МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики

І.М. Присяжнюк, В.К. Столярчук,

О.В. Романів

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Курс лекцій, індивідуальних завдань і методичних вказівок до їх виконання для студентів стаціонарної форми навчання спеціальностей "прикладна математика" та "інформатика"

Рівне - 2008

Посібник містить курс лекцій, приклади розв'язання типових задач, тексти індивідуальних завдань з курсу "Функціональний аналіз", питання до екзамену.

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Петрівський Б.П.

Рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики, протокол №__від_____2008р.

ЗМІСТ

ВСТУП. КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функціональний аналіз – відносно молода галузь сучасної математики, яка виникла на рубежі XIX – XX ст. на стику лінійної алгебри, геометрії та математичного аналізу.

Гільберт Давид (1862-1943) німецький математик

Взагалі, початком самостійного існування функціональого аналізу можна вважати систематизовану побудову теорії операторів (Гільберт), і розвиток загальної теорії лінійних нормованих просторів (1918–1923р., український математик Стефан Стефанович Банах).

Історична довідка

Банах Степан, син горянки Катерини Банах та Гречека Степана, мешканця Краківського староства (30 березня 1892 — 31 серпня 1945).

Народився у Кракові, поляк. Після народження батько віддав його на виховання до сім'ї краківської прачки. Після закічення Краківської гімназії у 1910 р. вступив на факультет машинобудування Львівської політехнічної школи. У 1911 р. перевівся на факультет інженерії за спеціальністю «Сухопутна інженерія», де закінчив четвертий останній (1913—1914) навчальний рік. З 1920 до 1922 р. працював асистентом на кафедрі математики Львівської політехніки у професора А.Ломніцького. Опублікував ряд наукових праць. У 1920 р. здобув учений ступінь доктора філософії, а в 1924 р. був затверджений у вченому званні надзвичайного професора кафедри математики Львівського університету і обраний членом-

Стефан Банах

кореспондентом ПАН. У 1927 р. став звичайним професором. Один із творців сучасного функціонального аналізу, разом з Г. Штайнгаузом в 1929 р. організував видання відомого журналу «Studia mathematica».

Вивчені ним лінійні простори, що одержали назву "простори Банаха" мають велике значення для сучасної математики. Разом зі своїми учнями — С. Мазуром, В. Орличом, В. П. Шаудером — став одним із фундаторів (згодом — із світовим визнанням) Львівської математичної школи, в якій розроблено значну частину функціонального аналізу. Багато його результатів стали класичними і входять до підручників та монографій з функціонального аналізу. Деякі роботи стосуються теорії звичайних диференціальних рівнянь (Банахове середнє), теорії функцій комплексної змінної та ін. Основні твори (зокрема «Теорія лінійних операторів», «Диференційне та інтегральне числення») опубліковано польською, французькою та українською мовами. З 1939 р. — Голова Польського математичного товариства, член-кореспондент АН УРСР, лауреат великої премії ПАН. Працював деканом фізико-математичного факультету Львівського університету і одночасно перебував на керівній роботі в інституті АН УРСР (Львівська філія). Під час німецької окупації спочатку переховувався, а потім — аби якось прожити — вступив до протитифозного інституту Вейгля, де прославленого математика використовували як об'єкт ризикованих і принизливих для людської гідності медичних експериментів. У 1944 р. факультет ЛДУ: за сумісництвом завідував кафедрою теоретичної механіки ЛПІ. Його відкриття стали золотим фондом математики XX ст. Польське математичне товариство заснувало премію ім. С. Банаха. Похований на Личаківському цвинтарі.

Одним з основних понять функціонального аналізу є поняття *метричного простору.*

Метричний простір – множина об’єктів довільної природи, для яких введено поняття відстані між елементами (числами, n-дійсними числами, n-вимірними векторами, функціями, наборами функцій і т.д.).

Другим важливим поняттям функціонального аналізу є поняття *оператора*, яке є узагальненням поняття функції. Якщо числу у відповідність ставиться число, то це числова функція однієї змінної

($y = f(x)$); n-вимірному вектору ставиться у відповідність число, то це числова функція багатьох змінних ($y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$); для функції у відповідність ставиться число, то це функціонал ($y = \int_a^b x(t)dt$).

Якщо елементу довільної природи ставиться у відповідність елемент довільної (або відповідної) природи, то це *оператор відображення.*

Твердження функціонального аналізу носять загальний характер. В залежності від того, яким буде метричний простір і яким буде оператор, ми одержимо твердження з алгебри, геометрії чи математичного аналізу. Здобутки функціонального аналізу мають широке застосування в лінійній алгебрі, квантовій фізиці, хімії та в теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, обчислювальній математиці, дослідженні збіжних процесів, оцінок похибок.

МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Поняття границі – основне поняття математичного аналізу, за допомогою якого вводиться поняття похідної, інтеграла та ін. Саме поняття границі використовує поняття відстані між числами. Дійсно, той факт, що числова послідовність $\{x_n\} \to a$ означає, що $|x_n - a| \to 0$. Щоб ввести поняття границі для більш складніших об′єктів ніж число, потрібно означити поняття відстані між абстрактними об′єктами, що приводить до поняття метричного простору.

Означення. Множина об′єктів довільної природи $\{x,y,z,\dots\}$ називається *метричним простором*, якщо на цій множині визначено поняття відстані $\rho(x,y)$, яка будь-яким двом елементам x

та y ставить у відповідність число $\rho(x,y)$, яке задовольняє трьом аксіомам:

1. $\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x\equiv y$ – *рефлексивність відстані;*
2. $\rho(x,y)= \rho(y,x)$ – *симетричність відстані;*
3. $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+ \rho(z,y)$ – *нерівність трикутника.*

Метричний простір з множиною елементів X та заданою відстанню ρ, позначають (X,ρ).

Приклади метричних просторів.

1. Простір R^1 , X – елементами є дійсні числа, відстань визначається так:

$\rho(x,y)=|x-y|$.

Перевіримо, чи даний простір буде метричним. Для цього повинно виконуватись три аксіоми метрики.

а) $\rho(x,y)\geq 0$ – в силу властивостей модуля дійсного числа. Якщо $\rho(x,y)=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x\equiv y$. Якщо $x\equiv y$, то $\rho(x,y)= \rho(y,y)=|y-y|=0$.

Першу аксіому довели. Далі маємо:

б) $\rho(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|-1||y-x|=|y-x|=\rho(y,x)$.

в) $\rho(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y|\leq|x-z|+|z-y|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

2. Простір ізольованих точок. $\{x,y,z,\ldots\}$ – елементи довільної природи,

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

Виконання аксіом відстані перевірити самостійно.

3. Простір R^n , $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

Перевіримо три аксіоми метрики:

а) $\rho(x,y)\geq 0$ – випливає із властивостей квадрата числа, суми, та кореня квадратного.

Якщо $x=y$, то $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i)^2}=0$. Нехай $\rho(x,y)=0$, тоді $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$. Звідси слідує, що $x_i=y_i$ ($i=\overline{1,n}$), а це означає, що $x=y$. Перша аксіома доведена.

б) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}((-1)(y_i-x_i))^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\rho(y,x)$.

в) Доведемо нерівність трикутника, використовуючи для цього нерівність Коші-Буняковського:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Розглянемо квадрат відстані $\rho(x,y)$:

$(\rho(x,y))^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+$ $+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\le$ (до другого доданка застосуємо нерівність Коші-Буняковського) $\le\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2=$ $=(\rho(x,z)+\rho(z,y))^2$.

Отже, $(\rho(x,y))^2\le(\rho(x,z)+\rho(z,y))^2$. Оскільки права і ліва частини нерівності є невід'ємними, то квадрат можемо прибрати, тоді отримаємо нерівність трикутника.

4. Простір R_0^n, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1y_2,\dots,y_n)$, $\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$.

Доведемо третю аксіому:

$$|x_i-y_i|=|x_i-z_i+z_i-y_i|\le|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\le\max_i|x_i-z_i|+\max_i|z_i-y_i|$$

Дана нерівність виконується при будь-якому i, а отже і для максимуму. Матимемо:

$$\max_i|x_i-y_i|\le\max_i|x_i-z_i|+\max_i|z_i-y_i|.$$

5. Простір R_1^n із заданою відстанню $\rho(x,y)$ = $\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$. Аксіоми доводяться аналогічно до попередніх випадків. ($x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – елемент простору).

6. Простір l_2, елементами в якому є нескінчені послідовності виду $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ і виконується умова $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Відстань задається наступним чином: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$.

Перевіримо коректність введеної метрики, а саме, переконаємося, що ряд, який фігурує під знаком радикала, збіжний. Маємо, що: $(x_i - y_i)^2 \le 2\cdot(x_i^2 + y_i^2)$ і те, що ряди із загальними членами x_n^2 та y_n^2 – збіжні. Тоді і сума цих рядів збіжна. Звідси випливає, що і ряд із загальним членом у правій частині останньої нерівності ($(x_n - y_n)^2$) також збігається. Аксіоми відстані перевіряються так само, як це робилося для простору R^n.

