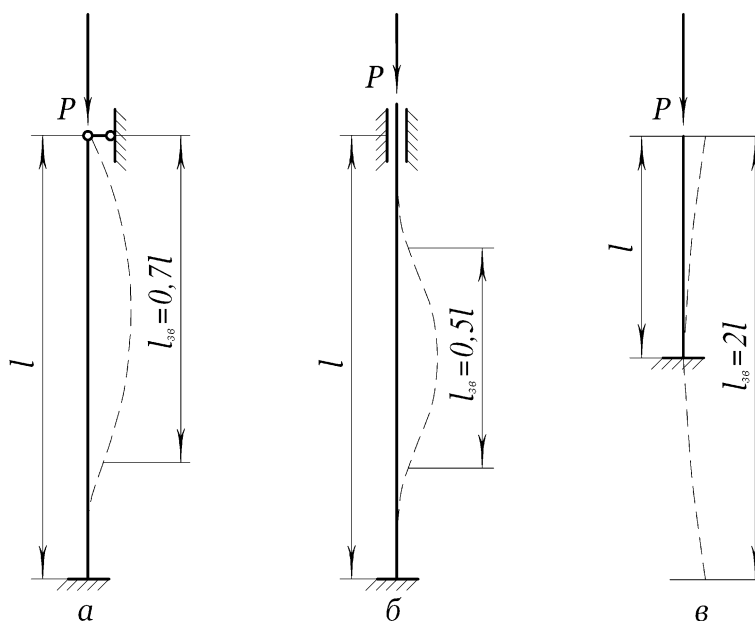


Рис. 2.72. Способи закріплення кінців стержнів

Критичні напруження визначаються, виходячи з (2.92) і формули Ейлера

$$\sigma_{\text{ед}} = \frac{P_{\text{ед}}}{S} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2 S} = \frac{\pi^2 E i_{\text{min}}^2}{(\mu l)^2}.$$

Тут $i_{\text{min}} = I_{\text{min}}/S$ мінімальний радіус інерції перерізу.

Формула для критичного напруження може бути подана у такому вигляді

$$\sigma_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 E i_{\text{min}}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Величина $\lambda = \mu l / i_{\text{min}}$ називається гнучкістю стержня. Чим більша гнучкість стержня, тим менше критичне напруження, тим менша стискальна сила необхідна, щоб викликати його поздовжній згин.

Оскільки величина $\sigma_{\text{ед}}$ не повинна перевищувати $\sigma_{\text{ів}}$, то

$$\pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{\text{ів}}.$$

Гранична гнучкість, нижче якої формулу Ейлера застосувати не можна визначається формулою

$$\lambda_{\text{кр}} = \pi \sqrt{\frac{A}{\sigma_{\text{кр}}}}. \quad (2.126)$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі $\lambda_{\text{кр}} = 100$, для дерев'яних – $\lambda_{\text{кр}} = 75$, для чавунних стержнів $\lambda_{\text{кр}} = 80$.

Таким чином, ми встановили, що межею використання формули Ейлера є межа закону Гука ($\lambda \geq \lambda_{\text{кр}}$).

На практиці часто доводиться мати справу із стисненими стержнями, гнучкість яких нижча граничної. В таких випадках для визначення критичного напруження використовують формулу, запропоновану Ф.С. Ясинським

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (2.127)$$

де a і b – величини, що характеризують властивості матеріалу стержня. Значення цих коефіцієнтів наводяться в технічних довідниках.

Задача 2.7. Визначити допустиму величину стискальної сили для чавунної колони довжиною $l = 3$ м з одним зацімленим кінцем, а іншим – вільним. Переріз колони – круг діаметром $d = 200$ мм; $A = 10^5$ МПа; $i = 5$.

Розв'язання. Визначаємо осьовий момент інерції поперечного перерізу і його площу

$$I = \frac{\pi d^4}{64}; \quad S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Радіус інерції перерізу дорівнює $i = \sqrt{I/S} = d/4$.

Знаходимо зведену довжину колони при $\mu = 2$

$$l_{\text{зв}} = \mu l = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м.}$$

Гнучкість колони

$$\lambda = l_{\text{зв}}/i = \mu l/i = \frac{2 \cdot 3}{0,05} = 120 > \lambda_{\text{кр}}.$$

Розрахунок даної колони можна вести за формулою Ейлера

$$[P_{\text{кр}}] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 n_y} = \frac{(3,14)^2 \cdot 10^{11} \cdot (0,2)^4}{6^2 \cdot 5 \cdot 64} = 430 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

2.11. Міцність матеріалів при повторно-змінних навантаженнях

Елементи конструкцій і машин часто працюють при напруженнях, що змінюються не тільки за величиною, але й за знаком. В подібних умовах перебувають, наприклад, осі колісних пар вагонів, рейки, ресори, поршневі штоки, вали і інші деталі машин. Як показує практика, такі деталі можуть руйнуватися при напруженнях, менших не тільки за границю міцності, але й навіть за границю пружності.

Зниження міцності матеріалу при дії на нього повторно-змінних навантажень називається втомленістю матеріалу, а властивість витримувати, не руйнуючись, багатократну дію змінних напружень – його витривалістю.

2.11.1. Фізичні основи руйнування матеріалу від втомленості. Дослідження процесу руйнування при змінних напруженнях показали, що при цьому в матеріалі виникає мікротріщинка, яка поступово проникає в глибину деталі. Поява тріщини зумовлена кристалічною будовою матеріалу і повторно-змінними навантаженнями.

Зерна-кристаліти, з яких складається метал, мають анізотропію фізичних і механічних властивостей. Оскільки вони орієнтовані по різному, то при дії циклічного навантаження в окремих найменш сприятливо орієнтованих зернах можуть виникнути перенапруження (пластичні деформації), а отже і явище наклепу. Внаслідок цього, частинки (зерна), що зазнали наклепу, стануть більш жорсткими і при наступних навантаженнях сприйматимуть на себе більшу його частину. Сусідні зерна при цьому дещо розвантажуються, а ті що зазнали наклеп знову перевантажуються. Це відбувається до того часу, поки напруження в них не досягне границі міцності і в зерні появиться надрив, його цілісність порушиться і виникне мікротріщина.

Тріщини, що виникають з окремих зерен, загрози не становлять, бо їх розміри одного порядку із зернами. Якщо поряд виявиться кілька зерен з мікротріщинами, то виникає можливість утворення макротріщини. Змінні навантаження сприяють швидкому її розвитку, бо під час деформації стержня її береги то зближуються, то віддаляються. У міру розвитку тріщини втомленості поперечний переріз стержня послаблюється все більше і в деякий момент послаблення досягає такого значення, що випадковий удар або поштовх викликає миттєве крихке руйнування.

Тріщини втомленості в деталі, як правило, мають місцевий характер і не впливають на властивості матеріалу в цілому. Наклеп у мікрооб'ємах і супроводжуючі його безпечні мікротріщини в окремих розрізнених зернах виникають лише до появи мікротріщини, після чого їх дальший розвиток припиняється. Це пояснюється тим, що значно частина енергії зовнішнього навантаження витрачається на розширення тріщини, яка утворилась.

Отже, втомленість матеріалу – це процес поступового зародження і розвитку тріщин під дією повторно-змінних силових навантажень.

2.11.2. Цикли напружень. Визначення границі витривалості. Зміна напружень від одного крайнього значення до іншого і навпаки називається циклом напружень. Кожен цикл - це замкнена однократна зміна напружень, які приймають ряд неперервних значень. В залежності від співвідношення крайніх значень напружень розрізняють симетричні і асиметричні цикли

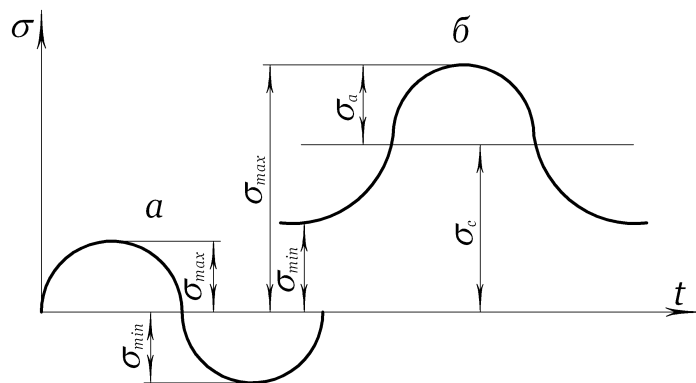


Рис. 2.73. Цикли напружень

(рис. 2.73). У випадку симетричного циклу крайні значення напружень σ_{max} , σ_{min} однакові за величиною і протилежні за знаком (рис. 2.73а).

Асиметричний цикл (рис. 2.73б) можна розглядати як симетричний цикл, на який накладено постійне напруження. Якщо σ_{\max} або σ_{\min} дорівнюють нулю, то цикл називається пульсуючим.

Основними характеристиками циклу напружень являються σ_{\max} і σ_{\min} , середнє напруження циклу

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

а також амплітуда напружень циклу

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Середнє напруження циклу може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю, а амплітуда циклу – завжди доданна величина.

Для характеристики ступеня асиметрії циклу вводиться коефіцієнт асиметрії

$$r = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}.$$

При симетричному циклі $r = -1$, при пульсуючому $r = 0 (r = \infty)$.

Не всі змінні за величиною напруження викликають втомне руйнування. Найбільше змінне напруження, при якому матеріал не руйнується при довільному числі циклів навантаження, називається границею витривалості σ_r . Це напруження суттєво залежить як від виду деформації, так і від характеру циклу напружень. Границя витривалості σ_r для кожного матеріалу визначається дослідним способом на спеціальних випробувальних машинах. Для цього вибирають 6-12 чисто оброблених (відполірованих) з плавними обрисами зразків. Першому зразку надають напруження σ_{\max} , які дорівнюють σ_0 . Пропрацювавши N_1 циклів, зразок руйнується.

Другому зразку надають напруження менші ніж σ_{\max} при тому ж r . Природно, що число циклів N_2 до руйнування буде більшим, ніж N_1 . Напруження для кожного наступного зразка

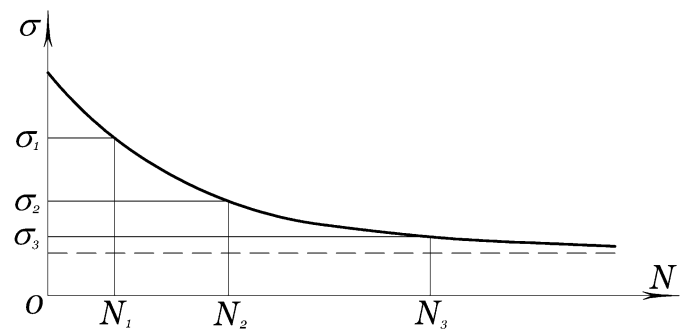


Рис. 2.74. Крива витривалості

зменшують доти, доки черговому зразку буде задано таке напруження, при якому він працюватиме нескінченно довго. Це напруження буде границею витривалості σ_r .

Дані випробувань для кожного зразка у координатах (σ, N) зображуємо точками і з'єднуємо плавною лінією, яка називається кривою витривалості (рис. 2.74). Якщо цю криву продовжити вліво, то на осі напружень вона відсіче відрізок, який дорівнює границі міцності. Знаючи, які напруження виникають в деталі, за кривою витривалості можна визначити термін служби деталі, тобто число циклів, які вона може витримати, не руйнуючись. Це число циклів називається довговічністю деталі.

2.11.3. Фактори, що впливають на втомлювальну міцність.

1. Вид деформації. Експериментами встановлено, що границя витривалості при осьовому розтягу (стиску) менша, ніж границя витривалості при згині. Це пояснюється тим, що при розтягу (стиску) весь переріз перебуває під однаковими напруженнями, а при згині найбільші напруження виникають в крайніх точках перерізу, решта матеріалу працює при значно менших напруженнях. Це затруднює утворення тріщин втомленості. Ще нижча границя витривалості при крученні.

2. Асиметрія циклу. Якщо цикл напружень асиметричний, то границя витривалості тим більша, чим ближчий до одиниці коефіцієнт асиметрії циклу. При $r = 1$, тобто при статичному навантаженні, границя витривалості співпадає з границею міцності. Найменше значення σ_r відповідає симетричному циклу. Таким чином, найбільш небезпечним є симетричний цикл, найменш небезпечним – статичне навантаження.

3. Концентрація напружень. Із досвіду відомо, що в тих перерізах деталей, де є різкі зміни розмірів, надрізи, гострі кути, отвори, виникають високі місцеві напруження (концентрація напружень). В цих перерізах, як правило, розвиваються тріщини втомленості, які в кінцевому результаті приводять до руйнування деталі.

Місцеві напруження суттєво зменшують границю витривалості. Тому виробам, які працюють при знакозмінних навантаженнях, необхідно по можливості надавати форму, яка не має різких змін перерізу, ослаблень і виточок.

4. Розміри деталі (масштабний фактор). Границя витривалості залежить також від розмірів деталі. Як показали досліди, границя витривалості даного матеріалу для зразків великих розмірів завжди менша, ніж для малих. Вплив на втомлювальну міцність абсолютних розмірів перерізу деталі враховується так званим масштабним фактором, який залежить від матеріалу, якості обробки поверхні, наявності концентратора напружень.

5. Якість поверхні деталі. Істотний вплив на границю витривалості має стан поверхні деталі чи зразка. Поверхневі дефекти (сліди різального інструменту, подряпини), будучи концентраторами напружень, суттєво знижують границю витривалості. Деталі з високоміцних сталей вимагають особливо якісної обробки. Кольорові метали і чавун менш чутливі до якості обробки поверхонь.

Якщо матеріал працює в агресивному середовищі, яке викликає корозію, а отже, пошкодження поверхні, то втомлювальна міцність його знижується. При цьому, чим більше матеріал схильний до корозії, тим різкіше знижується границя витривалості.

6. Температура. Встановлено, що зміна температури в діапазоні від -40°C до 300°C помітно не впливає на границю витривалості. При дальшому підвищенні температури σ_r зменшується.

7. Частота зміни напруження. Якщо частота зміни напружень не перевищує 1000 Гц, то границя витривалості для зразків з гладкими обрисами дещо підвищується, а для зразків із концентраторами напружень – знижується.

Крім того, на границю витривалості впливають і інші фактори, проте ступінь їх впливу вивчений ще недостатньо.

2.12. Контактні напруження

Напруження і деформації, що виникають при взаємному стиску двох деформівних тіл, називаються контактними. Початковий точковий дотик тіл, обмежених криволінійними поверхнями, внаслідок деформації переходить в контакт по малій площадці, яка в загальному випадку має еліптичну форму. Матеріал в околі такої площадки, не маючи можливості вільно деформуватися, перебуває в умовах просторового напруженого стану (рис. 2.75). Контактні напруження, як показали дослідження в теорії пружності, мають місцевий характер і швидко зменшуються при віддаленні від площадки контакту. Незважаючи на це, дослідження контактних напружень необхідне для забезпечення міцності багатьох відповідальних деталей (підшипники, зубчасті колеса, елементи кулачкових механізмів, рейки, сферичні і циліндричні катки).

Вперше задача про стиск двох пружних деформівних тіл з гладкими криволінійними поверхнями, в припущенні малості площадки контакту, розв'язана в роботах німецького фізика Г. Герца. Контактна задача визначає: форму і

розміри площадки контакту тіл внаслідок деформації; величину і характер розподілу тиску між контактуючими поверхнями; величину зближення тіл, зумовлену їх деформацією.

Нижче наведені результати розв'язку деяких контактних задач, одержані методами теорії пружності, при таких допущеннях:

1) площадка контакту мала в порівнянні з розмірами тіл;

2) зовнішні навантаження, прикладені до тіл, викликають в зоні контакту тільки

пружні деформації, що підлягають закону Гука;

3) сили тиску розподілені по площадці контакту перпендикулярно до неї;

4) силами тертя в зоні контакту можна знехтувати.

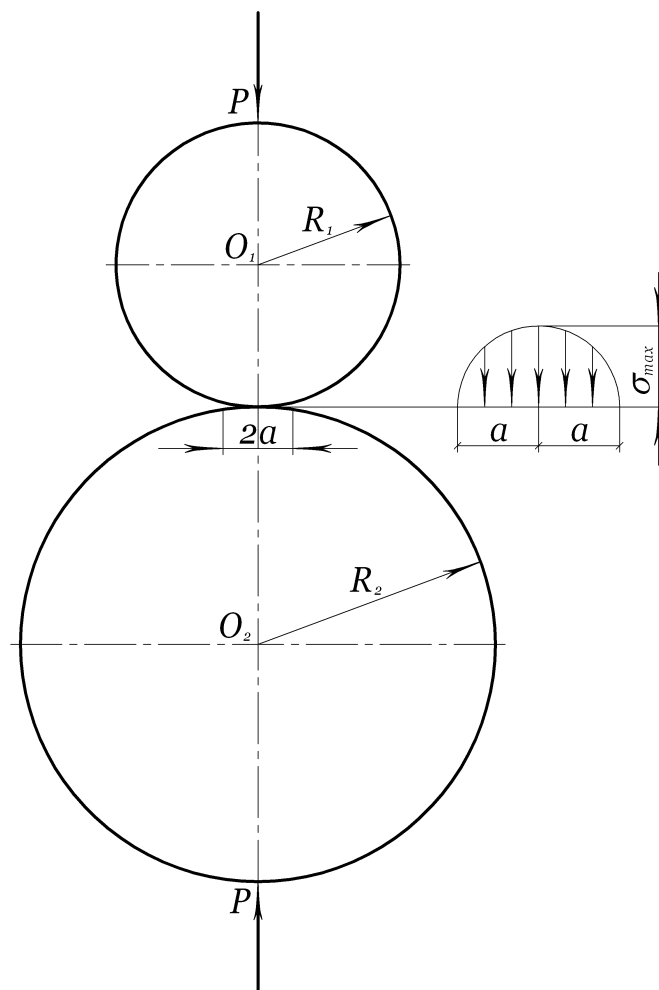


Рис. 2.75. До контактних напружень

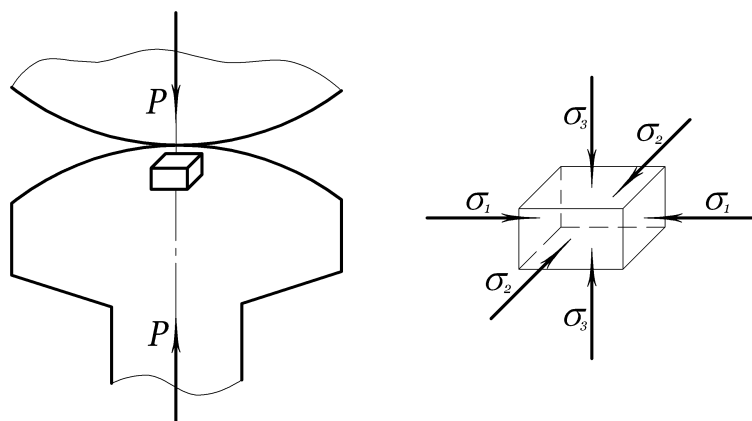


Рис. 2.76. Стиск двох сферичних тіл

2.12.1. Стиск двох сферичних тіл. Якщо два сферичні тіла радіусами R_1 і R_2 стискаються силами P , то в зоні контакту утворюється кругова площадка радіусом a (рис. 2.76)

$$a = 0,88\sqrt[3]{P \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{E_1 E_2}}. \quad (2.128)$$

Найбільші нормальні напруження виникають в центрі площадки контакту

$$\sigma = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2}. \quad (2.129)$$

Два інші головні напруження в центрі площадки дорівнюють

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,8|\sigma_{\max}|. \quad (2.130)$$

Формули (2.129), (2.130) показують, що в центрі площадки контакту матеріал перебуває в умовах, близьких до рівномірного стиску. Внаслідок цього в зоні контакту матеріал може витримувати без появи пластичних деформацій великий тиск. Найбільш небезпечна точка належить перпендикуляру в центрі площадки контакту і розміщена на глибині $z = 0,5a$. Головні напруження в цій точці дорівнюють

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{\max}, \quad (2.131)$$

де σ_{\max} – напруження в центрі площадки контакту.

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{\max}. \quad (2.132)$$

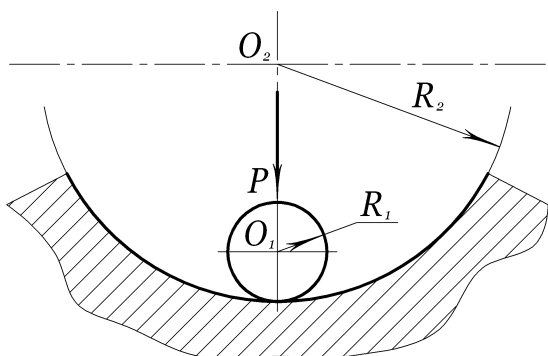


Рис. 2.77. Тиск сфери на сферичну порожнину

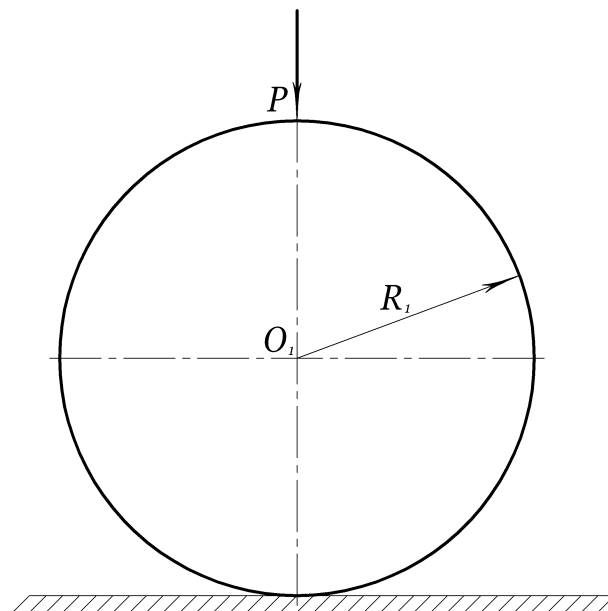


Рис. 2.78. Тиск сфери на півпростір

Величина зближення тіл визначається формулою

$$\delta = 0,78\sqrt[3]{\frac{P^2 (E_1 + E_2)^2 (R_1 + R_2)}{(E_1 E_2)^2 R_1 R_2}}. \quad (2.133)$$

Замінюючи в формулах (2.128) – (2.133) R_2 на $-R_2$, одержимо відповідні значення шуканих

величин для випадку тиску сфери на сферичну порожнину (сферичний шарнір) (рис. 2.77), а при $R_2 = \infty$ – розрахункові формули для випадку тиску сфери на півпростір (рис. 2.78).

2.12.2. Стиск двох циліндричних тіл. При стиску двох кругових циліндрів радіусів R_1 і R_2 з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (Н/м) (рис. 2.79), площадка контакту має вигляд вузького прямокутника з шириною b

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{E_1 E_2}}. \quad (2.134)$$

При цьому найбільші напруження виникають в точках поздовжньої осі площадки контакту

$$\sigma_{\max} = 1,27 q/b. \quad (2.135)$$

Небезпечна точка розміщена на глибині $z = 0,4b$ перпендикуляра в центрі площадки контакту.

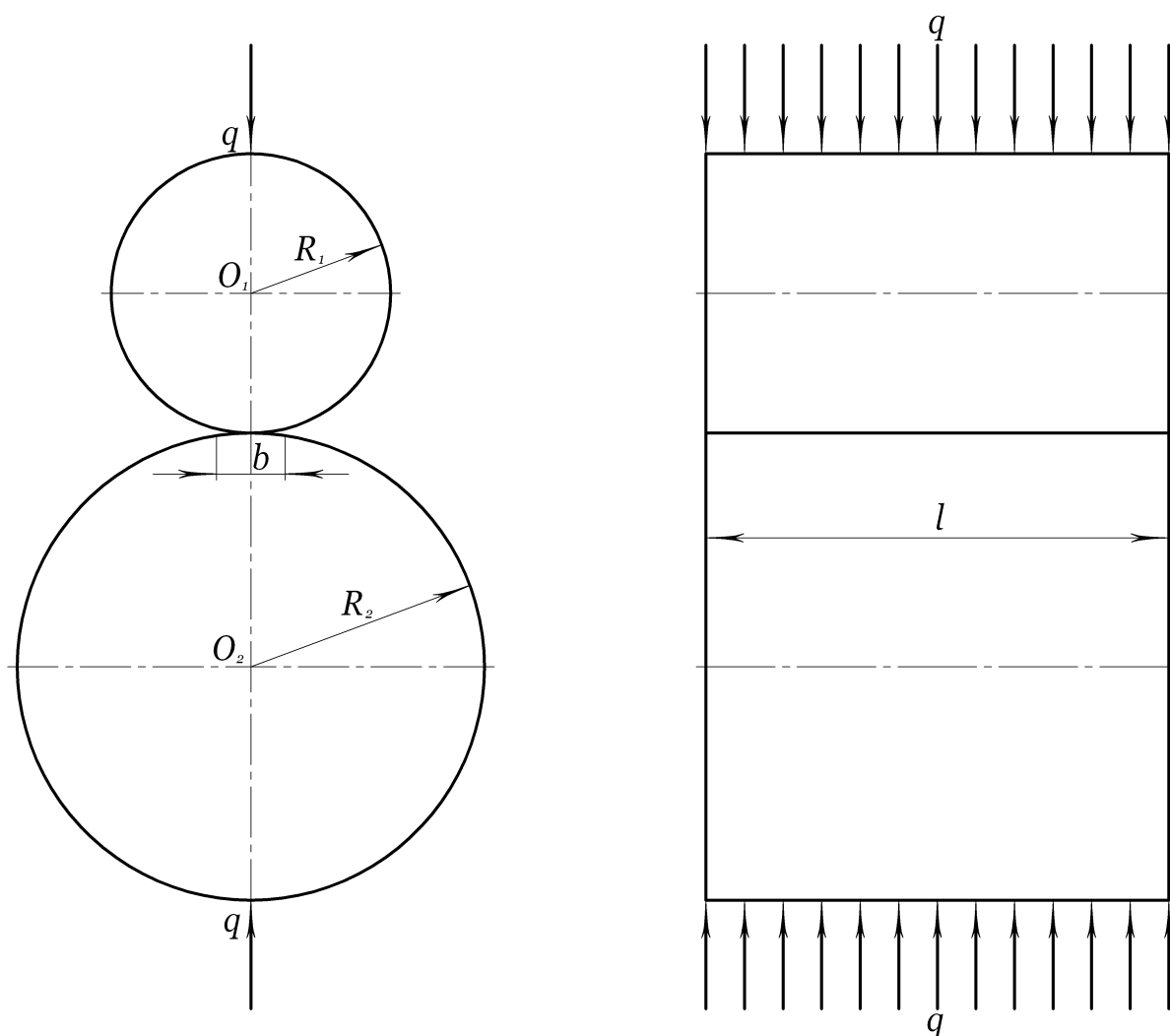


Рис. 2.79. Стиск двох циліндричних тіл

Головні напруження в цій точці дорівнюють

$$\sigma_1 = -0,18\sigma_{\max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,78\sigma_{\max}. \quad (2.136)$$

Найбільші дотичні напруження в небезпечній точці, дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,3\sigma_{\max}. \quad (2.137)$$

Величина зближення циліндричних тіл визначається за формулою

$$\delta = 0,58q \left[\frac{1}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{l} + 0,407 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{l} + 0,407 \right) \right], \quad (2.138)$$

де l – довжина площадки контакту.

Замінюючи в (2.134)-(2.138) R_2 на $-R_2$, одержимо розрахункові формули для випадку тиску циліндра на внутрішню сторону циліндричного жолоба (роликовий підшипник) (рис. 2.80). Якщо $R_2 = \infty$, то знаходимо розв'язок задачі про взаємний стиск циліндра і півпростору (циліндричний каток) (рис. 2.81).

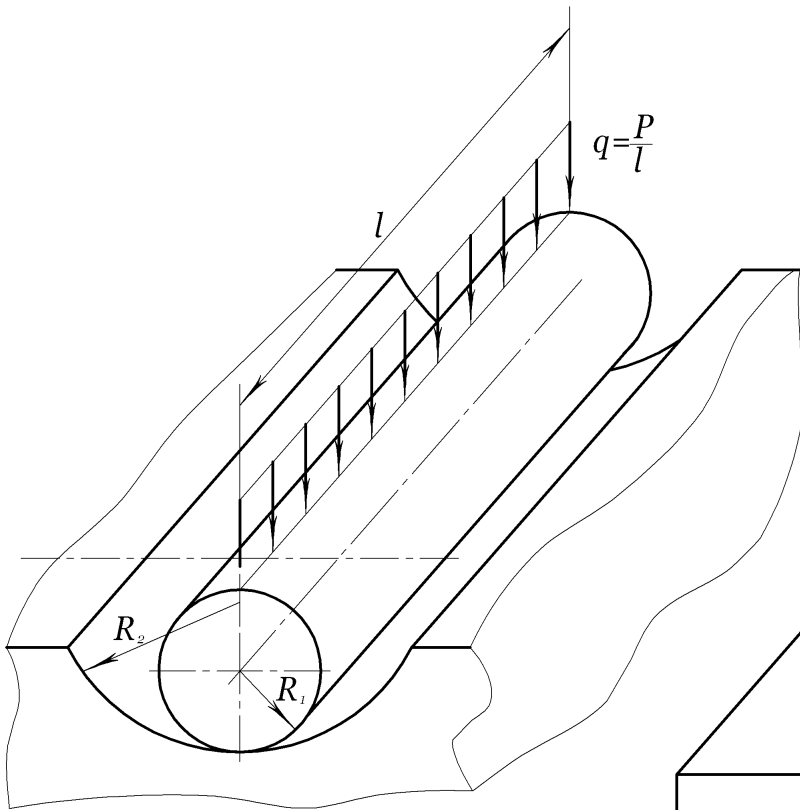


Рис. 2.80. Тиск циліндра на внутрішню сторону циліндричного жолоба

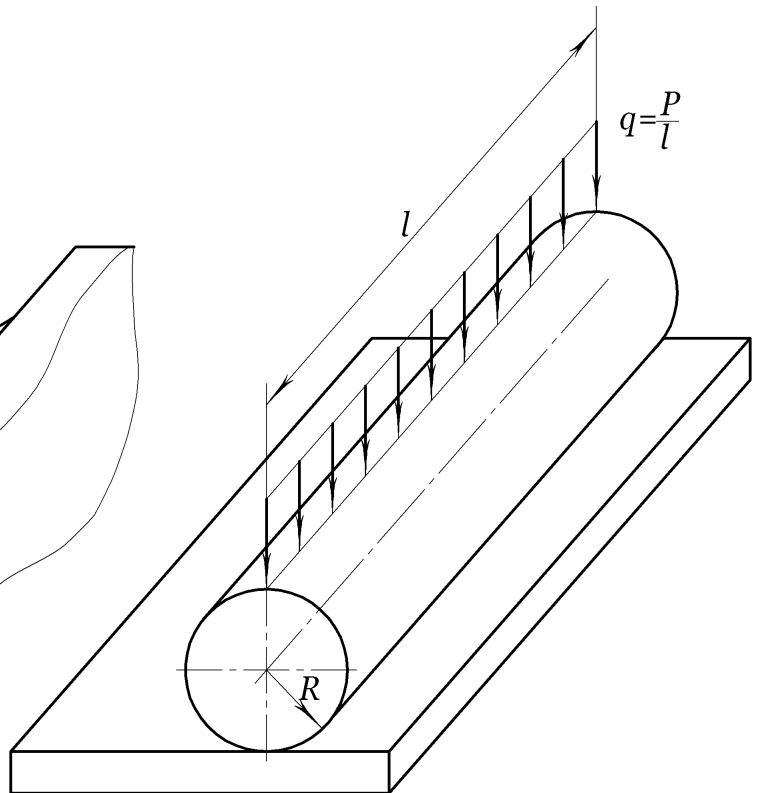


Рис. 2.81. Тиск циліндра на півпростір

Наведені вище розрахункові формули здобуті при $\nu = 0,3$. Для практичних розрахунків вони придатні і при інших значеннях коефіцієнта Пуассона.

2.12.3. Міцність при контактній взаємодії тіл. Перевірку міцності при дії контактних напружень необхідно проводити за третьою або четвертою теоріями міцності. На підставі співвідношень (2.31) і (2.32) умови міцності мають вигляд

$$\sigma_e^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad \sigma_e^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]. \quad (2.139)$$

Підставляючи замість $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ їх значення в небезпечній точці, виражені через σ_{\max} в центрі площадки контакту, умову міцності подамо у вигляді

$$\sigma_e = m \sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (2.140)$$

або

$$\sigma_{\max} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{\hat{\epsilon}}. \quad (2.141)$$

Тут $[\sigma]_{\hat{\epsilon}}$ – допустиме значення для найбільшого напруження в зоні контакту.

Значення коефіцієнта m залежать від форми площадки контакту, вибраної теорії міцності і наводяться в довідниках.

ЧАСТИНА ДРУГА. КІНЕМАТИКА

ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ

Предметом теоретичної механіки є механічний рух і рівновага матеріальних тіл. Механічний рух є переміщення одного тіла відносно інших тіл. Він визначає найпростішу форму руху матеріального світу серед багатьох інших.

Рух – це форма існування матеріального світу. Механічний рух є одним із наслідків взаємодії матеріальних тіл.

В розділі кінематика вивчаються геометричні властивості механічного руху матеріальних тіл, тобто без врахування взаємодій, які його визначають. Кінематика вивчає зміну положення матеріальних тіл з плином часу.

Причина механічного руху полягає в неперервній зміні розмаїття матеріального світу. Всі механічні рухи відбуваються в просторі і часі. Простір і час невіддільні від руху матеріальних тіл – вони є формою існування матеріального світу.

В курсі механіки розглядається тривимірний простір, який наділений властивостями однорідності, ізотропності і неперервності. Для вимірювання протяжності простору в міжнародній системі одиниць СІ використовується один метр (м).

Час в класичній механіці вважається універсальним для всіх точок простору. Він неперервний і незворотній. За одиницю виміру часу вибирається сонячна секунда (с).

В задачах кінематики час t приймають за незалежну змінну (аргумент). Всі інші кінематичні характеристики розглядаються змінними (функціями часу t).

Відлік часу проводиться від деякого початкового моменту ($t=0$), про вибір якого в кожному конкретному випадку домовляються. Кожен заданий момент часу t визначається числом секунд, які минули від початкового моменту до заданого. Різниця між двома деякими послідовними моментами часу називається проміжком часу.

Для визначення положення рухомого об'єкта з тілом, по відношенню до якого вивчається рух, зв'язують певну систему координат, яка разом з цим тілом визначає систему відліку.

Задати рух або закон руху матеріального об'єкта означає задати положення цього об'єкта відносно вибраної системи відліку в кожен момент часу.

Встановлення математичних способів задання руху матеріальних об'єктів є однією з важливих задач кінематики. Тому вивчення руху довільного об'єкта необхідно розпочинати із встановлення способів задання цього руху.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб знаючи закон руху даного тіла, визначити всі кінематичні величини, які характеризують як рух тіла в цілому, так і рух кожної з його точок зокрема.

РОЗДІЛ 3. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Способи задання руху точки

Основним об'єктом вивчення у даному розділі є матеріальна точка, яку будемо ототожнювати з геометричною точкою. Це означає, що її положення відносно вибраної системи відліку характеризується впорядкованою трійкою чисел (x, y, z) , які називаються координатами точки.

Означення матеріальної точки наведено в розділі 1.

За систему відліку оберемо прямокутну декартову систему координат з центром в точці O і одиничними базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 3.1).

Положення матеріальної точки M відносно системи відліку буде задано, якщо в кожен момент часу будуть відомі її координати x, y, z . З плином часу положення точки M буде змінюватися, а тому будуть змінюватися її координати

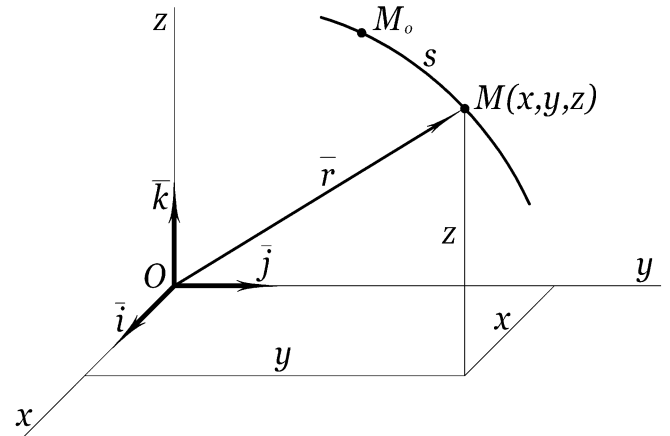


Рис. 3.1. Просторова система координат

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (3.1)$$

Оскільки рух матеріальної точки неперервний, то повинні бути неперервними функції $x(t), y(t), z(t)$. Співвідношення (3.1) дозволяють в кожний момент часу визначити трійку чисел (x, y, z) і однозначно встановити положення точки M відносно вибраної системи відліку.

Спосіб задання руху точки у вигляді (3.1) називається координатним.

Якщо співвідношення (3.1) помножити відповідно на базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то в результаті їх додавання одержимо

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Ввівши позначення

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

останню рівність перепишемо так

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (3.2)$$

Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ називається радіус-вектором точки M . Спосіб задання руху точки векторним рівнянням (3.2) називається векторним. Оскільки (3.1) є координатним записом (3.2), то координатний і векторний способи задання руху матеріальної точки еквівалентні.

В процесі руху матеріальна точка описує в просторі певну неперервну лінію, яка називається траєкторією даної точки. Траєкторія – геометрична лінія, яка не залежить від часу. Тому для її визначення із рівнянь руху (3.1) або (3.2) необхідно виключити час t .

Для цього виразимо із другого рівняння (3.1) час $t = t(y)$ і підставимо в решту рівнянь

$$(3.3)$$

$$x = x(t(y)) = x(y);$$

$$z = z(t(y)) = z(y).$$

Перше з рівнянь (3.3) визначає циліндричну поверхню твірні якої паралельні осі z , а інше – циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі x . Лінія перетину цих твірних поверхонь визначає траєкторію руху точки (рис. 3.2).

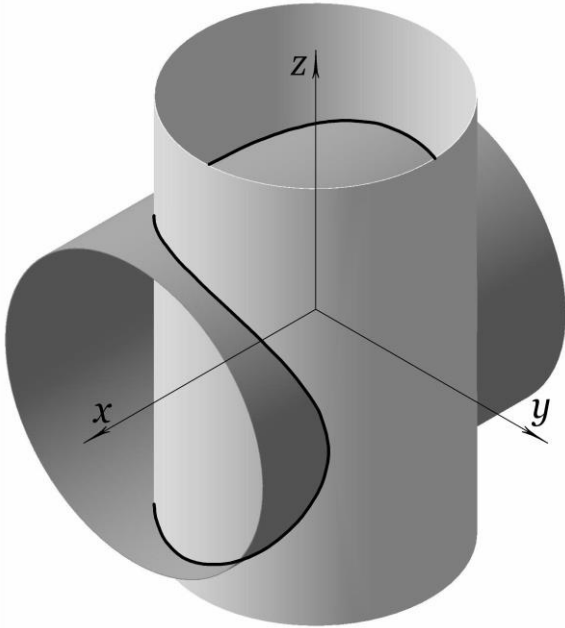


Рис. 3.3. Траєкторія точки в просторі

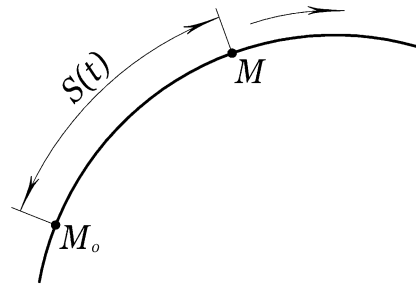


Рис. 3.3. До натурального способу задання руху точки

У випадку, коли траєкторія руху відома, для задання руху точки зручно користуватися натуральним способом. При цьому повинно бути задано: траєкторію руху точки; початкову точку відліку на траєкторії (станцію відправлення); додатний напрямок руху точки вздовж траєкторії; одиницю виміру довжин; закон руху точки вздовж траєкторії $\overline{M_0M} = S = S(t)$. Тут S відстань по дузі між точками M_0 і M з відповідним знаком (рис. 3.3).

Якщо траєкторію руху точки задати як перетин двох поверхонь $\hat{O}_1(x, y, z) = 0$ та $\hat{O}_2(x, y, z) = 0$, то рівняння руху матеріальної точки при натуральному способі задання мають вигляд:

$$\hat{O}_1(x, y, z) = 0; \quad \hat{O}_2(x, y, z) = 0; \quad S = S(t). \quad (3.4)$$

Матеріальна точка в просторі має три ступені вільності (може здійснювати три незалежні рухи), тому при довільному способі задання руху число рівнянь руху дорівнює трьом.

3.2. Кінематичні характеристики руху точки

3.2.1. Швидкість точки. Нехай рух матеріальної точки відносно вибраної системи відліку задано векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Розглянемо момент часу t_0 , якому відповідає вектор $\vec{r}(t_0)$ і точка M_0 на траєкторії. Надамо часу t_0 приросту $\Delta t > 0$. Часу $t_0 + \Delta t$ відповідає вектор $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ і точка M на траєкторії. Точки M_0 і M визначають вектор $\overline{M_0M} = \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$, який називається приростом вектора $\vec{r}(t_0)$ за час Δt . Зауважимо, що вектор $\Delta \vec{r}$ залежить від Δt (рис. 3.4).

Величина $\vec{V}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ називається вектором середньої швидкості матеріальної точки за час Δt .

Границя цього вектора при $\Delta t \rightarrow 0$ називається вектором миттєвої швидкості точки в момент часу t_0

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}(t_0). \quad (3.5)$$

В довільний момент часу формулу (3.5) можна записати у вигляді

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t). \quad (3.6)$$

На підставі (3.6) можна зробити такий висновок: вектор швидкості руху матеріальної точки в довільний момент часу, дорівнює похідній від радіус-вектора точки в цей же момент часу і характеризує зміну положення точки відносно вибраної системи відліку з часом.

Вектор \vec{V}_c напрямлений вздовж січної M_0M . При зменшенні Δt січна буде обертатися навколо точки M_0 і в граничному положенні стане дотичною до траєкторії в точці M_0 . Таким чином, вектор швидкості точки напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в напрямку руху.

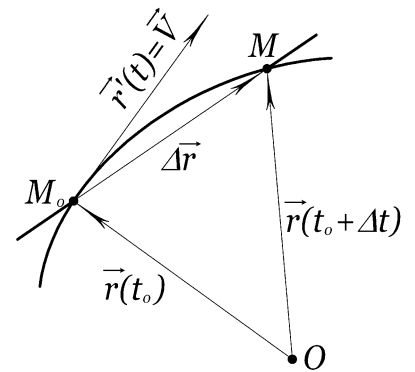


Рис. 4.4. Переміщення матеріальної точки

Вектори \vec{V}_c і \vec{V} завжди прикладені до матеріальної точки.

Припустимо, що рух матеріальної точки задано координатним способом

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Позначимо через V_x, V_y, V_z проєкції вектора її швидкості \vec{V} на координатні осі. Тоді на підставі (3.6) маємо

$$\vec{V}(V_x, V_y, V_z) = \vec{r}'(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Прирівнявши відповідні координати в лівій і правій частинах, одержимо

$$V_x = x'(t); \quad V_y = y'(t); \quad V_z = z'(t). \quad (3.7)$$

Величину вектора швидкості \vec{V} і кути α, β, γ , які він утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz відповідно визначаємо за формулами векторної алгебри

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}; \quad \cos \alpha = \frac{V_x}{V}; \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V}. \quad (3.8)$$

При натуральному способі задання руху точки рівняння руху має вигляд

$$S = S(t).$$

На підставі формули (3.6) можна записати

$$V = \frac{|\vec{dr}|}{dt} = \frac{|\vec{dr}|}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Тут враховано, що $\frac{|\vec{dr}|}{dS} = 1$. Таким чином,

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (3.9)$$

Формули (3.6)-(3.9) дозволяють визначити вектор швидкості в будь-який момент часу при довільному способі задання руху точки.

3.2.2. Прискорення точки. Швидкість руху матеріальної точки в кожен момент часу характеризує зміну положення точки відносно вибраної системи відліку. Разом з тим швидкість руху точки є функцією часу. Тому для повного кінематичного аналізу руху точки необхідно ввести ще одну кінематичну характеристику яка називається прискоренням.