7. Простір $C_{[a,b]}$ – простір неперервних функцій на відрізку $[a,b]$ елементом, якого є $x=x(t)$. Відстань вводиться наступним чином:

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$

Доведемо третю аксіому. Для будь-якого t є $[a,b]$ маємо: $|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \le$

$\le \max_t |x(t) - z(t)| + \max_t |z(t) - y(t)| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Знову ж, якщо така нерівність виконується для будь-якого t є $[a,b]$, то вона буде виконуватись і для $\max_t$, тобто: $\max_t |x(t) - y(t)| \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$, тим самим довели нерівність трикутника.

8. Простір C_L – простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій із відстанню $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt$.

Доведемо першу аксіому. $\rho(x,y)\ge 0$ в силу властивостей модуля числа та інтеграла. Нехай $x(t)=y(t)$, тоді $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\int\limits_a^b 0dt=0$.

Якщо $\rho(x,y)=0$, то міркуємо так: нехай існує точка t_0 в якій $x(t_0)\neq y(t_0)$ і $x(t_0)>y(t_0)$, тоді в силу неперервності функцій $x(t)$ і $y(t)$, $x(t)>y(t)$ в деякому околі t_0. Тоді матимемо, що $\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt>0$.

Прийшли до суперечності. Звідси слідує, що $x(t)$ має дорівнювати $y(t)$. Друга і третя аксіоми доводяться аналогічно до попередніх випадків.

9. Простір C_{L_2} – простір неперервних функцій на $[a,b]$, метрика якого вводиться так:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}.$$

Доведемо нерівність трикутника. Для цього скористаємося інтегральною нерівністю Коші-Буняковського:

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\cdot g(t)dt\right|\le\sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)dt}.$$

Маємо:

$$\rho(x,y)^2=\int\limits_a^b (x(t)-z(t))^2 dt+2\int\limits_a^b (x(t)-z(t))(z(t)-y(t))dt+\int\limits_a^b (z(t)-y(t))^2 dt\le$$

$$\le\int\limits_a^b (x(t)-z(t))^2 dt+2\cdot\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-z(t))^2 dt}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b (z(t)-y(t))^2 dt}+\int\limits_a^b (z(t)-y(t))^2 dt=$$

$$=\rho(x,z)^2+2\rho(x,z)\rho(z,y)+\rho(z,y)^2=(\rho(x,z)+\rho(z,y))^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з невід'ємних чисел, отримаємо нерівність трикутника.

10. Простір C_0 – елементами якого є нескінчені послідовності, що збігають до нуля: $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to 0$, $\rho(x,y)=\sup\limits_i |x_i - y_i|$.

Таке означення відстані є коректним, бо $|x_i - y_i| \le |x_i| + |-y_i|$. А оскільки послідовності $\{x_i\}$ і $\{y_i\}$ збігаються до нуля, то вони обмежені довільним числом. Тоді $|x_i - y_i|$, як величина обмежена, має супремум. Виконання аксіом відстані очевидне.

11. Простір C_m – x – довільна обмежена послідовність. $\rho(x,y)=\sup\limits_i |x_i - y_i|$, $|x_m| < m$. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити виконання аксіом метрики та коректність такого означення відстані

<u>Контрольні запитання.</u>

1. Дати означення метричного простору.
2. Дати означення метричних просторів ізольованих точок, R^0, l_2, $C_{[a,b]}$, C_l, C_{l_2}.
3. Записати нерівність Коші-Буняковського для інтегралів і вказати схему її доведення.
4. Чи можна в просторі $C_{[a,b]}$ відстань означити за формулою $\rho(x,y)=\min|x(t)-y(t)|$.
5. Які метричні простори вивчаються в курсі математики середньої школи, курсі лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії рядів Фур'є.

<u>Вправи.</u>

1. Перевірити аксіоми метрики для простору ізольованих точок.
2. Дано $\rho(x,y)=\sin^2|x-y|$, $x,y\in R$, чи буде $\rho(x,y)$ метрикою.
3. Дано простір $C_{[a,b]}$. Чи можна в ньому ввести відстань за формулою $\rho(x,y)=\min\limits_t |x(t)-y(t)|$.
4. Дано $x\in R$, $\rho(x,y)=\mathrm{arctg}|x-y|$. Чи буде $\rho(x,y)$ метрикою.

Розв'язання.

1. Дано $\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x=y\\ 1, \text{ якщо } x\neq y\end{cases}$.

Виконання першої і другої аксіом метрики очевидне. Перевіримо чи виконується аксіома трикутника $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

Припустиму протилежне, що дана нерівність не виконується. Це можливо тоді, коли в лівій частині буде одиниця $(x\neq y)$, а в правій частині – нуль, тобто $x=z$, $z=y$. Звідси випливає, що $x=y$. А це суперечить припущенню, що $x\neq y$.