Нехай рух матеріальної точки задано векторним способом

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad V = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Розглянемо момент часу t_0 , для якого визначимо вектор $\vec{V}(t_0)$. Часу t_0 надамо приросту $\Delta t > 0$ і визначимо вектор $\vec{V}(t_0 + \Delta t)$. Вектор $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)$ називається приростом вектора \vec{V} за час Δt (рис. 3.5).

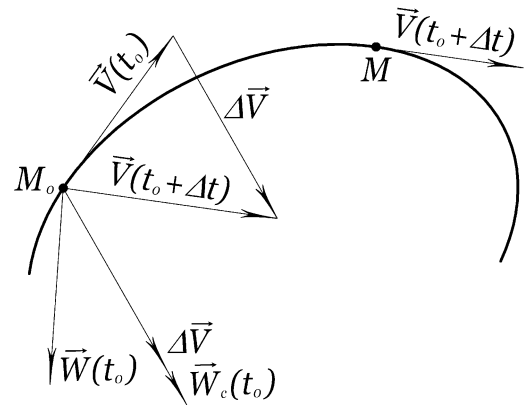


Рис. 3.5. До визначення прискорення матеріальної точки

Величину $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{W}_c$ будемо називати вектором середнього прискорення за проміжок часу Δt .

Границя \vec{W}_c при $\Delta t \rightarrow 0$ визначає миттєве прискорення матеріальної точки в момент часу t_0

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{W}(t_0).$$

З врахуванням (3.6) цю формулу можна записати так

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (3.10)$$

Вектор прискорення руху матеріальної точки дорівнює похідній по часу від вектора швидкості і характеризує зміну швидкості з часом. Він завжди прикладений до матеріальної точки.

Припустимо, що рух точки задано координатним способом

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Позначивши через W_x, W_y, W_z проекції на координатній осі прискорення \vec{W} , на підставі (3.10)

одержимо

$$\vec{W}(W_x, W_y, W_z) = \vec{r}''(x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Порівняємо відповідні координати в лівій і правій частинах

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = x''(t); \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = y''(t); \quad W_z = \frac{dV_z}{dt} = z''(t). \quad (3.11)$$

Аналогічно до (3.8), величина і напрямок вектора \vec{W} визначаються за формулами:

$$W = \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2 + (z''(t))^2}; \quad \cos \alpha = \frac{W_x}{W}; \quad \cos \beta = \frac{W_y}{W}; \quad \cos \gamma = \frac{W_z}{W}, \quad (3.12)$$

де α, β, γ – кути, які утворює вектор \vec{W} з координатними осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, то

$$S = S(t); \quad V = \frac{dS}{dt}.$$

Позначимо через $\vec{\tau}$ одиничний вектор дотичної до траєкторії в розглядуваній точці так, щоб виконувалася умова

$$\vec{V} = V\vec{\tau}.$$

Диференціюючи останню рівність по t одержимо

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V^2\frac{d\vec{\tau}}{dS}. \quad (3.13)$$

Використаємо формулу Френе із курсу диференціальної геометрії

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{\nu}}{\rho},$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в розглядуваній точці;

$\vec{\nu}$ – вектор головної нормалі траєкторії, який перпендикулярний до $\vec{\tau}$ і напрямлений до центра кривини траєкторії (рис. 3.6). В результаті простих перетворень із (3.13) одержимо

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{\nu}. \quad (3.14)$$

Остання формула показує, що вектор прискорення розкладається на дві складові, одна з яких напрямлена вздовж дотичної до траєкторії і називається дотичним (тангенціальним) прискоренням \vec{W}_τ , а інша, яка напрямлена по головній нормалі, називається нормальним прискоренням \vec{W}_n (рис. 3.7)

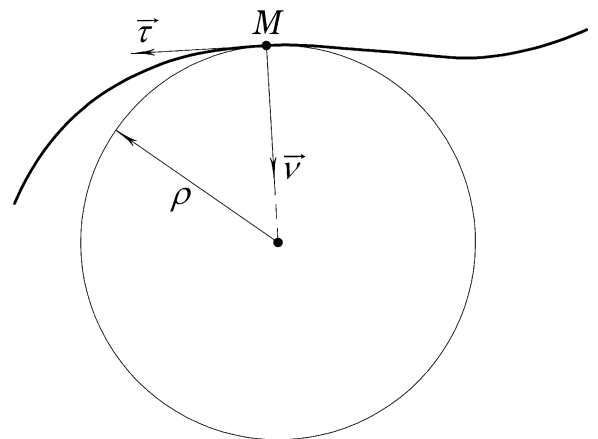


Рис. 6.6. До визначення прискорення матеріальної точки

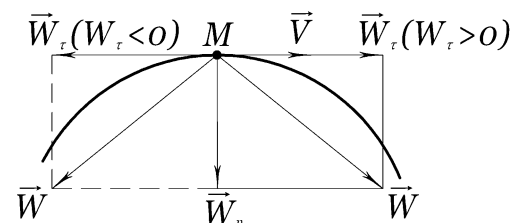


Рис. 7.7. До визначення прискорення матеріальної точки

$$\vec{W}_\tau = \frac{dV}{dt} \vec{\tau}; \quad \vec{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \vec{\nu}.$$

Величини цих складових і повного прискорення обчислюються за формулами

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}. \quad (3.15)$$

Зауважимо, що при $\frac{dV}{dt} > 0$ $\vec{W}_\tau \uparrow \uparrow \vec{V}$, а при $\frac{dV}{dt} < 0$ $\vec{W}_\tau \uparrow \downarrow \vec{V}$.

3.3. Окремі випадки руху точки

3.3.1. Прямолінійний рух точки. Якщо траєкторією руху матеріальної точки є пряма, то такий рух називається прямолінійним. Систему відліку оберемо так, щоб одна з координатних осей співпадала з траєкторією. В цьому випадку координатний і натуральний способи задання руху еквівалентні.

Якщо рівняння руху точки по траєкторії має вигляд $S = S(t)$, то на підставі формул (3.9), (3.15) одержимо

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad W_n = 0; \quad W_\tau = W = \frac{dV}{dt}. \quad (3.16)$$

Тут враховано, що для прямої $\rho \rightarrow \infty$.

3.3.2. Рівнозмінний прямолінійний рух точки. Прямолінійний рух точки називається рівнозмінним, якщо в кожний момент часу

$$W = W_0 = const.$$

Якщо $W_0 > 0$, то рух називається рівноприскореним, при $W_0 < 0$ – рівносповільненим, якщо $W_0 = 0$ – рівномірним.

За означенням рівнозмінного руху

$$W = W_0 = \frac{dV}{dt},$$

або

$$dV = W_0 dt.$$

Інтегруючи останню рівність

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t W_0 dt,$$

одержимо

$$V = V_0 + W_0 t. \quad (3.17)$$

Тут $V_0 = V(0)$ – початкова швидкість точки.

З іншого боку

$$V = \frac{dS}{dt} = V_0 + W_0 t,$$

або

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t (W_0 t + V_0) dt,$$

де $S_0 = S(0)$. Після інтегрування знаходимо

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{W_0 t^2}{2}. \quad (3.18)$$

Формули (3.17) та (3.18) визначають основні кінематичні співвідношення рівнозмінного прямолінійного руху. Якщо в них покласти $W_0 = 0$, то одержимо відповідні формули для рівномірного прямолінійного руху

$$V = V_0; \quad S = S_0 + V_0 t. \quad (3.19)$$

3.3.3. Рівнозмінний криволінійний рух точки. Довільний рух матеріальної точки називається рівнозмінним, якщо в кожен момент часу $W_\tau = W_\tau^0 = const$. Основні кінематичні співвідношення для такого руху при натуральному способі задання мають вигляд

$$S = S(t); \quad V = \frac{dS}{dt}; \quad W_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (3.20)$$

По аналогії з п.3.3.2 для рівнозмінного криволінійного руху одержимо такі співвідношення

$$V = V_0 + W_\tau^0 t; \quad S = S_0 + V_0 t + W_\tau^0 \frac{t^2}{2}; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (3.21)$$

Якщо в них покласти $W_\tau^0 = 0$, то одержимо відповідні співвідношення для криволінійного рівномірного руху

$$V = V_0; \quad S = S_0 + V_0 t; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (3.22)$$

3.4. Задачі до розділу 3

Задача 3.1. Літак в момент посадки на смугу включив гальмівну систему. За перші 20 секунд він проїхав 1100 м, а протягом наступних 10 секунд ще 325 м. Визначити при якій швидкості почалося гальмування літака, чому дорівнювало його сповільнення, якщо воно було сталим; яку відстань проїхав літак до зупинки і за який час?

Розв'язання. Початок і час відліку виберемо в місці і в момент дотику літака до смуги. Тоді

$$t_0 = 0, \quad V(0) = V_0; \quad S(0) = S_0 = 0.$$

На смугі літак здійснює рівнозмінний прямолінійний рух, для якого

$$V = V_0 + W_0 t; \quad S = V_0 t + W_0 \frac{t^2}{2}. \quad (1)$$

В моменти часу $t_1 = 20$ с і $t_2 = 30$ с знаходимо $S(t_1) = 1100$ м і $S(t_2) = 1425$ м.

На підставі (1) одержимо

$$S(t_1) = V_0 t_1 + W_0 \frac{t_1^2}{2}; \quad S(t_2) = V_0 t_2 + W_0 \frac{t_2^2}{2}. \quad (2)$$

Підставляємо числові значення в співвідношення (2)

$$20V_0 + 200W_0 = 1100; \quad 30V_0 + 450W_0 = 1425.$$

Розв'язавши дану систему, знаходимо: $V_0 = 70$ м/с, $W_0 = -1,5$ м/с².

Для визначення часу t_k зупинки літака використаємо умову $V(t_k) = V_0 + W_0 t_k = 0$, з якої знаходимо

$$t_k = -\frac{V_0}{W_0} = \frac{70 \cdot 2}{3} = 46,67 \text{ с.}$$

Визначаємо шлях літака до зупинки

$$S(t_k) = V_0 t_k + W_0 \frac{t_k^2}{2} = 1633 \text{ м.}$$

Задача 3.2. Матеріальна точка здійснює прямолінійний рух із стану спокою з прискоренням, яке пропорційне часу. За перші дві секунди точка пройшла відстань 0,16 м. Визначити середню швидкість і середнє прискорення точки за час від восьмої до десятої секунди.

Розв'язання. В початковий момент часу $t_0 = 0$ маємо

$$V(t_0) = V_0 = 0; \quad S(t_0) = S_0 = 0.$$

За умовою задачі $W = kt$, де k – коефіцієнт пропорційності. На підставі залежності $W = \frac{dV}{dt}$

можна записати

$$dV = kt dt.$$

Інтегруючи цю залежність, одержимо

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t kt dt$$

або

$$V = \frac{kt^2}{2}. \quad (1)$$

Рівність (1) визначає закон зміни швидкості з часом.

Враховуючи в рівності (1) співвідношення $V = \frac{dS}{dt}$, можна записати

$$dS = \frac{kt^2}{2} dt$$

або

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t \frac{kt^2}{2} dt.$$

Після інтегрування визначаємо закон зміни відстані з часом

$$S = \frac{kt^3}{6}. \quad (2)$$

Для визначення значення k використаємо умову $S(2) = 0,16$ м.

$$0,16 = \frac{k2^3}{6}, \quad k = 0,12 \text{ м/с}^3.$$

Тоді основні кінематичні характеристики руху точки запишуться у вигляді

$$W = 0,12t; \quad V = 0,06t^2; \quad S = 0,02t^3.$$

Середні швидкість і прискорення за час $\Delta t = 2$ с визначаємо за формулами

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(10) - S(8)}{10 - 8} = \frac{20 - 10 \cdot 24}{2} = 4,88 \text{ м/с};$$

$$W_c = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(10) - V(8)}{10 - 8} = \frac{6 - 3,84}{2} = 1,08 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3.3. Рух матеріальної точки в площині Oxy задано рівняннями $x = 3t^2$, $y = 6t$.

Визначити рівняння траєкторії, а також швидкість, дотичну і нормальну складові прискорення, повне прискорення та радіус кривини траєкторії в момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання Для визначення траєкторії необхідно із рівнянь руху виключити час t . З другого рівняння визначаємо $t = \frac{y}{6}$ і підставляємо в перше рівняння

$$y^2 = 12x. \quad (1)$$

Рівняння (1) визначає параболу вісь якої співпадає з віссю Ox (рис. 1).

Визначаємо проекції вектора швидкості на координатні осі і швидкість точки

$$V_x = x'(t) = 6t; \quad V_y = y'(t) = 6 \text{ м/с}; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 6\sqrt{1 + t^2}.$$

Аналогічно визначаємо проекції вектора прискорення і повне прискорення точки

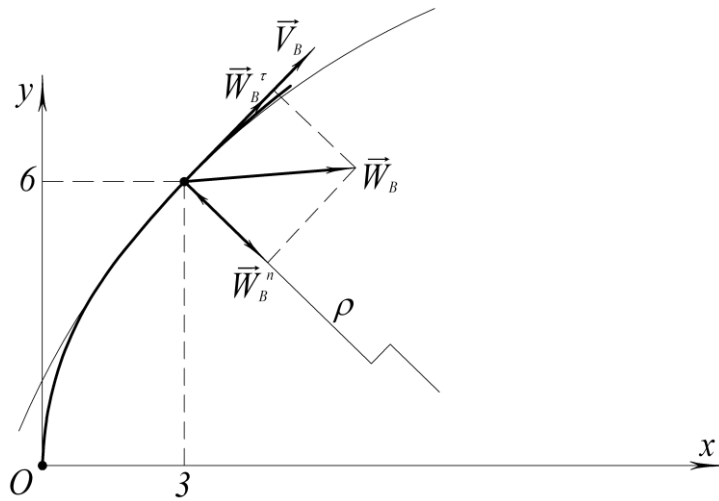


Рис. 1. До розв'язку задачі 3.3.

$$W_x = x''(t) = 6 \text{ м/с}^2; \quad W_y = y''(t) = 0; \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 6 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо тангенціальну складову прискорення

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{6t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Нормальну складову прискорення можна визначити за формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}.$$

Радіус кривини траєкторії визначаємо із співвідношення

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}.$$

Знаходимо значення шуканих величин в момент часу $t_1 = 1 \text{ с}$

$$V(t_1) = 6\sqrt{1+t_1^2} = 6\sqrt{2} \text{ м/с}; \quad W(t_1) = 6 \text{ м/с}^2; \quad W_\tau(t_1) = \frac{6t_1}{\sqrt{1+t_1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ м/с}^2;$$

$$W_n(t_1) = \sqrt{W^2(t_1) - W_\tau^2(t_1)} = 3\sqrt{2} \text{ м/с}^2; \quad \rho(t_1) = \frac{V^2(t_1)}{W_n(t_1)} = 12\sqrt{2} \text{ м}.$$

Задача 3.4. Автомобіль, рухаючись із стану спокою рівноприскорено по кільцевій ділянці дороги радіусом 200 м, через дві хвилини розвинув швидкість 108 км/год. Визначити швидкість автомобіля через одну хвилину після початку руху, його повне прискорення і шлях пройдений автомобілем за цей час.

Розв'язання. В початковий момент руху автомобіля $t_0 = 0$ маємо

$$V(t_0) = V_0 = 0; \quad S(t_0) = S_0 = 0.$$

Основні кінематичні співвідношення криволінійного рівнозмінного руху (3.21) в даному випадку мають вигляд

$$V = W_0^\tau t; \quad S = W_0^\tau \frac{t^2}{2},$$

де W_0^τ – стале тангенціальне прискорення.

В момент часу $t_1 = 120$ с швидкість дорівнює $V(t_1) = 30$ м/с.

Тоді

$$V(t_1) = W_0^\tau t_1$$

або

$$W_0^\tau = \frac{V(t_1)}{t_1} = \frac{30}{120} = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо кінематичні характеристики руху автомобіля в момент часу $t_2 = 60$ с.

$$V(t_2) = W_0^\tau t_2 = 0,25 \cdot 60 = 15 \text{ м/с};$$

$$W_n(t_2) = \frac{V^2(t_2)}{R} = \frac{15^2}{200} = 1,125 \text{ м/с}^2;$$

$$W(t_2) = \sqrt{W_n^2(t_2) + W_0^{\tau 2}} = \sqrt{\frac{85}{64}} = 1,15 \text{ м/с}^2;$$

$$S(t_2) = W_0^\tau \frac{t_2^2}{2} = \frac{3600}{8} = 450 \text{ м}.$$

РОЗДІЛ 4. КІНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

В кінематиці, як і в статиці, всі тіла будемо розглядати як абсолютно тверді, тобто будемо вважати, що відстань між двома довільними точками тіла в процесі руху залишається незмінною. З іншого боку тверде тіло будемо розглядати як систему матеріальних точок, жорстко зв'язаних між собою.

Задати рух твердого тіла в просторі означає задати рух кожної його точки. Оскільки рух кожної точки тіла описати неможливо через їх нескінченну кількість, то серед всеможливих рухів твердого тіла виділимо ті, для задання руху яких достатньо задати рух скінченної кількості точок. Такі рухи твердого тіла будемо називати найпростішими, а всі інші рухи будемо розглядати як комбінацію найпростіших.

4.1. Найпростіші рухи твердого тіла

4.1.1. Поступальний рух твердого тіла. Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма або її частина, проведені в цьому тілі, залишається в процесі руху паралельною сама собі.

Поступальний рух здійснюють кузов автомобіля на горизонтальній ділянці дороги, спарники коліс локомотива, педалі велосипеда.

Кінематика поступального руху твердого тіла визначається такою теоремою: всі точки твердого тіла при поступальному русі мають однакові кінематичні характеристики (швидкості, прискорення і траєкторії).

Для доведення теореми розглянемо два положення тіла, які відповідають моментам часу $t = t_0$ та $t = t_0 + \Delta t$. Виберемо в тілі дві довільні точки A, B , які в моменту часу t_0 визначаються радіус-векторами \vec{r}_A, \vec{r}_B . Позначимо через A_1, B_1 образи точок A, B в момент часу $t_0 + \Delta t$ при поступальному русі (рис. 4.1). За означеннями твердого тіла і поступального руху можна записати

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{const}. \quad (4.1)$$

Це означає, що чотирикутник ABA_1B_1 паралелограм, тому $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$.

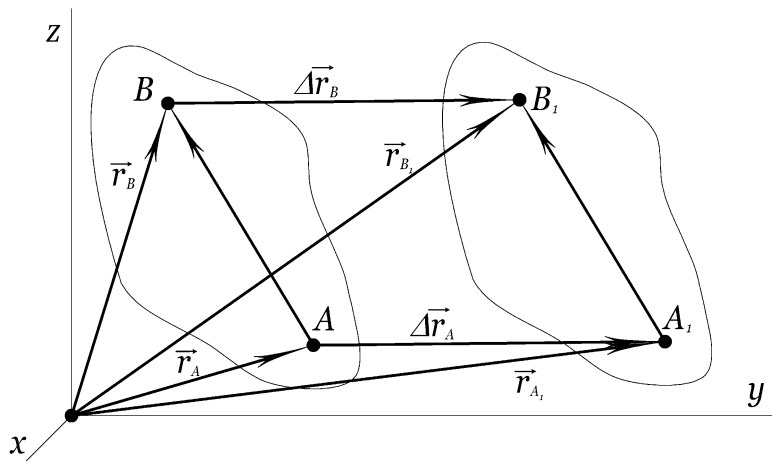


Рис. 8.1. Поступальний рух твердого тіла

Поділивши останню векторну рівність на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, маємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}.$$

На підставі означення вектора швидкості матеріальної точки одержимо

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B. \quad (4.2)$$

Диференціюючи (4.2) по часу t , знаходимо з врахуванням (3.10)

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B. \quad (4.3)$$

На підставі (4.1) можна записати

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}.$$

Остання рівність показує, що траєкторію точки B можна сумістити з траєкторією точки A паралельним перенесенням на вектор \overline{AB} .

Оскільки точки A, B вибиралися довільно, то з одержаних результатів випливає, що у всіх точках тіла однакові швидкості, прискорення і траєкторії. Теорема доведена.

На підставі доведеної теореми поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом довільної його точки. Це означає, що задача кінематики поступального руху твердого тіла зводиться до задачі кінематики матеріальної точки (розділ 3).

При поступальному русі спільну для всіх точок тіла швидкість \vec{V} називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення \vec{W} – прискоренням поступального руху. Вектори \vec{V} і \vec{W} можуть бути прикладені до довільної точки тіла.

4.1.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.

Розглянемо тверде тіло і деяку нерухому вісь AB , яка незмінно з ним зв'язана. Вважаємо, що вісь закріплена за допомогою підшипника B і підп'ятника A (рис. 4.2).

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому кожна його точка рухається по колу, центр якого належить осі обертання AB , радіус цього кола дорівнює відстані від точки до осі обертання, а площина кола проходить через розглядувану точку перпендикулярно до осі обертання.

З означення випливає, що довільна пряма, яка належить тілу і паралельна осі обертання описує в процесі руху кругову циліндричну поверхню. При цьому всі точки цієї прямої мають однакові швидкості, прискорення і траєкторії. Точки осі обертання залишаються нерухомими.

Для визначення положення тіла, що здійснює обертальний рух, проведемо через вісь обертання дві півплощини: одну нерухому, а іншу рухому, яка проходить через точки тіла і обертається разом з ним.

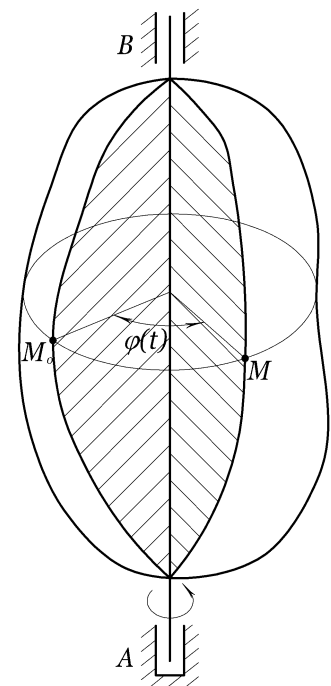


Рис. 4.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Тоді положення тіла в довільний момент часу буде визначатися положенням рухомої півплощини, або кутом між рухомою і нерухомою півплощинами (рис. 4.2). Кут φ будемо називати кутом повороту тіла і вважати додатнім якщо він відкладений від нерухомої півплощини в напрямку протилежному ходу годинникової стрілки. Кут повороту вимірюється в радіанах.

Оскільки положення твердого тіла в просторі однозначно визначається положенням трьох неколінеарних його точок, то в розглядуваному русі достатньо визначити положення довільної точки M , яка не належить осі обертання.

Розглянемо переріз тіла площиною, яка проходить через точку M перпендикулярно до осі обертання (рис. 4.3).

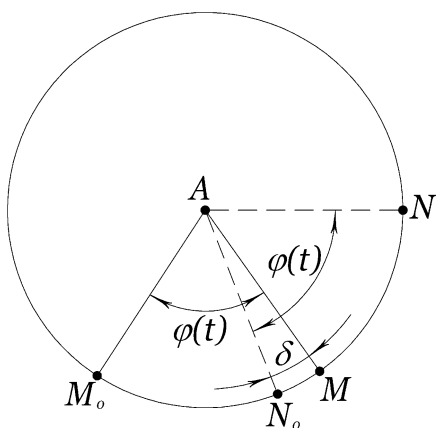


Рис. 4.3. До обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

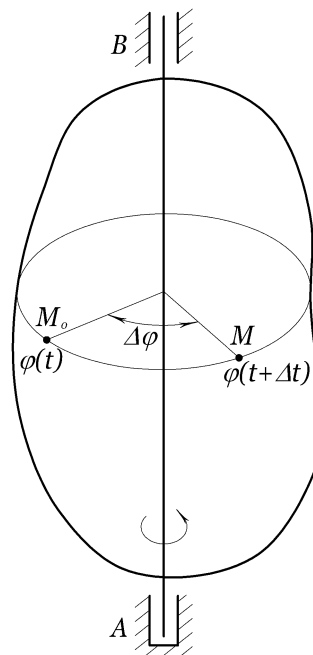


Рис. 4.4. До обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

Нехай M_0 положення точки M в момент часу $t_0 = 0$. Положення точки M буде визначено, якщо буде відома функція $\varphi = \varphi(t)$, яка визначає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Зауважимо, що кут $\varphi(t)$ буде однаковим для всіх точок розглядуваного кола (рис. 4.3), отже і для всіх точок тіла. Це випливає із означення абсолютно твердого тіла, для якого

$$\overline{M_0 N_0} = \overline{MN}.$$

Тому

$$\angle M_0 A M = \angle M_0 A N_0 + \delta \quad \text{і} \quad \angle N_0 A N = \angle M A N + \delta.$$

Останні співвідношення показують, що

$$\angle M_0 A M = \angle N_0 A N = \varphi(t).$$

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла. Нехай рух твердого тіла задано рівняннями

$$\varphi = \varphi(t). \tag{4.4}$$

Розглянемо два моменти часу t та $t + \Delta t$, яким відповідає два положення точки M , що визначаються кутами $\varphi(t)$ та $\varphi = \varphi(t + \Delta t)$. Приріст кута повороту точки M за час Δt визначається співвідношенням $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ (рис. 4.4).

Середньою кутовою швидкістю точки M за час Δt будемо називати відношення

$$\omega_{\bar{n}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Границя цього відношення при $\Delta t \rightarrow 0$ називається кутовою швидкістю точки M в момент часу t

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.5)$$

Одиниця виміру кутової швидкості рад/с.

Кутова швидкість є функція часу $\omega = \omega(t)$. Похідна від неї по часу називається кутовим прискоренням точки M :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Одиниця виміру кутового прискорення рад/с².

Оскільки кут повороту $\varphi(t)$ не залежить від вибору точки, то всі точки твердого тіла при його обертальному русі навколо нерухомої осі будуть мати однакові кутові швидкості і прискорення. Тому в подальшому величини ω та ε будемо називати відповідно кутовою швидкістю і кутовим прискоренням твердого тіла.

Зауважимо, що в залежності від напрямку обертання кутова швидкість ω може бути додатною або від'ємною. В ті моменти часу, коли $\omega > 0$ тіло обертається в додатному напрямку.

Якщо $\omega\varepsilon > 0$, то обертальний рух твердого тіла називається прискореним, при $\omega\varepsilon < 0$ – сповільненим.

Лінійні швидкості і прискорення точок при обертальному русі тіла. Нехай обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі задано рівнянням

$$\varphi = \varphi(t).$$

Розглянемо в тілі довільну точку M , яка віддалена від осі обертання на величину h (рис. 4.5).

Рух точки M по траєкторії задано натуральним способом

$$S(t) = \overbrace{M_0 M} = h\varphi(t).$$

Тому на підставі (3.20) одержимо такі кінематичні формули для визначення швидкості і прискорення точки M

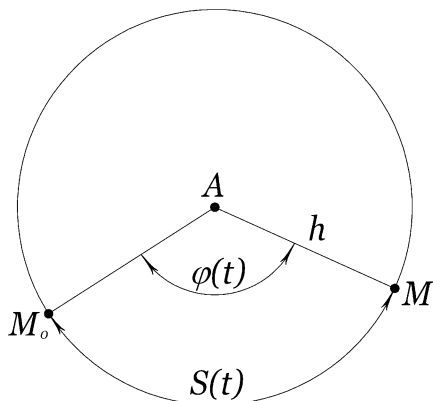


Рис. 4.5. До обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

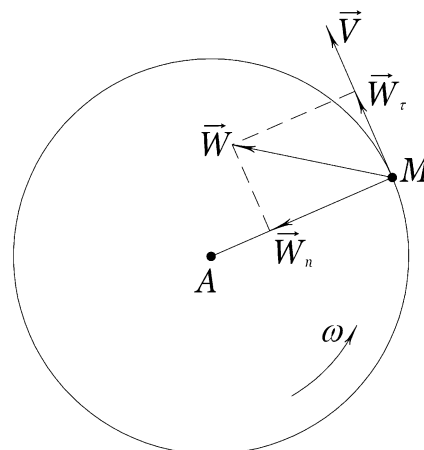


Рис. 4.6. До обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

$$V = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega; \quad W_\tau = \frac{dV}{dt} = h \frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon; \quad W_n = \frac{V^2}{h} = h\omega^2. \quad (4.7)$$

Додатні напрямки швидкості і прискорення точки у випадку прискореного руху показано на [рис. 4.6](#).

Якщо рух сповільнений, то вектор \vec{W}_τ змінює напрямок на протилежний. Повне прискорення точки M визначається за формулою

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (4.8)$$

На підставі (4.7) (4.8) можна зробити висновок, що лінійні швидкості і прискорення точок тіла при його обертальному русі змінюються вздовж радіуса за лінійним законом. За цими ж формулами можна знайти рух будь-якої іншої точки, знаючи рух однієї точки тіла, а також характеристики руху всього тіла в цілому.

4.1.3. Рівнозмінний обертальний рух твердого тіла. Рух твердого тіла навколо нерухомої осі називається рівнозмінним, якщо в кожен момент часу $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. За формулою (4.6) знаходимо

$$d\omega = \varepsilon_0 dt.$$

Інтегруючи останню рівність, будемо мати

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon_0 dt,$$

або

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t, \quad (4.9)$$

Тут $\omega_0 = \omega(0)$ – початкова кутова швидкість тіла.

Підставляючи (4.9) в (4.6) після інтегрування, знаходимо

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 \frac{t^2}{2}, \quad (4.10)$$

де $\varphi_0 = \varphi(0)$ – початковий кут повороту тіла.

Формули (4.9), (4.10) описують рівнозмісний обертальний рух твердого тіла. Якщо в них покласти $\varepsilon_0 = 0$, то одержимо відповідні співвідношення для рівномірного обертального руху навколо нерухомої осі

$$\omega = \omega_0; \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (4.11)$$

Ці формули мають таку структуру, як і формули (3.17), (3.18).

4.1.4. Векторні формули для швидкості і прискорення точки при обертальному русі тіла.

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі за законом $\varphi = \varphi(t)$. Всі точки тіла в кожний момент часу мають однакові величини ω і ε . Вісь обертання AB в процесі руху залишається незмінною, тому її додатній напрямок можна визначити одиничним вектором \vec{e} за правилом гвинта (рис. 4.7).

Введемо у розгляд вектор $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$, де ω – кутова швидкість обертального руху тіла. Його будемо називати вектором кутової швидкості. Це ковзний вздовж осі обертання вектор, напрямок якого визначається за правилом гвинта.

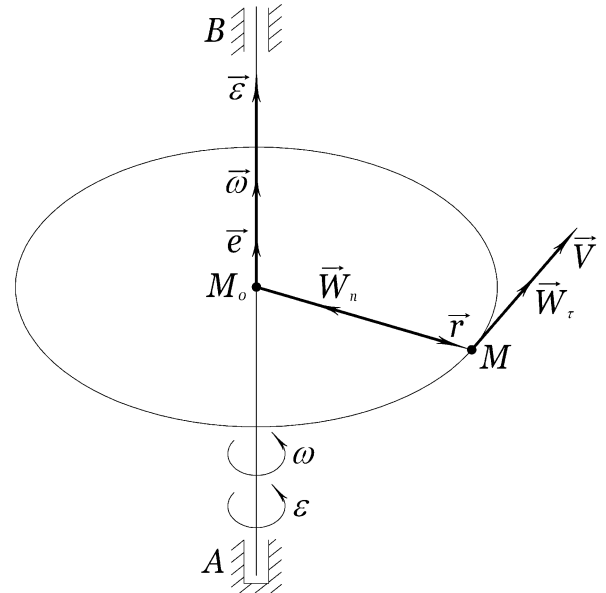


Рис. 4.7. Кутова швидкість та кутове прискорення як векторні величини

Диференціюючи рівність $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$ по часу, знаходимо

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e} + \omega \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e} = \varepsilon \vec{e},$$

або

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4.12)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ називається вектором кутового прискорення обертального руху тіла. Якщо $\omega\varepsilon > 0$, то $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ і такий обертальний рух називається прискореним. При $\omega\varepsilon < 0$, $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ – обертальний рух називається сповільненим. Введення векторів $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ дозволяє записати формули (4.7) у векторній формі. Так як $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{V}$ і $\vec{V} \perp \vec{\omega}$, то за означенням векторного добутку двох векторів можна записати

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (4.13)$$

Диференціюючи останню рівність по часу, знаходимо

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} + \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{V}],$$

або

$$\vec{W} = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{V}]. \quad (4.14)$$

Перший доданок у правій частині (4.14) визначає вектор тангенціального прискорення \vec{W}_τ , а інший – нормального прискорення \vec{W}_n . При цьому

$$\vec{W}_\tau = [\vec{\varepsilon}r]; \quad \vec{W}_n = [\vec{\omega}V]. \quad (4.15)$$

4.2. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним або плоским рухом називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині \dot{I} .

Плоский рух здійснюють багато ланок механізмів і машин, наприклад колесо автомобіля чи вагона на прямолінійній ділянці шляху, шатун в кривошипному-повзунковому механізмі і інші. Частковим випадком плоско паралельного руху є обертальний рух твердого тіла.

Розглянемо переріз S тіла деякою площиною Oxy , яка паралельна площині \dot{I} (рис. 4.8). При плоскопаралельному русі всі точки на прямій $\dot{I}\dot{I}'$, яка перпендикулярна до площини \dot{I} (перерізу S), мають однакові кінематичні характеристики.

Це означає, що для вивчення руху всього тіла достатньо вивчити як рухається переріз S в площині Oxy .

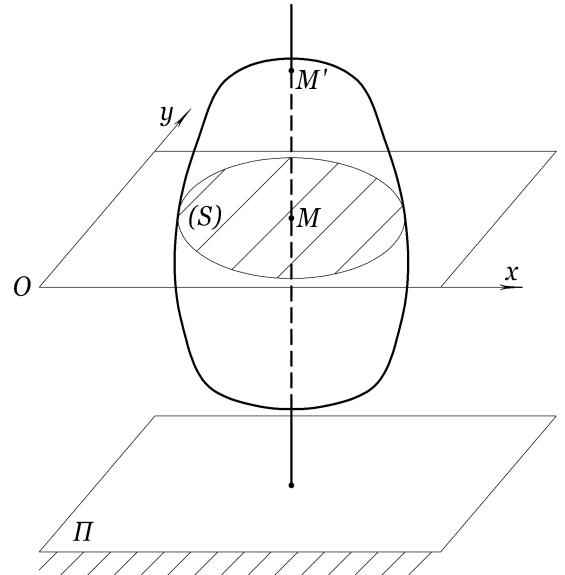


Рис. 4.8. Плоскопаралельний рух твердого тіла

В подальшому площину Oxy будемо суміщати з площиною рисунка, а замість всього тіла будемо зображати його плоский переріз S .

Положення перерізу S в площині Oxy однозначно визначається положенням деякого відрізка $\dot{I}_0\dot{I}$, проведеного в перерізі. З іншого боку положення цього відрізка можна визначити, знаючи координати x_0, y_0 точки \dot{I}_0 і кут φ , який відрізок $\dot{I}_0\dot{I}$ утворює з віссю Ox (рис. 4.9).

При русі тіла величини x_0, y_0, φ будуть змінюватися.

Позначимо через x, y координати точки M відносно вибраної системи відліку. З трикутника $\dot{I}_0\dot{I}N$ визначаємо:

$x - x_0 = r \cos \varphi$, $y - y_0 = r \sin \varphi$, де $r = \dot{I}_0\dot{I}$. Вважаючи величини x_0, y_0, x, y, φ функціями часу

можна записати

$$x(t) = x_0(t) + r \cos \varphi(t); \quad y(t) = y_0(t) + r \sin \varphi(t). \quad (4.16)$$

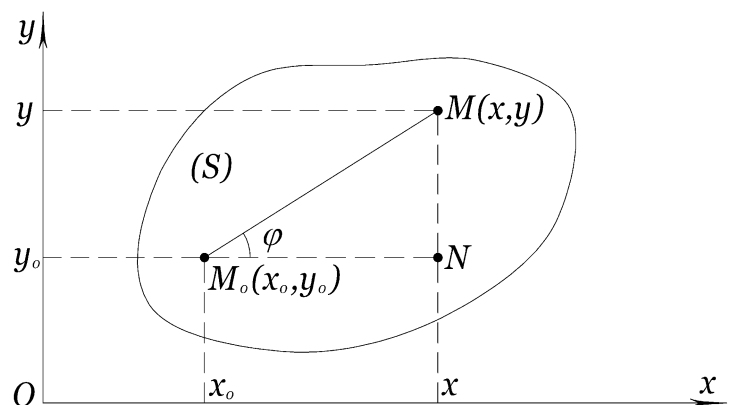


Рис. 4.9. До плоскопаралельного руху твердого тіла

Рівняння (4.16) визначають закон руху точки M в площині Oxy . Якщо з них виключити час t , то одержимо рівняння траєкторії цієї точки.

4.2.1. Визначення швидкостей точок плоскої фігури. Диференціюючи залежності (4.16) по часу t , визначимо проекції вектора швидкості точки M

$$x'(t) = x'_0(t) - r \sin \varphi \varphi'; \quad y'(t) = y'_0(t) + r \cos \varphi \varphi'$$

або

$$V_x^M = V_x^{M_0} - r\omega \sin \varphi; \quad V_y^M = V_y^{M_0} + r\omega \cos \varphi. \quad (4.17)$$

Якщо рівності (4.17) помножити відповідно на вектори \vec{i}, \vec{j} і додати, то після нескладних перетворень одержимо

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{M_0} + [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (4.18)$$

При виведенні (4.18) враховано, що

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{\omega} = \omega\vec{k}; \quad \vec{r} = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j}; \quad [\vec{\omega} \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r \cos \varphi & r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}.$$

У формулі (4.18) \vec{V}_{M_0} – швидкість точки \dot{I}_0 , яку будемо називати полюсом, величина $[\vec{\omega} \vec{r}]$ дорівнює швидкості \vec{V}_{M_0M} , яку має точка M при її обертанні навколо точки \dot{I}_0 . Таким чином, цю формулу можна записати у вигляді

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{M_0} + \vec{V}_{M_0M}. \quad (4.19)$$

Залежність (4.19) визначає зміст теореми Ейлера для плоскопаралельного руху: швидкість довільної точки M дорівнює геометричній сумі поступальної швидкості деякої іншої точки \dot{I}_0 (полюса) і обертальної швидкості точки M навколо цього полюса.

Величину і напрямок швидкості \vec{V}_M знаходимо побудовою відповідного паралелограма. При цьому $\vec{V}_{M_0M} \perp M_0M$, $V_{M_0M} = M_0M\omega$ (рис. 4.10).

Покажемо, що кутова швидкість обертального руху ω не залежить від вибору полюса. Розглянемо довільну точку N_0 , яка відмінна від \dot{I}_0 , і виберемо її за полюс. Позначимо через $\hat{O}(t)$ кут, який утворює відрізок N_0M з віссю Ox (рис. 4.11).

З рис. 4.11 видно, що

$$\hat{O}(t) = \varphi(t) - \delta. \quad (4.20)$$

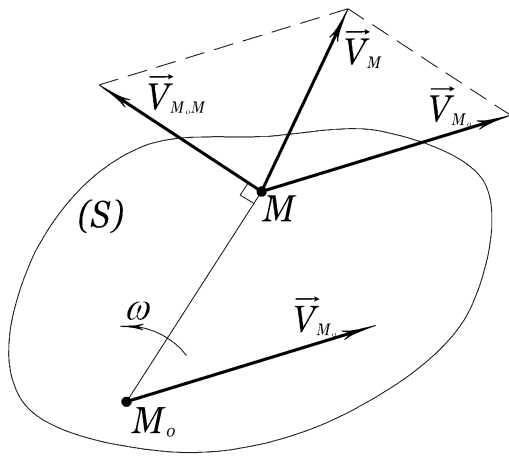


Рис. 4.10. Вектор швидкості точки

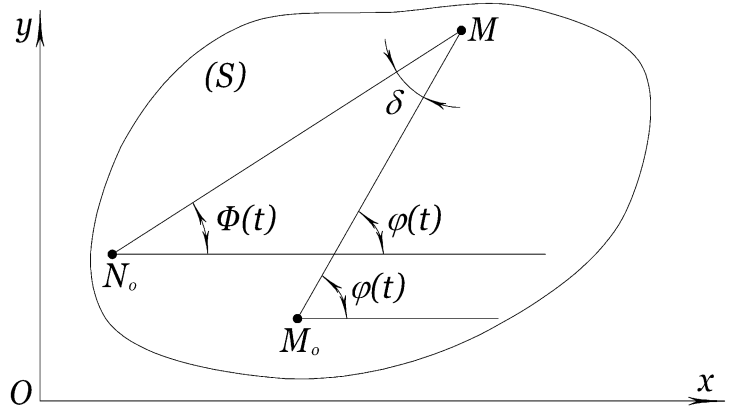


Рис. 4.11. До плоскопаралельного руху твердого тіла

Оскільки кут δ сталий, то внаслідок диференціювання (4.20) по часу одержимо $\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$,

що і необхідно було довести. Зауважимо, що не залежить від вибору полюса кутове прискорення і напрямок обертання.

На підставі доведеного твердження теореми Ейлера можна сформулювати так: будь-який миттєвий рух плоскої фігури (плоский рух) можна розглядати як послідовність миттєвого поступального руху полюса і миттєвого обертального руху навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно до площини фігури. Ця вісь називається миттєвою віссю обертання.

Розклад плоского руху на поступальний і обертальний дозволяє розглядати рух точок тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, як складний рух. При цьому переносним рухом є поступальний рух тіла разом з полюсом, а відносним – обертання навколо цього полюса.

Визначення швидкостей точок тіла за допомогою формули (4.19) пов'язано з досить складними розрахунками. Однак, на підставі цієї формули можна одержати низку інших, практично більш зручних і простих методів визначення швидкостей точок тіла.

Метод проектування основного векторного рівняння. Розглянемо дві довільні точки A і B тіла. Точку A виберемо за полюс. Тоді на підставі (4.19) маємо

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}. \quad (4.21)$$

Проектуючи векторну рівність (4.21) на пряму AB і пряму перпендикулярну до AB , знаходимо

$$\begin{aligned} V_B \cos \beta &= V_A \cos \alpha; \\ V_B \sin \beta &= V_A \sin \alpha + V_{AB}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Перше із співвідношень (4.22) доводить таку теорему: при плоскопаралельному русі проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що визначається цими точками, однакові (рис. 4.12).

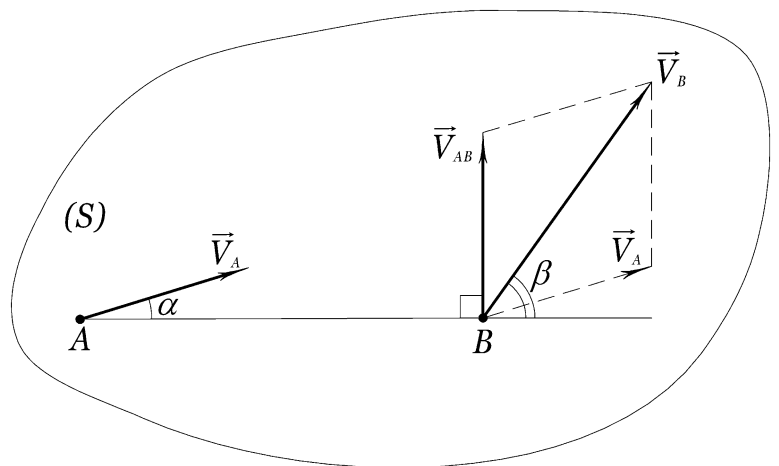


Рис. 4.12. Проекції швидкостей при плоскопаралельному русі

на пряму, що визначається цими точками, однакові (рис. 4.12).

За полюс, як правило, вибирається така точка фігури S швидкість якої відома (відомі

величини V_A, α). Відомим також вважається напрямок швидкості \vec{V}_B (величина β , бо на підставі (4.16) відома траєкторія точки B). Тоді з системи (4.22) однозначно визначаються величини V_B і V_{AB} .

Враховуючи залежність $V_{AB} = \omega_{AB} AB$, знаходимо миттєву кутову швидкість тіла:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{AB}}{AB}. \quad (4.23)$$

Метод миттєвого центра швидкостей. Розглянемо точку C плоскої фігури S , швидкість якої в заданий момент часу дорівнює нулю. Покажемо, що така точка в кожний момент часу існує і єдина.