2. Ні, не буде, тому що не виконується перша аксіома метрики. А саме: з того, що відстань рівна нулю, ще не випливає що $x=y$. (З рівності $\sin^2|x-y|=0 \Rightarrow \sin|x-y|=0 \Rightarrow (x-y)=k\pi,\ k\in Z,\ x-y=\pm k\pi,\ k\in Z,$ $x=\pm k\pi$).

3. Ні, тому, що не виконуватиметься перша аксіома метрики. Справді, взявши дві неперервні функції $x(t)$ і $y(t)$, які перетинаються, наприклад, в одній точці ми матимемо, що $\rho(x,y)=0$. Однак ці функції тотожно не співпадають.

4. Виконання першої і другої аксіом відстані очевидне. Доведемо нерівність трикутника:

$$\rho(x,y)=\mathrm{arctg}\ |x-y|=\mathrm{arctg}\ |x-z+z-y|\leq \mathrm{arctg}\ (|x-z|+(z-y)|\leq$$
$$\leq \mathrm{arctg}\ |x-z|+\mathrm{arctg}\ |z-y|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

(передостанню нерівність пропонуємо довести самостійно).

Задачі.

1. Перевірити аксіоми метрики для простору R_0^n, R_1^n, C_0, C_1, C_m.
2. $\rho(x,y)-$ метрика. Довести, що $\ln(1+\rho(x,y))$ також метрика.

3. Дано, що $\rho(x,y)$ – метрика. Довести, що $\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ також метрика.
4. Дано: $x\in R,\ \rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$. Перевірити аксіоми метрики.
5. Дано множину диференційованих функцій *x(t)*, $\rho(x,y)=\int_b^a|x(t)-y(t)|dt+\max_t|x'(t)-y'(t)|.$ Перевірити аксіоми метрики.
6. Дано $x\in R,\ \rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$. Перевірити виконання аксіом метрики.
7. Дано $x\in R,\ \rho(x,y)=\min\{1,|x-y|\}$. Перевірити виконання аксіом метрики.
8. Дано $x\in R,\ \rho(x,y)=\left|x^3-y^3\right|$. Чи буде $\rho(x,y)$ метрикою.
9. Дано $x\in[0,\infty),\ \rho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$. Чи буде $\rho(x,y)$ метрикою.
10. Дано $x\in l_2,\ \rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{n}$. Чи буде $\rho(x,y)$ метрикою.

ПОСЛІДОВНОСТІ В МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ. ЗБІЖНІСТЬ

Нехай маємо метричний простір (X,ρ).

Означення. Якщо кожному $n\in N$ взятому в порядку зростання, поставлено у відповідність елемент $x_n\in(X,\rho)$, то кажуть, що *задано послідовність* $\{x_n\}$ в цьому просторі.

Приклади.

$R^1:\left\{\frac{1}{n}\right\};$

$R^m:\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_m^{(n)}\right\};$

$C_{[a,b]}: \{x^n\}, x \in [0,1].$

Тут m – розмірність простору, n – загальний член послідовності.

Означення. Елемент a, який належить простору (X,ρ) називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,$ що як тільки $n \geq N$, то $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Теорема 1. Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Доведення. Припустимо, що існує дві границі a та b тоді

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1, n \geq N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon;$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2, n \geq N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon;$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$, якщо $n > N$, то обидві нерівності виконуються одночасно. Тоді маємо: $\rho(a,b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \leq 2\varepsilon$, а це означає , що $\rho(a,b) = 0$, в силу довільності ε. Отже $a = b$.

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ у метричному просторі має границю, то ця послідовність обмежена.

Доведення. Дійсно, якщо послідовність має границю, то це означає, що $\rho(x_n, a) \to 0, n \to \infty$. Але $\rho(x_n, a)$ – числова послідовність і вона має границю рівну нулю, отже обмежена, тобто існує M, що $\rho(x_n, a) \leq M$, що і означає обмеженість, бо всі елементи послідовності знаходяться всередині кулі з центром в точці a і радіусом M.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ з метричного простору (X,ρ) називається *фундаментальною* або *послідовністю Коші*, або *збіжною в собі*, якщо для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,$ що як тільки $n, m > N$, то $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Теорема 3. Якщо послідовність в метричному просторі має границю, то будь-яка її підпослідовність також має границю.

Теорема 4. Якщо послідовність має границю, то вона фундаментальна.

Доведення. Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists N,\ що\ при\ n \geq N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$, і нехай $m \geq N \Rightarrow \rho(x_m, a) < \varepsilon$

Оцінимо, $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, а це і є умовою фундаментальності.

Теорему доведено.

Зауваження. Обернене твердження невірне, хоч для числових послідовностей воно справедливе.

Збіжність у метричних просторах.