Позначимо через \vec{r}_C радіус-вектор такої точки, проведений з полюса A . Тоді на підставі (4.19) маємо

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + [\vec{\omega} \vec{r}_C] = \vec{0},$$

або

$$\vec{V}_A = -[\vec{\omega} \vec{r}_C].$$

Визначаємо модуль вектора \vec{V}_A

$$V_A = \omega AC.$$

Оскільки $\omega \neq 0$, то

$$AC = \frac{V_A}{\omega}.$$

Встановимо напрямок вектора $\vec{r}_C = \overrightarrow{AC}$.

Для цього вектор \vec{V}_A повернемо навколо точки A на прямиий кут в напрямку обертання і в напрямку одержаного вектора відкладаємо від точки A вектор довжиною AC . Це і буде шуканий вектор \vec{r}_C (рис. 4.13).

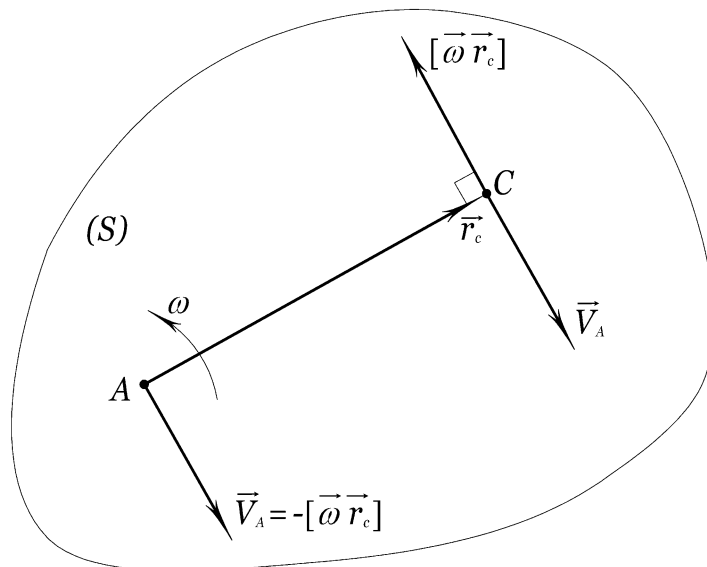


Рис. 4.13. До знаходження миттєвого центра швидкостей

Точка плоскої фігури, швидкість якої в заданий момент часу дорівнює нулю, називається миттєвим центром швидкостей (МЦШ), а точка нерухомої площини, що містить фігуру S , яка в даний момент співпадає з МЦШ, називається миттєвим центром обертання (МЦО).

Якщо замість точки A за полюс вибрати точку C (МЦШ), то формула Ейлера (4.19) запишеться у вигляді:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{CM}. \quad (4.24)$$

На підставі цієї формули приходимо до висновку: довільний миттєвий плоский рух тіла можна розглядати як миттєвий обертальний рух навколо осі, що проходить через МЦШ перпендикулярно до площини \vec{I} .

Якщо положення МЦШ встановлено і кутова швидкість ω фігури S в даний момент часу відома, то швидкість будь-якої точки M плоскої фігури S визначається із співвідношень

$$V_M = CM\omega; \quad \vec{V}_M \perp CM.$$

Аналогічні співвідношення можна записати для інших точок фігури. Із цих співвідношень випливає, що

$$\frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} = \frac{V_M}{CM}.$$

Це означає, що в кожний момент часу швидкості точок фігури пропорційні їх відстаням до МЦШ.

Положення миттєвого центра швидкостей можна визначити такими способами.

Перший спосіб. Якщо одна плоска фігура рухається по іншій нерухомій фігурі без проковзування, то МЦШ буде співпадати з точкою C їх дотику, так як швидкість точки C для нерухомої фігури дорівнює нулю. При русі без проковзування двох тіл швидкості їх спільних точок однакові. Тому швидкість точки C для рухомої фігури дорівнює нулю (рис. 4.14).

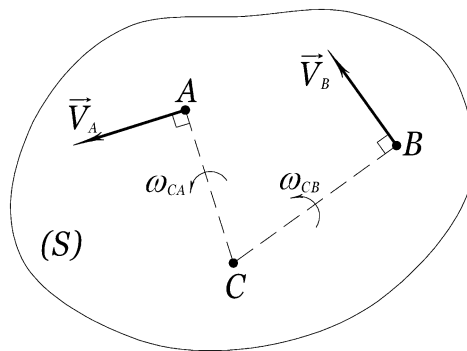
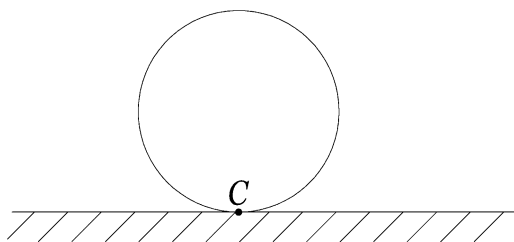


Рис. 4.14. До знаходження миттєвого центра швидкостей Рис. 4.15. До знаходження миттєвого центра швидкостей

Другий спосіб. Якщо для двох точок A, B плоскої фігури вектори \vec{V}_A, \vec{V}_B не колінеарні, то МЦШ співпадає з точкою перетину перпендикулярів, проведених з точок A, B до векторів \vec{V}_A, \vec{V}_B відповідно. Перпендикуляри CA, CB будуть радіусами миттєвого обертання для точок A, B (рис. 4.15).

Третій спосіб. Якщо вектор \vec{V}_A паралельний \vec{V}_B і точки A, B належать спільному перпендикуляру до даних швидкостей, то МЦШ співпадає з точкою перетину прямих, що визначаються початками і кінцями векторів \vec{V}_A, \vec{V}_B (рис. 4.16).

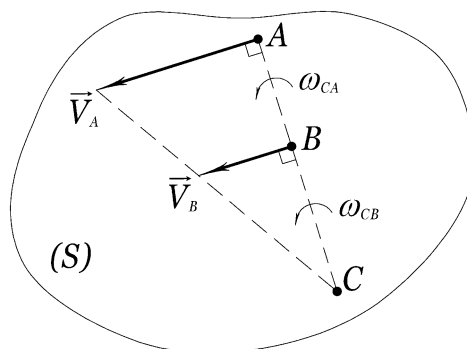
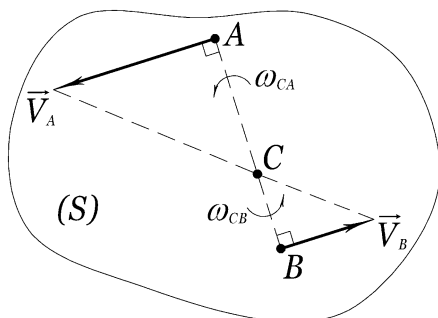


Рис. 4.16. До знаходження миттєвого центра швидкостей

Четвертий спосіб. Якщо швидкості двох точок A, B мають однакові величини і напрямки, то МЦШ є нескінченно віддалена точка. Такий випадок відповідає миттєвому поступальному руху плоскої фігури (рис. 4.17).

Зауважимо, що випадки, які зображені на рис. 4.18 неможливі, бо не виконується теорема про проєкції швидкостей (4.22).

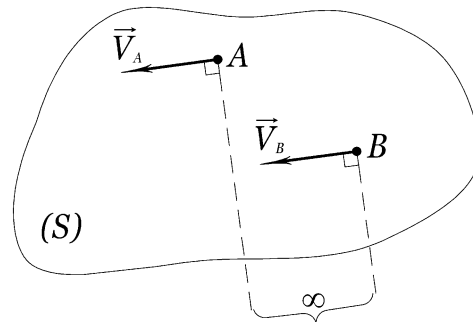


Рис. 4.17. До знаходження миттєвого центра швидкостей

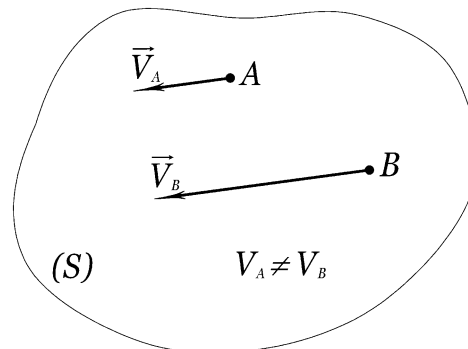
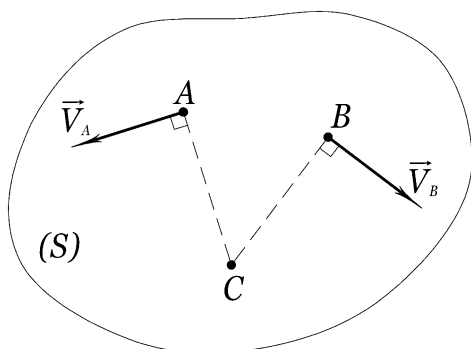


Рис. 4.18. До знаходження миттєвого центра швидкостей

Неперервний рух плоскої фігури S в її площині можна подати як неперервну послідовність обертань цієї фігури навколо МЦО. Миттєві центри обертання займають в різні моменти різні положення на нерухомій площині, в якій рухається фігура. Геометричне місце МЦО на площині називається центрною.

Плоскопаралельний рух всього тіла можна розглядати як неперервну послідовність обертань цього тіла навколо миттєвих осей, які перпендикулярні до нерухомої площини \dot{I} і в різні моменти часу займають в просторі різне положення.

4.2.2. Визначення прискорень точок плоскої фігури. Для визначення прискорень точок фігури S при її плоскому русі розглянемо формулу Ейлера (4.21) для швидкостей $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}$.

Внаслідок диференціювання її по часу одержимо формулу Ейлера для прискорення:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{AB}. \quad (4.25)$$

Тут \vec{W}_A – прискорення полюса A , який разом з фігурою S здійснює поступальний рух; \vec{W}_{AB} – прискорення обертального руху точки B навколо полюса A .

Теорему Ейлера для прискорень можна сформулювати так: прискорення довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення деякої іншої точки A (полюса) і прискорення обертального руху точки B навколо цього полюса.

Зауважимо, що кутове прискорення, як і кутова швидкість обертального руху не залежить від вибору полюса.

Як правило за полюс вибирається така точка фігури S прискорення якої відоме за величиною і напрямком.

Розкладаючи в (4.25) вектори прискорень на нормальні і тангенціальні складові, одержимо

$$\vec{W}_B^n + \vec{W}_B^\tau = \vec{W}_A^n + \vec{W}_A^\tau + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau. \quad (4.26)$$

При цьому

$$W_{AB}^n = AB\omega_{AB}^2; \vec{W}_{AB}^n \uparrow\uparrow \vec{BA}; \quad W_{AB}^\tau = AB\varepsilon_{AB}, \vec{W}_{AB}^\tau \perp \vec{AB}; \quad W_{AB} = AB\sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}.$$

$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB}$ – миттєві кутова швидкість і кутове прискорення відрізка AB (плоскої фігури S).

Величину і напрямок прискорення \vec{W}_B визначаємо шляхом побудови відповідного паралелограма (рис. 4.19).

Прискорення довільної точки B в заданий момент часу можна знайти за основним векторним рівнянням (4.26), оскільки в цей момент часу відомо:

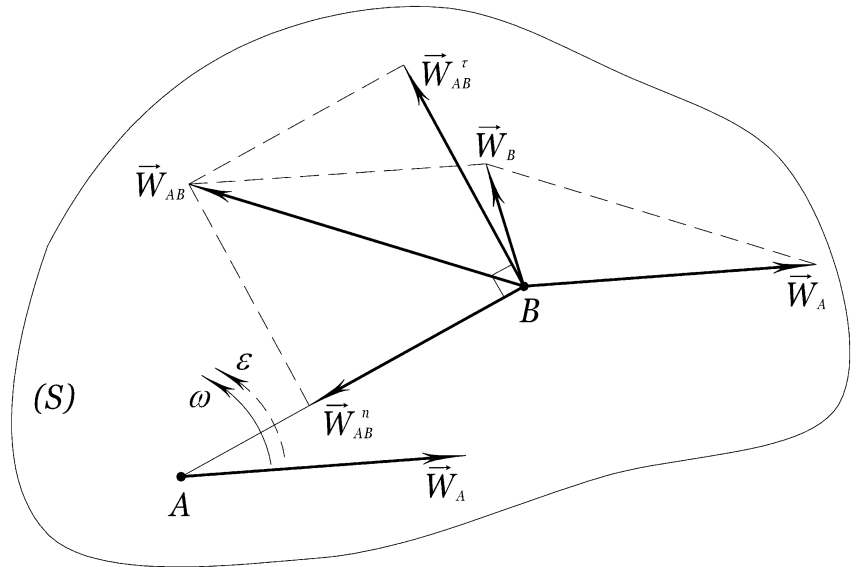


Рис. 4.19. Прискорення в плоскопаралельному

- 1) вектори швидкостей $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_{AB}$ і кутова швидкість ω ;
- 2) вектори прискорення \vec{W}_A деякої точки A (полюса) (відомі величини і напрямки векторів $\vec{W}_A^n, \vec{W}_A^\tau$);
- 3) траєкторія точки B фігури S (відомі величини і напрямки векторів $\vec{W}_{AB}^n, \vec{W}_B^n$ та напрямки $\vec{W}_{AB}^\tau, \vec{W}_B^\tau$).

При виконанні цих умов у рівнянні (4.26) будуть невідомими тільки величини векторів $\vec{W}_{AB}^\tau, \vec{W}_B^\tau$. Якщо це рівняння спроектувати на пряму AB і пряму, перпендикулярну до AB , то одержимо два скалярних рівняння для визначення W_{AB}^τ, W_B^τ . Якщо ці величини стануть відомі, то кутове прискорення ε_{AB} відрізка AB (плоскої фігури S) визначається за формулою

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^\tau}{AB}. \quad (4.27)$$

Запропонований метод визначення прискорень точок плоскої фігури називається методом проектування основного векторного рівняння.

Швидкості і прискорення точок при плоскому русі твердого тіла можна визначати графічно, шляхом побудови плану швидкостей і прискорень. Цей метод буде проілюстровано при кінематичному аналізі плоских механізмів.

4.3. Задачі до розділу 4

Задача 4.1. Диск обертається навколо центральної осі рівноприскорено із стану спокою. В момент часу $t_1 = 8$ с його кутова швидкість $\omega_1 = 4\pi \text{ с}^{-1}$. Скільки обертів зробив диск від моменту часу $t_1 = 8$ с до моменту $t_2 = 12$ с.

Розв'язання. В початковий момент часу $t_0 = 0$ маємо

$$\omega(0) = \omega_0 = 0;$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 = 0.$$

Основні кінематичні співвідношення для рівнозмінного обертального руху (4.9), (4.10) запишуться у вигляді

$$\omega = \varepsilon_0 t; \quad \varphi = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2},$$

де ε_0 – сталий кутовий прискорення диска.

З умови задачі $\omega(t_1) = \omega_1$ визначаємо

$$\omega_1 = \varepsilon_0 t_1$$

або

$$\varepsilon_0 = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{4\pi}{8} = 0,5\pi \text{ с}^{-2}.$$

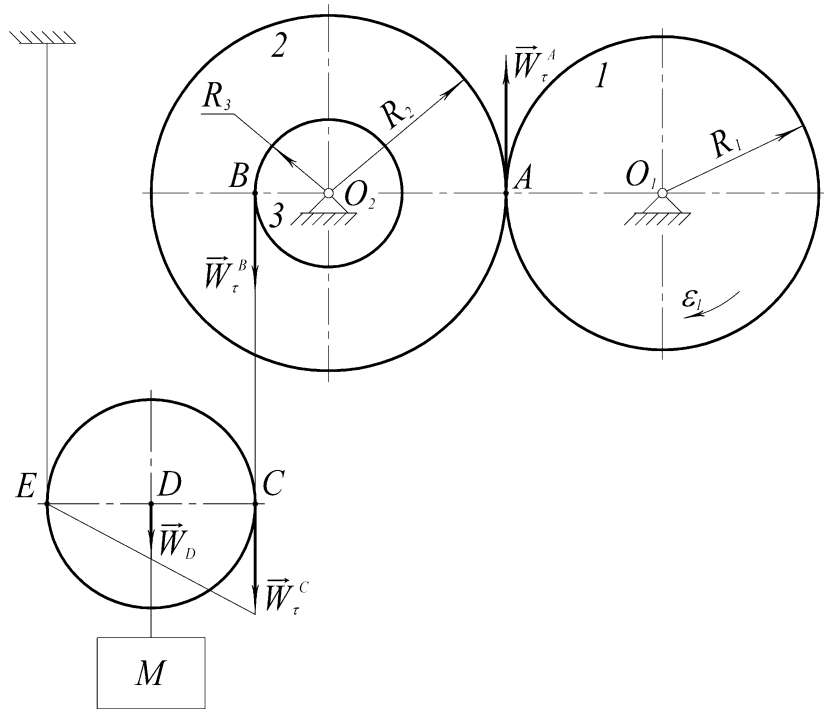
Обчислюємо значення кута повороту диска в моменти часу t_1 і t_2

$$\varphi(t_1) = \varepsilon_0 \frac{t_1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{64}{2} = 16\pi \text{ (рад)}; \quad \varphi(t_2) = \varepsilon_0 \frac{t_2^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{144}{2} = 36\pi \text{ (рад)}$$

Число обертів диска визначаємо за формулою

$$N = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2\pi} = \frac{36\pi - 16\pi}{2\pi} = 10 \text{ (обертів)}.$$

Задача 4.2. Два зубчастих колеса радіусами R_1 і R_2 мають зовнішнє зачеплення. Колесо 2 жорстко з'єднане з валом радіусом R_3 , на який намотано мотузку, що охоплює блок і закріплена в точці А. До осі блока прикріплено вантаж M . Колесо 1 обертається навколо центральної осі з сталим кутовим прискоренням ε_1 і приводить в рух всю систему (рис. 1). Визначити прискорення вантажу M .



Розв'язання. Оскільки колеса 1,2 обертаються без пробуксовки, їх точки, які розміщені на ободі, мають однакові тангенціальні прискорення

Рис. 1. До розв'язку задачі 4.2.

$$W_A^\tau = R_1 \varepsilon_1 = R_2 \varepsilon_2.$$

З останньої рівності знаходимо

$$\varepsilon_2 = \frac{R_1 \varepsilon_1}{R_2},$$

де ε_2 – кутове прискорення колеса 2. Це колесо нерухомо з'єднано з валом 3, тому вони мають однакові кутові прискорення

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \frac{R_1 \varepsilon_1}{R_2}.$$

Визначаємо тангенціальне прискорення точки B

$$W_\tau^B = R_3 \varepsilon_3 = \frac{R_3 R_1 \varepsilon_1}{R_2}.$$

Точки B і C належать мотузці, яка не розтягується, тому

$$W_\tau^C = W_\tau^B = \frac{R_3 R_1 \varepsilon_1}{R_2}.$$

Точка E мотузки в кожен момент часу нерухома, тому рух блока можна розглядати як миттєвий обертальний рух навколо точки E.

При обертальному русі прискорення точок вздовж радіуса обертання змінюється за лінійним законом. Тому маємо

$$W_M = W_D = \frac{1}{2} W_\tau^C = \frac{R_3 R_1 \varepsilon_1}{2 R_2}.$$

Задача 4.3. Кривошип OA чотириланкового механізму OABO₁ обертається навколо точки O з частотою $n_{OA} = 150$ об/хв. $OA = 0,07$ м; $AB = 0,15$ м; $BO_1 = 0,2$ м; $OO_1 = 0,24$ м. Визначити кутові швидкості ланок AB і BO₁ в момент, коли $OA \perp OO_1$ (рис. 2).

Розв'язання. При заданих розмірах ланок в чотирикутнику OABO₁ кути при вершинах O, B прямі.

Кутова швидкість ланки OA визначається за формулою

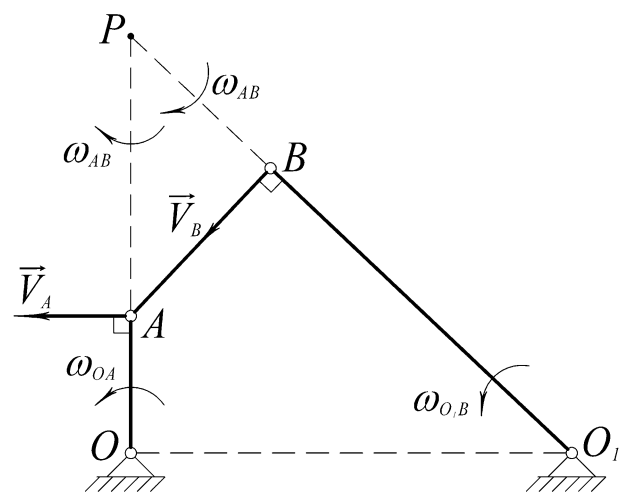


Рис. 2. До розв'язку задачі 4.3.

$$\omega_{OA} = \frac{\pi n_{OA}}{30} = \frac{\pi \cdot 150}{3} = 5\pi \text{ c}^{-1}.$$

Ланка OA здійснює обертальний рух навколо точки O , тому

$$V_A = OA\omega_{OA} = 0,07 \cdot 5\pi = 0,35\pi, \quad \vec{V}_A \perp OA. \quad (1)$$

Аналогічні залежності можна записати для ланки O_1B

$$V_B = O_1B\omega_{O_1B}, \quad \vec{V}_B \perp O_1B. \quad (2)$$

Ланка AB здійснює плоскопаралельний рух, який можна розглядати як миттєвий обертальний навколо МЦШ. Для побудови МЦШ знаходимо точку P перетину перпендикулярів, проведених до векторів \vec{V}_A і \vec{V}_B .

Позначивши через ω_{AB} кутову швидкість миттєвого обертального руху ланки AB навколо точки P , можна записати

$$V_A = PA\omega_{AB}; \quad V_B = PB\omega_{AB}. \quad (3)$$

Порівнюючи співвідношення (1) і (3), визначаємо

$$PA\omega_{AB} = 0,35\pi; \quad \omega_{AB} = \frac{0,35\pi}{PA} \text{ c}^{-1}.$$

Тоді

$$V_B = PB\omega_{AB} = \frac{PB}{PA} 0,35\pi \text{ м/с}.$$

З умови (2) знаходимо

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{PB}{PA \cdot O_1B} 0,35\pi \text{ c}^{-1}.$$

Для визначення величин PA і PB розглянемо прямокутні трикутники APB і OPO_1 . Умову їх подібності запишемо у вигляді

$$\frac{AB}{OO_1} = \frac{AP}{PO_1} = \frac{PB}{OP}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$\frac{0,15}{0,24} = \frac{PA}{0,2 + PB} = \frac{PB}{0,07 + PA}.$$

Розв'язуючи відповідну систему рівнянь, знаходимо $PA = 0,25 \text{ м}$, $PB = 0,2 \text{ м}$.

Тоді

$$\omega_{AB} = \frac{0,35\pi}{PA} = \frac{0,35\pi}{0,25} = 1,4\pi \text{ c}^{-1}; \quad \omega_{O_1B} = \frac{PB}{PA \cdot O_1B} 0,35\pi = \frac{0,2}{0,25 \cdot 0,2} 0,35\pi = 1,4\pi \text{ c}^{-1};$$

$$V_B = \frac{PB}{PA} 0,35\pi = \frac{0,2}{0,25} 0,35\pi = 0,28\pi \text{ м/с}.$$

Напрямки лінійних і кутових швидкостей показано на рис 2.

Задача 4.4. Кривошип OA обертається навколо точки O із сталою кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 6,8 \text{ c}^{-1}$. $OA = 0,1 \text{ м}$; $AB = 0,3 \text{ м}$; $O_1B = 0,16 \text{ м}$; $OO_1 = 0,24 \text{ м}$. Визначити кутові прискорення ланок O_1B і AB в той момент, коли точка A належить прямій OO_1 і розміщена зліва від точки O (рис. 3).

Розв'язання. В заданому положенні механізму $O_1B \perp AB$, тому що $O_1A^2 = AB^2 + O_1B^2$. При цьому

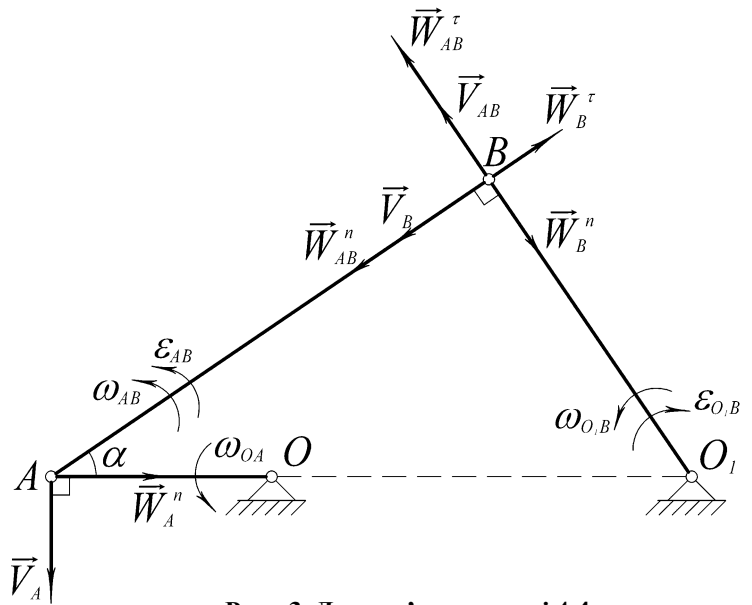


Рис. 3. До розв'язку задачі 4.4.

$$\cos \alpha = \frac{AB}{O_1A} = \frac{0,3}{0,34} = \frac{15}{17}, \quad \sin \alpha = \frac{O_1B}{O_1A} = \frac{0,16}{0,34} = \frac{8}{17}.$$

Ланка OA здійснює обертальний рух відносно точки O , тому

$$V_A = OA\omega_{OA} = 0,1 \cdot 6,8 = 0,68 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp OA.$$

Аналогічний рух відносно точки O_1 здійснює ланка O_1B

$$V_B = O_1B\omega_{O_1B}, \quad \vec{V}_B \perp O_1B.$$

Ланка AB здійснює плоскопаралельний рух і для неї має місце теорема Ейлера

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB} \quad (1)$$

Тут \vec{V}_{AB} – обертальна швидкість точки B навколо точки A , причому

$$V_{AB} = AB\omega_{AB}, \quad \vec{V}_{AB} \perp AB.$$

Спроектуємо векторне рівняння (1) на пряму AB і пряму $O_1B \perp AB$

$$AB: V_B = V_A \sin \alpha; \quad O_1B: V_{AB} - V_A \cos \alpha = 0.$$

З одержаної системи визначаємо

$$V_B = V_A \sin \alpha = 0,68 \cdot \frac{8}{17} = 0,32 \text{ м/с}; \quad V_{AB} = V_A \cos \alpha = 0,68 \cdot \frac{15}{17} = 0,6 \text{ м/с}.$$

Тоді

$$\omega_{AA} = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{0,60}{0,30} = 2 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{0,32}{0,16} = 2 \text{ c}^{-1}.$$

Напрямки лінійних швидкостей точок і кутових швидкостей ланок зображено на рис. 3.

Для визначення прискорень запишемо теорему Ейлера для ланки AB

$$\vec{W}_B^n + \vec{W}_B^\tau = \vec{W}_A^n + \vec{W}_A^\tau + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau. \quad (2)$$

Тут

$$W_A^n = OA\omega_{OA}^2 = 0,1 \cdot 6,8^2 = 4,624 \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_A^n \uparrow\uparrow \overline{AO};$$

$$W_A^\tau = OA\varepsilon_{AB} = 0 \text{ (рух кривошипа рівномірний);}$$

$$W_{AB}^n = AB\omega_{AB}^2 = 0,3 \cdot 2^2 = 1,2 \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_{AB}^n \uparrow\uparrow \overline{BA};$$

$$W_{AB}^\tau = AB\varepsilon_{AB}; \quad \vec{W}_{AB}^\tau \perp \overline{AB};$$

$$W_B^n = O_1B\omega_{O_1B}^2 = 0,16 \cdot 2^2 = 0,64 \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_B^n \uparrow\uparrow \overline{BO_1};$$

$$W_B^\tau = O_1B\varepsilon_{O_1B}; \quad \vec{W}_B^\tau \perp \overline{O_1B}.$$

Проектуючи векторну рівність (2) на прями AB і O_1B , знаходимо

$$AB: -W_B^\tau = -W_A^n \sin \alpha + W_{AB}^n; \quad O_1B: W_B^n = W_A^n \sin \alpha - W_{AB}^\tau.$$

Підставляємо числові значення відомих прискорень

$$W_B^\tau = 4,624 \cdot \frac{15}{17} - 1,2 = 4,08 - 1,2 = 2,88 \text{ м/с}^2; \quad W_{AB}^\tau = 4,624 \cdot \frac{8}{17} - 0,64 = 2,16 - 0,64 = 1,52 \text{ м/с}^2.$$

Кутові прискорення ланок визначаємо за формулами

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^\tau}{AB} = \frac{1,52}{0,3} = 5,07 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_{O_1B} = \frac{W_B^\tau}{O_1B} = \frac{2,88}{0,16} = 18 \text{ с}^{-2}.$$

Напрямки кутових прискорень зображено на [рис 3](#).

РОЗДІЛ 5. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

5.1. Складний рух матеріальної точки

Припустимо, що ми розглядаємо рух матеріальної точки відносно твердого тіла S , яке здійснює рух відносно нерухомої системи відліку. В окремих випадках розв'язування задач механіки необхідно розглядати рух точки по відношенню до двох систем відліку, одна з яких вважається умовно нерухомою, а інша (зв'язана з тілом S) здійснює певний рух по відношенню до першої. Такий рух точки називається абсолютним або складним. Прикладом складного руху є рух пасажирів по палубі пароплава, який рухається по воді.

Щоб задати рух матеріальної точки потрібно задати нерухому систему відліку. Для визначення положення твердого тіла S з ним повинна бути зв'язана інша (рухома) система відліку.

Рух матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку називається абсолютним або складним. Всі його кінематичні характеристики (швидкість, прискорення) будуть відзначатися нижнім індексом a . Наприклад \vec{V}_a та \vec{W}_a .

Рух матеріальної точки відносно рухомої системи відліку (тіла S) називається відносним. Кінематичні характеристики такого руху будемо відзначати індексом r (\vec{V}_r та \vec{W}_r).

Рух рухомої системи відліку (тіла S) відносно нерухомої називається переносним, його кінематичні характеристики відзначаються індексом e (\vec{V}_e та \vec{W}_e).

В наведеному вище прикладі рух пасажирів по палубі пароплава буде відносним, а швидкість цього руху – відносною швидкістю пасажирів.

Швидкість точки палуби пароплава, яка в даний момент часу контактує з пасажиром, буде переносною швидкістю. Рух пасажирів по відношенню до берега водойми буде його абсолютним рухом. Швидкість цього руху буде абсолютною швидкістю пасажирів.

Оскільки кінематику відносного руху точки і переносного руху тіла S розглянуто в розділах 3 і 4, то для розв'язування задачі кінематики складного руху необхідно: уміти розділяти складний рух на відносний і переносний; встановити залежності між відносними, переносними та абсолютними швидкостями і прискореннями.

Розв'язок першої задачі проводиться методом зупинки: для того, щоб із складного руху виділити відносний рух, необхідно умовно зупинити рухому систему відліку; для виділення переносного руху необхідно умовно зупинити матеріальну точку.

Розв'язок другої задачі (визначення кінематичних характеристик складного руху через кінематичні характеристики відносного і переносного рухів) визначається такими теоремами (без доведення).

Теорема 1 (теорема додавання швидкостей при складному русі точки): Вектор абсолютної швидкості складного руху матеріальної точки дорівнює геометричній (векторній) сумі швидкостей відносного і переносного рухів точки

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (5.1)$$

Величина абсолютної швидкості точки на підставі теореми косинусів визначається за формулою

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_e V_r \cos(\vec{V}_r \wedge \vec{V}_e)}. \quad (5.2)$$

Напрямок \vec{V}_a визначається за правилом паралелограма, а точка прикладання співпадає в кожний момент часу з матеріальною точкою (рис. 5.1).

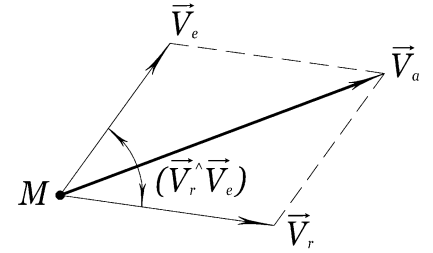


Рис. 5.1. Додавання швидкостей при складному русі

Теорема 2 (теорема додавання прискорень при складному русі точки): Вектор абсолютного прискорення складного руху матеріальної точки дорівнює геометричній (векторній) сумі прискорень відносного і переносного рухів точки та прискорення Кориоліса:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_k. \quad (5.3)$$

Прискорення Кориоліса \vec{W}_k визначається за формулою

$$\vec{W}_k = 2[\vec{\omega}_e \vec{V}_r] \quad (5.4)$$

і дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху $\vec{\omega}_e$ і відносної швидкості точки \vec{V}_r . Його величина дорівнює

$$W_k = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r). \quad (5.5)$$

Вектор прискорення Кориоліса перпендикулярний до площини, яка визначається векторами $\vec{\omega}_e$, \vec{V}_r , і напрямлений в той бік, звідки найкоротше суміщення $\vec{\omega}_e$ з \vec{V}_r відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 5.2).

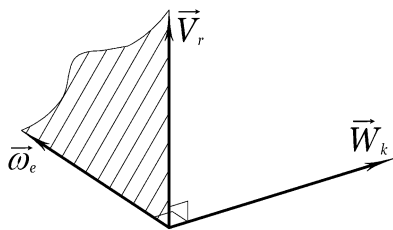


Рис. 5.2. Прискорення Кориоліса

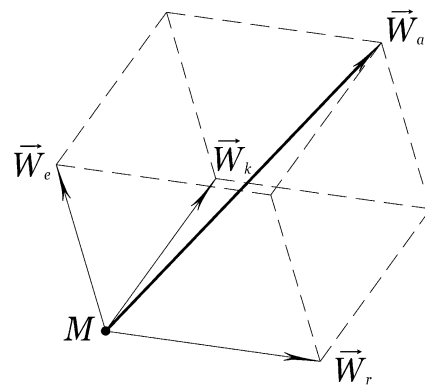


Рис. 5.3. Додавання прискорень при складному русі

Із формули (5.5) видно, що прискорення Кориоліса дорівнює нулю в таких випадках:

- 1) коли $\omega_e = 0$, тобто коли переносний рух поступальний або якщо кутова швидкість переносного обертального руху в даний момент дорівнює нулю;
- 2) коли $V_r = 0$, тобто коли відносна швидкість в даний момент відсутня;

3) коли $\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r = 0^0$ або $\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r = 180^0$, тобто коли відносний рух відбувається в напрямку паралельному осі обертання, або якщо в даний момент $\vec{\omega}_e$ та \vec{V}_r колінеарні.

Якщо визначення напрямку абсолютної швидкості за формулою (5.1) не викликає труднощів, то при визначенні прискорення \vec{W}_a за формулою (5.3) необхідно додавати три неколінеарні вектори. При цьому величина і напрямок \vec{W}_a невідомі (рис. 5.3).

При розв'язанні конкретних задач вигідніше замість векторного співвідношення (5.3) використовувати його проекції на осі нерухомої системи координат

$$W_x^a = W_x^r + W_x^e + W_x^k; \quad W_y^a = W_y^r + W_y^e + W_y^k; \quad W_z^a = W_z^r + W_z^e + W_z^k. \quad (5.6)$$

В записі (5.6) вважаються відомими напрямки проекцій абсолютного прискорення (вони напрямлені вздовж координатних осей). Якщо величини W_x^a, W_y^a, W_z^a стануть відомі, то величина і напрямок прискорення \vec{W}_a визначається за формулами (3.12).

5.2. Складний рух твердого тіла

Якщо тверде тіло здійснює рух відносно рухомої системи відліку, а ця система здійснює одночасно переносний по відношенню до нерухомої системи відліку, то результуючий (абсолютний) рух тіла називається складним.

Мета цього підрозділу – встановлення миттєвого розподілу швидкостей точок твердого тіла, який відповідає результуючому складному руху при різних часткових допущеннях про характер відносного і переносного рухів твердого тіла в заданий момент часу.

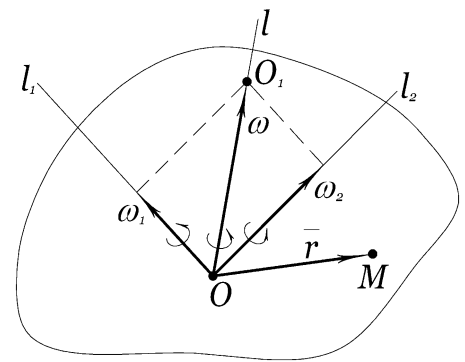
5.2.1. Додавання двох поступальних рухів. Розглянемо тверде тіло, яке перебуває одночасно в двох незалежних поступальних рухах з характеристиками (\vec{V}_1, \vec{W}_1) та (\vec{V}_2, \vec{W}_2) . Кожна точка M твердого тіла здійснює складний рух, тому на підставі теорем про додавання швидкостей і прискорень при складному русі (п. 5.1) маємо, що

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2; \quad \vec{W}_M = \vec{W}_1 + \vec{W}_2.$$

Оскільки ці співвідношення справедливі для всіх точок тіла, тому результуючий його рух буде поступальний.

Отже, при додаванні двох поступальних рухів твердого тіла з швидкостями \vec{V}_1, \vec{V}_2 результуючий рух буде поступальним з швидкістю $\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. Цей рух можна визначити рухом однієї точки тіла.

5.2.2. Додавання обертальних рухів навколо двох осей, що перетинаються. Нехай тверде тіло здійснює два незалежні обертальні рухи з кутовими швидкостями



$\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ відносно нерухомих осей l_1 і l_2 , які перетинаються в точці O (рис. 5.4).

Так як точка O належить одночасно осям l_1 і l_2 , то її швидкість в будь-який момент часу дорівнює нулю. Розглянемо точку O_1 , яка визначає кінець вектора $\vec{OO}_1 = \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, побудованого за правилом паралелограма. За теоремою про додавання швидкостей при складному русі її швидкість дорівнює

$$\vec{V}_{O_1} = [\vec{\omega}_1 \vec{OO}_1] + [\vec{\omega}_2 \vec{OO}_1] = [\vec{\omega} \vec{OO}_1]$$

Рис. 5.4. Додавання двох обертальних рухів навколо осей, що перетинаються

Вектори $\vec{\omega}$ та \vec{OO}_1 колінеарні, тому $\vec{V}_{O_1} = 0$. Це означає, що в заданий момент часу точка O_1 нерухома. Нерухомою в цей момент часу буде вісь l , яка визначається точками O, O_1 . Отже, результуючим миттєвим рухом буде обертання навколо осі l з деякою кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$.

Розглянемо довільну точку M тіла. Визначимо її абсолютну швидкість в результуючому русі

$$\vec{V}_M = [\vec{OM} \vec{\Omega}] = [\vec{OM} \vec{\omega}_1] + [\vec{OM} \vec{\omega}_2].$$

З цієї рівності визначаємо

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}. \quad (5.7)$$

Таким чином, при додаванні обертальних рухів навколо осей, що перетинаються в точці O , результуючим рухом тіла буде миттєвий обертальний рух навколо осі l , яка проходить через точку O , причому кутова швидкість $\vec{\omega}$ цього руху дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ складових рухів.

Миттєва вісь обертання визначається точкою O і вектором $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. З плином часу вісь l змінює своє положення, описуючи конічну поверхню з вершиною в точці O .

Одержані в даному пункті результати можуть бути використані при кінематичному аналізі зубчастих передач і механізмів з конічними зубчастими колесами.

5.2.3. Додавання двох обертальних рухів відносно паралельних осей. Розглянемо випадок коли тверде тіло здійснює два незалежні миттєві обертальні рухи з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ навколо нерухомих паралельних осей l_1, l_2 відповідно.

Результуючим рухом буде плоскопаралельний рух тіла, бо швидкості точок, розміщених на прямій, яка паралельна миттєвим осям обертання, будуть однакові. Тому достатньо розглянути миттєвий розподіл швидкостей в довільному перерізі S тіла площиною \vec{I} , перпендикулярною до осей обертання.

Обертання напрямлені в один бік. Припустимо, що кутові швидкості $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ мають однакові напрямки. Позначимо через A, B точки перетину фігури S з осями обертання (рис. 5.5).

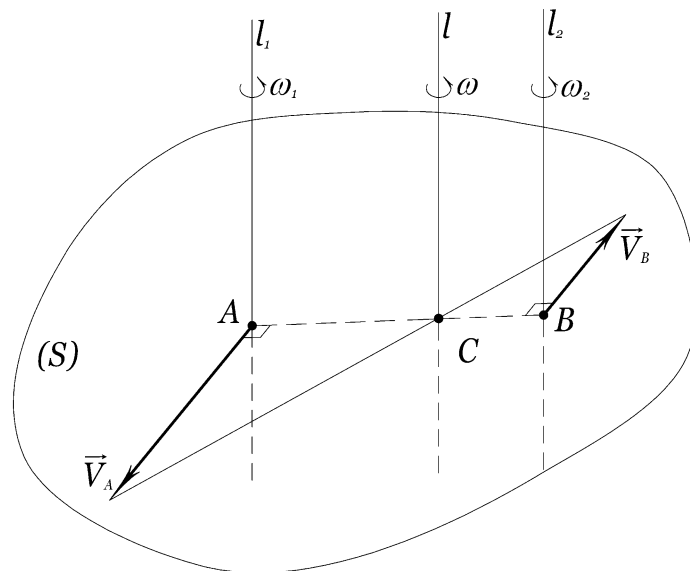


Рис. 5.5. Додавання двох однапрямлених обертальних рухів навколо паралельних осей

Визначимо абсолютні швидкості точок A, B :

$$V_A = AB\omega_2; \quad V_B = AB\omega_1. \quad (5.8)$$

Напрямки цих швидкостей зображені на рис. 5.5. Для визначення МЦШ плоскої фігури S сполучаємо кінцеві точки векторів \vec{V}_A та \vec{V}_B . В перетині з відрізком AB одержимо точку C , через яку проходить миттєва вісь обертання.

За теоремою Ейлера можна записати

$$V_A = CA\omega; \quad V_B = CB\omega. \quad (5.9)$$

де ω – кутова швидкість миттєвого обертального руху навколо осі l . Для її визначення запишемо співвідношення, які одержуються з (5.8) та (5.9):

$$\frac{V_A}{\omega_2} = \frac{V_B}{\omega_1} = \frac{V_A + V_B}{\omega_1 + \omega_2}; \quad V_A + V_B = AB\omega.$$

На підставі цих співвідношень знаходимо

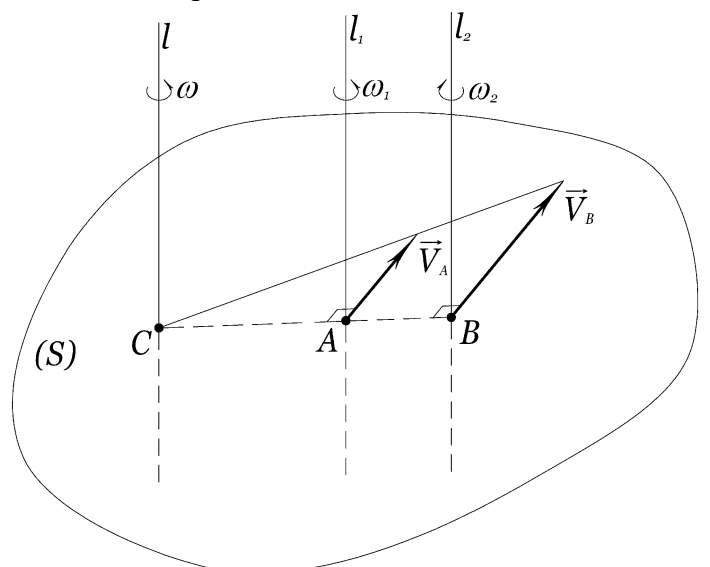
$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \quad \frac{\omega_2}{CA} = \frac{\omega_1}{CB} = \frac{\omega}{AB}. \quad (5.10)$$

Отже, якщо тіло здійснює два незалежні напрямлені в один бік обертальні рухи навколо паралельних осей, то його результуючий рух буде миттєвим обертальним навколо миттєвої осі, яка паралельна даним. Кутова швидкість результуючого руху і положення точки C , яка визначає миттєву вісь обертання, знаходяться із співвідношень (5.10).

З плином часу миттєва вісь обертання l буде змінювати своє положення, описуючи циліндричну поверхню.

Обертання напрямлені в протилежні боки.

Нехай кутові швидкості $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ мають протилежні



напрямки і припустимо, що $\omega_1 > \omega_2$. Зобразимо як і в попередньому випадку, переріз S тіла (рис. 5.6).

Швидкості точок A, B визначаємо з тих же міркувань, що і в попередній задачі

$$V_A = AB\omega_2; \quad V_B = AB\omega_1.$$

Побудову МЦШ (точка C) показано на

рис. 5.6. Тоді миттєва вісь обертання проходить через точку C , причому

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC},$$

або за властивістю пропорції

$$\omega = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \frac{V_B - V_A}{AB}.$$

Рис. 5.6. Додавання двох різнонаправлених обертальних рухів навколо паралельних осей

Підставляючи в ці рівності значення V_A, V_B знаходимо остаточно

$$\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \quad (5.11)$$

В розглядуваному випадку результуючим рухом є миттєвий обертальний рух навколо осі l , яка проходить через точку C . Кутова швидкість цього руху і положення миттєвої осі обертання визначається із співвідношень (5.11). Одержані результати показують, що вектори кутових швидкостей при обертанні навколо паралельних осей додаються так само як і вектори паралельних сил.

Пара обертань. Розглянемо випадок $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$. Така сукупність обертальних рухів називається парою обертань. На підставі формул (5.11) маємо

$$\omega = 0; \quad AC = BC = \infty.$$

Це означає, що миттєвий центр швидкостей (точка C) віднесена в нескінченність, а всі точки тіла в даний момент мають однакові швидкості. Таким чином, результуючим рухом буде поступальний (або миттєвий поступальний) з швидкістю \vec{V} , величина якої дорівнює $\omega_1 AB$, напрямленої перпендикулярно до площини векторів $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$. Напрямок вектора \vec{V} визначається за правилом гвинта.

Таким чином пара обертань еквівалентна поступальному (або миттєвому поступальному) руху з швидкістю \vec{V} , яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей цих обертань.

5.2.4. Додавання обертального і поступального рухів. Розглянемо складний рух твердого тіла, складовими якого є поступальний та обертальний навколо нерухомої осі. Відносним рухом будемо вважати обертання навколо нерухомої осі l з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, а переносим – поступальний рух із швидкістю \vec{V} .

В залежності від кута між векторами $\vec{\omega}$ та \vec{V} можливі декілька випадків.

1. Швидкість поступального руху перпендикулярна до осі обертання ($\vec{V} \perp \vec{\omega}$). На підставі теореми Ейлера (п. 4.2) такий рух є плоскопаралельним, а отже миттєвим обертальним навколо осі, яка паралельна l і проходить через МЦШ.

Для побудови цієї осі вектор \vec{V} замінимо парою кутових швидкостей $\vec{\omega}', \vec{\omega}''$ таких, що $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}'$ а $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ (рис. 5.7). При цьому відстань AC визначаємо із рівності $V = \omega' AC = \omega AC$, звідки

$$AC = \frac{V}{\omega}.$$

Вектори $\vec{\omega}, \vec{\omega}''$ при додаванні дають нульовий вектор і ми одержуємо, що рух тіла можна розглядати як миттєве обертання навколо осі l' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$.

2. Гвинтовий рух. Якщо складний рух тіла складається з обертального руху навколо нерухомої осі l з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і поступального руху з швидкістю \vec{V} , яка напрямлена вздовж осі l ($\vec{\omega} \parallel \vec{V}$), то такий рух тіла називається гвинтовим. Вісь l називається віссю гвинта. Якщо $\vec{\omega} \uparrow \vec{V}$, то гвинт називається правим, при $\vec{\omega} \updownarrow \vec{V}$ – лівим. Кожна точка при гвинтовому русі описує гвинтову лінію. Швидкість довільної точки M , яка розміщена на відстані r від осі гвинта обчислюється за формулою

$$V_M = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}.$$

Напряmlена швидкість \vec{V}_M по дотичній до гвинтової лінії (рис. 5.8).

3. Швидкість поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання (рис. 5.9 а). Розкладемо вектор \vec{V} на складові \vec{V}_1, \vec{V}_2 так, що $\vec{V}_1 \parallel \vec{\omega}$, а $\vec{V}_2 \perp \vec{\omega}$. Замінивши швидкість \vec{V}_2 парою кутових швидкостей $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}'$ та $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, одержимо після відкидання $\vec{\omega}, \vec{\omega}''$, що тіло здійснює обертальний рух навколо осі l' і

поступальний рух з швидкістю \vec{V}_1 , тобто гвинтовий рух навколо l' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ і поступальною швидкістю $V_1 = V \cos \alpha$ (рис. 5.9 б). Відстань AC при цьому визначається за формулою (5.9)

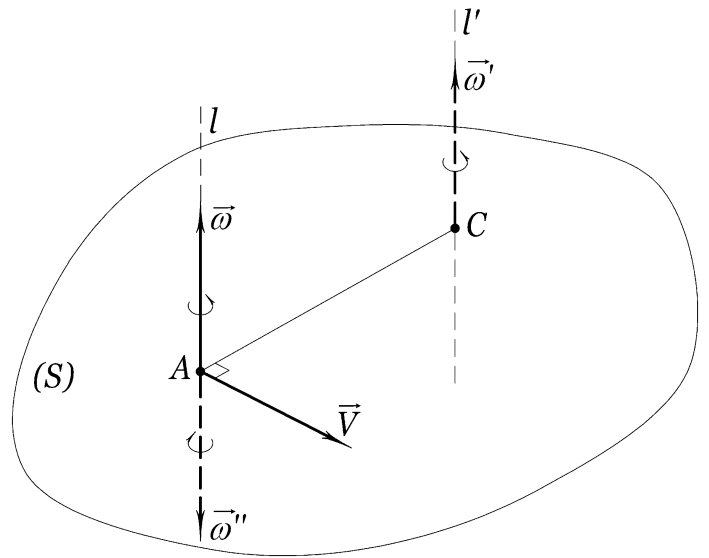


Рис. 5.7. До додавання обертального та поступального рухів

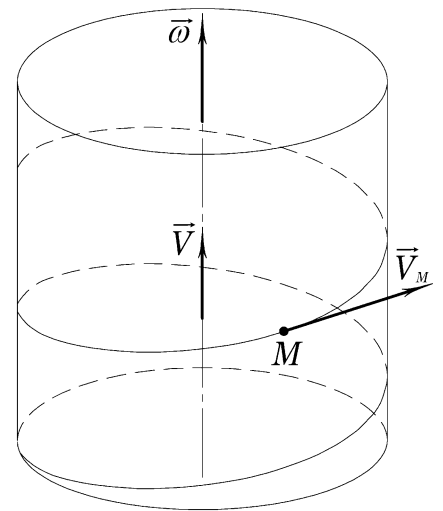


Рис. 5.8. Гвинтовий рух осі

$$AC = \frac{V_2}{\omega} = \frac{V \sin \alpha}{\omega}.$$

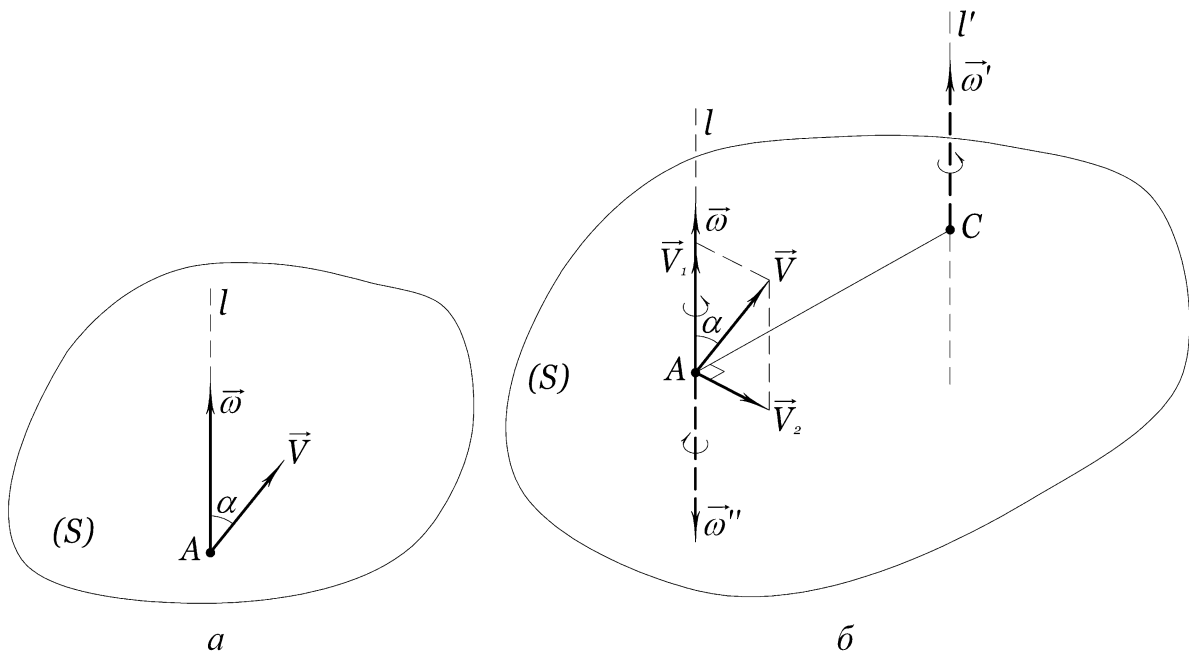


Рис. 5.9. До додавання обертального та поступального рухів

5.3. Задачі до розділу 5

Задача 5.1. Кривошип OA довжиною $0,25$ м рівномірно обертається навколо точки O з кутовою швидкістю $\omega_{OA} = 2,6 \text{ с}^{-1}$ і приводить в рух кулісу O_1B . Визначити швидкість і прискорення точки B , якщо $OO_1 = 0,6$ м, $O_1B = 1,04$ м і в даний момент $O_1A = 0,65$ м (рис. 1).

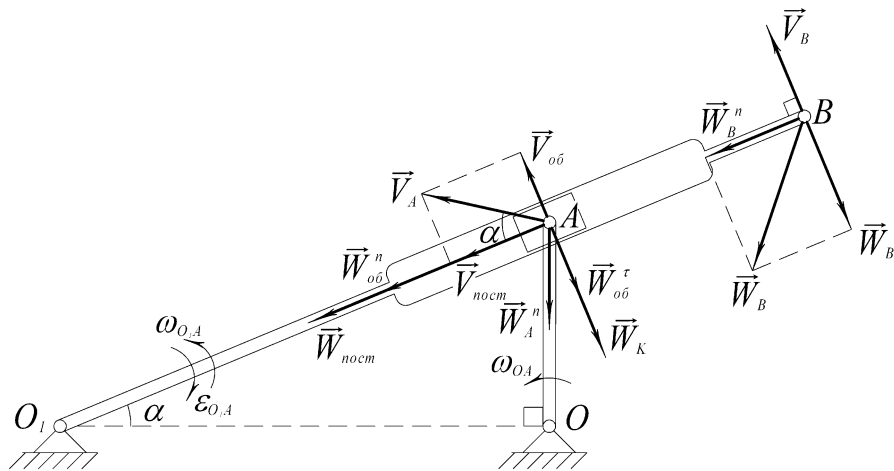


Рис. 1. До розв'язку задачі 5.1.

Розв'язання.

1. *Визначення швидкостей.* В заданому положенні механізму $OO_1 \perp OA$, так як

$$O_1A^2 = OO_1^2 + OA^2.$$

При цьому

$$V_A = OA\omega_{OA} = 0,25 \cdot 2,6 = 0,65 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_A \perp OA;$$

$$\cos \alpha = \frac{O_1O}{O_1A} = \frac{0,60}{0,65} = \frac{12}{13};$$

$$\sin \alpha = \frac{OA}{O_1A} = \frac{0,25}{0,65} = \frac{5}{13}.$$

Камінь куліси разом з точкою A здійснює складний рух: відносний – поступальний з швидкістю $\vec{V}_r = \vec{V}_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}}$ вздовж напрямної O_1A і переносний – обертальний навколо точки O_1 разом з напрямною O_1A із швидкістю $\vec{V}_{\dot{a}} = \vec{V}_{i\dot{a}}$.

За теоремою про додавання швидкостей при складному русі, маємо

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_{\dot{a}}$$

або

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}} + \vec{V}_{i\dot{a}}. \quad (1)$$

Із **рис. 1** визначаємо

$$\vec{V}_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}} = V_A \cos \alpha = 0,65 \cdot \frac{12}{13} = 0,6 \text{ м/с.}$$

З іншого боку

$$\vec{V}_{i\dot{a}} = O_1A \omega_{O_1A},$$

звідки

$$\omega_{O_1A} = \frac{V_{i\dot{a}}}{O_1A} = \frac{0,25}{0,65} = \frac{5}{13} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$V_B = O_1B \cdot \omega_{O_1A} = 1,04 \cdot \frac{5}{13} = 0,4 \text{ м/с.}$$

2. *Визначення прискорень.* Для повзуна A , який здійснює складний рух, запишемо теорему про додавання прискорень

$$\vec{W}_A^n + \vec{W}_A^r = \vec{W}_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}} + \vec{W}_{i\dot{a}}^n + \vec{W}_{i\dot{a}}^r + \vec{W}_{\dot{E}}, \quad (2)$$

де

$$W_A^n = OA \omega_{O_1A}^2 = 0,25 \cdot 2,6^2 = 1,69 \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_A^n \uparrow\uparrow \vec{AO};$$

$$W_A^r = OA \varepsilon_{AB} = 0 \text{ (рух кривошипа } OA \text{ рівномірний);}$$

$$W_K = 2V_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}} \omega_{O_1A} = 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{5}{13} = \frac{6}{13} \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_K \uparrow\uparrow \vec{V}_{i\dot{a}};$$

$$W_{i\dot{a}}^n = O_1A \omega_{O_1A}^2 = 0,65 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{5}{52} \text{ м/с}^2; \quad \vec{W}_{i\dot{a}}^n \uparrow\uparrow \vec{AO}_1;$$

$$W_{i\dot{a}}^r = O_1A \dot{\varepsilon}_{O_1A}; \quad \vec{W}_{i\dot{a}}^r \perp \vec{O_1A};$$

$$\vec{W}_{i\dot{i}\dot{n}\dot{o}} \square \vec{O_1A}.$$

Напрямки прискорень зображено на **рис. 1**. Спроектуємо векторну рівність (2) на пряму AB і пряму, перпендикулярну до AB .

$$\overset{\Delta}{AB}: W_A^n \sin \alpha = W_{i\dot{i}\ddot{n}o} + W_{i\dot{a}}^n; \quad \perp AB: W_A^n \cos \alpha = W_{i\dot{a}}^\tau + W_K.$$

Підставляємо числові значення

$$W_{i\dot{i}\ddot{n}o} = W_A^n \sin \alpha - W_{i\dot{a}}^n = 1,69 \frac{5}{13} - \frac{5}{52} = 0,64 \text{ м/с}^2; \quad W_{i\dot{a}}^\tau = W_A^n \cos \alpha - W_K = 1,69 \frac{12}{13} - \frac{6}{13} = 1,1 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$\varepsilon_{O_1A} = \frac{W_{i\dot{a}}^\tau}{O_1A} = \frac{1,1}{0,65} = 1,69 \text{ с}^{-2}.$$

Визначимо складові прискорення точки B

$$W_B^n = O_1B \cdot \omega_{O_1A}^2 = 1,04 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{4}{13} \text{ м/с}^2; \quad W_B^\tau = O_1B \cdot \varepsilon_{O_1A} = 1,04 \cdot 1,69 = 1,76 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки B визначається за формулою

$$W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + (1,76)^2} = 1,79 \text{ м/с}^2.$$

Задача 5.2. Кільцева трубка радіусом $R = 0,32$ м рівномірно обертається навколо діаметра OA з кутовою швидкістю $\omega_{OA} = \frac{\pi}{4} \text{ с}^{-1}$. В середині трубки рухається рідина за законом $S(t) = 0,08\pi t$ (м).

Визначити величину абсолютного прискорення частинки

\dot{I} рідини в момент часу $t_1 = 3$ с (**рис. 2**).

Розв'язання. Частинка \dot{I} рідини здійснює складний рух. Розділимо цей рух на відносний і переносний «методом зупинки». За матеріальну точку виберемо частинку \dot{I} рідини. Рухомим твердим тілом будемо вважати трубку (з нею буде зв'язана рухома система відліку). Якщо умовно зупинимо рухома систему відліку (трубку), то одержимо відносний рух. Це буде рух частинки \dot{I} по колу за законом $S = 0,08\pi t$. Для відділення переносного руху умовно зупинимо частинку рідини. Це буде обертальний рух точки разом з трубкою навколо осі OA .

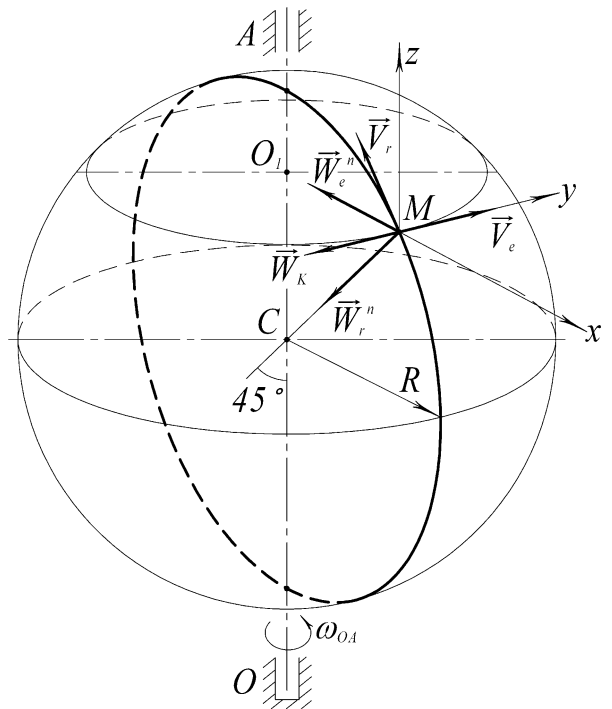


Рис. 2. До розв'язку задачі 5.2.

Запишемо кінематичні характеристики точки \dot{I} при її відносному і переносному русі.

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 0,08\pi \text{ м/с}; \quad W_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0; \quad W_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{64\pi^2 \cdot 10^{-4}}{0,32} = 0,02\pi^2 = 0,2 \text{ м/с}^2;$$

$$V_e = O_1 M \omega_{OA}; \quad \vec{V}_e \perp OA; \quad \vec{V}_e \perp O_1 M;$$

$$W_e^n = O_1 M \omega_{OA}^2; \quad \vec{W}_e^n \uparrow \uparrow \vec{MO}_1;$$

$$W_e^\tau = O_1 M \varepsilon_{OA} = 0 \text{ (обертальний рух рівномірний).}$$

Прискорення Кориоліса визначаємо за формулою

$$W_K = 2V_r \omega_{OA} \sin \varphi,$$

де φ – кут між вектором \vec{V}_r і віссю OA .

Визначимо положення частинки \dot{I} в трубці при $t_1 = 3$ с

$$S(t_1) = 0,08\pi t_1 = 0,24\pi \text{ м.}$$

Довжина трубки визначається із співвідношення

$$S_{\text{об}} = 2\pi R = 0,64\pi \text{ м.}$$

Тоді

$$\frac{S(t_1)}{S_{\text{об}}} = \frac{0,24\pi}{0,64\pi} = \frac{3}{8}.$$

Це означає, що кут між векторами \vec{NI} і \vec{NA} дорівнює 45° . Тоді

$$O_1 M = R \cos 45^\circ = \frac{0,32}{2} \sqrt{2} = 0,226 \text{ м.}$$

Визначаємо числові значення швидкостей і прискорень точки M в момент часу $t_1 = 3$ с

$$V_r = 0,08\pi \text{ м/с}; \quad W_r^\tau = 0; \quad W_r^n = 0,2 \text{ м/с}^2; \quad V_e = 0,026 \frac{\pi}{4} = 0,056\pi \text{ м/с};$$

$$W_e^n = 0,226 \frac{\pi^2}{16} = 0,14 \text{ м/с}^2; \quad W_e^\tau = 0; \quad W_e = 2 \cdot 0,08 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = 0,283 \text{ м/с}^2.$$

Напрямки швидкостей і прискорень для точки \dot{I} зображено на **рис. 2**.

Абсолютні швидкість і прискорення точки \dot{I} визначаємо за теоремами про додавання швидкостей і прискорень при складному русі точки

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_a; \quad (1)$$

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_e. \quad (2)$$

Оскільки $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$, то

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \pi \sqrt{0,8^2 + 0,56^2} = 0,98\pi \text{ м/с};$$

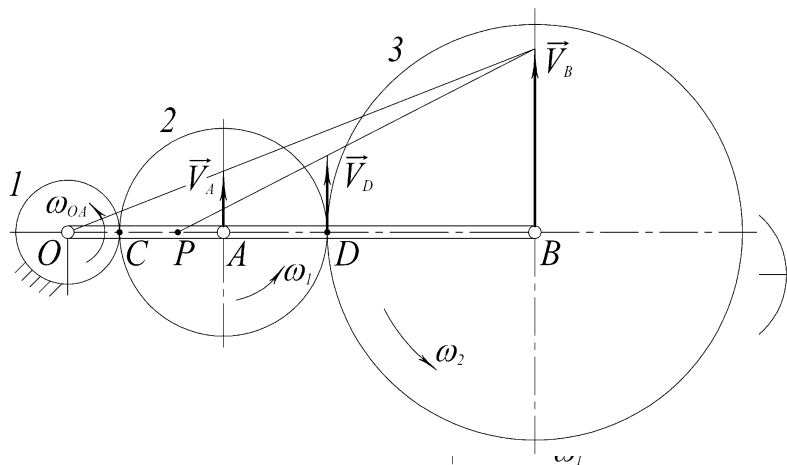
Спроектуємо рівняння (2) на осі системи координат, побудованої в точці \dot{I}

$$W_{ax} = -W_e^n - W_r^n \cos 45^\circ = -0,281 \text{ м/с}^2; \quad W_{ay} = -W_e = -0,283 \text{ м/с}^2; \quad W_{az} = -W_r^n \sin 45^\circ = -0,141 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{(0,281)^2 + (0,283)^2 + (0,141)^2} = 0,42 \text{ м/с}^2.$$

Задача 5.3. Кривошип OA здійснює рівномірний обертальний рух навколо точки O з частотою $n_{OA} = 110$ об/хв, а зубчасте колесо 1 обертається в протилежному напрямку з частотою $n_1 = 100$ об/хв. Визначити частоту обертання колеса 2 , якщо $z_1 = 70$, $z_2 = 30$ (z_1, z_2 – число зубців коліс 1 та 2 відповідно) (рис. 3).



Розв'язання. Колеса 1 та 2 перебувають в зачепленні, тому швидкість спільної точки B однакова для обох коліс.

Для колеса 1

$$V_B = OB\omega_1; \quad \vec{V}_B \perp OB.$$

Визначаємо швидкість точки A , яка одночасно належить кривошипу OA і колесу 2

$$V_A = OA\omega_{OA}; \quad \vec{V}_A \perp OA \quad \text{Рис. 3. До розв'язку задачі 5.3.}$$

Колесо 2 здійснює складний (плоскопаралельний рух), який можна розглядати як миттєвий обертальний рух навколо МЦШ (в даному випадку точка C).

Позначивши через ω_2 кутову швидкість колеса 2 , можна записати

$$V_A = CA\omega_2; \quad V_B = CB\omega_2$$

З останніх рівностей визначаємо

$$\omega_2 = \frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} = \frac{V_A + V_B}{AB} = \frac{OA\omega_{OA} + OB\omega_1}{AB}. \quad (1)$$

Оскільки радіуси коліс пропорційні числам їх зубців, то

$$\frac{OA}{AB} = \frac{z_1 + z_2}{z_2}; \quad \frac{OB}{AB} = \frac{z_1}{z_2}.$$

З умови (1) знаходимо

$$\omega_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_2} \omega_{OA} + \frac{z_1}{z_2} \omega_1.$$

Помноживши останню рівність на $\frac{30}{\pi}$, одержимо

$$n_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_2} n_{OA} + \frac{z_1}{z_2} n_1 = \frac{70 + 30}{30} 110 + \frac{70}{30} 100 = 600 \text{ об/хв.}$$

Задача 5.4. Зубчасте колесо 1 закріплено нерухомо. Кривошип OB , обертаючись навколо точки O з частотою $n_{OB} = 60$ об/хв, приводить в рух зубчасті колеса 2 і 3 (рис. 4). Визначити кутові швидкості цих коліс, якщо $r_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,2$ м; $r_3 = 0,3$ м.

Розв'язання: Визначаємо кутову швидкість кривошипа OB

$$\omega_{OB} = \frac{\pi n_{OB}}{30} = 2$$

Рис. 4. До розв'язку задачі 5.4.

Швидкості точок A, B кривошипа визначаємо за формулами

$$V_A = (r_1 + r_2)\omega_{OB} = 0,3 \cdot 2\pi = 0,6\pi \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp OA;$$

$$V_B = (r_1 + 2r_2 + r_3)\omega_{OB} = 0,8 \cdot 2\pi = 1,6\pi \text{ м/с}, \quad \vec{V}_B \perp OB.$$

Такі ж самі швидкості мають точки A, B якщо вони належать відповідним колесам.

Колесо I нерухоме, тому $V_C = 0$. Точка C співпадає з МЦШ для колеса 2 , яке здійснює складний (плоскопаралельний) рух. Для точок A, D цього колеса маємо

$$V_A = CA\omega_2; \quad V_D = CD\omega_2.$$

Тоді

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{0,6\pi}{0,2} = 3\pi \text{ с}^{-1}; \quad V_D = 2r_2\omega_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot 3\pi = 1,2\pi \text{ м/с}.$$

Колесо 3 здійснює складний (плоскопаралельний) рух. Відомо швидкості двох його точок B, D .

Будуємо МЦШ для цього колеса (точка P).

Розглядаючи рух колеса 3 як миттєвий обертальний навколо точки P з кутовою швидкістю ω_3 , можна записати

$$V_D = \omega_3 PD; \quad V_A = \omega_3 PA$$

або

$$\omega_3 = \frac{V_D}{PD} = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_B - V_D}{PB - PD} = \frac{V_B - V_D}{DB}.$$

Підставляємо числові значення

$$\omega_3 = \frac{V_B - V_D}{r_3} = \frac{1,6\pi - 1,2\pi}{0,3} = \frac{4}{3}\pi \text{ с}^{-1}.$$

РОЗДІЛ 6. КІНЕМАТИКА МЕХАНІЗМІВ

Розвиток науки про механізми і машини визначається на кожному етапі розвитку людського суспільства сучасним станом практики машинобудування і проблемами, які висуває прогрес техніки. На протязі багатолітньої історії розвитку техніки поняття про машину і механізм не залишалось стабільним; воно змінювалось і уточнювалось багато разів, причому їх визначення пов'язувалось з призначенням машини чи механізму.

Прагнення до використання сил природи з метою полегшення і підвищення продуктивності людської праці виразилось в тому, що людина стала використовувати створенні нею пристрої у вигляді деякої сукупності матеріальних тіл, які мають визначений характер відносного руху і призначені для перетворення деякого виду енергії в механічну роботу або для здійснення оберненого процесу. Таким пристроєм є машина.

При відсутності умови про використання або тривалого перетворення в роботу певного виду енергії в процесі руху буде вже не машина, а механізм, роль якого зводиться до передавальної функції, тобто до передачі руху і потоку енергії. Виходячи з цього можна дати такі означення механізму і машини.

Механізмом називається фізичний пристрій, призначений для передачі і перетворення руху.

Машиною називається фізичний пристрій, призначений для перетворення енергії і виконання роботи.

Як видно із означень, механізм має таку ж структуру як і машина, і в цьому відношенні між ними нема жодної різниці. Механізм можна вважати машиною, якщо він в процесі руху переборює зовнішні опори, які зв'язані безпосередньо з процесом виробництва або транспортування.

Машина може включати комплекс механізмів, які відтворюють заданий доцільний рух для зміни форми оброблюваного матеріалу або його положення, або ж з метою перетворення в процесі руху заданого виду енергії в механічну роботу. Вона може бути як пересувною (локомотив, автомобіль), так і стаціонарною (обробні верстати, турбіни і інші).

Сучасна машина складається із трьох суттєво різних частин: машини-двигуна, передавального механізму і машини-знаряддя.

До машин-двигунів відносяться: теплові поршневі двигуни, гідравлічні і газові турбіни, електродвигуни, вітрові силові установки. В таких машинах різні види енергії використовуються з метою перетворення в механічну роботу або для приведення в дію інших машин.

Передавальні механізми служать для передачі руху і механічної роботи від двигуна до виконавчих органів машини. Такими механізмами є, зокрема, зубчасті і черв'ячні редуктори, важільні механізми, варіатори швидкості тощо.

До машин-знарядь або робочих машин відносяться верстати і преси, які призначені для холодної або гарячої обробки металів, дробильні машини і млини, прядильні і ткацькі верстати та інші.

В підгрупу транспортних машин входять конвеєри всіх модифікацій (транспортери, елеватори) і підйомно-транспортні машини (шахтні підйомники, вантажопідйомні крани).

Можна також виділити машини, які перетворюють механічну енергію в інший вид енергії, наприклад, в електричну (динамомашина).

При вивченні кінематики механізмів і машин нема необхідності знати розміри або конструктивні форми машини в цілому або окремих її органів. Для цього достатньо буде кінематичної схеми (скелета) механізму машини.

6.1. Структурний аналіз механізмів та їх класифікація

Структурний аналіз механізмів передбачає розгляд питань утворення, видозміни і побудови механізмів, а також послідовність і способи з'єднання окремих їх частин.

Закономірний рух матеріальних тіл, як складових частин механізму, мислимий лише при їх з'єднанні між собою таким чином, щоб заданому руху одного або кількох з них відповідав визначений рух решти.

Найпростіша частина механізму у вигляді одного твердого тіла, що має визначену, наперед задану, форму і розміри називається деталлю.

Частина механізму, яка складається з однієї або декількох деталей, з'єднаних між собою нерухомо називається ланкою.

По відношенню до інших частин механізму ланка повинна мати відносну рухомість.

6.1.1. Кінематичні пари та їх класифікація. Кінематичною парою називається *рухоме* з'єднання двох ланок. Множина спільних точок цих ланок називається *елементом* кінематичної пари.

Дві ланки, об'єднані в кінематичну пару, можуть здійснювати визначений рух одна відносно іншої. При цьому завжди можна вважати, що одна з ланок нерухома, а інша здійснює відносний рух.

Об'єднання двох ланок в кінематичну пару накладає певні обмеження на їх відносний рух. Число таких обмежень називається *класом* кінематичної пари.

Кінематичні пари класифікуються за:

- 1) видом елементів кінематичних пар;
- 2) характером відносного рух ланок;
- 3) числом обмежень, які накладаються на відносний рух ланок.

За першою ознакою кінематичні пари поділяються на *нижчі* і *вищі*.

Нижчою називається така кінематична пара елементом якої є поверхня скінчених розмірів. Прикладами таких пар є поступальна і обертальна (рис. 6.5).

Якщо елементом кінематичної пари є частина лінії або точка, то кінематична пара називається вищою (рис. 6.1).

Всі нижчі кінематичні пари володіють властивістю оборотності (інверсії), суть якої полягає в тому, що характер відносного руху не залежить від того, яка з двох ланок буде закріплена.

Вищі кінематичні пари властивістю оборотності не володіють.

За другою ознакою кінематичні пари поділяються на *просторові* і *плоскі*.

Якщо відносний рух ланок здійснюється в одній або паралельних площинах, то така кінематична пара називається плоскою. У всіх інших випадках кінематична пара називається просторовою.

За третьою ознакою кінематичні пари поділяються на п'ять класів у просторовому русі.

До першого класу відносяться пари, які накладають лише одне обмеження на відносний рух ланок, до другого – два обмеження і т.д.

Так, наприклад, куля, яка розміщена між двома паралельними площинами, не може здійснювати рух вздовж прямої, що проходить через точки її дотику з площинами. Тим самим одна ступінь вільності виключається, а решта п'ять можливі (рис. 6.1).

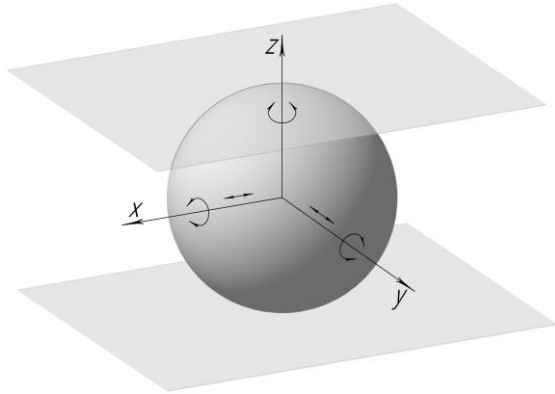


Рис. 6.1. Кінематична пара першого класу

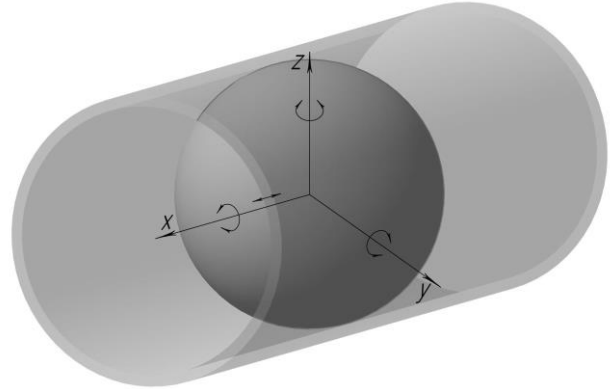


Рис. 6.2. Кінематична пара другого класу

Очевидно, що такою кінематичною парою накладається лише одне обмеження, тому її необхідно віднести до першого класу.

Якщо кулю помістити в циліндр такого ж діаметра, то неможливими стануть два поступальних рухи вздовж двох взаємно перпендикулярних осей в площині, яка перпендикулярна осі циліндра. Це кінематична пара другого класу (рис. 6.2).

Якщо кулю помістити в іншу кулю так, щоб вона всіма точками дотикалася внутрішніх точок останньої, то можливими залишаться тільки три обертальних рухи навколо трьох взаємноперпендикулярних осей. Це означає, що така кінематична пара накладає три обмеження на відносний рух ланок і визначає третій клас даної пари (рис. 6.3).

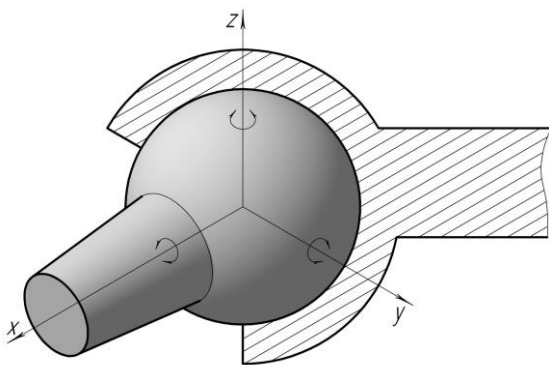


Рис. 6.3. Кінематична пара третього класу

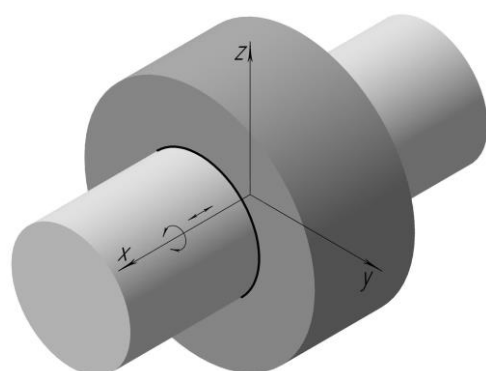


Рис. 6.4. Кінематична пара четвертого

Прикладом кінематичної пари четвертого класу може бути циліндрична пара, де можливими рухами є поступальний вздовж осі циліндра і обертальний навколо цієї осі. Число обмежень на відносний рух ланок дорівнює чотирьом (рис. 6.4).

Кінематичні пари, зображені на рис. 6.5 відносяться до п'ятого класу, так як кожна з них має лише одну ступінь вільності. Ці пари називаються відповідно поступальною та обертальною.

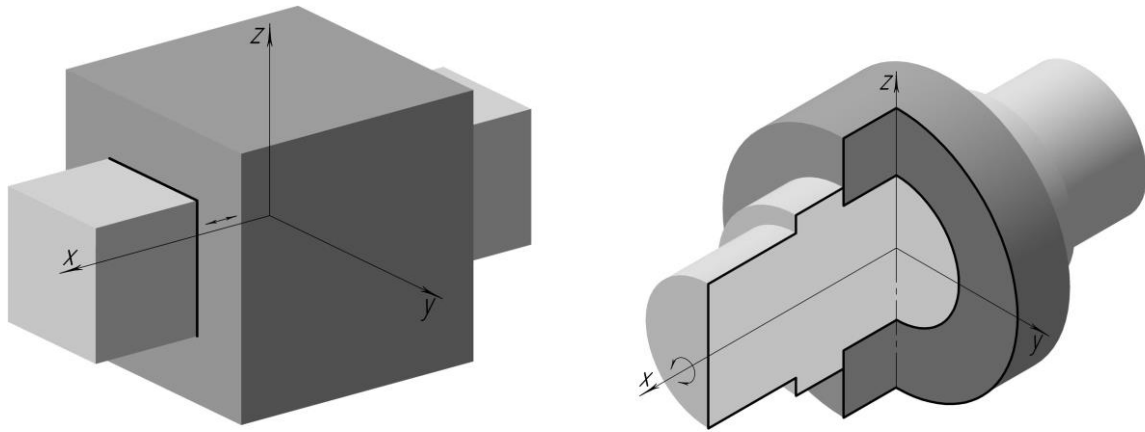


Рис. 6.5. Кінематичні пари п'ятого класу

Клас кінематичної пари не може дорівнювати нулю або шести, бо в першому випадку з'єднання ланок нерухоме, а в другому – ланки не об'єднані в кінематичну пару.

В плоскому русі твердих тіл число класів, очевидно, не може бути більше ніж два, тобто на три менше ніж при просторовому русі.

Схематичне зображення нижчих і вищих кінематичних пар різних видів показано на рис. 6.6.

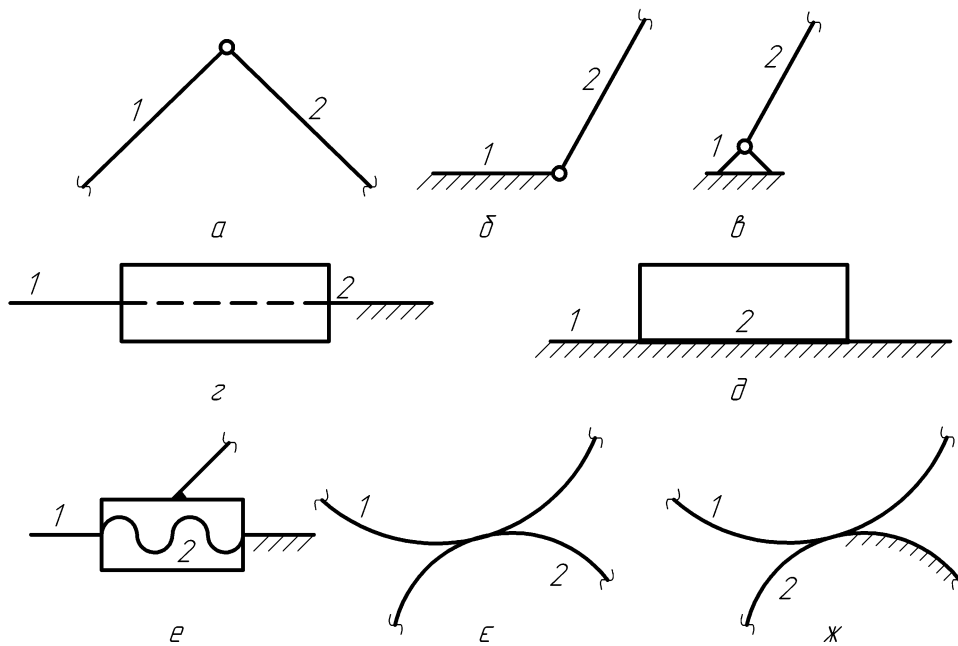


Рис. 6.6. Схематичне зображення вищих і нижчих кінематичних пар:
а, б, в – обертальні пари; г, д – поступальні пари; е – гвинтова пара; є, ж – вищі пари.

Умовні позначення ланок наведено на рис. 6.7. Зазвичай ланки зображуються у відірваному вигляді від дійсної (конструктивної) їх форми: а – ланка з елементами обертальних пар А і В на кінцях; б, в – ланка 1, до якої за допомогою обертальних пар А, В, С приєднані ланки 2, 3 і 4; г – до ланки 1 приєднані ланки 2, 3, причому остання за допомогою поступальної пари В.

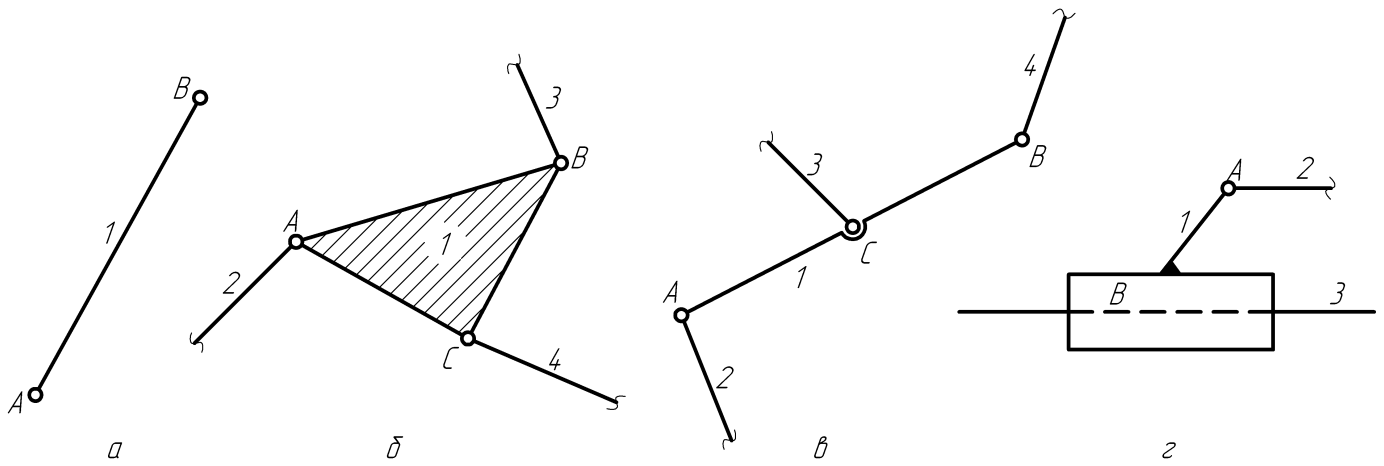


Рис. 6.7. Умовні позначення ланок

6.1.2. Кінематичні ланцюги та їх класифікація. Кінематичним ланцюгом називається послідовне (а) або розгалужене (б) з'єднання ланок за допомогою кінематичних пар (рис. 6.8).

Кінематичні ланцюги поділяються на прості та складні, замкнені і незамкнені, просторові і плоскі.

Приклад незамкненого простого кінематичного ланцюга зображено на рис. 6.8 а, а складного — на рис. 6.8 б.