Збіжність послідовностей у метричних просторах ще називається збіжністю за відстанню (якщо $x_n \to a$ при $n \to \infty$, то відстань між цими елементами прямує до нуля, $\rho(x_n, a) \to 0$). В кожному конкретному просторі цю збіжність можна охарактеризувати більш змістовно.

Теорема 5. Для того, щоб послідовність $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\} \in R^m$ прямувала до граничного елемента $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ необхідно і достатньо, щоб числові послідовності координат прямували до відповідних координат елемента a.

Доведення. Необхідність. Дано, що послідовність прямує до елемента a за відстанню. Це означає, що для $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N,\ n \geq N,$ то

$\rho(x_n, a) = \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(n)} - a_2\right)^2 + ... + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \varepsilon$. Звідки випливає:

$$\left|x_1^{(n)} - a_1\right| < \varepsilon,$$
$$\left|x_2^{(n)} - a_2\right| < \varepsilon,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\left|x_m^{(n)} - a_m\right| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що останні нерівності дістанемо, міркуючи від супротивного. Якби, наприклад, перший вираз був би меншим ε, то в квадраті він був би меншим ε^2, отримали б суперечність. Останні нерівності означають, що:

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1, ..., \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m \ .$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай числові послідовності координат мають границі. Тоді $\forall \varepsilon > 0$:

$\exists N_1, n > N_1$, то $\left|x_1^{(n)} - a_1\right| < \varepsilon$;

$\exists N_2, n > N_2$, то $\left|x_2^{(n)} - a_2\right| < \varepsilon$;

…. …. …. …. …. …. ….

$\exists N_m, n > N_m$, то $\left|x_m^{(n)} - a_m\right| < \varepsilon$;

Візьмемо $N=\max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$, тоді як тільки $n>N$, то всі нерівності виконуватимуться одночасно. Будемо мати:

$\rho(x_n, a) = \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{m}$, $\sqrt{m}$ – стале.

В силу довільного ε це означає, що відстань прямує до нуля, що і доводить достатність.

Теорему доведено.

У просторі R^m ми ввели такі три метрики: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$;

$R_0^m : \rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$;

$R_1^m : \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$.

<u>Теорема 6.</u> У просторі R^m усі три метрики еквівалентні в тому розумінні, що із збіжності послідовності за однією метрикою випливає збіжність за двома іншими метриками.

<u>Доведення.</u> Розглянемо послідовність в просторі R^m $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ і нехай вона збігається за метрикою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$. Покажемо збіжність за двома іншими

метриками: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N,\ n \geq N : \rho(x_n, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^{(n)} - a_i)^2} < \varepsilon,$ звідки випливає, що: $\sum_{i=1}^{m}(x_i^{(n)} - a_i)^2 < \varepsilon^2;\quad (x_i^{(n)} - a_i)^2 \leq \varepsilon^2,\quad \left|x_i^{(n)} - a_i\right| \leq \varepsilon;\ i = \overline{1,m}$. Остання нерівність виконується для будь-якого i, тому і для максимуму: $\max_i \left|x_i^{(n)} - a_i\right| < \varepsilon$ (отримали метрику в просторі R_0^m). Але тоді $\sum_{i=1}^{m}\left|x_i^{(n)} - a_i\right| < \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon = m\varepsilon$, що й доводить збіжність послідовності в простір R_1^m. Аналогічно доводяться два інші випадки.

Теорему доведено.

Теорема 7. У просторі l_2 із збіжності послідовності за відстанню випливає збіжність за координатами.

Доведення. $a=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m,\ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$. Нехай маємо послідовність $x_n = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, \ldots)\}$ і нехай ця послідовність збігається за відстанню.

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N,\ n > N : \rho(x_n, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(n)} - a_i)^2} < \varepsilon,$$

тоді $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(n)} - a_i)^2 < \varepsilon^2;\quad \left|x_i^{(n)} - a_i\right| < \varepsilon$ для будь-якого i. Остання нерівність означає, що числові послідовності координат збігаються до відповідних координат елемента a.

Зауваження. Обернене твердження не завжди справедливе, тобто із покоординатної збіжності не завжди випливає збіжність за відстанню.

Теорема 8. У просторі $C_{[a,b]}$ збіжність за відстанню рівносильна рівномірній збіжності.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n(t)\} \to x_0(t)$. Згідно метрики цього простору це означає, що $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N,\quad n \geq N:$

$\rho(x_n, x_0) = \max_t |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Оскільки записана нерівність виконується при $\max_t$, то вона буде виконуватись $\forall t \in [a,b]$, тобто справедливою буде умова $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, а це є умовою рівномірної збіжності.

Нехай тепер послідовність функцій збігається до граничної функції рівномірно. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ n \geq N$, то $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in [a,b]$, тоді це виконуватиметься і для $\max_t |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Околи точок у метричному просторі та зв′язані з ними поняття.