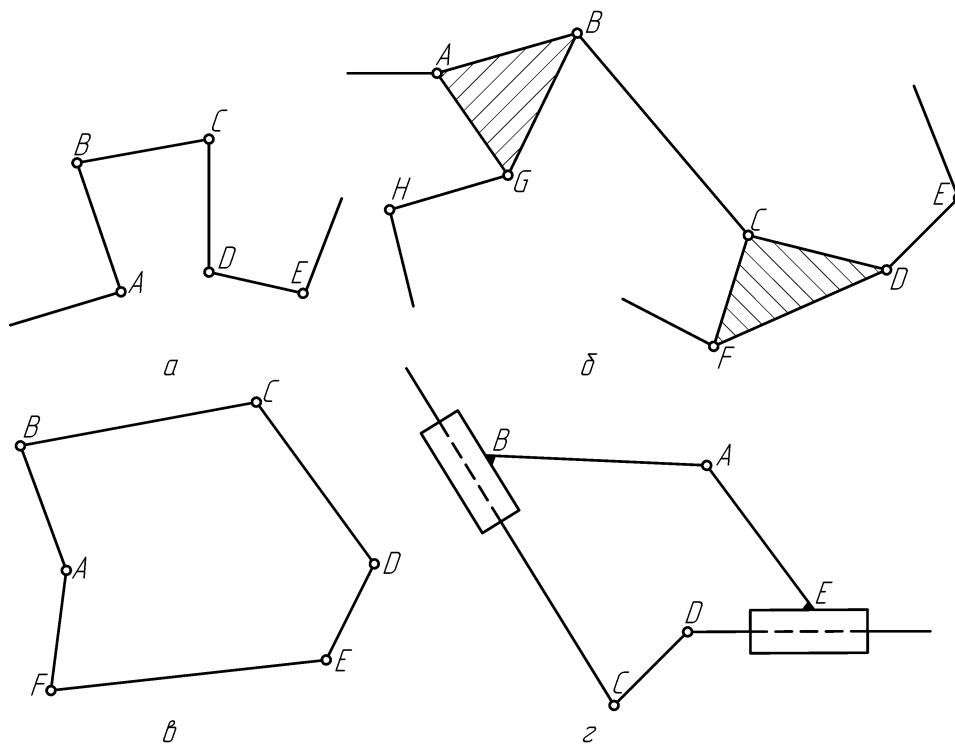


Рис. 6.8. Кінематичні ланцюги

До складу простого незамкненого кінематичного ланцюга входять ланки з одним і двома елементами кінематичних пар, чим зумовлена можливість приєднання до нього не більше двох інших ланок до кожної з них, крім першої та останньої, які не містять елементів кінематичних пар на вільних кінцях. Загальна кількість кінематичних пар в незамкненому ланцюгу завжди на одиницю менша від числа ланок.

До складного ланцюга входять також ланки, які допускають приєднання до них більше, ніж дві ланки (рис. 6.8 б).

Простий замкнений кінематичний ланцюг одержується з незамкненого, якщо першу ланку рухомо з'єднати з останнього, для чого вони обидві повинні містити елементи кінематичних пар на вільних кінцях. В результаті цього буде утворено лише один замкнений контур (рис. 6.8 в, з).

Таким же способом із незамкненого складного кінематичного ланцюга може бути одержаний замкнений складний кінематичний ланцюг з декількома замкненими контурами (рис. 6.9).

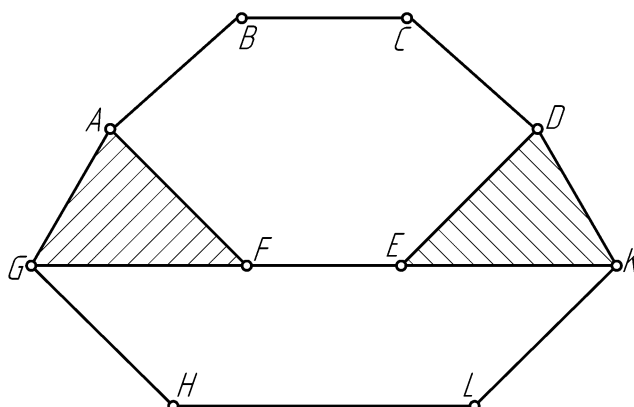


Рис. 6.9. Складний замкнений кінематичний ланцюг

Кінематичний ланцюг називається *плоским*, якщо всі його ланки рухаються в одній або паралельних площинах. У всіх інших випадках кінематичний ланцюг називається *просторовим*.

Плоскі замкнені кінематичні ланцюги набули широкого розповсюдження на практиці. В подальшому будемо розглядати лише плоскі стержневі системи.

6.1.3. Механізм, як замкнений кінематичний ланцюг. В залежності від кількості ланок і кінематичних пар в замкненому кінематичному ланцюгу число степенів вільності може бути різним.

Якщо одну ланку такого ланцюга закріпити, то число степенів вільності зменшується на шість при просторовому русі або на три при плоскому. В результаті цього рух ланок ланцюга відносно закріпленої ланки стане абсолютним. Це дає змогу сформулювати інше означення механізму: механізмом називається замкнений кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, в якому за заданим рухом однієї або кількох ланок можна однозначно визначити рух решти ланок.

Ланки механізму, рух яких задано, називаються *ведучими*, всі інші рухомі ланки – *веденими*. Число ведучих ланок будемо називати класом механізму.

Нерухома ланка механізму називається *стойкою*. При цьому нерухомість стойки слід розуміти відносно, так як машина, до складу якої входить механізм, може бути стаціонарною або пересувною. В першому випадку стойка складає одне ціле з фундаментом на землі. Для випадку, коли механічна система рухається (автомобіль, літак, тепловоз і інші), нерухомою ланкою вважається рама, хоча вона фактично переміщається відносно землі.

Рухомістю механізму називається число незалежних рухів, які здійснюють його ланки. Як відомо, якщо на рух ланки, яка здійснює плоский рух, не накладено ніяких обмежень, то вона має три степені вільності. Тому, якщо допустити, що в складі замкненого кінематичного ланцюга є n ланок, то всі вони разом взяті до об'єднання в ланцюг з допомогою кінематичних пар мають $3n$ степенів вільності.

Нехай p_1, p_2 число кінематичних пар першого і другого класу відповідно в розглядуваному ланцюгу.

Оскільки кожна пара першого класу накладає лише одне обмеження, то загальне число обмежень, які накладаються цими парами дорівнює $1p_1$. По аналогії, кожна кінематична пара другого класу накладає два обмеження, тому їх загальна кількість буде $2p_2$. Рухомість кінематичного ланцюга буде дорівнювати різниці між числом можливих степенів вільності і загальним числом обмежень

$$H = 3n - 2p_2 - 1p_1.$$

Перетворивши одну ланку цього ланцюга в стойку, ми тим самим накладемо ще три обмеження на відносний рух ланок. Таким чином, формула для обчислення рухомості механізму прийме вигляд.

$$H = 3k - 2p_2 - 1p_1, \quad (6.1)$$

де $k = (n - 1)$ – число рухомих ланок механізму. Оскільки для плоского механізму всі кінематичні пари другого класу нижчі, а пари першого класу – вищі, то формулу (6.1) можна записати так

$$H = 3k - 2p_H - p_B. \quad (6.2)$$

Тут p_H – кількість нижчих пар, p_B – кількість вищих пар. Залежність (6.2) має назву структурної формули Чебишева для визначення рухомості плоского механізму.

Важливе значення цієї формули полягає в тому, що вона дозволяє за числом ланок і кінематичних пар визначати рухомість стержневих систем.

6.1.4. Класифікація плоских механізмів з нижчими кінематичними парами. Російським механіком Л.В. Ассуром запропонована раціональна класифікація плоских механізмів. Важливе теоретичне значення такої класифікації полягає в тому, що вона поділяє всі плоскі механізми на ряд видів і тим самим дозволяє не тільки розбиратися в самих складних схемах, але й пропонувати відповідні їм кінематичні і динамічні методи дослідження.

За Ассуром, класифікація плоских механізмів з нижчими кінематичними парами ґрунтується на простому і зрозумілому принципі, суть якого зводиться до того, що рухомість вихідного кінематичного ланцюга не зміниться від приєднання до нього або від'єднання від нього іншого кінематичного ланцюга нулькратної рухомості, який відповідає умові

$$H = 3k - 2p_H = 0, \quad (6.3)$$

або

$$p_H = \frac{3}{2}k.$$

З останньої залежності випливає, що число ланок в приєднуваній групі, рухомість якої $H = 0$, повинно бути завжди парним, інакше число кінематичних пар p_H буде дробовим, що неможливо.

З іншого боку, для механізму з нижчими парами однократної рухомості ($H = 1$) з рівняння (6.2) знаходимо

$$3k - 2p_H = 1. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) визначає структуру найпростішого механізму однократної рухомості. Приймаючи $k = 1$, знаходимо $p_H = 1$. Це означає, що такий механізм повинен складатися лише з однієї рухомої ланки і стійки, з'єднаних між собою однією нижчою кінематичною парою. Такий механізм будемо називати початковим або механізмом першого класу першого порядку.

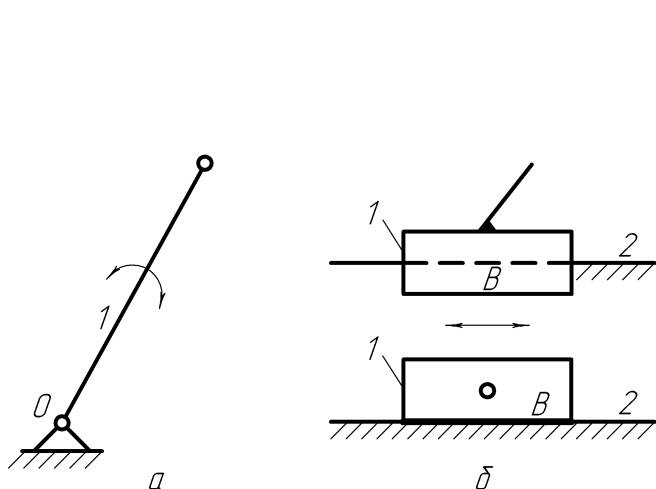


Рис. 6.10. Початкові механізми

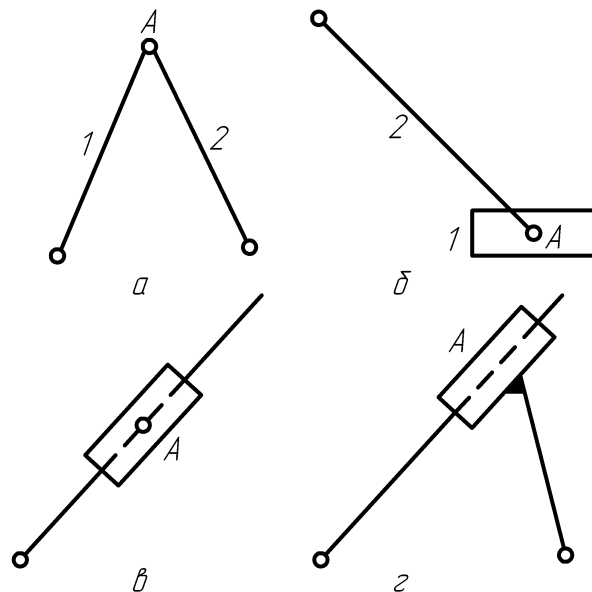


Рис. 6.11. Види діад

Початковий механізм з обертальною ведучою ланкою (рис. 6.10 а) будемо називати кривошипом, а механізм з поступальною ведучою ланкою – повзуном (рис. 6.10 б).

Для визначення структури приєднуваного кінематичного ланцюга нулькратної рухомості розглянемо формулу (6.3). Покладаючи в ній $k = 2$, одержуємо $p_H = 3$. На підставі цього приходимо до висновку, що найпростіша структурна група (діада), яка може бути приєднана до вихідного механізму містить дві рухомі ланки (поводки), які з'єднані кінематичною парою і два вільні елементи для приєднання до вихідного механізму і стійки.

На рис. 6.11 зображено різні види діад (двоповодкових груп).

Приєднуючи до початкового механізму всеможливі двоповодкові групи, можна одержати такі механізми однократної рухомості:

Кривошипно-повзунковий механізм

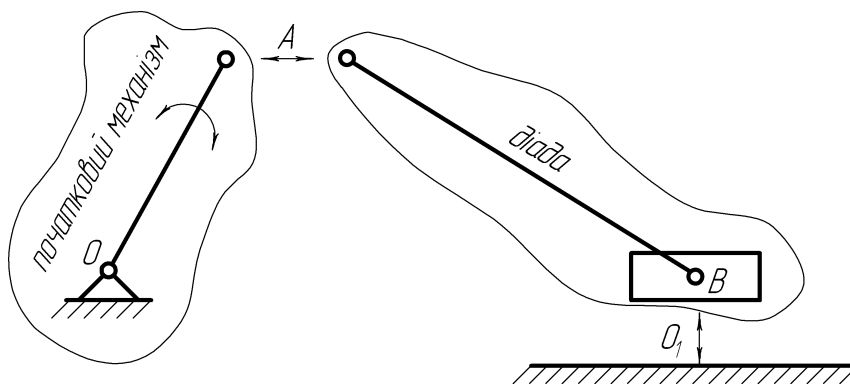


Рис. 6.12. Кривошипно-повзунковий механізм: OA – кривошип; AB – шатун; B – повзунок.

Кривошипно-коромисловий механізм

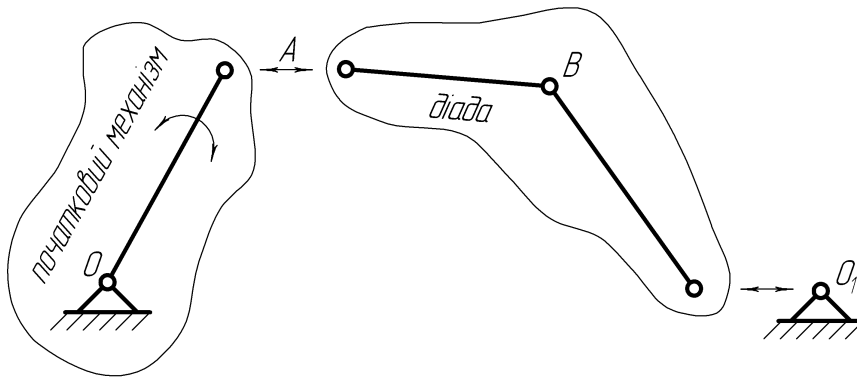


Рис. 6.13. Кривошипно-коромисловий механізм: OA – кривошип; AB – шатун; BO_1 – балансир (коромисло).

Кулісний механізм

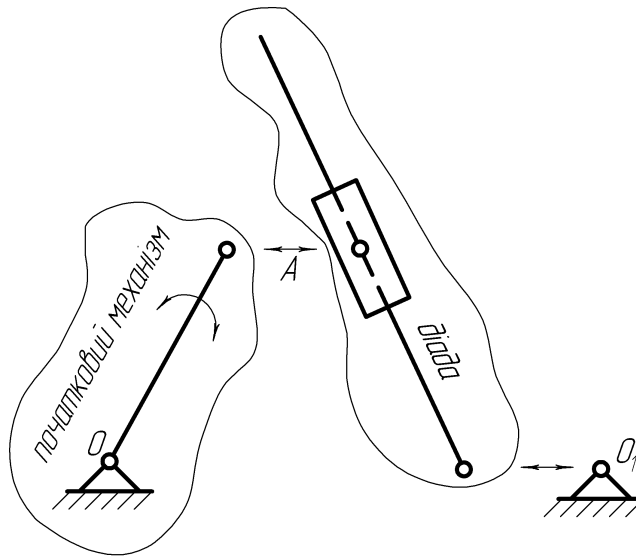


Рис. 6.14. Кривошипно-коромисловий механізм: OA – кривошип; AO_1 – куліса; A – камінь куліси.

Якщо у (6.3) покласти $k=4$, то $p_H=6$ і одержимо структурну групу, яка містить чотири рухомих ланки, три кінематичні пари і три вільні елементи для приєднання до вихідного механізму і стойки. Така структурна група називається триповодковою або тріадою. Один із варіантів тріади наведено на рис. 6.15.

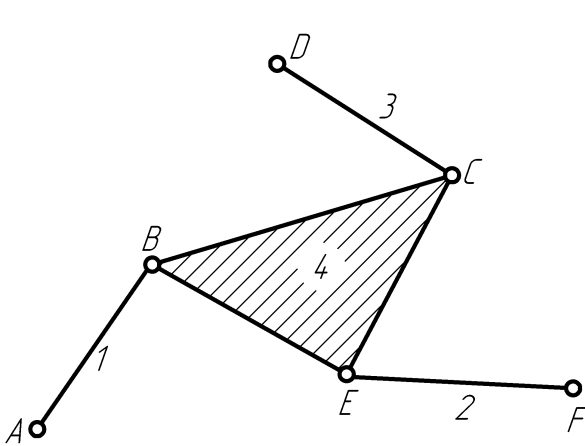


Рис. 6.15. Триповідкова група Ассура

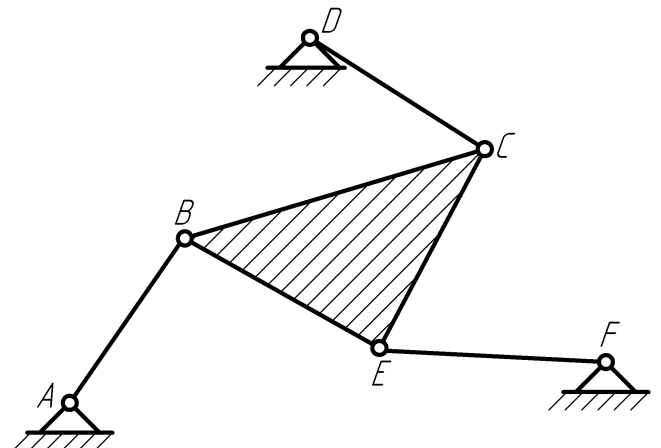


Рис. 6.16. Механізм з тріадою

Якщо таку структурну групу приєднати до ведучої ланки і стойки, то ми одержимо механізм, зображений на рис. 6.16.

Порядком структурної групи механізму називається число вільних елементів (поводків), які містить ця група. Таким чином, початковий механізм має перший порядок, діада – другий, тріада – третій.

Порядок механізму визначають максимальним порядком її структурних груп. Так всі механізми, зображені на [рис. 6.12, 6.13, 6.14](#), мають другий порядок, а механізм на [рис. 6.16](#) – третій порядок.

6.1.5. Структурний аналіз плоских механізмів з нижчими кінематичними парами. Задача структурного аналізу плоского механізму з нижчими кінематичними парами передбачає: визначення рухомості механізму; розклад механізму на структурні одиниці (початковий механізм і групи Ассура); визначення класу і порядку структурних одиниць та механізму в цілому.

Розв’язок задачі проілюструємо на прикладі механізму, зображеному на [рис. 6.17](#).

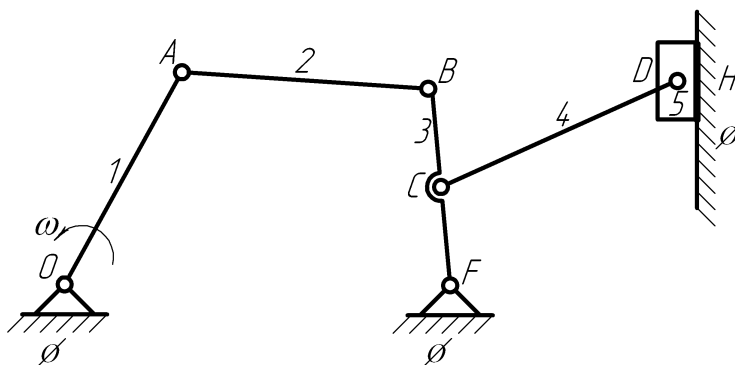


Рис. 6.17. Приклад механізму другого порядку

Елементи кінематичних пар будемо позначати великими буквами латинського алфавіту, які будемо називати іменами кінематичних пар. Рухомі ланки позначимо арабськими числами 1, 2, 3, і т. д. Нерухому ланку (стойку) відзначимо символом ϕ .

Запишемо структурну таблицю для заданого механізму

Ім'я кінематичної пари	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>F</i>
Якими ланками утворена	$\phi-1$	1-2	2-3	3-4	4-5	5- ϕ	3- ϕ
Вища чи нижча	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>
Клас кінематичної пари	2	2	2	2	2	2	2
Назва кінематичної пари	обертальна	обертальна	обертальна	обертальна	обертальна	поступальна	обертальна

Рухомість механізму визначається за формулою (6.2). В даному випадку $k = 5$, $p_H = 7$, $p_B = 0$.

Тоді

$$H = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Оскільки механізм має однократну рухомість, то його можна розкласти на структурні одиниці ([рис. 6.18](#)).

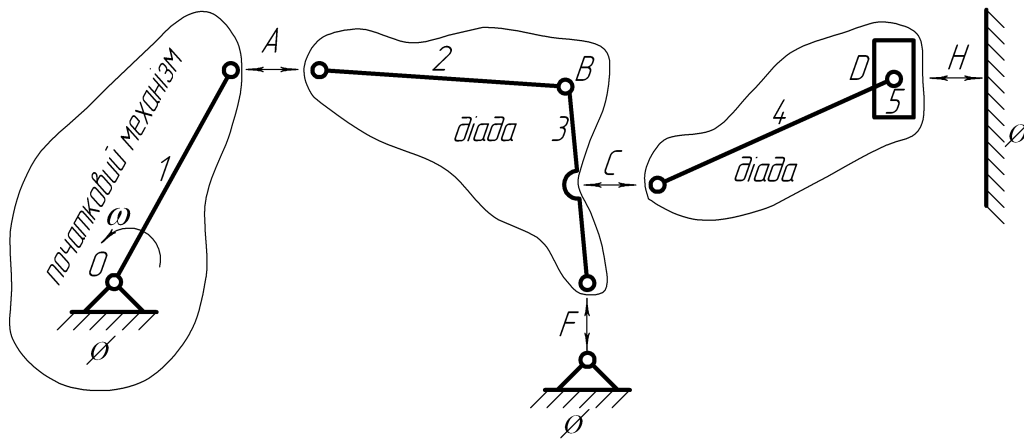


Рис. 6.18. Структурний аналіз механізму

Структурна формула побудови механізму має вигляд

$$\begin{array}{cccc}
 & \text{і і} & \text{і і} & \text{і і} \\
 \text{і} & \text{і} & \text{і} & \text{і} \\
 (M) & = & (0-1) & + & (2-3) & + & (4-5) \\
 1 & \text{і} & 1 & \text{і} & 1 & \text{і} & 1 & \text{і} \\
 2 & \text{і і} & 1 & \text{і і} & 2 & \text{і і} & 2 & \text{і і}
 \end{array}
 \quad (6.5)$$

і називається монтажною схемою механізму.

Зауважимо, що розклад механізму на структурні групи здійснюється неоднозначно і залежить від вибору початкового механізму. Так, наприклад, в кривошипно-повзунковому механізмі (рис. 6.12) початковим механізмом може бути як кривошип OA , так і повзун B .

6.1.6. Заміна вищих кінематичних пар нижчими. Класифікацією Ассур охоплені лише механізми з нижчими кінематичними парами, тому при структурному аналізі механізмів з вищими парами необхідно умовно замінювати їх кінематично еквівалентними механізмами з нижчими парами. При цьому характер відносного руху ланок повинен залишатися таким же як і у вихідному механізмі.

Для плоских механізмів достатньо розглянути питання про заміну пар лише першого класу.

На рис. 6.19 зображено триланковий механізм з однією вищою кінематичною парою B .

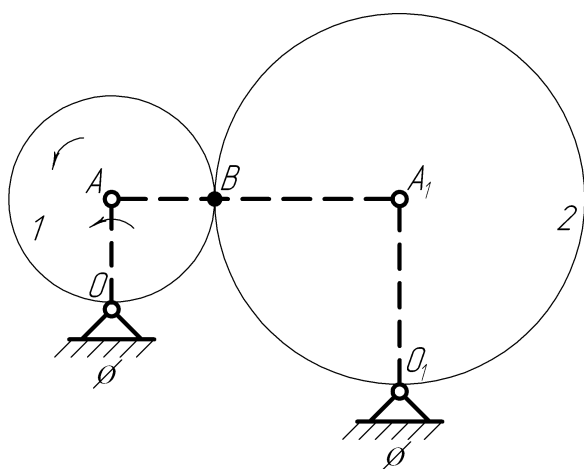


Рис. 6.19. Механізм з вищою кінематичною парою

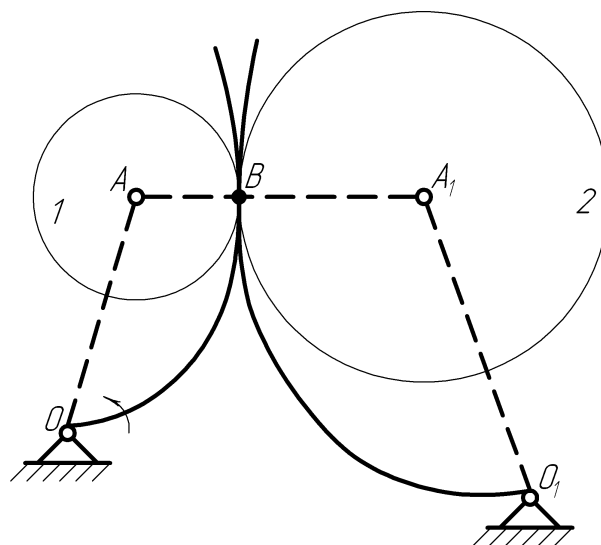


Рис. 6.20. Механізм з вищою кінематичною парою утвореною довільними гладкими кривими

Рухомі ланки окреслені колами радіусом OA і O_1A_1 відповідно, які обертаються навколо точок O і O_1 . При постійному контакті ланок відстань AA_1 , яка дорівнює сумі радіусів кіл, залишається незмінною в процесі руху. Не будуть змінюватися в процесі руху відстані OA і O_1A_1 . Незмінність цих розмірів дозволяє жорстко зв'язати із заданим механізмом чотириланковий кривошипно-коромисловий механізм OAA_1O_1 з нижчими кінематичними парами, в якому за заданим рухом однієї ланки однозначно визначається рух решти ланок. Цей механізм вже не містить вищої пари. Вона замінена однією фіктивною ланкою AA_1 і двома обертальними парами A

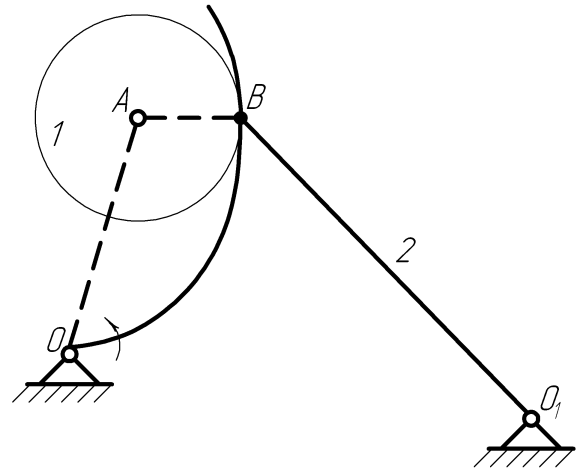


Рис. 6.21. Механізм з вищою кінематичною парою утвореною контактом точки і контуру

і A_1 . До механізму входить двоповодкова структурна група AA_1O_1 , тому він має перший клас і другий порядок. Очевидно, що такий клас і порядок має розглядуваний механізм з вищою кінематичною парою.

Суть проблеми і спосіб заміни залишаються такими ж і для випадку, коли рухомі ланки окреслені плоскими гладкими кривими довільного виду, так як точка дотику ланок завжди розміщена на прямій, що з'єднує їх центри кривини (рис. 6.20).

Те, що радіуси кривини в точках дотику при різних положеннях ланок будуть різними, справи не змінює і на визначення класу та порядку механізму не впливає.

Миттєвий рух заданого механізму з вищою парою може бути відтворений за допомогою кінематично еквівалентного шарнірного механізму OAA_1O_1 з однією фіктивною ланкою AA_1 і двома фіктивними обертальними парами A і A_1 .

Випадок, коли точка B однієї рухомої ланки механізму контактує з криволінійним контуром іншої, зображено на рис. 6.21.

Як видно з цього рисунка, кінематично еквівалентний механізм $OABO_1$ містить фіктивну ланку AB і дві фіктивні обертальні пари A і A_1 .

Таким чином, проведення заміни вищих пар нижчими дозволяє перенести методи структурного аналізу механізмів з нижчими кінематичними парами на механізми з вищими кінематичними парами.

6.1.7. Умови існування кривошипа в чотириланковому важільному механізмі. Встановимо, при якому співвідношенні розмірів ланок чотириланкового механізму (рис. 6.22) можливе існування одного чи двох кривошипів або не можливе існування жодного.

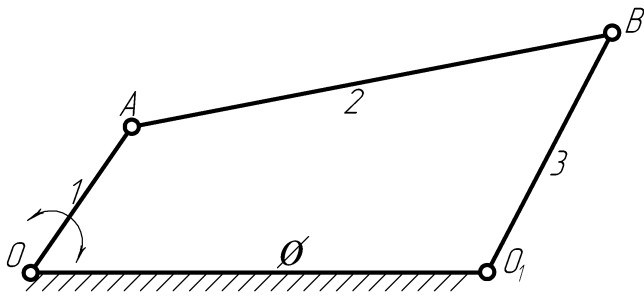


Рис. 6.22. Чотириланковий механізм із стойкою OO_1

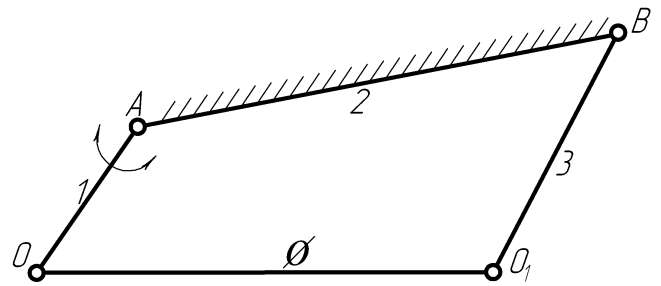


Рис. 6.23. Чотириланковий механізм із стойкою AB

Якщо ланка I (кривошип) буде ведучою, то при одному її обертанні навколо осі O механізм двічі займе таке положення, при якому вона буде розміщена на одній прямій з шатуном 2 (рис. 6.24). Таке положення механізму будемо називати мертвим. Воно характерне тим, що в цей момент $V_B = 0$.

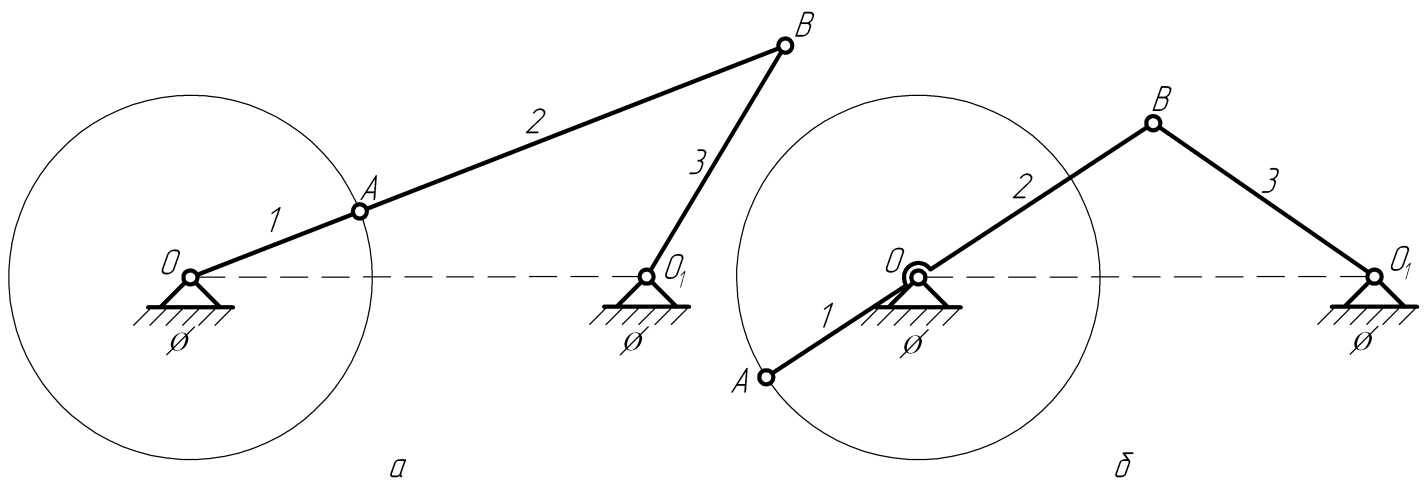


Рис. 6.24. Мертві положення механізму

Використовуючи нерівності трикутника (довжина сторони трикутника менша ніж сума довжин двох інших сторін), у відповідності до рис. 6.24 б можна записати

$$BO_1 < (AB - OA) + OO_1; \quad OO_1 < (AB - OA) + BO_1,$$

звідки

$$BO_1 + OA < AB + OO_1; \quad OO_1 + OA < AB + BO_1. \quad (6.6)$$

На підставі рис. 6.24 а

$$AB + OA < OO_1 + BO_1. \quad (6.7)$$

Додавши (6.6) і (6.7), після певних перетворень одержимо:

$$OA < AB; \quad OA < BO_1; \quad OA < OO_1. \quad (6.8)$$

Співвідношення (6.6)-(6.8) дозволяють зробити такий висновок: для того, щоб ланка OA була кривошипом (могла здійснювати обертальних рух навколо осі O), необхідно щоб її довжина була меншою від довжин інших ланок, а сума її довжини з довжиною довільної ланки була меншою від суми довжин решти ланок.

Легко перевірити, що умови (8.6)-(8.8) будуть виконуватися, якщо за стойку вибрати

шатуна 2 (рис. 6.23). В даному випадку механізм залишається однокривошипним з ведучою ланкою 1 і коромислом (балансиром) 3. Роль шатуна виконує ланка OO_1 .

З вище сказаного випливає, що якщо кривошип OA в одному випадку (рис. 6.22) здійснює повний оберт відносно нерухомої ланки OO_1 , а в іншому (рис. 6.23) – відносно перетвореної в стойку ланки AB , то обидві ці ланки можуть одночасно здійснювати повний оберт відносно ланки OA , якщо її перетворити в стойку. Такий механізм називається двокривошипним. Його кінематична схема показана на рис. 6.25. Сума довжин стойки OA і найбільшої ланки завжди менша від суми довжин решти ланок. Це гарантує відсутність «заклинювання» механізму в процесі руху його ланок.

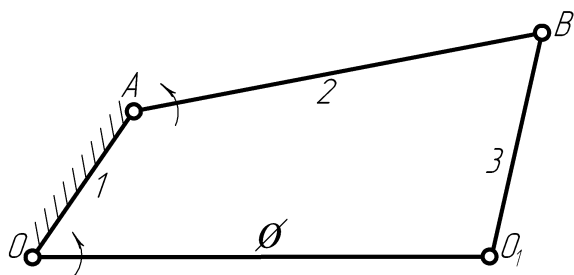


Рис. 6.25. Чотириланковий механізм з двома кривошипами

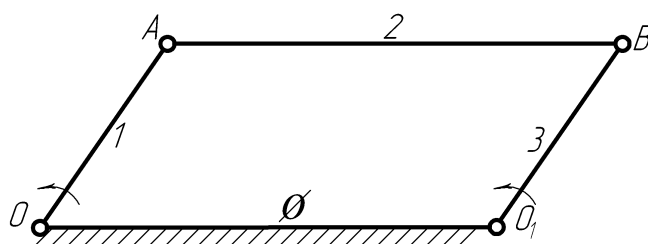


Рис. 6.26. Чотириланковий механізм з двома кривошипами однакової довжини

Частковий випадок двокривошипного чотириланкового механізму показано на рис. 6.26, де протилежні ланки мають однакові довжини і паралельні.

В граничних положеннях механізму (точки O, A, B, O_1 розміщені на одній прямій), які називаються мертвими, його рух буде невизначеним, оскільки може бути подвійний вихід із мертвого положення. Інакше кажучи, ланки 1 і 3, при відхиленні від спільної прямої OO_1 будуть обертатися або в одному напрямку, або в протилежних напрямках (рис. 6.27 б). В останньому випадку механізм перетвориться в антипаралелограм.

Для переходу через мертві положення в паралелограмних механізмах застосовуються додаткові кінематичні ланцюги, які зсунуті відносно даного на деякий кут.

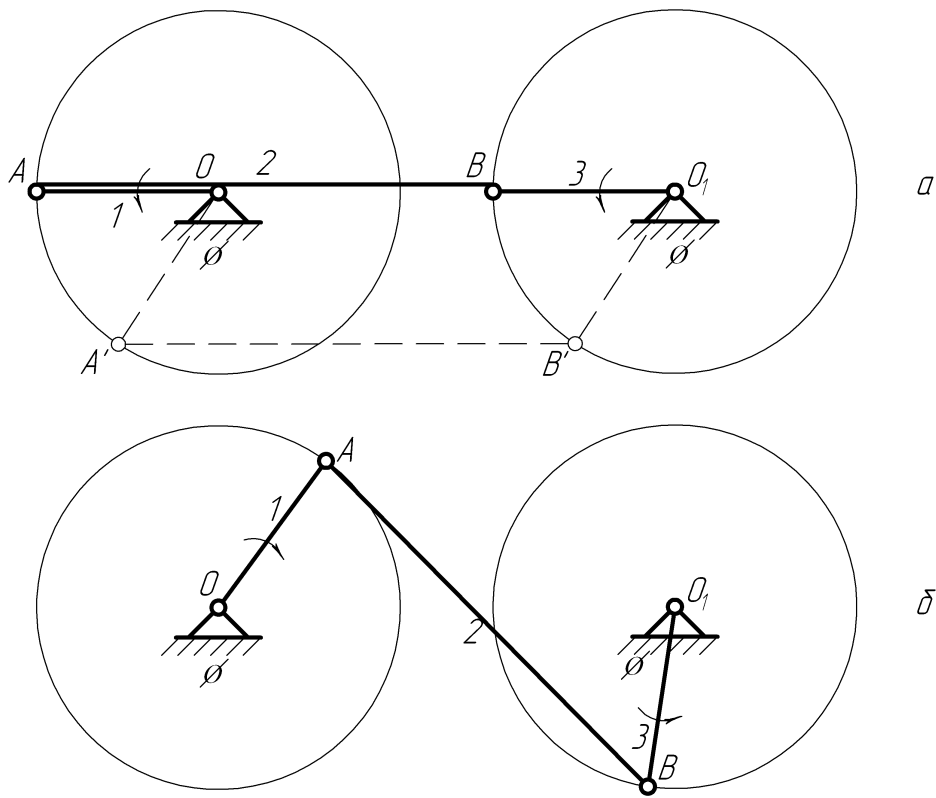


Рис. 6.27. Мертві положення паралелограмного механізму

На рис. 6.27 а такий ланцюг $OA'B'O_1$ зображено штриховою лінією. При наявності такого доповнення відбувається примусовий рух в мертвих положеннях механізмів.

Останнім варіантом є перетворення в стойку ланки O_1B (рис. 6.28).

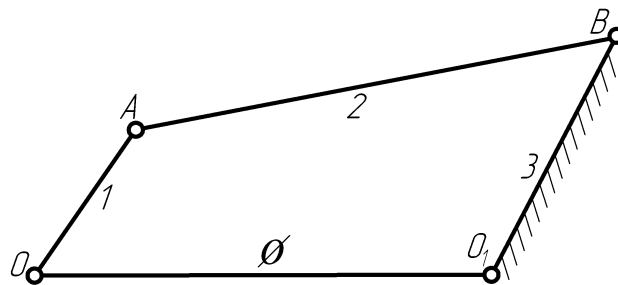


Рис. 6.28. Чотири ланковий механізм із стойкою O_1B

В цьому випадку нерівності (6.6)-(6.8) не виконуються і розглянутий механізм не має жодного кривошипа. Ланки AB і OO_1 можуть здійснювати лише коливні рухи відносно шарнірів B і O_1 відповідно.

6.2. Кінематичний аналіз плоских важільних механізмів другого порядку однократної рухомості з нижчими кінематичними парами

В попередньому пункті встановлено, що клас і порядок механізму визначається видом структурних груп Ассура, на які він може бути розкладений. Цим же визначається і відповідний метод кінематичного аналізу механізму.

Так для всіх механізмів другого порядку метод кінематичного аналізу буде однаковим, так як вони складені із початкового механізму і структурних груп другого порядку.

Основними завданнями кінематичного аналізу механізмів є: визначення положення всіх рухомих ланок в межах одного періоду руху і побудова траєкторій характерних точок механізму; визначення лінійних швидкостей точок і кутових швидкостей ланок; визначення лінійних прискорень точок і кутових прискорень ланок механізму.

Визначення траєкторій характерних точок механізму допомагає встановити картину взаємного положення ланок протягом одного періоду руху і намітити контур корпусу машини, що особливо важливо у випадку руху ланок в його середині, коли є небезпека співударів останніх.

Визначення швидкостей і прискорень необхідна для оцінки впливу на окремі ланки і на всю машину сил інерції, які в сучасних швидкохідних машинах досягають величин, що в сотні разів перевищують власну вагу ланок. Наявність додаткових сил інерції збільшує навантаження на підшипники, що в свою чергу, приводить до збільшення сил тертя та порушення теплового балансу і режиму змащування.

Періодичний рух є характерним для більшості машин. Під періодом будемо розуміти проміжок часу, за який механізм повертається в попереднє положення, а всі його кінематичні характеристики приймають початкові значення, після чого повторюються з попередньою закономірністю.

Рух механізму розглядається з чисто геометричної точки зору, тобто без врахування причин, які його викликали, але з врахуванням фактору часу.

Найбільш повно розробленими методами кінематичного дослідження є графічні методи, які потребують побудови схеми механізму для різних положень ведучої ланки за один період руху і виконання відповідних цим положенням масштабних геометричних побудов. Ці методи володіють рядом переваг, а тому мають широке застосування на практиці при кінематичних і кінетостатичних розрахунках механізмів. Недоліком є неможливість встановлення ступеня точності графічних побудов, так як кожна наступна побудова базується на попередній, що нерідко приводить до сумування помилок.

6.2.1. Побудова планів положень плоского механізму і визначення траєкторій його характерних точок. Розв'язок даної задачі передбачає, що відомо положення стаціонарних (нерухомих) точок механізму та розміри всіх його рухомих ланок. Масштаб довжин вибирається за формулою

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB},$$

де l_{AB} – істинна довжина ланки AB , AB – довжина її зображення на плані механізму. Розмірність

$$[\mu_l] = \frac{l}{l \cdot l}.$$

На першому етапі проводиться побудова стаціонарних точок. Одна з них вибирається довільно, а інші будуються за вихідними даними.

Для прикладу розглянемо чотириланковий механізм кривошипно-коромислового типу (рис. 6.29).

Ланка OA здійснює обертальний рух навколо точки O , тому її траєкторією є коло з центром в точці O радіусом $OA = \frac{l_{OA}}{\mu_1}$.

Ланка O_1B обертається навколо точки O_1 , її траєкторією буде дуга кола з центром в точці O_1 радіусом $O_1B = \frac{l_{O_1B}}{\mu_1}$. Будуємо ці кола.

Траєкторію точки A розбиваємо на 8-12 однакових частин точками A_0, A_1, A_2, \dots . Точку A_0 вибираємо так, щоб механізм перебував у так званому "мертвому" положенні, коли точки A_0, B_0 і O розміщені на одній прямій. В цьому положенні ланка O_1B змінює напрямок руху на протилежний і швидкість всіх точок цієї ланки дорівнює нулю. Цей факт буде використано при графічному кінематичному аналізі механізму. Для визначення положення точки B_0 розхилом циркуля $OA + AB$ (або $AB - OA$) робимо засічку на траєкторії точки B . Пряма OB_0 в перетині з траєкторією точки A визначає точку A_0 . Точки O, A_0, B_0, C_0 визначають одне із двох мертвих положень механізму.

Для ров'язку поставленої задачі необхідно побудувати положення механізму для кожної з точок A_1, A_2, \dots

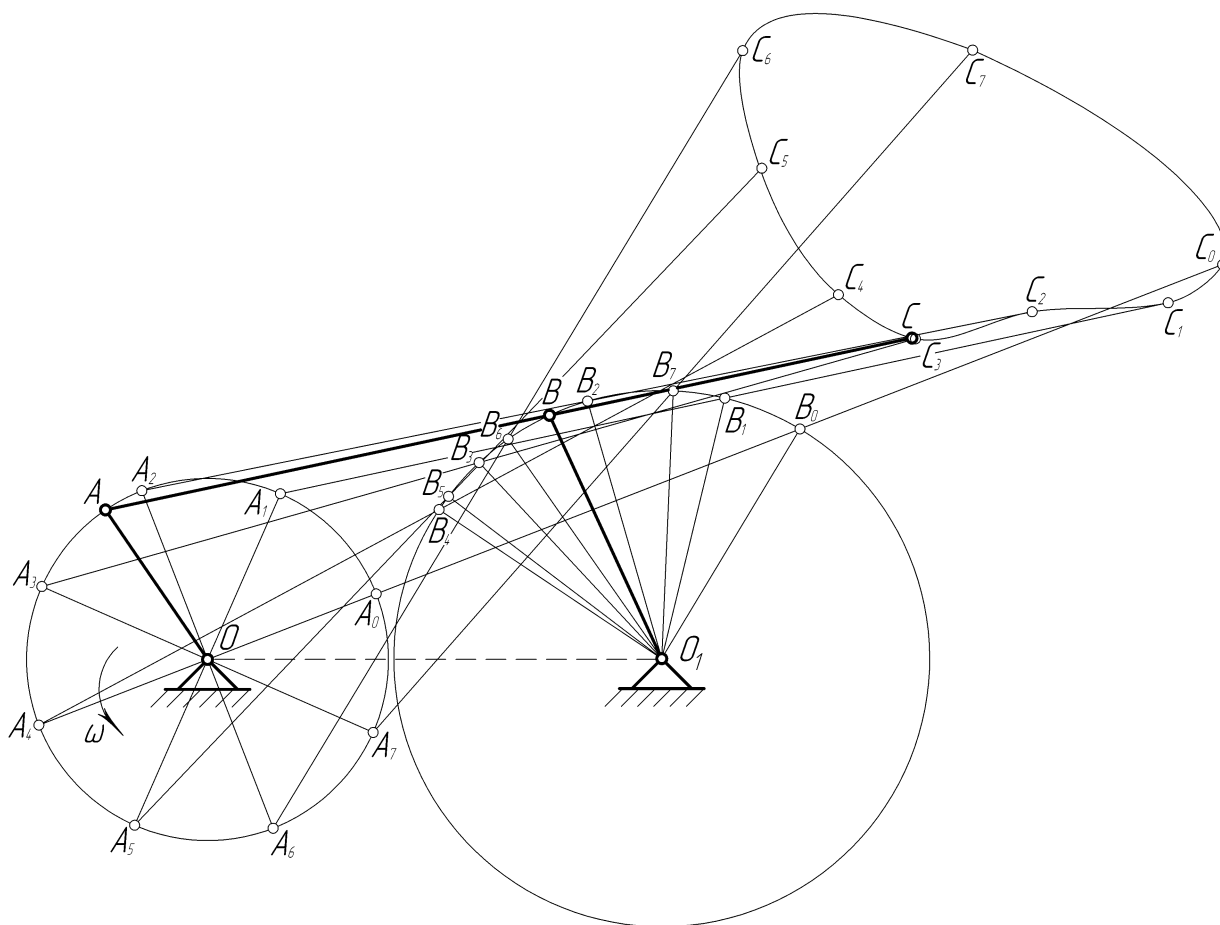


Рис. 6.29. План положень механізму

Розглянемо одну з них, наприклад A_1 і побудуємо відповідну їй точку B_1 на траєкторії точки B .

Для цього з точки A_1 проводимо дугу кола радіусом $AB = \frac{l_{AB}}{\mu_1}$ і знаходимо її точки перетину з траєкторією точки B . Одна з них визначає істинне положення точки B_1 , яке випливає із умови неперервності її траєкторії при русі механізму.

Для інших положень $A_2, A_3 \dots A_7$ точки A побудова відповідних положень ланок механізму проводиться таким же шляхом. В кінцевому результаті побудова зводиться до послідовного визначення положень ланок, спочатку першої діади, яка безпосередньо зв'язана з початковим механізмом, потім другої і решти, якщо такі входять до складу механізму першого класу другого порядку.

Зауважимо, що в окремих випадках при заданих розмірах ланок не можна одержати геометричний розв'язок задачі, тобто не можна забезпечити замкненість кінематичного ланцюга, що визначає механізм. В цій ситуації необхідно змінити положення стаціонарних точок O і O_1 або розміри ланок.

Побудовані плани механізму дозволяють визначити положення довільної точки механізму за один період руху. З'єднуючи їх плавною лінією одержимо траєкторію руху цієї точки (точка C на рис. 6.29).

Аналогічно проводиться побудова положень і траєкторій характерних точок для механізмів інших типів.

6.2.2. Визначення швидкостей і прискорень методом планів. Побудова планів швидкостей.

Другою задачею кінематичного аналізу механізмів є визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок, що найчастіше виконується графічно шляхом побудови планів швидкостей для ряду положень механізму за один період руху.

Нехай ведуча ланка механізмів, розглянутих нижче, здійснює рівномірний обертальний рух з кутовою швидкістю ω_{OA} . При заданих стаціонарних точках і розмірах ланок його положення в заданий момент часу однозначно визначається кутом φ . Для визначення швидкостей характерних точок механізму і кутових швидкостей його ланок в заданому положенні необхідно умовно розділити механізм на окремі ланки (тверді тіла) і встановити характер руху кожної з них та визначити кінематичні характеристики.

1. Кривошипно-коромисловий механізм (рис. 6.30).

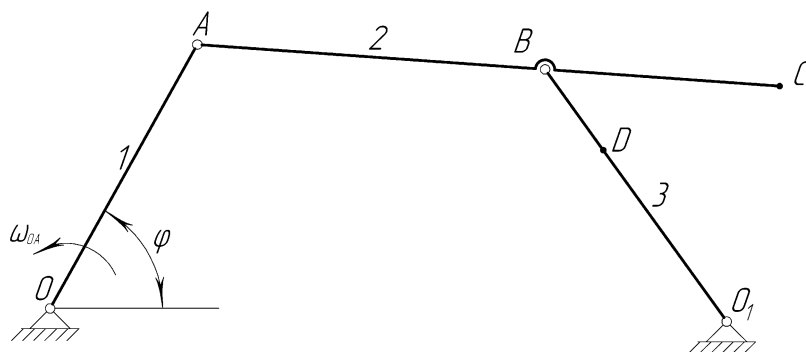


Рис. 6.30. Кінематична схема кривошипно-коромислового механізму

Ланка OA здійснює обертальний рух навколо точки O , тому

$$V_A = l_{OA} \omega_{OA}, \quad \vec{V}_A \perp OA.$$

Такий же рух здійснює ланка O_1B навколо точки O_1 , тому

$$V_B = l_{O_1B} \omega_{O_1B}, \quad \vec{V}_B \perp O_1B.$$

Кутова швидкість ω_{O_1B} наперед невідома і підлягає визначенню.

Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух і для нього має місце формула Ейлера (4.19)

$$\underbrace{\vec{V}_B}_{\perp O_1B} = \underbrace{\vec{V}_A}_{\perp OA} + \underbrace{\vec{V}_{AB}}_{\perp AB}, \quad (6.9)$$

де \vec{V}_{AB} – обертальна швидкість точки B навколо точки A . При цьому

$$V_{AB} = l_{AB} \omega_{AB}, \quad \vec{V}_{AB} \perp AB.$$

Співвідношення (6.9) називається основним векторним рівнянням для визначення швидкостей. Тут і надалі відомі векторні величини, підкреслені двома рисками знизу. Величини, для яких відомо тільки напрямки, підкреслені однією рисою. Під рисками вказано напрямки відповідного вектора.

Розв'язок задачі полягає в графічній побудові векторного рівняння (6.9). За правилом додавання векторів вона зводиться до побудови трикутника за стороною і напрямками двох інших сторін.

Масштаб швидкостей вибираємо за формулою $\mu_V = \frac{V_A}{Pa}$,

$[\mu_V] = \frac{\dot{i} / \tilde{n}}{\dot{i} \dot{i}}$, де Pa – напрямлений відрізок, який зображує вектор

\vec{V}_A на плані.

Вибираємо в площині рисунок довільну точку P (поліус). У відповідності до (6.9) через цю точку проводимо пряму, яка перпендикулярна до OA і будуємо відрізок Pa . З точки a проводимо пряму, перпендикулярну до AB , а з точки P пряму, перпендикулярну до O_1B . Ці прямі в перетині визначають точку b .

Побудова трикутника Pab , який відповідає (6.9), завершена (рис. 6.31).

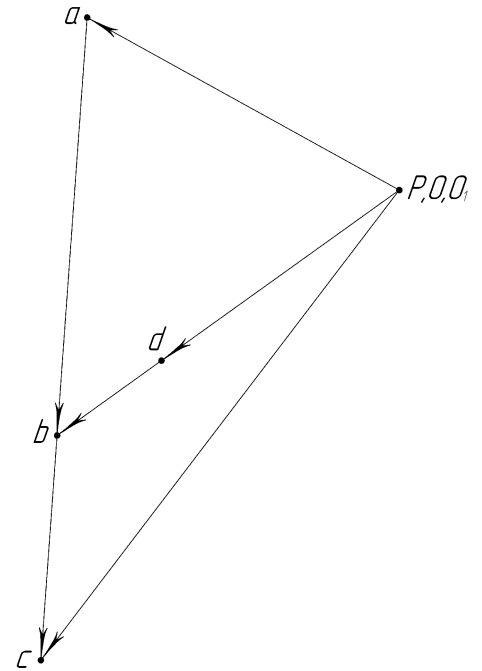


Рис. 6.31. План швидкостей

Напрямки відрізків Pb, ab , які відповідають швидкостям \vec{V}_B, \vec{V}_{AB} , визначаються за правилом додавання векторів.

Для визначення величин V_B, V_{AB} потрібно їх зображення помножити на μ_V .

$$V_B = \mu_V Pb, \quad V_{AB} = \mu_V ab.$$

З іншого боку $V_B = l_{O_1B} \omega_{O_1B}$, $V_{AB} = l_{AB} \omega_{AB}$, тому

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{l_{O_1B}}, \quad \omega_{AB} = \frac{V_{AB}}{l_{AB}}.$$

Таким чином, кутові швидкості всіх рухомих ланок механізму визначені.

При визначенні лінійних швидкостей точок використовуємо властивості обертального і плоскопаралельного рухів твердого тіла.

Якщо точка D належить ланці O_1B , то $V_D = l_{O_1D} \omega_{O_1D}$ ($\omega_{O_1D} = \omega_{O_1B}$). Зображенням вектора \vec{V}_D на плані буде напрямлений відрізок Pd , причому точка d ділить цей відрізок у тому ж відношенні, що і точка D відрізок O_1B на схемі механізму

$$\frac{O_1B}{O_1D} = \frac{l_{O_1B}}{l_{O_1D}} = \frac{Pb}{Pd}.$$

Для точки C ланки AB використовуємо формулу Ейлера (4.19)

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{AC}.$$

При цьому $V_{AC} = l_{AC} \omega_{AB}$, $\vec{V}_{AC} \perp AC$.

Будуючи на прямій ab точку C так, що $\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$ ми визначаємо напрямлений відрізок ac ,

який зображує швидкість \vec{V}_{AC} .

Побудована на **рис. 6.31** конфігурація називається планом швидкостей для заданого положення механізму. Абсолютні швидкості точок визначаються напрямленими відрізками, які виходять з миттєвого центра обертання – полюса P і напрямлені до відповідної точки.

$$V_C = \mu_V Pc; \quad V_D = \mu_V Pd; \quad V_{AC} = \mu_V ac.$$

Відрізки Pa, Pb, ab та інші вимірюються в міліметрах.

Для визначення напрямків кутових швидкостей ланок O_1B і AB ми умовно переносимо вектори швидкостей \vec{V}_B і \vec{V}_{AB} з плану швидкостей у відповідні точки на плані механізму (**рис. 6.32**).

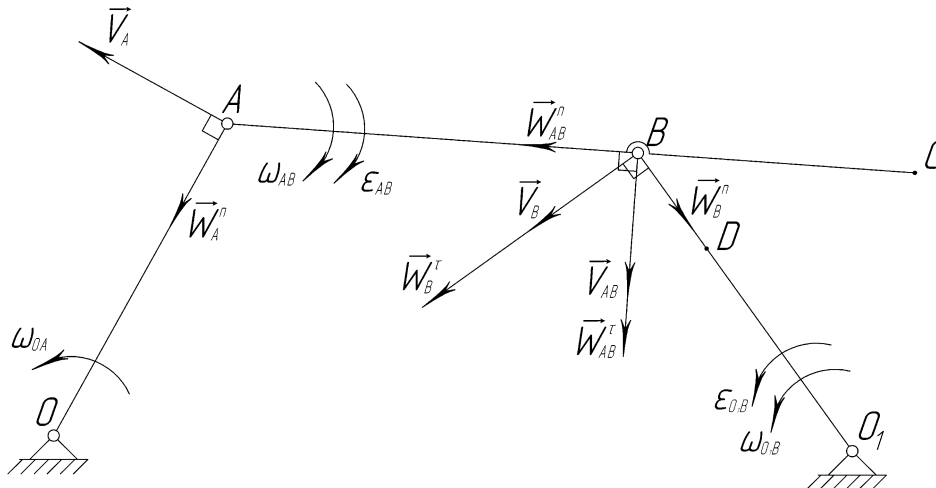


Рис. 6.32. Визначення напрямків лінійних і кутових швидкостей та прискорень ланок кривошипно-коромислового механізму

2. Кривошипно-повзунковий механізм (рис. 6.33).

Ланки OA і AB здійснюють такий самий рух як і в кривошипно-коромисловому механізмі, тому

$$V_{AB} = l_{AB} \omega_{AB}, \quad \vec{V}_{AB} \perp AB; \quad V_{AB} = l_{AB} \omega_{AB}, \quad \vec{V}_{AB} \perp AB.$$

Повзун B рухається поступально вздовж напрямної XX , тому всі його точки мають однакову швидкість \vec{V}_B , яка паралельна до XX .

Рівняння Ейлера для ланки AB запишеться так

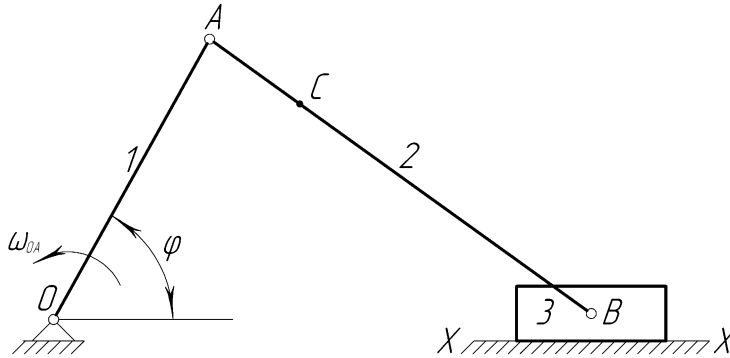


Рис. 6.33. Кінематична схема кривошипно-повзункового механізму

$$\vec{V}_B \parallel XX = \vec{V}_A \perp OA + \vec{V}_{AB} \perp AB. \quad (6.10)$$

Побудова плану швидкостей проводиться за такою ж схемою, як і для кривошипно-коромислового механізму.

Відзначимо, що у даному випадку кутлова швидкість повзуна дорівнює нулю.

За результатами побудови (рис. 6.34) визначаємо

$$V_B = \mu_V P b, \quad V_{AB} = \mu_V a b, \quad V_C = \mu_V P c, \quad \omega_{AB} = \frac{V_{AB}}{l_{AB}}.$$

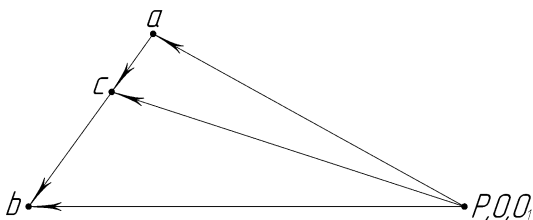


Рис. 6.34. План швидкостей кривошипно-повзункового механізму

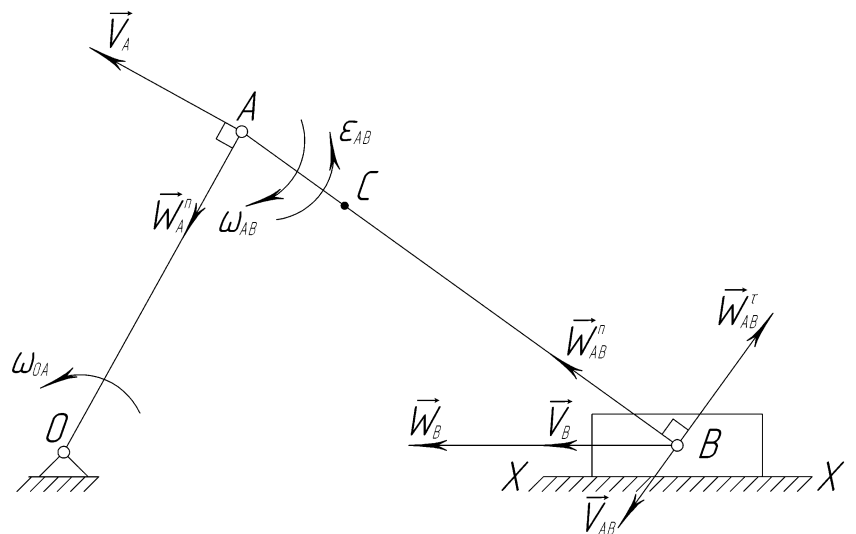


Рис. 6.35. Визначення напрямків лінійних і кутових швидкостей та прискорень ланок кривошипно-повзункового механізму

Напрямок кутової швидкості ω_{AB} та лінійних швидкостей відповідно до плану швидкостей зображено на рис. 6.35.

3. Кривошипно-кулісний механізм (рис. 6.36).

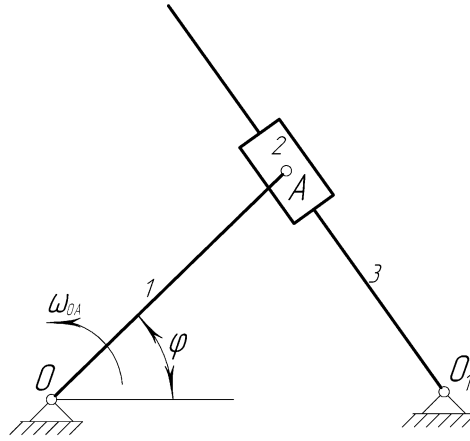


Рис. 6.36. Кінематична схема кривошипно-кулісного механізму

Ланки OA і O_1A здійснюють обертальні рухи відносно точок O і O_1 відповідно. Ланка 2 здійснює складний рух, тому на підставі теореми про додавання швидкостей при складному русі (5.1) можна записати

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A2} + \vec{V}_{A3}, \quad (6.11)$$

$\perp OA$ $\parallel O_1A$ $\perp O_1A$

де \vec{V}_A – абсолютна швидкість точки A , якщо вона належить ланці 1; \vec{V}_{A2} – поступальна (відносна) швидкість ланки 2 вздовж ланки 3; \vec{V}_{A3} – обертальна (переносна) швидкість ланки 2 разом з ланкою 3 навколо точки O_1 .

В даному випадку

$$V_A = l_{OA} \omega_{OA}, \quad \vec{V}_A \perp OA; \quad \vec{V}_{A2} \parallel O_1A; \quad V_{A3} = l_{O_1A} \omega_{O_1A}, \quad \vec{V}_{A3} \perp O_1A.$$

Побудова плану швидкостей за рівнянням (6.11) зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і напрямками катетів (рис. 6.37).

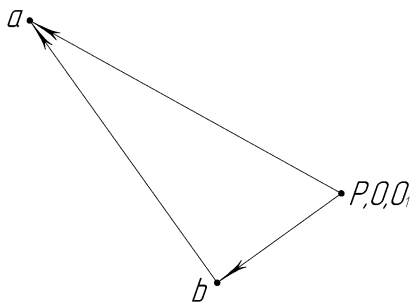


Рис. 6.37. План швидкостей кривошипно-кулісного механізму

Із цього плану визначаємо

$$V_{A2} = \mu_v P b,$$

$$V_{A3} = \mu_v a b,$$

$$\omega_{O_1A} = \frac{V_{A3}}{l_{O_1A}}.$$

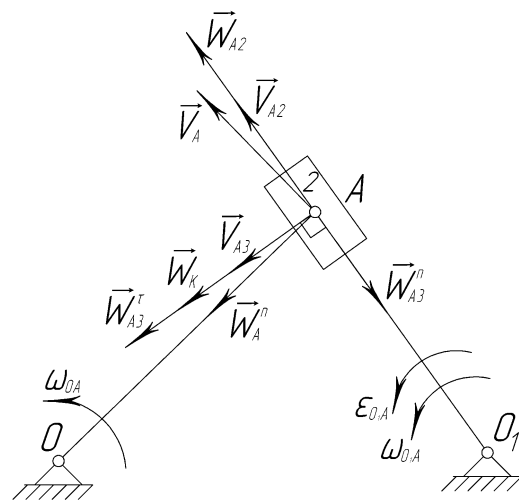


Рис. 6.38. Визначення напрямків лінійних і кутових швидкостей та прискорень ланок кривошипно-кулісного механізму

Напрямок кутової швидкості ω_{O_1A} ланки O_1A відповідно до плану швидкостей зображено на **рис. 6.38**.

Побудова планів прискорень. Плани прискорень для заданого положення механізму будуються аналогічно плану швидкостей.

1. Кривошипно-коромисловий механізм (**рис. 6.30**).

Запишемо для ланки AB формулу Ейлера (4.26)

$$\underbrace{\vec{W}_B^n}_{B \rightarrow O_1} + \underbrace{\vec{W}_B^\tau}_{\perp O_1B} = \underbrace{\vec{W}_A^n}_{A \rightarrow O} + \underbrace{\vec{W}_A^\tau}_{\perp OA} + \underbrace{\vec{W}_{AB}^n}_{B \rightarrow A} + \underbrace{\vec{W}_{AB}^\tau}_{\perp AB}. \quad (6.12)$$

В даному випадку

$$W_A^n = l_{OA} \omega_{OA}^2, \quad \vec{W}_A^n \uparrow\uparrow \overline{AO}; \quad W_A^\tau = 0 \text{ тому, що рух кривошипа } OA \text{ рівномірний};$$

$$W_B^n = l_{O_1B} \omega_{O_1B}^2, \quad \vec{W}_B^n \uparrow\uparrow \overline{BO_1}; \quad W_B^\tau = l_{O_1B} \varepsilon_{O_1B}, \quad \vec{W}_B^\tau \perp \overline{O_1B};$$

$$W_{AB}^n = l_{AB} \omega_{AB}^2, \quad \vec{W}_{AB}^n \uparrow\uparrow \overline{BA}; \quad W_{AB}^\tau = l_{AB} \varepsilon_{AB}, \quad \vec{W}_{AB}^\tau \perp \overline{AB}.$$

В основному векторному рівнянні (6.12)

підлягають визначенню дві величини W_B^τ і W_{AB}^τ .

Масштаб плану прискорень вибираємо за

формулою $\mu_W = \frac{W_A^n}{\pi a}$, де πa – напрямлений відрізок,

яким будемо зображувати \vec{W}_A^n .

Графічну реалізацію (6.12) здійснимо шляхом побудови від довільно вибраної точки π (полюса) двох частин векторного рівняння.

Через точку π проводимо пряму, паралельну OA і на ній будуємо напрямлений відрізок πa . Через точку a проводимо пряму, паралельну AB , і відкладаємо

направлений відрізок ab_1 такий, що $ab_1 = \frac{W_{AB}^n}{\mu_W}$. Через

точку b_1 проводимо пряму, перпендикулярну AB . Побудова правої частини (6.12) завершена. Для побудови лівої частини через точку π проводимо пряму, паралельну O_1B , на ній будуємо напрямлений

відрізок πb_2 такий, що $\pi b_2 = \frac{W_B^n}{\mu_W}$. Через точку b_2 проводимо пряму, перпендикулярну O_1B .

Знаходимо точку b перетину цієї прямої з прямою, якою завершена побудова правої частини (6.12). Вказуємо напрямки всіх відрізків (**рис. 6.39**).

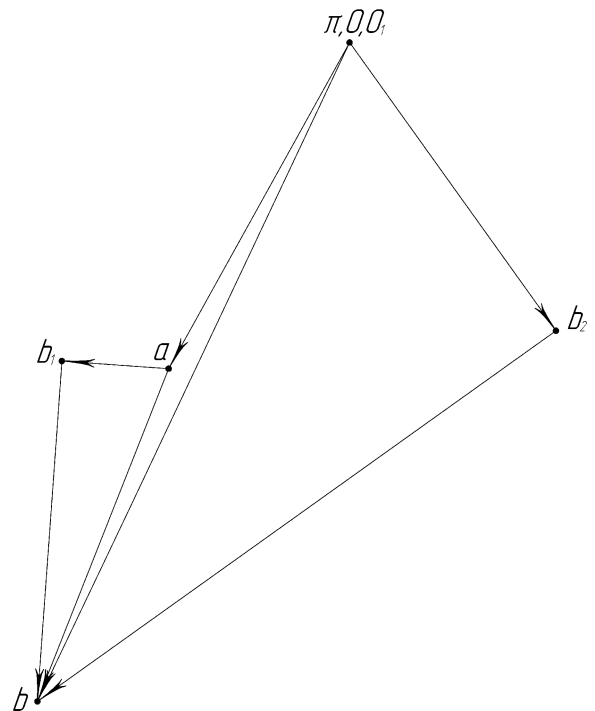


Рис. 6.39. План прискорень кривошипно-коромислового механізму

Побудована конфігурація називається планом прискорень, з якого визначаємо дійсні значення всіх прискорень

$$W_{AB}^{\tau} = \mu_w b b_1, \quad W_{AB} = \mu_w a b,$$

$$W_B^{\tau} = \mu_w b b_2, \quad W_B = \mu_w \pi b.$$

Кутові прискорення ланок визначаємо із співвідношень

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^{\tau}}{l_{AB}}, \quad \varepsilon_{O_1B} = \frac{W_B^{\tau}}{l_{O_1B}}.$$

Для визначення напрямків кутових прискорень необхідно умовно перенести з плану прискорень вектори \vec{W}_B^{τ} і \vec{W}_{AB}^{τ} в точку B (рис. 6.32).

Прискорення точок C, D визначаються за тим самим принципом, що і їх швидкості.

2. Кривошипно-повзунковий механізм (рис. 6.33).

Формула Ейлера для ланки AB даного механізму має вигляд

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{AB} + \vec{W}_{AB}^{\tau}. \quad (6.13)$$

$\parallel XX$ $A \rightarrow O$ $B \rightarrow A$ $\perp AB$

Величини \vec{W}_A, \vec{W}_{AB} визначаються із таких самих співвідношень, що і для кривошипно-коромислового механізму.

Графічна побудова рівняння (6.13) здійснюється за тією ж схемою, що і рівняння (6.12).

План прискорень для заданого положення механізму наведено на рис. 6.40.

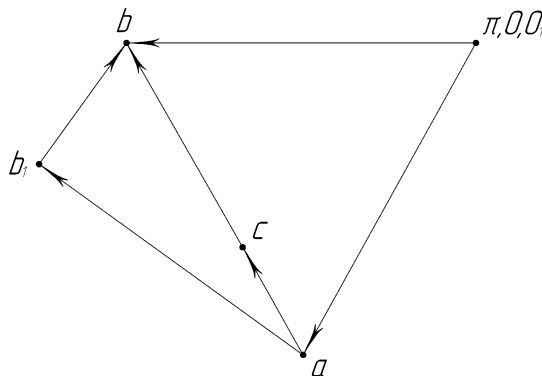


Рис. 6.40. План прискорень кривошипно-повзункового механізму

Кутове прискорення ε_{AB} ланки AB визначається за формулою

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^{\tau}}{l_{AB}}.$$

Його напрямок зображено на рис. 6.35.

3. Кривошипно-кулісний механізм (рис. 6.36).

Основне векторне рівняння для побудови плану прискорень записується у вигляді теореми Коріоліса для ланки 2

$$\overrightarrow{W}_{A \rightarrow O}^n + \overrightarrow{W}_{\perp OA}^\tau = \overrightarrow{W}_{\parallel O_1 A}^n + \overrightarrow{W}_{A \rightarrow O_1}^n + \overrightarrow{W}_{\perp O_1 A}^\tau + \overrightarrow{W}_K. \quad (6.14)$$

Тут \overrightarrow{W}_A^n і $\overrightarrow{W}_A^\tau$ – нормальна і тангенціальна складові абсолютного прискорення точки A , якщо вона належить ланці 1 ; \overrightarrow{W}_{A2} – поступальне (відносне) прискорення ланки 2 вздовж ланки 3 ; $\overrightarrow{W}_{A3}^n$ і $\overrightarrow{W}_{A3}^\tau$ – нормальна і тангенціальна складові обертального (переносного) прискорення ланки 2 разом з ланкою 3 навколо точки O_1 . Напрямки цих величин зображено на **рис. 6.38**.

При цьому маємо

$$W_A^n = l_{OA} \omega_{OA}^2, \quad \overrightarrow{W}_A^n \uparrow \uparrow \overline{AO}, \quad W_A^\tau = 0 \text{ тому, що рух кривошипа } OA \text{ рівномірний};$$

$$\overrightarrow{W}_{A2} \parallel O_1 A; \quad W_{A3}^n = l_{O_1 A} \omega_{O_1 A}^2, \quad \overrightarrow{W}_{A3}^n \uparrow \uparrow \overline{AO_1}; \quad W_{A3}^\tau = l_{O_1 A} \varepsilon_{O_1 A}, \quad \overrightarrow{W}_{A3}^\tau \perp \overline{O_1 A}.$$

Величина прискорення Кориоліса визначається за формулою

$$W_K = 2\omega_{O_1 A} V_{A2},$$

а напрямок – за правилом Жуковського: щоб одержати напрямок вектора \overrightarrow{W}_K потрібно вектор \overrightarrow{V}_{A2} повернути на 90° в напрямку кутової швидкості $\omega_{O_1 A}$ (**рис. 6.38**).

План прискорень, який відповідає векторному рівнянню (6.14) наведено на **рис. 6.41**, з якого визначаємо

$$W_{A2} = \mu_W a a_2, \quad W_{A3}^\tau = \mu_W k a_2, \quad \varepsilon_{O_1 A} = \frac{W_{A3}^\tau}{l_{O_1 A}}.$$

Напрямок кутового прискорення $\varepsilon_{O_1 A}$ зображено на **рис. 6.38**.

Будуючи плани швидкостей і прискорень для різних положень механізму, можна встановити як змінюються кінематичні характеристики його точок і ланок за один період руху.

6.3. Кінематичний аналіз плоских механізмів методом графічного диференціювання (кінематичних діаграм).

Якщо задача визначення траєкторій характерних точок механізму розв'язана, то завжди можна побудувати графічний закон руху $S_B = S_B(t)$ точки B по траєкторії. Для цього необхідно вибрати початок відліку (станцію відправлення) на траєкторії і вказати додатній напрямок руху точки. Для веденої ланки важільних механізмів, яка за один період змінює напрямок руху, початок відліку вибирається у так званому мертвому положенні, коли ланка змінює напрямок руху на протилежний. У цей момент швидкості всіх точок цієї ланки дорівнюють нулю.

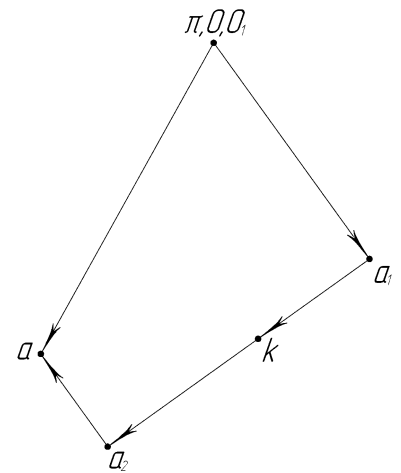


Рис. 6.41. План прискорень кривошипно-кулісного механізму

Для побудови графіка $S = S(t)$ вибираємо систему відліку (\bar{S}, \bar{t}) , відносно якої в масштабі

$$\mu_t = \frac{T}{OT} \left(\frac{c}{i} \right), \quad \mu_s = \frac{\mu_l}{m} \left(\frac{i}{i} \right), \quad \text{будемо зображувати точки } (\bar{S}, \bar{t}). \quad \text{Тут } T = \frac{2\pi}{\omega_{\hat{A}}} = \frac{n_{OA}\pi}{30} - \text{період}$$

руху кривошипа OA , \overline{OT} – відрізок, який зображує час T , m – коефіцієнт збільшення масштабу розмірів механізму. У більшості випадків практики приймають $m = 1$.

Проміжок \overline{OT} ділимо на 8-12 однакових частин точками $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{T}$, які відповідають положенням A_1, A_2, \dots точки A на схемі механізму.

Для механізму кривошипно-коромислового типу значення функції $S_{\hat{A}}$ при відповідних значеннях t визначаються за формулами

$$S_0 = S_B(0) = \widehat{A_0A_0} = 0; S_1 = S_B(t_1) = \widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{180} l_{O_1A} \varphi_1(\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha});$$

$$S_2 = S_B(t_2) = \widehat{B_0B_2} = \frac{\pi}{180} l_{O_1A} \varphi_2(\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}); \dots S_T = S_B(T) = \widehat{A_0A_0} = 0,$$

де φ_k – кут, який утворюють промені OB_0 та OB_k ($k = 0, 1, \dots$) на схемі механізму.

Якщо точка \hat{A} здійснює прямолінійний рух (кривошипно-повзунковий механізм), то відповідні значення $S_{\hat{A}}$ дорівнюють

$$S_0 = S_B(0) = \hat{A_0A_0} = 0; \quad S_1 = S_B(t_1) = \hat{A_0A_1}; \quad \dots \quad S_T = S_{\hat{A}}(T) = \hat{A_0A_0} = 0.$$

Кожній парі чисел (S, t) поставимо у відповідність іншу пару (\bar{S}, \bar{t}) за формулами $\bar{t} = \frac{t}{\mu_t}; \bar{S} = \frac{S}{\mu_s}$. Зображуючи пари чисел $(\bar{t}_1, \bar{S}_1), (\bar{t}_2, \bar{S}_2), \dots, (\bar{T}, \bar{S}_T)$ точками на площині (\bar{S}, \bar{t}) , і,

з'єднуючи їх плавного лінією, одержимо в масштабі μ_s, μ_t діаграму $\bar{S}_B = \bar{S}_B(\bar{t})$.

Оскільки ведуча ланка OA механізму здійснює рівномірний обертальний рух, то замість незалежної змінної t можна вибирати змінну φ (кут повороту ланки OA), які зв'язані співвідношенням $\varphi = \omega_{OA}t$.

$$\text{При цьому } \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\mu_\varphi}; \mu_\varphi = \frac{2\pi}{OT}.$$

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку: для точки B механізму визначено її траєкторію, вибрано початок відліку руху, його додатний напрямок і графічно побудовано закон руху по траєкторії. Це означає, що рух точки B задано натуральним способом. На підставі формул (3.9), (3.15) її швидкість і прискорення визначаються за формулами

$$V_B = \frac{dS_B}{dt}; \quad W_B^\tau = \frac{dV_B}{dt}; \quad W_B^n = \frac{V_B^2}{\rho}. \quad (6.15)$$

Для обчислення похідної від функції, заданої графічно, використаємо фізичний і геометричний зміст похідної

$$V_B = \frac{dS_B}{dt} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.16)$$

де α – кут який утворює дотична до графіка $S_B = S_B(t)$ в точці t з віссю абсцис.

Розглянемо частину діаграми $S_B = S_B(t)$, яка обмежена проміжками часу t і $t + \Delta t$. Проведемо через кінцеві точки січну LM . За теоремою Лагранжа на проміжку $[t, t + \Delta t]$ існує така точка t^* , що дотична до кривої $S_B(t)$ в цій точці паралельна січній LM . А це означає, що середня швидкість точки B за проміжок часу Δt дорівнює тангенсу кута нахилу січної. Вважаючи проміжок часу Δt малим, можна допустити, що точка t^* співпадає з серединою відрізка $[t, t + \Delta t]$, а $\operatorname{tg} \alpha$ приблизно визначає швидкість точки B в точці t^*

$$V_B^c(t^*) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Такий підхід дозволяє спростити побудову дотичних до діаграми $S_B = S_B(t)$, замінюючи їх січними (рис. 6.42).

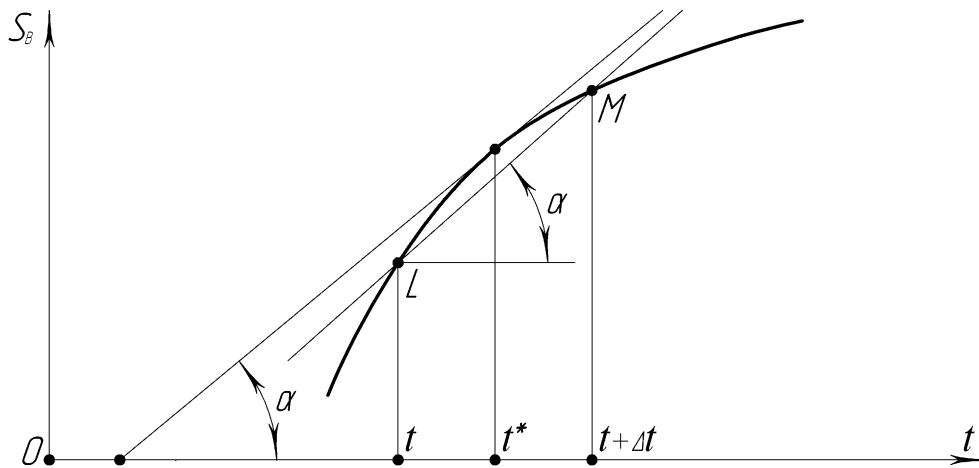


Рис. 6.42. Геометричний зміст похідної

Позначимо через t_1', t_2', \dots середини відрізків, які визначаються точками t_1, t_2, \dots, T відповідно. На діаграмі $\bar{S} = \bar{S}(t)$ вони відзначені точками $1', 2', \dots$ (рис. 6.43).

Введемо масштаб швидкості за формулою $\mu_V = \frac{V}{\bar{V}}$, де \bar{V} – відрізок, який зображує на діаграмі швидкість V . Побудуємо систему координат $(\bar{O}, \bar{V}, \bar{t})$. Як уже відзначалося точки $1', 2', \dots$ відповідають серединам відрізків $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots$. Зліва від початку координат \bar{O} на осі \bar{t} діаграми $\bar{V}(\bar{t})$ вибираємо довільну точку P (поліус). Для зручності відрізок H_V повинен бути кратним часовому проміжку Δt .

В діаграму $\bar{S} = \bar{S}(\bar{t})$ впишемо ламану лінію, для якої тангенси кутів нахилу її ланок до осі \bar{t} дорівнюють

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\Delta \bar{S}_i}{\Delta t_i} \quad (\Delta \bar{S}_i = \bar{S}_i - \bar{S}_{i-1}; \Delta \bar{t}_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}). \quad (6.17)$$

З полюса P відкладемо (паралельно перенесемо) кути α_i і знайдемо точки їх перетину з віссю $\bar{O} \bar{V}$. Через них проведемо горизонтальні прямі до перетину з відповідними вертикальними прямими, що проходять через точки $1', 2', \dots$

З'єднуючи побудовані точки і точки \bar{O}, \bar{T} плавною лінією, одержимо діаграму $\bar{V}_B = \bar{V}_B(\bar{t})$, для якої з врахуванням (6.17) можна записати

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\bar{V}(t_i')}{H_V} = \frac{\Delta \bar{S}_i}{\Delta t_i} = \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i} \frac{\mu_t}{\mu_s} = V(t_i') \frac{\mu_t}{\mu_s}.$$

З останнього співвідношення визначаємо

$$V(t_i') = \frac{\mu_s}{\mu_t H_V} \bar{V}(t_i').$$

З іншого боку

$$V(t_i') = \mu_V \bar{V}(t_i').$$

Порівнюючи праві частини виразів для $V(t_i')$, одержуємо $\mu_V = \frac{\mu_s}{\mu_t H_V} \left(\frac{\dot{i} / \ddot{n}}{\dot{i} \dot{i}} \right)$. За діаграмою

$\bar{V}_B = \bar{V}_B(t)$ можна визначити швидкість точки B в довільний момент часу. Для цього ординати точок діаграми в розглядуваний момент часу необхідно помножити на масштаб швидкостей $V_B(t) = \mu_V \bar{V}_B(\bar{t})$.

Для визначення тангенціальної складової прискорення W_B^τ у відповідності до другої формули (6.15) необхідно графічно продиференціювати діаграму $\bar{V}_B = \bar{V}_B(\bar{t})$.

Це проводиться за таким самим алгоритмом, як диференціювання діаграми $\bar{S}_B = \bar{S}_B(\bar{t})$. При цьому часові проміжки розділяються значеннями $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{k-1}$. Полюс побудови π вибирається так само, як і полюс P для діаграми $\bar{V}_B = \bar{V}_B(\bar{t})$. Масштаб прискорення $\mu_W = \frac{W_B^\tau}{W_B^\tau}$ визначається

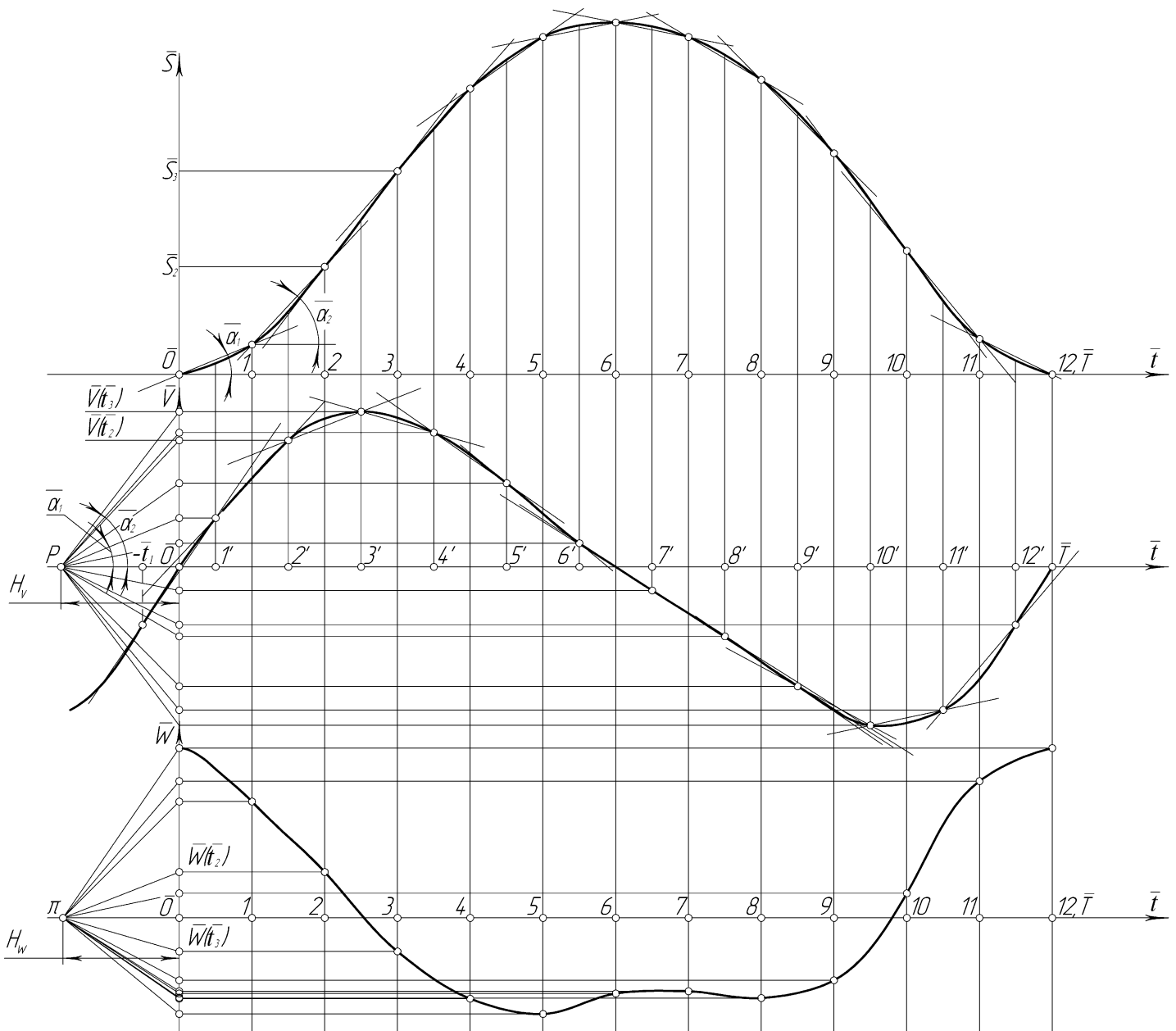


Рис. 6.43. Побудова діаграм точки B

за формулою $\mu_w = \frac{\mu_v}{\mu_t H_w}$.