Нехай маємо метричний простір (X,ρ).

Означення 1. *Відкритою кулею* з центром у точці x_0 і радіусом R називається множина точок метричного простору, яка задовольняє нерівність $\rho(x, x_0) < R$. Якщо має місце, ще і рівність, то куля замкнена.

Приклад. Для простору R^3 – це буде внутрішність сфери, дійсно $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2} < R$, $x_0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ – центр кулі, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – біжучі координати. Для R^2 кулею буде внутрішність круга радіуса R. Для R^1 кулею буде інтервал. Для простору $C_{[a,b]}$ відкритою кулею буде смуга.

Означення 2. *ε – околом* точки x_0 називається відкрита куля з центром в точці x_0 і радіусом ε.

Означення 3. Точка x_0 називається *точкою дотику* множини E, якщо в будь-якому її околі є принаймні одна точка множини.

Означення 4. Множина всіх точок дотику зветься *замиканням* множини E, і позначають $[E]$.

Означення 5. Точка x_0 називається *ізольованою* точкою множини E, якщо існує окіл цієї точки, який не містить жодної точки множини, окрім заданої.

Означення 6. Точка x_0 зветься *граничною* точкою для множини E, якщо в будь-якому її околі є нескінченна кількість точок множини E.

Означення 7. Точка x_0 називається *внутрішньою* точкою множини E, якщо вона належить множині E разом з деяким своїм околом.

Означення 8. Множина E називається *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні.

Означення 9. Множина E називається з*амкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Означення 10. Множина CE називається *доповненням* множини E до всього простору, якщо всі її точки належать простору і не належать множині E.

Означення 11. Множина A називається *щільною* в множині B, якщо замикання A включає B ($[A] \supset B$).

Означення 12. Множина A називається *скрізь щільною*, якщо її замикання співпадає з всім простором.

Якщо множина A щільна у всьому просторі, то будь-який елемент простору ми можемо як завгодно точно наблизити елементами множини A.

Означення 13. Метричний простір зветься *сепарабельним*, якщо він містить в собі зчисленну скрізь щільну підмножину.

Простір R^n – сепарабельний. Щільною підмножиною цього простору очевидно будуть все можливі набори n-раціональних чисел.

В теорії наближень функцій добре відома теорема Вейєрштрасса про те, що будь-яку неперервну функцію $f(x)$ на сегменті $[a,b]$ можна як завгодно точно наблизити алгебраїчним многочленом виду:

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n(x): \max_x \left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon .$$

Щільною підмножиною у просторі $C_{[a,b]}$ буде множина алгебраїчних многочленів з раціональними коефіцієнтами. Ця множина зчисленна.

<u>Теорема 9.</u> Для того, щоб множина Е була відкритою, необхідно і достатньо, щоб її доповнення було замкненим.

<u>Доведення.</u> Необхідність. Дано множину *E*, яка є відкритою, доведемо що *CE* замкнена, тобто містить всі свої граничні точки. Нехай точка *x* – гранична точка доповнення. Доведемо, що вона належить доповненню. Ця точка не може належати множині *E*, бо якби належала, то разом з деяким своїм околом (так як *E* – відкрита). А цього бути не може, оскільки в будь-якому околі *x* має знаходитись нескінчена кількість точок доповнення до *E*. Необхідність доведена.

Достатність. Дано, що *CE* – замкнена. Доведемо, що *E* – відкрита, тобто всі її точки внутрішні. Нехай *x* – деяка точка множини *E*, вона не може бути граничною точкою доповнення (чому?), отже існує окіл, який не містить жодної точки доповнення, тоді цей окіл належить множині *E*.

Теорему доведено.

<u>Контрольні запитання.</u>

1. Дати означення граничної точки, точки дотику, замикання множини.
2. Дати означення відкритої та замкненої множини.
3. Дати означення скрізь щільної множини та сепарабельного простору.
4. Дати означення границі послідовності в метричному просторі, порівняти дане означення з означенням границі числової та векторної послідовностей

5. Охарактеризувати збіжність послідовностей в просторі R^n, l_2, $C_{[a,b]}$.

Вправи.

1. Дано множину $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$. Знайти граничні точки, точки дотику, межу та замикання даної множини.
2. Побудувати щільну підмножину в просторі l_2.
3. Довести сепарабельність простору $C_{[a,b]}$.
4. Довести, що з існування границі послідовності в довільному просторі випливає її обмеженість в цьому просторі.

Розв'язання.

1. Граничною точкою цієї множини буде точка 1, тому що в будь якому околі її є нескінченна кількість точок даної множини. Точками дотику будуть всі точки множини і точка 1. Ці точки складатимуть замикання і межу множини.