Діаграма $\overline{W}_B^r = \overline{W}_B^r(\bar{t})$ наведена на рис. 6.43. На відміну від діаграми $\overline{V}_B = \overline{V}_B(\bar{t})$ значення прискорень $\overline{W}_B^r(0), \overline{W}_B^r(\bar{T})$ наперед невідомі і визначаються побудовою.

Враховуючи періодичність руху точки B , продовжимо діаграму $\overline{V}_B = \overline{V}_B(\bar{t})$ зліва від точки \bar{O} або справа від точки \bar{T} на проміжок \bar{t}' . Кінцеві точки цих проміжків визначаються значеннями $\bar{t} = -\bar{t}_1'$ або $\bar{t} = \bar{T} + \bar{t}_1'$. Розглянемо проміжок $[-\bar{t}_1'; \bar{t}_1']$, на кінцях якого відомі значення \overline{V}_B

$$\overline{V}_B(-\bar{t}_1') = \overline{V}_B(\bar{T} - \bar{t}_1'); \quad \overline{V}_B(\bar{t}_1') = \overline{V}_B(\bar{t}_1').$$

Точка перетину січної, проведеної через кінцеві точки діаграми на цьому проміжку з вертикальною прямою $\bar{t} = 0$, визначають кінцеві точки діаграми $\overline{W}_B^r(0) = \overline{W}_B^r(\bar{T})$.

Якщо траєкторія руху точки B побудована, то в кожній точці цієї траєкторії можна приблизно визначити радіус кривини ρ . Тоді нормальну складову прискорення W_B^n визначаємо за формулою

$$W_B^n = \frac{V_B^2}{\rho}. \text{ Зауважимо, що у випадку прямолінійного руху } W_B^n = 0.$$

Розглянутий вище метод кінематичного аналізу механізму називається методом графічного диференціювання або кінематичних діаграм. Перевага цього методу в тому, що при його застосуванні визначаються кінематичні характеристики точки механізму за один період руху. До недоліків відноситься невисока точність, зумовлена великою кількістю геометричних побудов.

6.3. Механізми для передачі обертального руху

Передача обертального руху від одного вала до іншого здійснюється за допомогою деталей, закріплених на валах, які взаємодіють між собою безпосередньо або через гнучку ланку. До передач з безпосереднім контактом відносяться найбільш поширені передачі зчепленням і фрикційні передачі, а до механізмів з гнучкими ланками – пасові, ланцюгові і інші.

В обох випадках осі валів можуть бути паралельними або такими, що перетинаються, і мимобіжними. При паралельних валах механізми відносяться до плоских, а в інших випадках – до просторових.

6.3.1 Механізми з жорсткими ланками для передачі обертального руху. Для передачі обертального руху від однієї осі до іншої, паралельної їй, використовуються різні механізми із зубчастими циліндричними колесами.

Плоскі циліндричні зубчасті передачі з круглими колесами. В найпростішому випадку ці механізми триланкові і мають однократну рухомість. Вони служать для передачі неперервного обертального руху від однієї ланки до іншої із сталим відношенням кутових швидкостей. Відсутність пробуксовки забезпечується наявністю в коліс зубців, тому колеса називаються зубчастими, а сама передача – зубчастою передачею.

При обертанні одного з коліс його зубці входять в зчеплення із зубцями іншого колеса і змушують його обертатися.

Якщо зубці обох коліс розміщені на їх зовнішніх поверхнях, то така передача називається циліндричною із зовнішнім зчепленням. В цій передачі вали обертаються в протилежних напрямках (рис. 6.44 а).

Якщо зубці одного з коліс нарізані на внутрішній його поверхні, а іншого – на зовнішній, то маємо циліндричну передачу із внутрішнім зчепленням. В такій передачі вали обертаються в одному напрямку (рис. 6.44 б).

Оскільки між зубчастими колесами відсутнє проковзування (пробуксовка), то швидкість спільної точки для обох коліс однакова

$$V_A = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2,$$

або

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

де r_1, r_2 – радіуси зубчастих коліс; z_1, z_2 – числа зубців.

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що колесо 1 ведуче, а 2 – ведене.

Передаточним відношенням рядової зубчастої передачі будемо називати число

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (6.18)$$

В співвідношенні (6.18) кутові швидкості можуть бути від’ємними (якщо обертальний рух відбувається в напрямку обертання годинникової стрілки), тому для передачі із зовнішнім зчепленням $i_{12} < 0$.

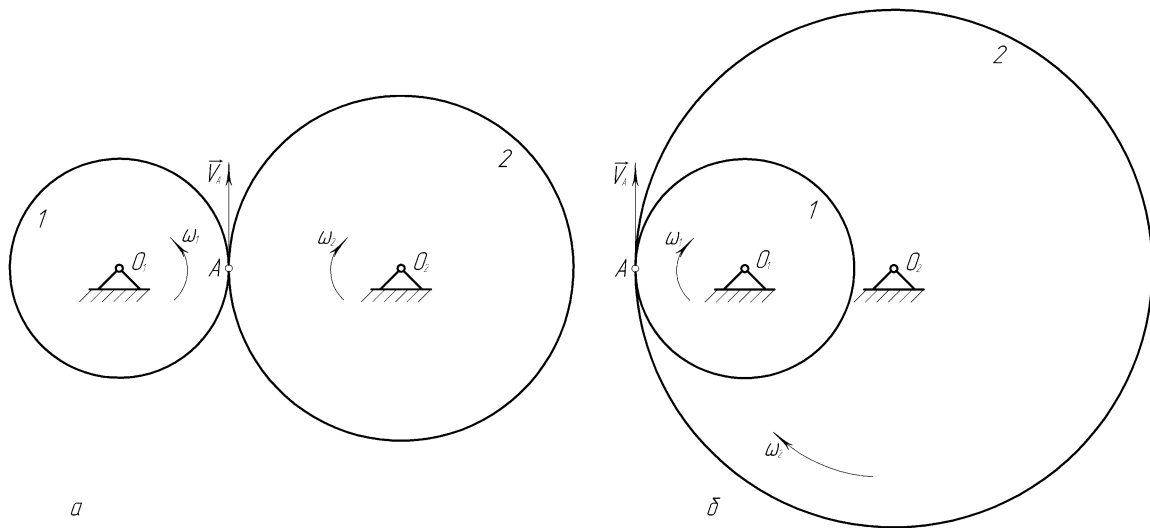


Рис. 6.44. Зовнішня та внутрішня циліндрична зубчаста передача

Передаточне відношення i_{12} залежить від числа зубців z_1, z_2 кожного із коліс передачі, причому найбільше передаточне відношення буде тоді, коли $z_2 = z_2^{\max}$, $z_1 = z_1^{\min}$.

При практичному виготовленні зубчастих коліс із умови невідірвання зубців вважаються найбільш оптимальними такі діапазони числа зубців

$$z_1^{\min} = 14 \div 17, \quad z_2^{\max} = 120 \div 150.$$

Звідси випливає, що $i_{12}^{\max} = \frac{z_2^{\max}}{z_1^{\min}} \approx 10$.

Однак в конструкторській практиці приймається завжди менше значення передаточного відношення ($i_{12} = 5 \div 7$) так як із збільшенням цього параметра збільшуються габарити передачі, її вага, а також труднощі виготовлення і монтажу.

Рядові зубчасті механізми. Необхідність застосування складних механізмів, які складаються з кількох зубчастих пар, виникає частіше всього, коли передаточне відношення перевищує межі, встановлені для однієї пари зубчастих коліс.

В цьому випадку використовують багатоступінчасті механізми. Їх основу складають послідовні ряди зубчастих коліс. Всі проміжні вали містять не по одному, а по два зубчастих колеса, які перебувають в зчепленні з колесами суміжних валів, у зв'язку з чим кожен з них є веденим по відношенню до попереднього вала і ведучим для наступного.

Приклад такого механізму наведено на **рис. 6.45**. Нехай обертальний рух передається від вала 1 до вала 4. Позначивши через ω, z з відповідним індексом кутову швидкість обертання валів і число зубців коліс, запишемо для кожної пари зубчастих коліс передаточні відношення (з врахуванням напрямків обертання)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{34} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad i_{56} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Якщо вал 1 ведучий, то колеса з числом зубців z_1, z_3, z_5 ведучі, а колеса з парними індексами числа зубців – ведені.

Перемноживши останні рівності, одержимо

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}. \quad (6.19)$$

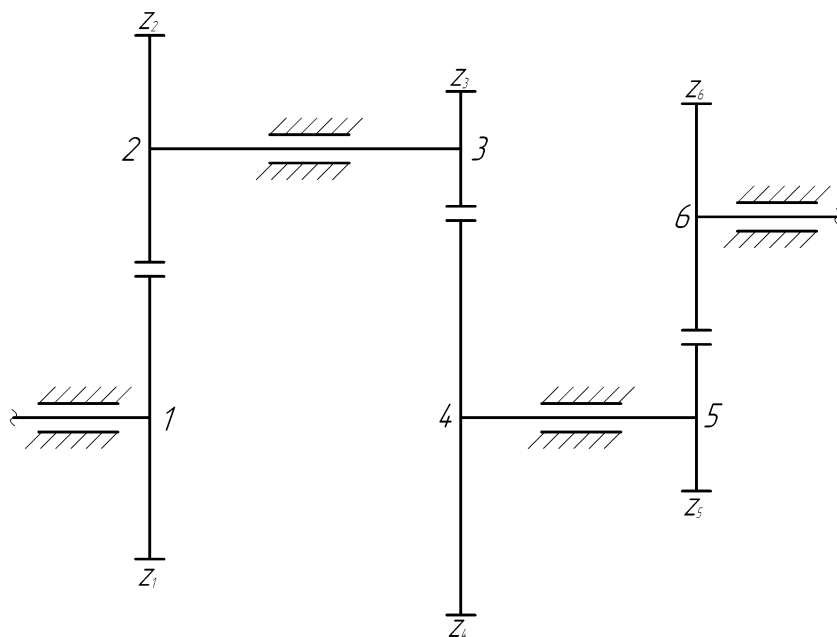


Рис. 6.45. Рядовий зубчастий механізм

Знак мінус показує, що останнє і перше колеса обертаються в протилежних напрямках. За означенням передаточного відношення маємо

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{n_1}{n_4}. \quad (6.20)$$

Порівнюючи (6.19) і (6.20), одержимо

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}. \quad (6.21)$$

Таким чином, передаточне відношення рядового механізму дорівнює добутку передаточних відношень зубчастих передач.

У формулі (6.21) i_{12}, i_{34}, i_{56} розглядаються як алгебраїчні величини, знак яких сховано в їх позначеннях.

Від формули (6.21) можна здійснити перехід до загальної формули для визначення передаточного відношення рядового механізму, який містить k пар коліс зовнішнього і внутрішнього зачеплень

$$i_{1k} = \frac{z_2 z_4 \cdots z_{2k}}{z_1 z_3 \cdots z_{2k-1}} (-1)^m, \quad (6.22)$$

де m – число зовнішніх зчеплень механізму.

Якщо на всіх валах механізму закріплено тільки по одному зубчастому колесу, причому колеса проміжних валів входять одночасно в зчеплення з колесами на попередньому і наступному валах, то такий механізм називається паразитним (рис. 6.46)

Якщо вал I є ведучим, то на підставі (6.21), одержимо

$$i_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$

або в загальному випадку

$$i_{1k} = (-1)^m \frac{z_{2m}}{z_1}, \quad (6.23)$$

де m – число зовнішніх зчеплень механізму.

Останній вираз показує, що загальне передаточне відношення паразитного механізму не залежить від числа проміжних коліс і числа їх зубців. Такі колеса впливають тільки на напрямок обертання веденого вала. Паразитні механізми використовуються і для передачі обертального руху на значну відстань, оскільки така передача однією парою коліс приводить до нераціонального збільшення розмірів передачі.

Рядові механізми, які призначені для зменшення числа обертів веденого вала в порівнянні з числом обертів ведучого, називаються редукторами. Якщо такі механізми збільшують число обертів веденого вала, їх називають мультиплікаторами.

6.3.2. Епіциклічні механізми. В розглянутих вище зубчастих механізмах осі коліс в процесі руху залишаються нерухомими. Кожне колесо здійснює простий обертальний рух.

В сучасній практиці машинобудування широко застосовуються зубчасті механізми із складним обертальним рухом коліс. Група коліс або одне колесо такого механізму, який називається епіциклічним, обертаються не тільки

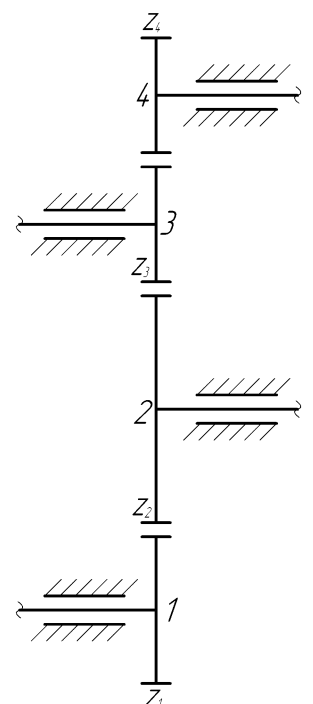


Рис. 6.46. Паразитний механізм

відносно своєї геометричної осі, але разом з нею відносно деякої іншої нерухомої осі.

На **рис. 6.47** наведено схеми найпростіших чотириланкових епіциклічних механізмів із зовнішнім і внутрішнім зчепленням зубчастих коліс.

В кожному з наведених прикладів колесо 2 обертається не тільки відносно осі O_2 , але разом з нею обертається навколо осі O_1 . Точки ободу колеса 2 в процесі руху описують епіциклоїди (зовнішнє зчеплення) або гіпоциклоїди (внутрішнє зчеплення).

Ланка 1, яка утворює обертальну кінематичну пару з стойкою ϕ називається центральним або сонячним колесом. Ланка 3 називається водилом. Вона утворює кінематичні пари із стойкою ϕ колесом 2. Це колесо називається сателітом

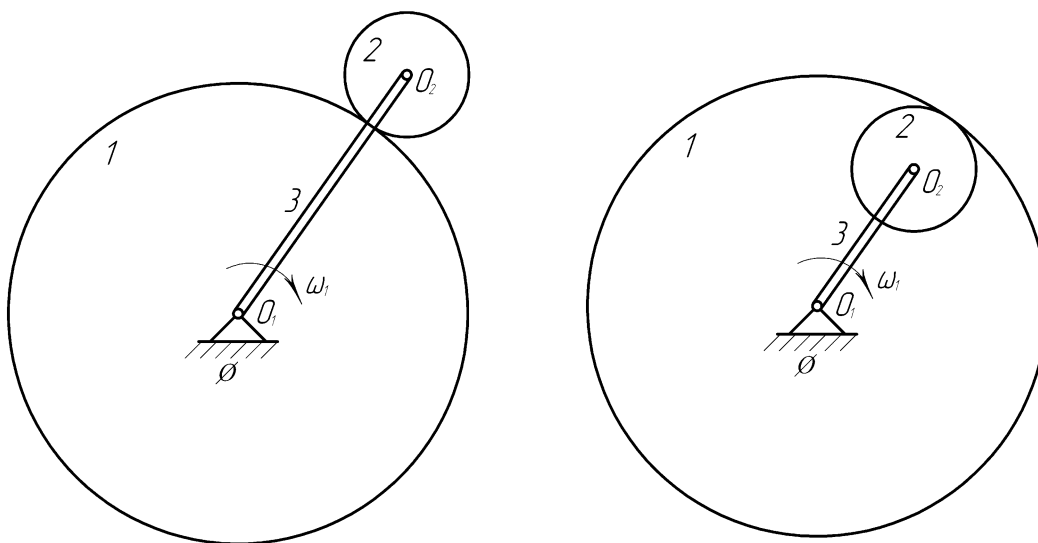


Рис. 6.47. Епіциклічні механізми

або планетним. Зубчасті колеса 1 і 2 в місці зчеплення утворюють вищу кінематичну пару.

Рухомість епіциклічного механізму визначають за формулою Чебишева

$$H = 3k - 2p_H - P_B = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Отже, для визначеності руху такого механізму відносно стойки необхідно двом його ланкам задати незалежні між собою рухи. Епіциклічний механізм двократної рухомості називається диференціальним або диференціалом.

Якщо центральне колесо 1 закріпити, то диференціальний механізм перетворюється в свою різновидність – планетарний механізм однократної рухомості (**рис. 6.48**).

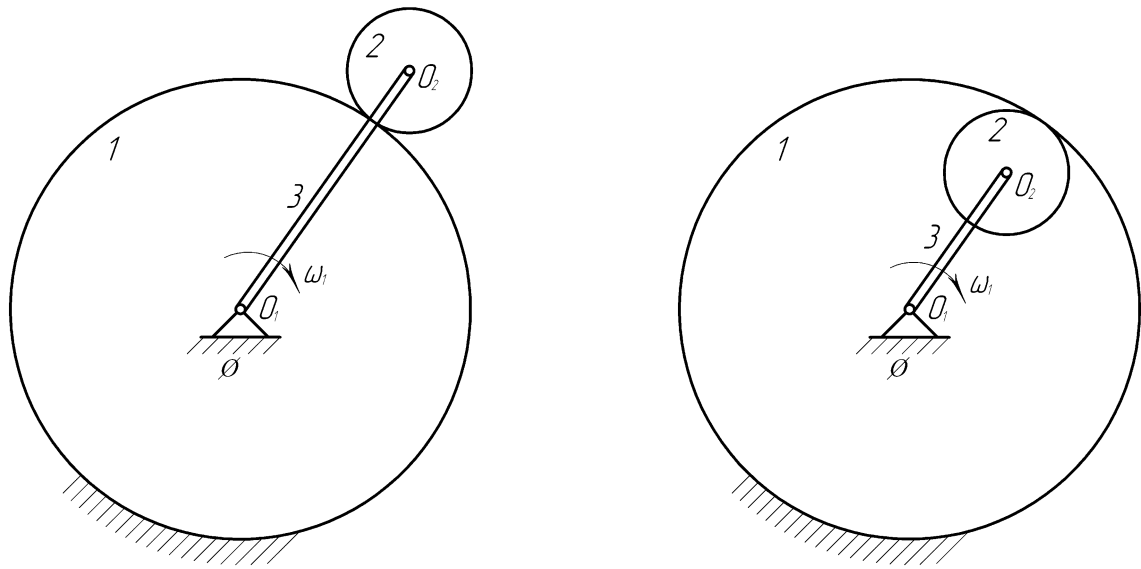


Рис. 6.48. Планетарні механізми

У випадку закріплення водила 3 диференціальний механізм перетворюється в звичайний рядовий зубчастий механізм з відносно нерухомими осями коліс.

Кінематичний аналіз диференціального механізму, який передбачає визначення передаточного відношення, може бути проведений різними способами.

Найбільш простим і поширеним є метод зупинки.

Розглянемо диференціальний механізм, зображений на рис.6.49. Нехай ведучими ланками цього механізму будуть водило H і колесо 1, які одержують обертання від коліс 5, 6. Позначимо через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_H$ кутові швидкості зубчастих коліс 1, 2, 3, 4 і водила.

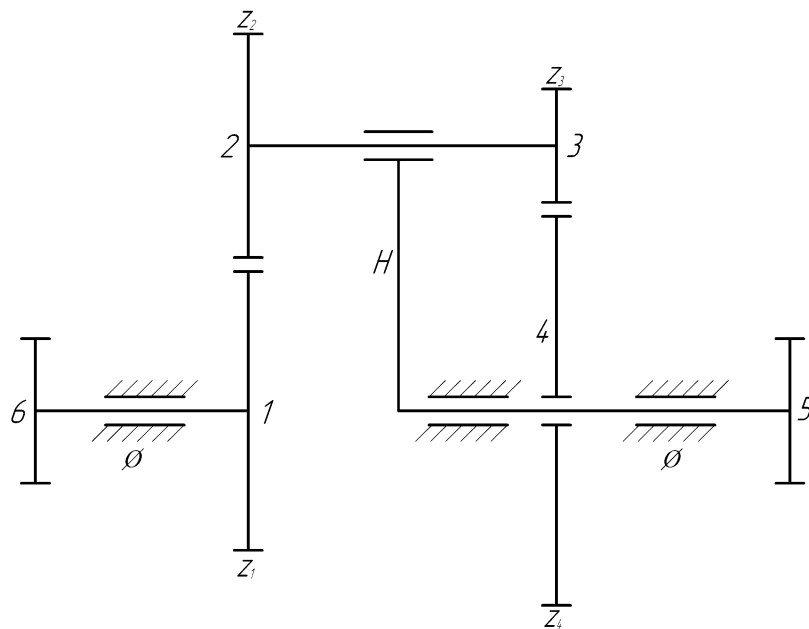


Рис. 6.49. Диференціальний механізм

Надамо всьому механізму обертального руху навколо центральної осі з кутовою швидкістю $-\omega_H$. В результаті цього водило H умовно зупиниться (стане закріпленою вісь обертання коліс 2, 3), а диференціальний механізм перетвориться в рядовий з нерухомими осями (рис. 6.50). Його ланки будуть мати такі кутові швидкості

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H; \quad \omega'_3 = \omega_3 - \omega_H; \quad \omega'_4 = \omega_4 - \omega_H; \quad \omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0.$$

Передаточне відношення такого механізму визначається за формулою (6.18)

$$i'_{14} = \frac{\omega'_4}{\omega'_1} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H}.$$

Вважаючи числа зубців z_1, z_2, z_3, z_4 механізму заданими, запишемо на підставі (6.22) останню формулу так

$$\frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2}. \quad (6.24)$$

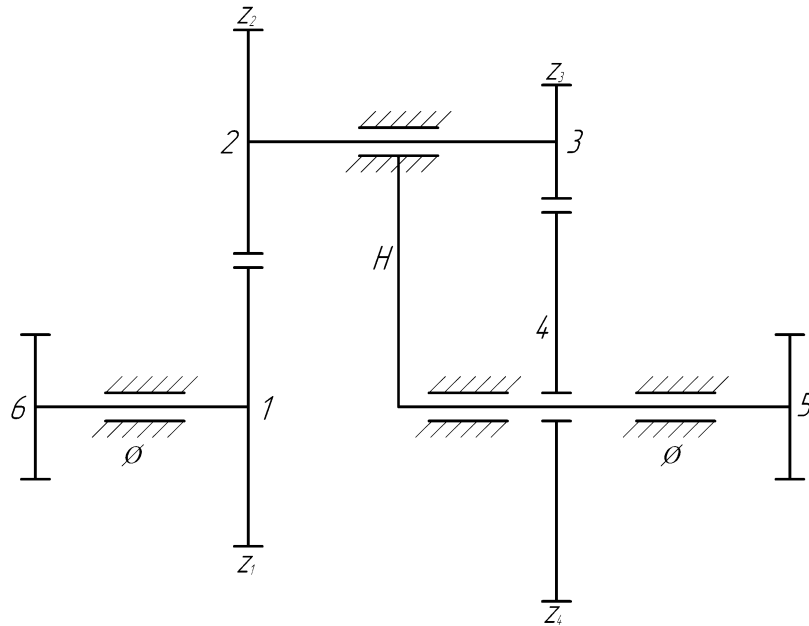


Рис. 6.50. Перетворення диференціального механізму в рядовий

Співвідношення (6.24) є універсальним оскільки дозволяє за заданим рухом двох ланок визначити рух третьої.

Якщо в (6.24) покласти $\omega_4 = 0$ або $\omega_1 = 0$, то одержимо залежність для визначення передаточного відношення планетарного механізму. Так при $\omega_4 = 0$ (колесо 4 закріплене) маємо

$$\frac{-\omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2},$$

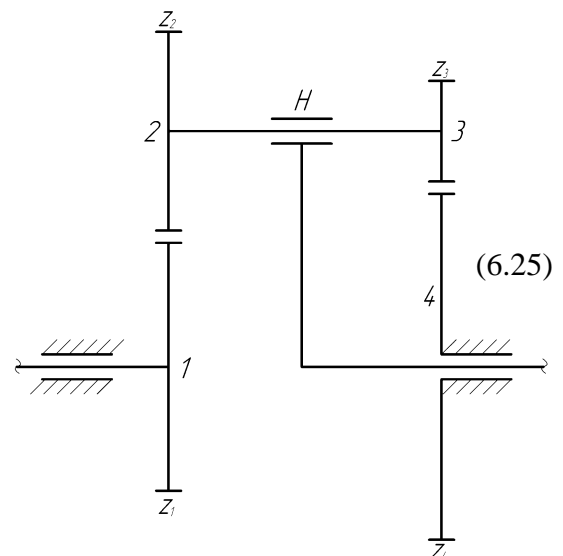
або після певних перетворень

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{1H} = 1 - \frac{z_4 z_2}{z_3 z_1}.$$

Якщо ведучою ланкою є водило, то

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{z_3 z_1}{z_3 z_1 - z_2 z_4}. \quad (6.25)$$

Приклад: Визначити передаточне відношення планетарного механізму зображеного на рис. 6.51, при



закріпленому колесі 4, якщо ведучою ланкою є водило при $z_4 = 99: z_3 = 100: z_2 = 101: z_1 = 100$ (механізм Давида).

За формулою (6.25) знаходимо

$$i_{H1} = \frac{100 \cdot 100}{100 \cdot 100 - 101 \cdot 99} = 10000.$$

В даному механізмі за час, коли водило здійснить 10000 обертів, сонячне колесо 1 обернеться всього один раз. Від сонячного колеса до водила такий механізм не передає обертового руху через заклинювання. Крім того він має дуже низький коефіцієнт корисної дії, що дозволяє рекомендувати його для передачі обертового руху тільки в приладах.

В порівнянні з рядовими зубчастими механізмами диференціальні і планетарні механізми мають ряд суттєвих переваг. До них відносяться:

Рис. 6.51. Механізм Давида

1. Можливість реалізації значних передаточних відношень при малій кількості ланок, в результаті чого зменшуються габарити і вага механізму.

2. Можливість надавати ведучій ланці такого обертового руху, який є сумою або різницею обертових рухів ведучих ланок.

Суттєвим недоліком епіциклічних механізмів є втрати енергії на тертя в кінематичних парах.

6.5. Механізми для передачі обертового руху з гнучкими ланками

Передачу обертового руху від одного вала до іншого при значних відстанях між ними можна здійснити гнучкою ланкою (пасом або ланцюгом).

6.5.1. Пасові передачі. Пасова передача складається з двох коліс (ведучого і веденого), які називаються шківками, і нескінченного паса, що охоплює їх. Ведучий шків при обертанні завдяки силам тертя захоплює за собою пас, а останній за тією ж причиною змушує обертатися ведений шків. Сила тертя на поверхнях дотику шківів і паса виникає при відповідному притисканні паса до ободів шківів, тобто при натягу паса (рис. 6.52).

До переваг пасових передач відносяться:

- простота і низька вартість конструкції;
- плавність ходу, здатність пом'якшувати удари і запобігати поломокам при раптових перевантаженнях (за рахунок пробуксовки паса);
- можливість передачі потужності при значних відстанях між осями ведучого і веденого валів;

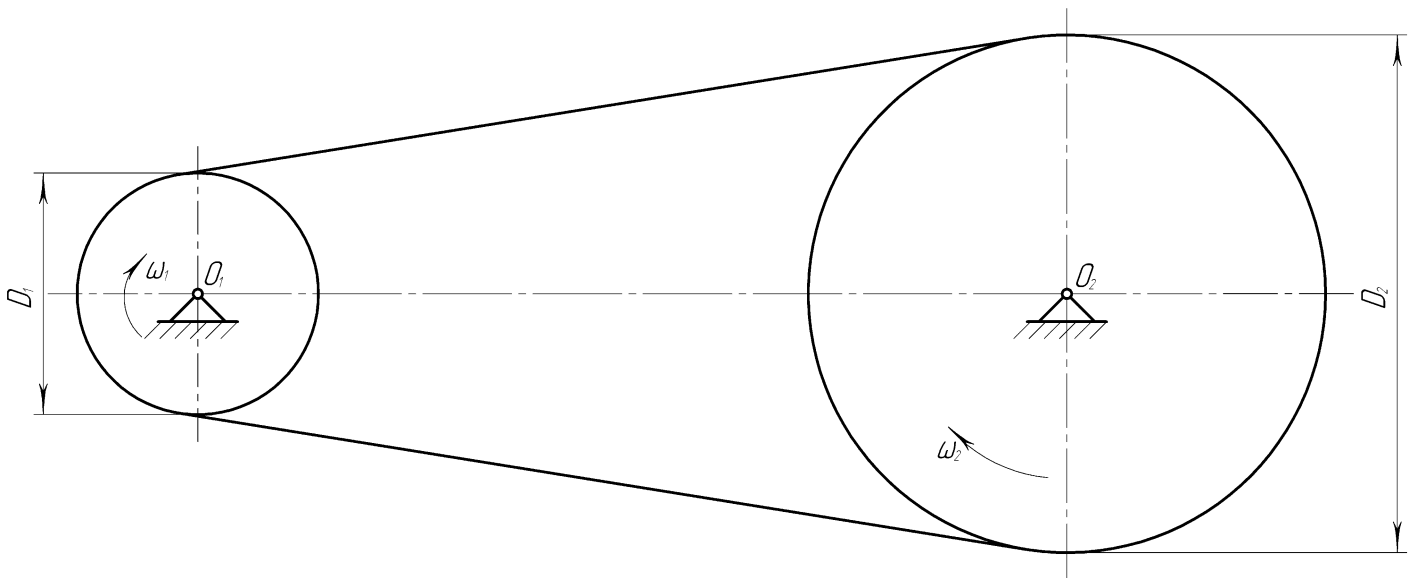


Рис. 6.52. Пасова передача

- безшумність роботи (в порівнянні із зубчастими передачами);
- простота догляду і обслуговування.

Недоліками пасових передач є:

- змінність передаточного відношення;
- порівняно великі габарити;
- розтяг паса, який викликає необхідність його перешивання при сталій міжцентровій відстані

або застосування натягувального пристрою.

Пасові передачі поділяються на такі види:

1. відкриті – з паралельними валами;
2. перехресні – з паралельними валами;
3. напівперехресні, кутові і інші.

Для визначення передаточного відношення необхідно знати швидкості точок на ободі ведучого і веденого шківів.

Для ведучого шківа

$$V_1 = R_1 \omega_1 = \frac{D_1}{2} \omega_1,$$

а для веденого

$$V_2 = R_2 \omega_2 = \frac{D_2}{2} \omega_2.$$

Якщо не враховувати ковзання паса по шківу, тобто вважати $V_1 = V_2$, то

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Практично $V_1 \neq V_2$, так як завжди має місце так зване пружне ковзання паса по ободу шківа.

Пружне ковзання неминуче при роботі пасової передачі при навантаженні. Його не можна змішувати з шкідливим ковзанням (пробуксовкою), яке виникає при перевантаженні передачі.

Пасові передачі різних типів знаходять широке застосування в автомобілях, тракторах, верстатах, лісопилних установках, сільськогосподарських машинах тощо.

6.5.2. Ланцюгові передачі. Ланцюгова передача обертального руху здійснюється за допомогою нескінченного замкнутого ланцюга, який охоплює дві (або більше) зірочки-колеса із зубцями спеціального профілю. Вона служить для передачі обертального руху тільки між паралельними валами (рис. 6.53).

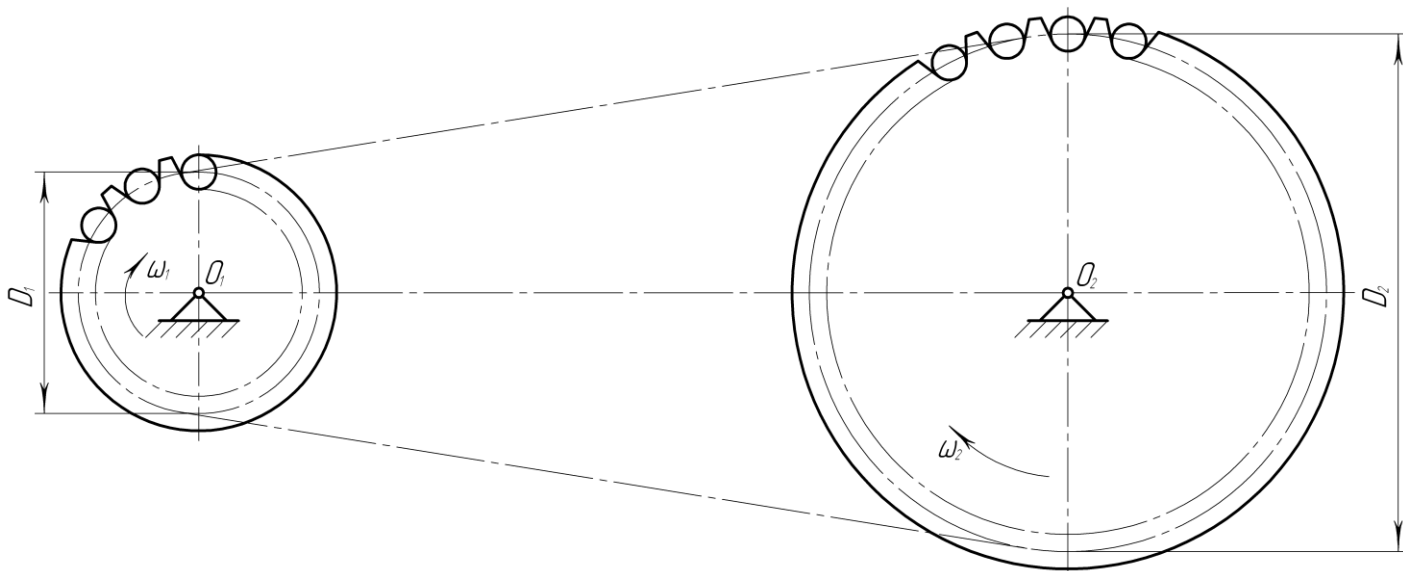


Рис. 6.53. Ланцюгова передача

На відміну від пасової передачі ланцюгова передача працює подібно до зубчастої без проковзування.

Основні переваги ланцюгової передачі:

- компактність;
- менше, аніж в пасових передачах, навантаження на вали;
- можливість передачі руху на значні відстані (до 5-8 м);
- можливість передачі руху одним ланцюгом декільком паралельним валам (рис. 6.54);
- порівняно великий коефіцієнт корисної дії передачі (до 98%);

Недоліки ланцюгової передачі:

- збільшення кроку ланцюга (ланцюг видовжується) внаслідок зношування шарнірів, що потребує застосування натягувальних пристроїв;
- більш складний догляд в порівнянні з пасовими передачами (мащення, регулювання, усунення перекосу валів);
- підвищений шум.

Ланцюгові передачі широко застосовуються в сільськогосподарських машинах, транспортних пристроях, верстатах для обробки металу і деревини тощо.

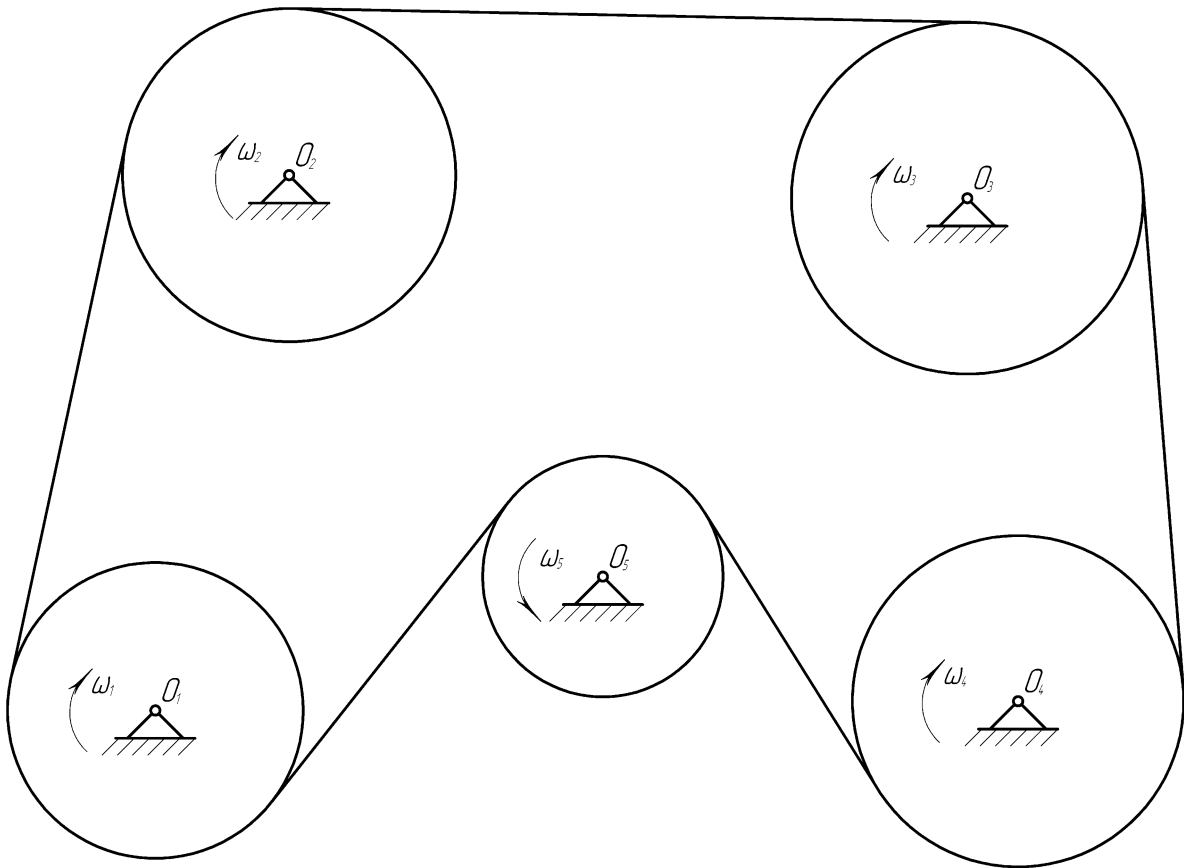


Рис. 6.54. Ланцюгова передача з п'ятьма зірочками

Передаточне відношення ланцюгової передачі визначається із співвідношень

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

де $\omega_1, \omega_2, n_1, n_2$ – кутова швидкість і частота обертання ведучого і веденого валів; z_1, z_2 – число зубців ведучої і веденої зірочок.

Необхідно відмітити, що передаточне відношення ланцюгової передачі за один оберт ведучої зірочки не залишається сталим, а це, в свою чергу, викликає коливання кутової швидкості веденої зірочки. Сталим є тільки середнє передаточне відношення ланцюгової передачі.

6.6. Плоскі кулачкові механізми

Кулачкові механізми мають широке застосування в машинобудуванні, оскільки за їх допомогою можна реалізувати різноманітні закони руху веденої ланки. Кінематичне призначення кулачкових механізмів полягає в перетворенні обертального або поступального руху ведучої ланки (кулачка) в поступальний або обертальний рух веденої ланки (штанги або штовхача), причому рух останньої може здійснюватися по наперед заданому закону (в тому числі із зупинками).

В найпростішому випадку плоский кулачковий механізм визначається замкненим триланковим кінематичним ланцюгом однократної рухомості (рис. 6.55).

Ланка 1 називається кулачком; вона надає заданий рух веденій ланці – штовхачу 2. Кожна з цих ланок утворює нижчу кінематичну пару із стойкою ϕ (обертальну чи поступальну). Контури рухомих ланок 1, 2 перебувають у постійному контакті, утворюючи вищу кінематичну пару.

Для зменшення зношування елементів вищої пари штовхач із загостренням на практиці замінюється штовхачем з роликом (рис. 6.56).

При такій заміні лише вісь обертання ролика залишається незмінно зв'язною із штовхачем. При дослідженні кулачкового механізму з роликом завжди дійсний профіль кулачка потрібно замінити теоретичним (пунктирна лінія), який віддалений від дійсного профілю на величину радіуса ролика.

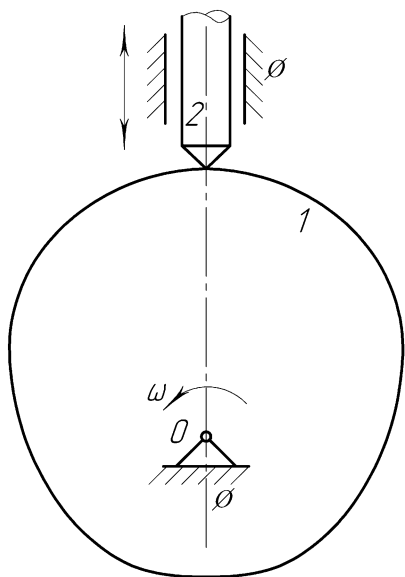


Рис. 6.55. Найпростіший кулачковий механізм

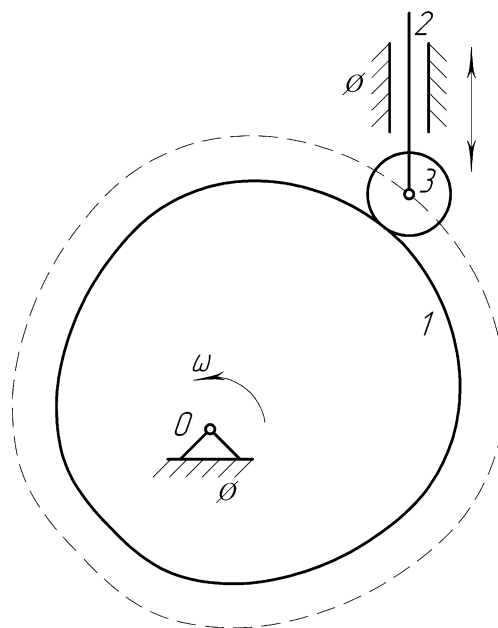


Рис. 6.56. Кулачковий механізм з роликом із штовхачем, що здійснює поступальний рух

Рухомість механізму з роликом визначаємо за формулою Чебишева

$$H = 3k - 2p_H - P_B = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Насправді рухомість кулачкового механізму дорівнює одиниці. Це пояснюється тим, що в розглядуваному механізмі ролик є “зайвою” ланкою.

Періодичний рух веденої ланки 2 може бути поступальним або обертальним, що визначається прийнятою схемою механізму, формою окреслення кулачка 1 і видом його руху.

Розглянемо деякі схеми плоских кулачкових механізмів, які мають широке застосування в різних галузях техніки.

На рис. 6.57 зображено механізм з поступальним рухом кулачка 1 і поступальним рухом штовхача 2.

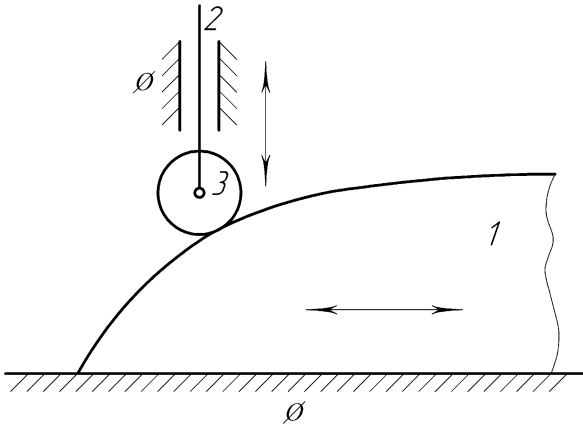


Рис. 6.57. Кулачковий механізм з поступальним рухом кулачка і штовхача

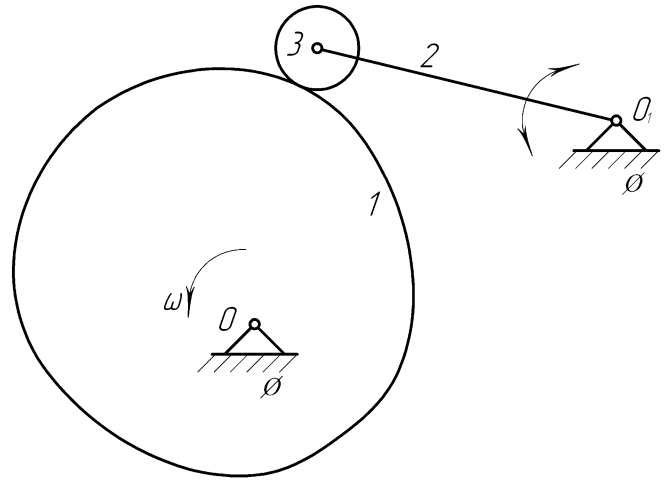


Рис. 6.58. Кулачковий механізм з коливним рухом штовхача

Прикладом іншої різновидності кулачкового механізму може служити схема, наведена на **рис. 6.58**, де кулачок 1 здійснює обертальний рух навколо центра O , а ведена ланка 2 – коливний рух навколо точки O_1 . Можливі і інші види кулачкових механізмів, в яких ведена ланка здійснює коливний або поступальний рухи (**рис. 6.59**).

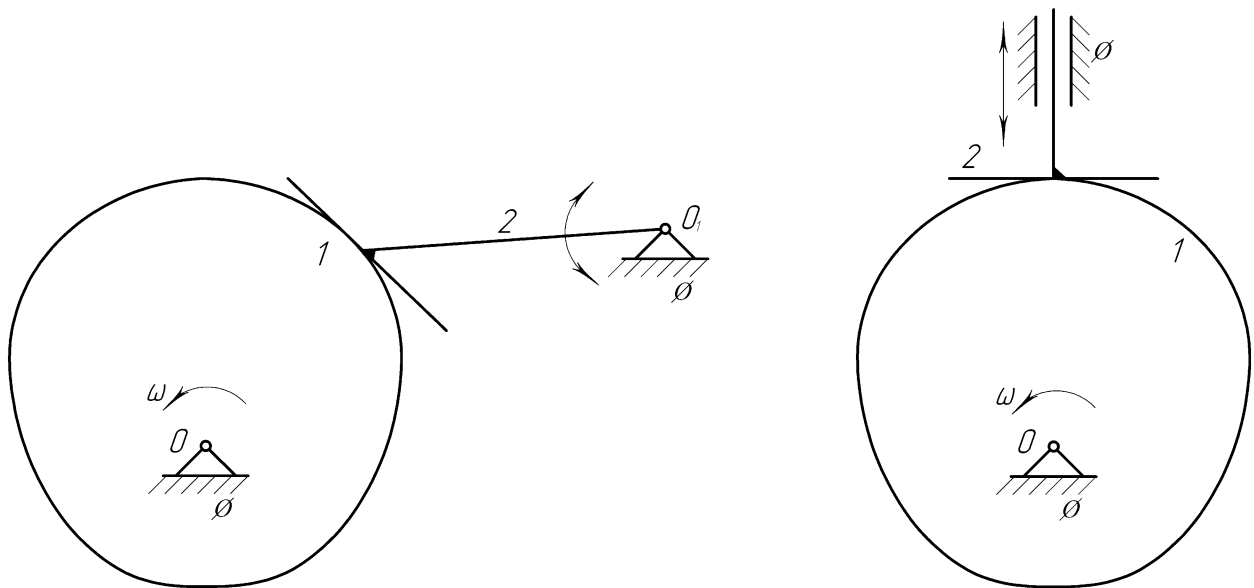


Рис. 6.59. Тарілчасті кулачкові механізми

Наведені схеми кулачкових механізмів і ряд інших широко застосовується в тих випадках, коли при неперервному русі ведучої ланки-кулачка необхідно змінювати по наперед заданому закону рух веденої ланки і, особливо, коли ця ланка повинна в процесі руху тимчасово зупинитися.

Такий характер руху має місце в металообробних верстатах, в пресах і окремих типах ножиць, а також в механізмах газорозподілу двигунів внутрішнього згорання.

Перевагою кулачкових механізмів є їх широка універсальність. Надаючи кулачку ту чи іншу форму, можна при компактних розмірах механізму одержати практично будь-який рух штовхача з довільним законом зміни таких параметрів як швидкість, прискорення чи траєкторія, що неможливо здійснити при використанні інших механізмів.

Порівняно швидке зношування елементів вищої кінематичної пари і, як результат цього, неточність ходу штовхача, збільшення шуму характеризують недолік цих механізмів.

Для уникнення розмикання геометрично незамкнених вищих пар у всіх наведених схемах кулачкових механізмів передбачено силове замикання за допомогою пружин.

По взаємному розміщенню осей кулачка і штовхача ці механізми діляться на два типи – центральні і позацентрові. До першого типу відносяться кулачкові механізми з віссю штовхача, яка перетинає вісь кулачка (рис. 6.55), а до другого – зі зміщеною віссю (рис. 6.56).

6.4.1. Кінематичний аналіз плоских кулачкових механізмів. Основна задача кінематичного аналізу кулачкового механізму передбачає за заданим законом руху кулачка визначити швидкості і прискорення точок штовхача якщо він здійснює поступальний рух або кутові швидкості і кутові прискорення штовхача при його обертальному русі.

Розв'язок задачі може бути як аналітичним, так і графічним. У першому випадку повинен бути відомим закон руху деякої точки штовхача $S = f(t)$. Швидкість і прискорення цієї точки визначаються шляхом диференціювання даного закону по часу. Ці ж параметри можуть бути визначені методами графічного диференціювання або планів швидкостей і прискорень.

На рис. 6.60 зображено центральний кулачковий механізм, в якому кулачок здійснює рівномірний обертальний рух з кутовою швидкістю ω , а штовхач – поступальний. Вістря штовхача встановлено в точці, найменш віддаленій від осі кулачка.

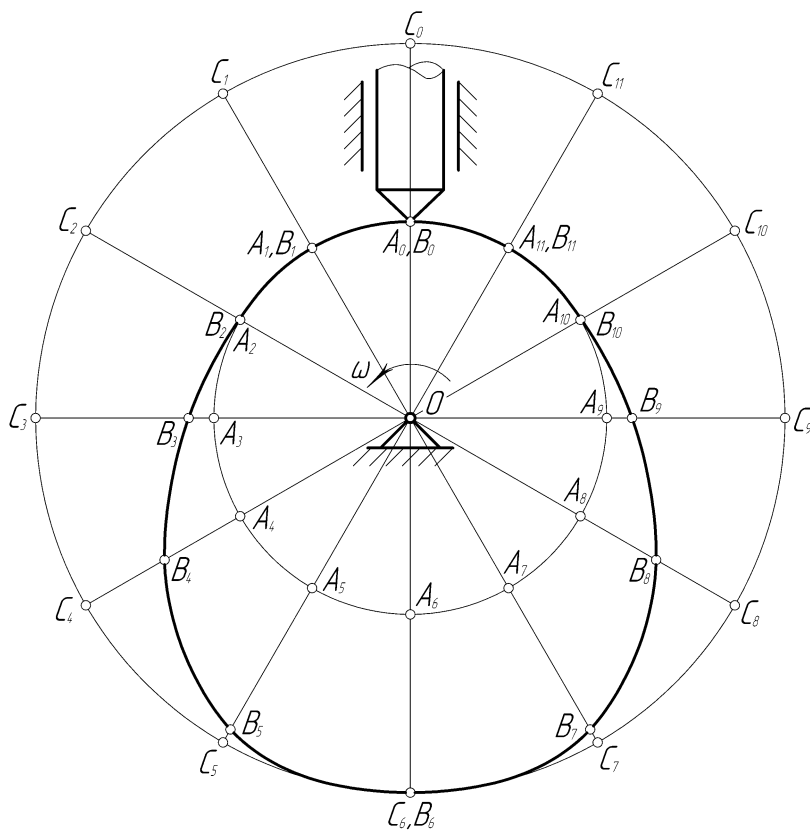


Рис. 6.60. Центральний кулачковий механізм

Для визначення закону руху штовхача цей механізм повинен бути викреслений для ряду положень кулачка в межах робочого кута повороту, що при складному профілі кулачка викликає відомі

труднощі. Тому на практиці використовують метод обернення руху, який дозволяє без особливих труднощів визначати відносне положення ланок без повторного викреслювання кулачка.

Для цього механізму умовно надаємо обертального руху навколо центра O з кутовою швидкістю $-\omega$. В результаті такого руху кулачок 1 умовно зупиниться, а штовхач 2 буде здійснювати два рухи:

1. поступальний вздовж своєї напрямної, по характеру такий же як і до обернення руху;
2. обертальний навколо точки O з кутовою швидкістю $-\omega$ разом з напрямною.

Пряма OC в оберненому русі також обертається з цією кутовою швидкістю навколо центра кулачка. Разом з тим ця пряма проходить через точку B і є геометричною віссю штовхача. При поступальному русі штовхача центрального кулачкового механізму траєкторія точки B проходить через центр кулачка при довільному положенні напрямних.

Для побудови діаграми зміщення точки B штовхача проведемо два концентричних кола з центром в точці O : одне найменшого радіуса r_0 (радіус основної шайби кулачка), а інше найбільшого радіуса r_{\max} . Різниця $r_{\max} - r_0 = S_0$ визначає максимальне віддалення вістря B від основної шайби, або хід штовхача h .

Побудуємо 12 положень прямої OC . Для цього розділимо коло основної шайби на таке ж число однакових частин точками A_0, A_1, \dots, A_{11} . Оскільки рух кулачка рівномірний, то $\widehat{A_0A_1} = \widehat{A_1A_2} = \dots = \widehat{A_{11}A_0}$. Сполучивши точки A_0, A_1, \dots, A_{11} з центром O кулачка проводимо прямі $OA_0, OA_1, \dots, OA_{11}$ до перетину з профілем кулачка в точках B_0, B_1, \dots, B_{11} . Кожна з цих точок розміщена на відповідній прямій $OC_0, OC_1, \dots, OC_{11}$.

Побудувавши 12 положень точки B , будуємо діаграму $S = S(t)$, прийнявши до уваги, що

$$S_0 = A_0B_0 = 0; \quad S_1 = A_1B_1; \dots; \quad S_{11} = A_{11}B_{11}; \quad S_{12} = A_0B_0 = 0.$$

Для цього в масштабі $\mu_t = \frac{t_p}{\overline{OT}}$, де t_p – робочий час одного оберту кулачка, \overline{OT} – довжина відрізка в міліметрах, яким зображується цей час, відкладаємо на осі абсцис робочий час. Відрізок \overline{OT} ділимо на 12 однакових частин точками $1, 2, \dots, 11$, яким відповідають значення часу $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{11}$, або кута повороту $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{11}$.

В точках поділу відкладаємо відрізки $1-1', 2-2', \dots, 11-11'$, які відповідають відріzkам $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{11}B_{11}$ в масштабі $\mu_s = \frac{\mu_l}{m}$, де $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}$, m – коефіцієнт збільшення чи зменшення кінематичної схеми. З'єднавши неперервною лінією точки $0, 1', 2', \dots, 11', 12$, одержимо діаграму $S = S(t)$ (рис. 6.61).

Методом графічного диференціювання діаграми $S = S(t)$ можна побудувати діаграму швидкості $V = V(t)$, а повторним диференціюванням – діаграму прискорення $W = W(t)$.

На підставі вищесказаного можна зробити висновок: при заданому законі руху кулачка графічним методом можна провести повне кінематичне дослідження руху веденої ланки.

Якщо штовхач має ролик, то для побудови діаграми $S = S(t)$ необхідно попередньо побудувати теоретичний профіль кулачка. Для цього в довільній точці профілю кулачка будується перпендикуляр, на якому відкладається відрізок довжиною R (R – радіус ролика). Кінцева точка цього відрізка визначає точку теоретичного профілю кулачка. Побудувавши необхідну кількість таких точок і сполучивши їх плавною лінією, визначимо теоретичний профіль кулачка.

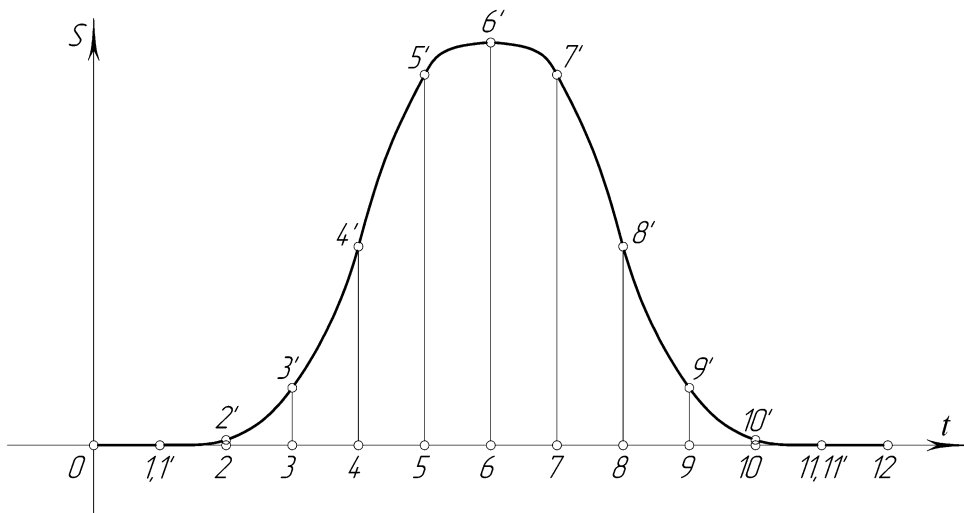


Рис. 6.61. Діаграма зміщення точки B

Визначення швидкостей і прискорень методом планів.

Розглянемо наведену на рис. 6.62 схему кулачкового механізму. Ведучою ланкою є кулачок 1, який обертається навколо центра O з кутовою швидкістю $\omega = const$. Розміри всіх ланок задані. Визначимо швидкість і прискорення штовхача 2 в заданому положенні механізму методом планів. Ланка 2 має ролик, тому попередньо побудуємо теоретичний профіль кулачка. Нехай A центр кривини теоретичного профілю в точці B . Замінюючий механізм з нижчими кінематичними парами буде кривошипно-повзунковим з кривошипом OA , фіктивним шатуном AB і повзунком 2.

План швидкостей будуюмо у відповідності до формули Ейлера для фіктивної ланки AB .

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}.$$

$\parallel BB_1$ $\perp OA$ $\perp AB$

Прискорення точки B визначаємо з основного векторного рівняння

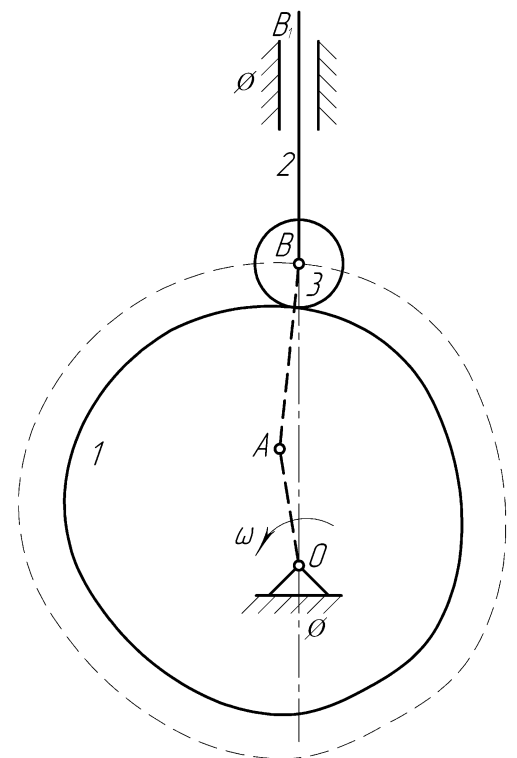


Рис. 6.62. До побудови плану швидкостей та прискорень кулачкового механізму

$$\frac{\vec{W}_B}{\parallel BB_1} = \frac{\vec{W}_A^n}{A \rightarrow O} + \frac{\vec{W}_{AB}^n}{B \rightarrow A} + \frac{\vec{W}_{AB}^\tau}{\perp AB}$$

Графічна побудова планів (рис. 6.63, 6.64) не потребує пояснень, оскільки вона здійснена на загальних принципах, розглянутих в п. 6.2.2.

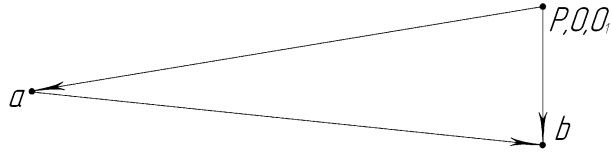


Рис. 6.63. План швидкостей кулачкового механізму, зображеного на рис. 6.62

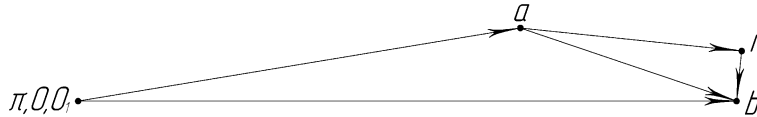


Рис. 6.64. План прикорень кулачкового механізму, зображеного на рис. 6.62 (повернуто на 90° проти годинникової стрілки)

Якщо замість штовхача, який здійснює поступальний рух, до схеми включена коливна ланка BO_1 , то замінюючим механізмом буде шарнірний чотириланковик $OABO_1$ (рис. 6.65), для якого швидкість і прискорення точки B визначаються з планів, побудованих у відповідності до векторних рівнянь

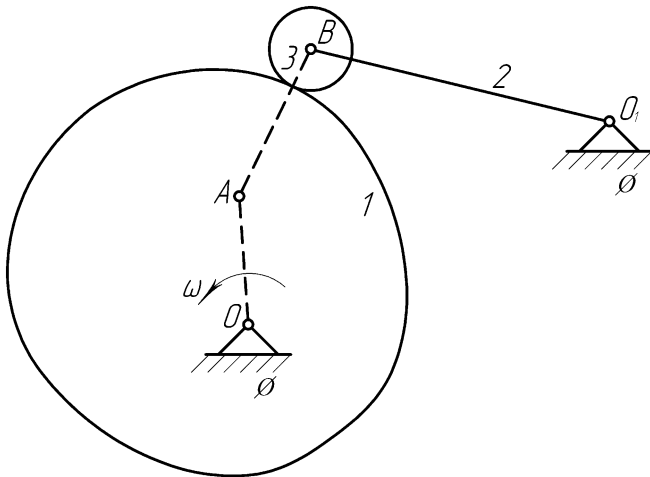


Рис. 6.65. До побудови плану швидкостей та прискорень

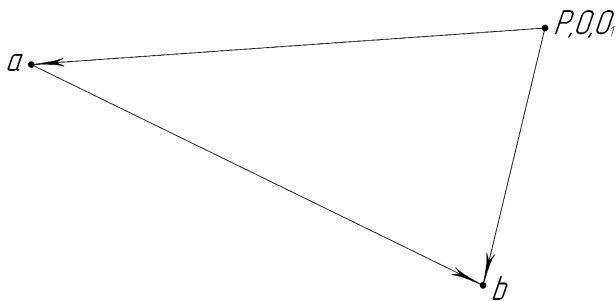
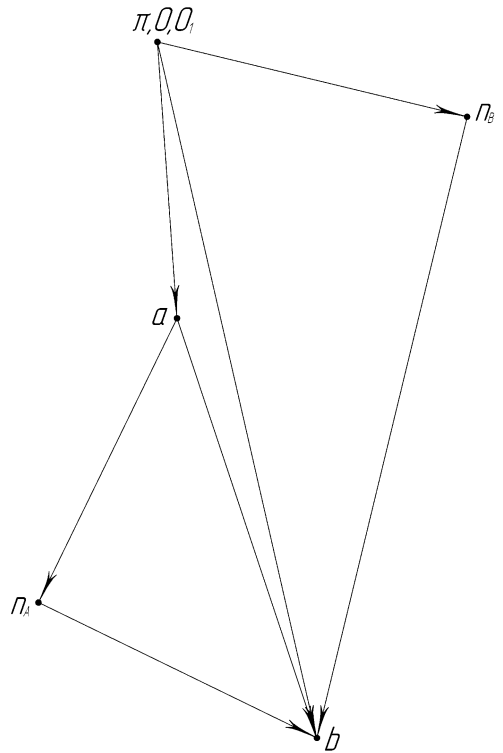


Рис. 6.66. План швидкостей кулачкового механізму, зображеного на рис. 92

Рис. 6.67. План прискорень кулачкового механізму, зображеного на рис. 6.65

$$\frac{\vec{V}_B}{\perp O_1B} = \frac{\vec{V}_A}{\perp OA} + \frac{\vec{V}_{AB}}{\perp AB} \quad \text{та} \quad \frac{\vec{W}_B^n}{B \rightarrow O_1} + \frac{\vec{W}_B^\tau}{\perp O_1B} = \frac{\vec{W}_A^n}{A \rightarrow O} + \frac{\vec{W}_{AB}^n}{B \rightarrow A} + \frac{\vec{W}_{AB}^\tau}{\perp AB}$$

і зображених на рис. 6.66, 6.67.

Для повного кінематичного аналізу механізму потрібно побудувати певну кількість замінюючих механізмів і відповідних їм планів швидкостей та прискорень.

6.7. Кінематичний синтез кулачкових механізмів

Розглянемо найпростішу задачу побудови профілю кулачка, який на практиці реалізує необхідний закон руху веденої ланки. Цей закон вибирається довільно, але з таким розрахунком, щоб при заданій схемі механізму виконувалися певні технологічні і експлуатаційні вимоги. Для кулачкового механізму двигуна внутрішнього згорання такими вимогами є:

- 1) забезпечення підйому і посадки клапана (штовхача) на сідло;
- 2) утримання його в дальньому положенні при найбільш відкритому отворі для впуску в циліндр робочого тіла і випуску відпрацьованих газів;
- 3) забезпечення плавного і по можливості безударного руху клапана, так як лише при цій умові спрацювання елементів кінематичних пар буде найменшим.

Від вибраного закону руху штовхача залежать не тільки його кінематичні характеристики, що впливають на робочий процес машини, але й величина тієї роботи, яка необхідна для надання ланкам кінетичної енергії, а також величина напружень в ланках і жорсткість пружини, що замикає вищу кінематичну пару.

Для випадку впускного клапана поршневого двигуна внутрішнього згорання за час одного оберту кулачка відзначаються такі фази (рис. 6.68):

1) відкриття клапана для впуску робочого тіла, чому відповідає поворот кулачка на кут φ_n і ковзання вістря штовхача по дузі кола a_0a_1 ;

2) перебування клапана в нерухомого стані і найбільш віддаленому від центра O положенні, коли вістря штовхача переміщується по дузі a_1a_2 , що спирається на центральний кут $\varphi_{\delta c}$;

3) опускання клапана з верхнього положення в нижнє, при цьому вістря рухається по дузі $a_2a'_0$, а кулачок повертається на кут φ_0 ;

4) поворот кулачка на кут $\varphi_{\delta c}$ і ковзання вістря штовхача по дузі кола a'_0a_0 , коли штовхач зупинився і

перебуває в найнижчому положенні аж до співпадання вістря A з точкою a_0 профілю кулачка, після чого всі чотири фази повторюються у вказаному порядку.

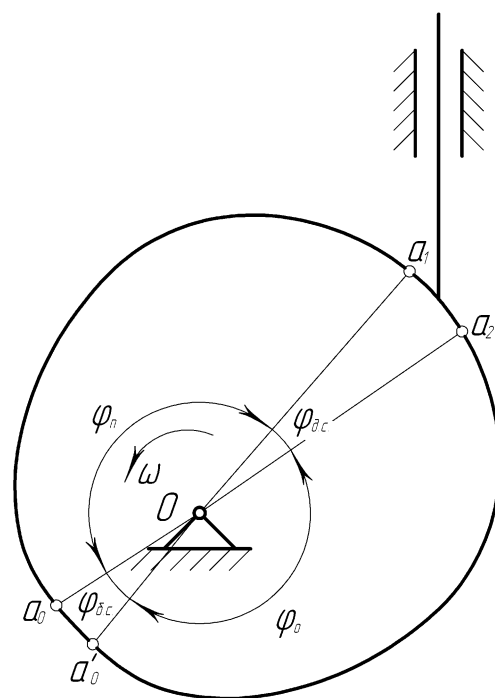


Рис. 6.68. Фази роботи кулачкового механізму в ДВЗ

Назва вказаних вище кутів повороту кулачка пов'язана з характером руху штовхача за час одного циклу: φ_n – кут підйому, $\varphi_{\delta c}$ – кут дальнього стояння, φ_0 – кут опускання, $\varphi_{\delta c}$ – кут ближнього стояння.

Позначивши час повороту кулачка для кожної фази буквою t з відповідним індексом, кути повороту можна виразити через кутову швидкість ω кулачка:

$$\varphi_n = \omega t_n, \quad \varphi_{\delta c} = \omega t_{\delta c}, \quad \varphi_0 = \omega t_0, \quad \varphi_{\delta c} = \omega t_{\delta c}.$$

Час одного циклу виражається за формулою

$$t = t_n + t_{\delta c} + t_0 + t_{\delta c}.$$

Робочий профіль $a_0 a_1 a_2 a'_0$ кулачка перебуває під вістрям штовхача протягом часу t_p , який називається робочим часом

$$t_p = t_n + t_{\delta c} + t_0.$$

При таких позначеннях робочий кут повороту кулачка дорівнює $\varphi_p = \varphi_n + \varphi_{\delta c} + \varphi_0$ і визначається із співвідношення $\varphi_p = 2\pi \frac{t_p}{t_0}$.

Зауважимо, що при $\varphi_{\delta c} = \varphi_{\delta c} = 0$ кулачковий механізм буде двофазним і штовхач буде здійснювати неперервний поступальний рух.

Вибравши ту чи іншу схему кулачкового механізму і закони руху штовхача та кулачка, які повинні відповідати операціям, що виконує механізм в складі машини, можна приступати до побудови профілю кулачка.

Задача кінематичного синтезу механізму обернена до задачі кінематичного аналізу. Тому зручно використати відомий метод обернення руху.

Нехай необхідно побудувати профіль кулачка центрального кулачкового механізму з роликовим штовхачем, який здійснює поступальний рух. При цьому повинні бути задані фазові кути повороту кулачка $\varphi_n, \varphi_{\delta c}, \varphi_0$, максимальний хід h штовхача, радіус основної шайби кулачка r_0 і радіус ролика R . Кулачок обертається з кутовою швидкістю $\omega = const$. Закон руху штовхача задається діаграмою $\bar{S} = \bar{S}(t) = \bar{S}(\varphi)$ (рис. 6.69).

Через довільно вибрану точку O (рис. 6.69) проводимо вісь штовхача OB . Так як штовхач містить ролик, то спочатку будуємо теоретичний профіль, для чого проводимо два концентричні кола: одне радіусом основної (теоретичної) шайби $R_1 = r_0 + R$, а інше максимальним радіусом кривої теоретичного профілю $R_2 = R_1 + h$. Як правило радіус ролика вибирається з умови $R \leq (0,4 \div 0,5)r_0$.

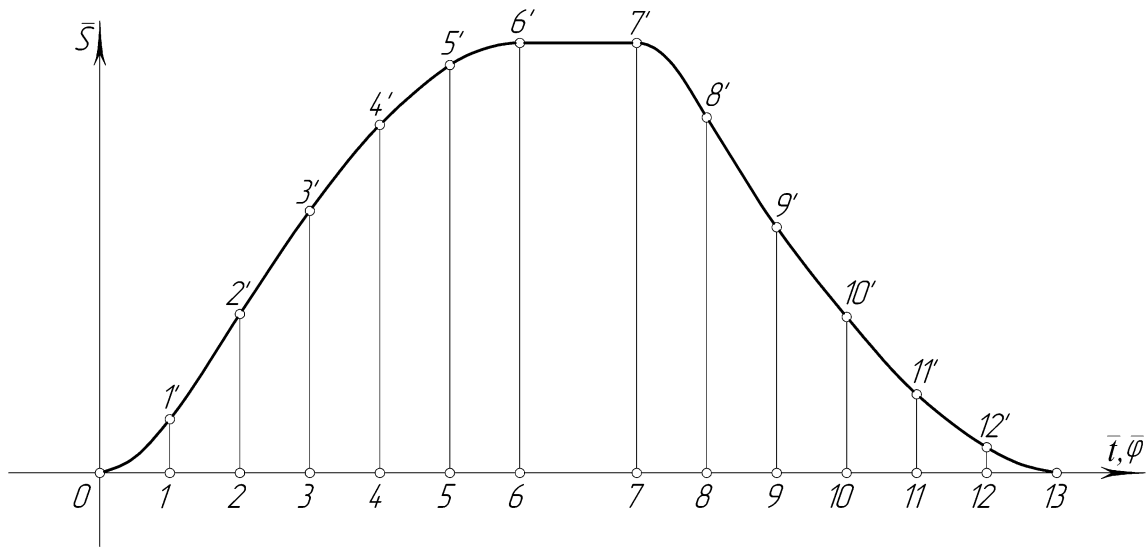


Рис. 6.69. Діаграма руху штовхача

Фазові кути повороту кулачка $\varphi_n, \varphi_{\delta c}, \varphi_0, \varphi_{\delta c}$ відкладаються в напрямку, протилежному напрямку обертання кулачка. Після цього дуги фазові кути φ_n, φ_0 ділимо на стільки рівних частин, скільки їх міститься на відповідних ділянках діаграми $(\bar{S}, \bar{\varphi})$.

Точки поділу $0, 1, 2, \dots, 6$ і $7, 8, \dots, 13$ сполучаємо прямими з центром O і одержуємо в перетині з колом радіусом R_1 точки $0', 1', 2', \dots, 13'$. Тепер необхідно на відрізках прямих, обмежених побудованими колами, відкласти відповідні ординати діаграми: наприклад, від точки $1'$ в напрямку точки 1 відкладемо відрізок $1'B_1$, який дорівнює ординаті $11'$ діаграми, від точки $2'$ – відрізок $2'B_2$ і т.д.

Побудовані точки B_1, B_2, \dots, B_{13} з'єднаємо плавною лінією, яка визначає теоретичний профіль кулачка.

Ділянки $6' - 7'$ і $13' - 0'$ обмежені дугами кіл радіусів R_2 і R_1 відповідно.

Дійсний, або практичний, профіль одержимо як обвідну лінію для всіх положень кіл ролика, проведених з центрів B_1, B_2, \dots, B_{13} (рис. 6.70).

В інженерній практиці для забезпечення безударної роботи кулачкового механізму задається не закон руху штовхача, а закон зміни його прискорення на ділянках підйому і опускання. Прискорення задається таким чином, щоб при набіганні веденої ланки на робочий профіль кулачка або при її збіганні сили інерції змінювалися плавно чи скачкоподібно. В таких випадках будуть відсутні жорсткі удари.

Кінематичні діаграми $(S, t), (V, t), (W, t)$ зв'язані між собою диференціальними залежностями (6.15), тому вибір однієї з них визначає характер решти.

В якості прикладу розглянемо задачу побудови профілю кулачка для центрального кулачкового механізму з роликом (рис. 6.70) для якого задано геометричні параметри R, r_0, h , фазові кути $\varphi_n = \varphi_0, \varphi_{\delta c}, \varphi_{\delta c}$ і закон зміни прискорення штовхача, який відповідає фазовому куту підйому.

Розв'язок задачі здійснюється у такій послідовності:

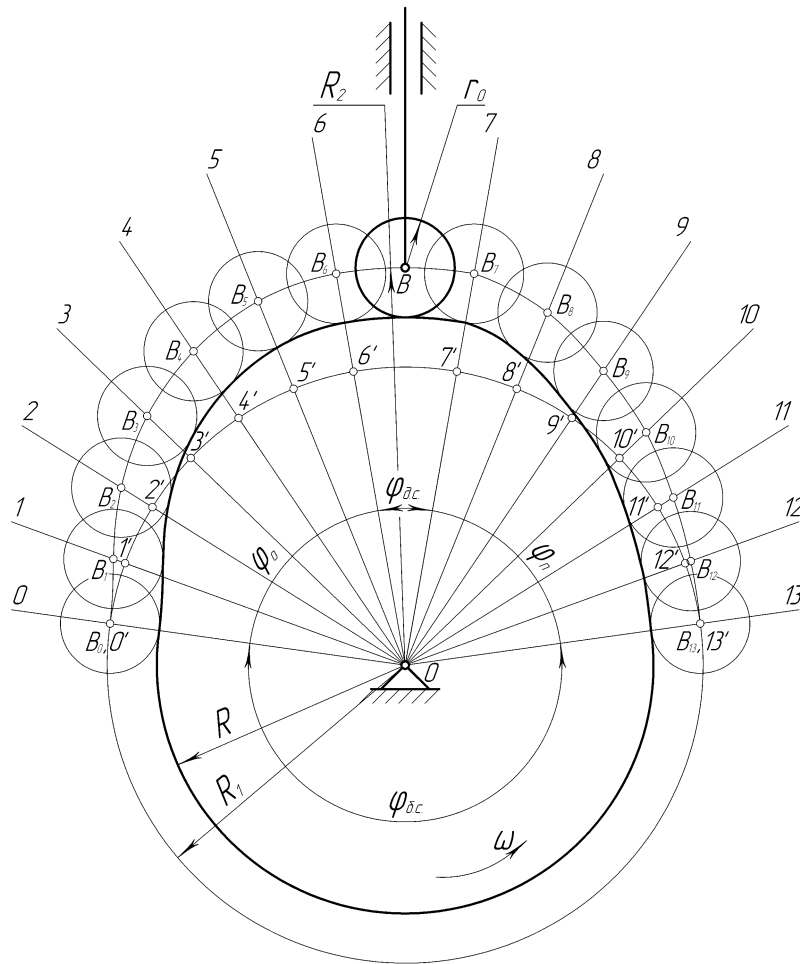


Рис. 6.70. Побудова профілю кулачка

1. Вибирається система координат якісної діаграми прискорення $\overline{W}, \overline{\varphi}(t)$. На горизонтальній осі абсцис відкладається кут повороту $\overline{\varphi}$ або час \overline{t} , який відповідає цьому куту. На вертикальній осі відкладається лінійне прискорення штовхача \overline{W} . Будується якісна діаграма $\overline{W} = \overline{W}(\overline{t}) = \overline{W}(\overline{\varphi})$.

2. Відрізок осі абсцис довжиною L , який відповідає куту $\overline{\varphi}_n$ ділимо на n рівних частин. Число n вибираємо кратним градусній мірі кута $\overline{\varphi}_n$.

3. Методом графічного інтегрування, який обернений до методу графічного диференціювання, будується діаграма лінійної швидкості штовхача $\overline{V} = \overline{V}(\overline{\varphi})$. Для цього зліва від початку системи відліку діаграми прискорення вибираємо полюс π на відстані H_w (мм). Для зручності подальших геометричних побудов приймаємо полюсну відстань кратною кроку кута підйому $\Delta\overline{\varphi} = \frac{\overline{\varphi}_n}{n}$.

Через точки діаграми $\overline{W} = \overline{W}(\overline{\varphi})$, які відповідають серединам кутових кроків проводимо горизонтальні прямі і знаходимо точки їх перетину з віссю ординат. Ці точки з'єднуємо з полюсом π .

Під діаграмою прискорення будується нова система відліку для діаграми швидкості $\overline{V} = \overline{V}(\overline{\varphi})$. Починаючи від початку нової системи координат, для кожного кроку кута послідовно будуються хорди, які паралельні відповідним променям, проведеним з точки π на діаграмі $\overline{W} = \overline{W}(\overline{\varphi})$. З'єднуючи

вершини побудованої ламаної плавною лінією, знаходимо діаграму швидкості штовхача $\bar{V} = \bar{V}(\bar{\varphi})$ на ділянці підйому.

Застосовуючи до діаграми $\bar{V} = \bar{V}(\bar{\varphi})$ метод графічного інтегрування, будується діаграма $\bar{S} = \bar{S}(\bar{\varphi})$. При цьому вимоги до полюсної відстані H_V між початком відліку і полюсом P такі ж, як і до H_W .

4. Визначається масштаб геометричних і фізичних величин на осях абсцис:

градусний масштаб кута

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_n}{L} \left(\frac{\ddot{\alpha} \ddot{\alpha} \ddot{\alpha}}{\dot{\alpha} \dot{\alpha}} \right);$$

масштаб часу

$$\mu_t = \frac{\varphi_n}{6n_1 L} \left(\frac{\ddot{n}}{\dot{n}} \right),$$

де n_1 – частота обертання кулачка.

5. Масштаби кінематичних характеристик руху штовхача на осях ординат визначаються за формулами:

масштаб переміщення

$$\mu_s = \frac{h}{y_{\max}} \left(\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}} \right),$$

де y_{\max} – максимальна ордината діаграми $\bar{S} = \bar{S}(\bar{\varphi})$;

масштаб швидкості

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H_V} \left(\frac{\dot{\alpha} / \ddot{n}}{\dot{\alpha}} \right);$$

масштаб прискорення

$$\mu_w = \frac{\mu_v}{\mu_t H_W} \left(\frac{\dot{\alpha} / \ddot{n}^2}{\dot{\alpha}} \right).$$

Результати графічного розв'язку задачі ілюструються на [рис. 6.70](#).

Побудова кінематичних діаграм руху штовхача на ділянці опускання здійснюється так само, як і на ділянці підйому.

Якщо діаграма відома $\bar{S} = \bar{S}(\bar{\varphi})$, то побудова профілю кулачка здійснюється так само, як в попередньому прикладі ([рис. 6.69](#)).

На [рис. 6.71](#) наведено графічну побудову профілю кулачка для центрального механізму з роликом.

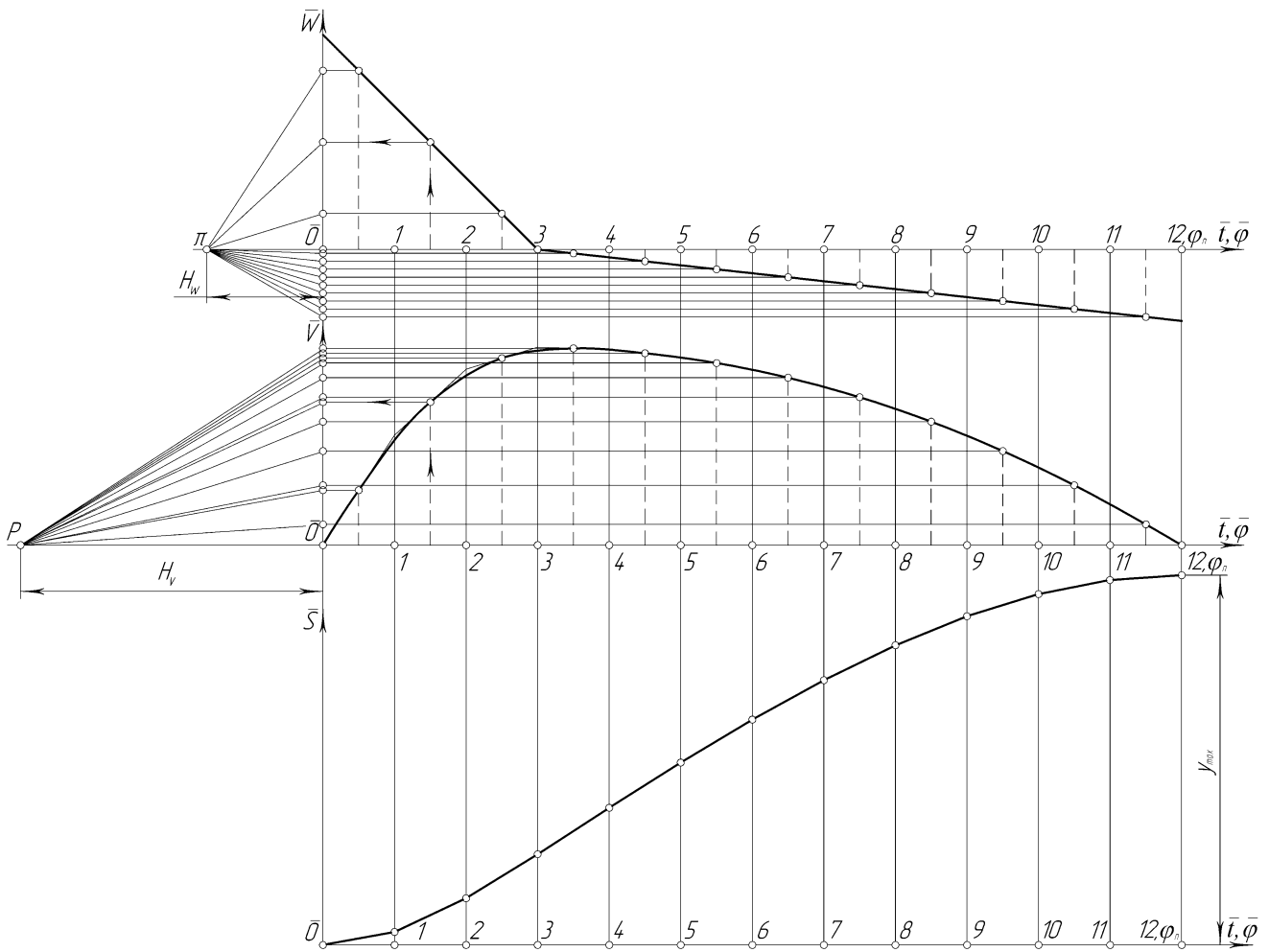


Рис. 6.70. Графічне інтегрування діаграми прискорення

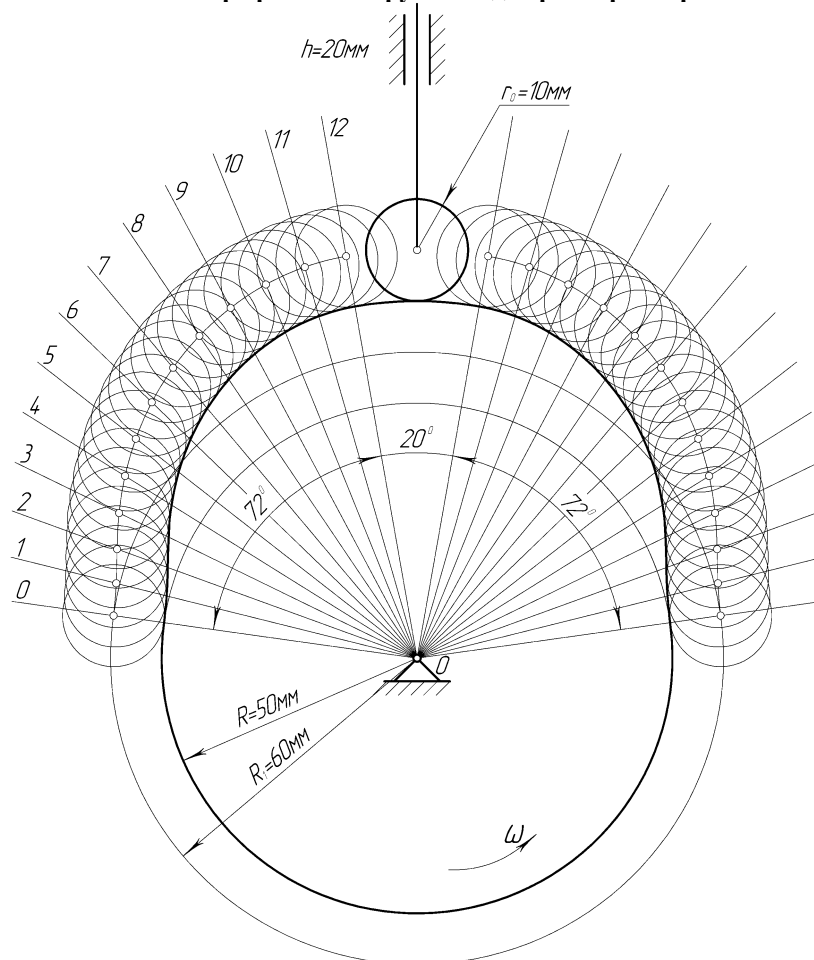


Рис. 6.71. Центральний кулачковий механізм з роликом

ЛІТЕРАТУРА

Старжинский В.М. Теоретическая механика / В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Наука, 1967. – 478 с.

Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шапиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 624 с.

Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко и др. – К.: Высшая школа, 1986. – 775 с.

Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1967 – 324 с.

Степин П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высшая школа, 1983. – 303 с.

Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов / С.П. Фесик. – К.: Строитель, 1982. – 280 с.