2. Такою підмножиною буде множина елементів із простору l_2, у яких скінчена кількість перших координат відмінні від 0, а інші координати є нулі. Справді, кожен елемент із простору l_2 у цьому випадку ми можемо як завгодно точно наблизити елементом із щільної підмножини l_2^*:

$x=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots\} \in l_2$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in l_2$,

$$\rho(x, x^*) = \sqrt{(x_1 - x_1^*) + (x_2 - x_2^*) + \ldots + (x_n - x_n^*) + (x_{n+1} - 0) + (x_{n+2} - 0) + \ldots} .$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ збіжний, то його залишок можна зробити як завгодно малим.

3. Щоб довести сепарабельність простору $C_{[a,b]}$ достатньо показати, що в цьому просторі існує замкнена скрізь щільна

підмножина. За теоремою Вейєрштрасса для будь-якої неперервної функції $x(t)$, яка неперервна на сегменті $[a,b]$ існує алгебраїчний многочлен степеня n який як завгодно точно наближає дану функцію. Тоді ясно, що можна підібрати алгебраїчний многочлен з раціональними координатами, який як завгодно точно наближатиме функцію $x(t)$. Таких многочленів буде зчисленна множина. А це і доводить сепарабельність простору $C_{[a,b]}$.

4. Маємо, що послідовність $\{x_n\}$ має границю в довільному метричному просторі (X,ρ). Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує такий N, що при $n \geq N$ виконується нерівність $f(x_n,a)<\varepsilon$, тобто $f(x_n, a) \to 0$, коли $n \to \infty$, але числова послідовність, яка має границю є обмеженою, тобто існує число $N > 0$, що $\rho(x_n,a) \leq N$. Одержали, що всі члени послідовності знаходяться в абстрактній кулі з центром в точці а і радіусом N, що і доводить обмеженість даної послідовності.

<u>Задачі.</u>

1. Дано множину $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$. Знайти граничні точки, точки дотику та замикання даної множини.
2. Навести приклади скрізь щільних множин, побудувати щільну підмножину в просторі l_2.
3. Довести сепарабельність простору R^n, $C_{[a,b]}$.
4. Довести, що для того, щоб множина Е була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення до всього простору було замкнене.
5. Довести, що збіжність за відстанню у просторах R_0^n, R_1^n – рівносильна збіжності за координатами.

6. Довести, що послідовність, яка має границю в довільному просторі є обмеженою.
7. Довести, що з існування границі послідовності в довільному просторі випливає її фундаментальність.
8. Довести, що три метрики в просторах R_0^n, R_1^n, R^n еквівалентні між собою.
9. Записати околи точок у просторах R^3, R^2, R^1, $C_{[a,b]}$ і зобразити їх на рисунку.
10. Побудувати абстрактну кулю більшого радіуса, яка міститься в середині кулі меншого радіуса.
11. Довести, що для того, щоб точка X була граничною точкою необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність X_n яка б прямувала до X.
12. Дано $M=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$. Довести що M – гранична точка множини E.
13. Довести, що послідовність $U_n(x)=\left\{\dfrac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}\right\}$ рівномірно збігається до $U(x)=1$ на сегменті $[0,1]$. Чи буде вона рівномірно збігатися по всій числовій осі.
14. Дослідити на рівномірну збіжність $\{x^n\}$ для $x\in[0,1]$.
15. Довести теорему Больцано-Вейєрштрасса в просторах R^3, R^2.
16. Показати, що з рівномірної збіжності послідовності функцій $\{X_n(x)\}$ випливає її збіжність за відстанню в просторі C_{L_2}. Чи справедливе обернене твердження?
17. Довести, що із збіжності послідовності за відстанню простору l_2 випливає покоординатна збіжність. Чи справедливе обернене твердження?

ВІДОБРАЖЕННЯ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Границя і неперервність. Критерій неперервності.

Нехай маємо два метричних простори (X,ρ_x), (Y,ρ_y) і множину $E\subset(X,\rho_x)$.

<u>Означення.</u> Якщо кожному елементу $x\in E\subset\left(X,\rho_x\right)$ поставлено у відповідність цілком певний елемент y із простору (Y,ρ_y), то кажуть, що задано *відображення* множини Е в простір (Y,ρ_y) та позначають: $y=f(x)$, або $y=Ax$.

Поняття відображення є узагальненням поняття функції. Це може бути числова функція однієї змінної, багатьох змінних, функціонал. У функціональному аналізі відображення, яке елементу довільної природи x ставиться у відповідність елемент довільної природи y, прийнято ще називати оператором.

<u>Приклади.</u>

1) $R^1\to R^1:\ y=\sin x$;

2) $R^n\to R^1:\ y=f(x_1,x_2,...,x_n)$;

3) $C_{[a,b]}\to R^1:\ y=\int\limits_a^b x(t)dt$ – функціонал;

4) $R^n\to R^m:\ \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n+b_m; \end{cases}$

5) $C_{[a,b]}\to C_{[a,b]}:\ x(t)\to x'(t)$;

6) Розглянемо многочлен Бернштейна: $B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$. Це відображення кожній неперервній функції $f(x)$ ставить у відповідність многочлен Бернштейна. Функція $f(x)$ задається на сегменті [0,1]. Особливість многочлена Бернштейна в тому, що він може наблизити як завгодно точно будь-яку неперервну функцію $f(x)$ на [0,1].

За рахунок степеня многочлена n, можна досягти того, що різниця між функцією $f(x)$ і многочленом Бернштейна буде як завгодно мала.

Нехай x_0 – гранична точка множини E, і вона не обов'язково належить множині E, яка входить у простір (X,ρ_x).

<u>Означення (за Коші).</u> Елемент A, який належить простору (Y,ρ_y) називається *границею* відображення $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, таке що, як тільки $\rho(x, x_0) < \delta$, то $\rho(f(x), A) < \varepsilon$.

<u>Означення (за Гейне).</u> Елемент A називається *границею* відображення $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо із збіжності будь-якої послідовності $\{x_n\} \to x_0$ випливає збіжність відповідної послідовності значень відображення $f(x_n)$ до A. (Тут збіжність розуміється як збіжність за відстанню).

Нехай тепер відображення визначене в точці x_0.

<u>Означення.</u> Відображення $y = f(x)$ називається *неперервним у точці* x_0, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, що як тільки $\rho(x, x_0) < \delta$, то $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

<u>Означення.</u> Відображення $y = f(x)$ називається *неперервним в точці* x_0, якщо із збіжності будь-якої послідовності $\{x_n\} \to x_0$ випливає збіжність $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$.

Якщо відображення взаємооднозначне, то для нього існує обернене відображення.

<u>Означення.</u> Взаємнооднозначне і неперервне відображення називається *гомеоморфізмом*.

<u>Означення.</u> Гомеоморфне відображення називається *ізометрією*, або *ізоморфізмом*, якщо воно зберігає відстань між образами.

<u>Теорема (критерій неперервності)</u>. Щоб відображення $y = f(x)$ було неперервним необхідно і достатньо, щоб прообраз $f^{-1}(G)$ був відкритим для всякої відкритої множини G, яка входить в Y.

Доведення. Необхідність. Дано, що відображення $y = f(x)$ – неперервне і множина $G \subset Y$ – відкрита. Треба довести, що $f^{-1}(G)$ – відкрита, тобто всі її точки внутрішні. Нехай $x_0 \in f^{-1}(G)$, $y_0 = f(x_0) \in G$. Покажемо, що точка x_0 належить множині $f^{-1}(G)$ разом з своїм околом. Оскільки y_0 є внутрішньою точкою множини G, то існує $\varepsilon > 0$, що куля $B(y_0, \varepsilon) \subset G$. В силу неперервності відображення по заданому ε ми знайдемо таке $\delta > 0$, що як тільки x попадає в кулю $B(x_0, \delta)$, то y попадає в кулю $B(y_0, \varepsilon)$. Ясно, що куля $B(x_0, \delta)$ належить множині праобразів $f^{-1}(G)$, це означає, що $x_0 \in f^{-1}(G)$ разом із деяким своїм околом, а це означає, що $f^{-1}(G)$ є відкритою множиною (в силу довільності вибраної точки x_0).

Достатність. Дано $f^{-1}(G)$ – відкрита куля, для будь-якої відкритої множини $G \in Y$. Доведемо неперервність відображення. Нехай x_0 – довільна точка множини $f^{-1}(G)$ і нехай $y_0 = f(x_0)$. Для $\forall \varepsilon > 0$ розглянемо кулю $B(y_0, \varepsilon) \subset G$. За умовою образ даної кулі: $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))-$ є відкрита множина, тобто всі її точки внутрішні, а отже і точка x_0, це означає, що знайдеться таке $\delta > 0$, що куля $B(x_0, \delta)$ попаде в кулю $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$, а це і означає неперервність даного відображення у точці x_0 за Коші.

Теорему доведено.

Зв'язність та її збереження при неперервному відображенні.

Означення. Множина E називається *зв'язною*, якщо її не можна подати у вигляді об'єднання двох відкритих множин, що не перетинаються.

Теорема. Образ зв'язної множини при неперервному відображенні є множина зв'язна.

Доведення. Дано $G \subset (X, \rho)$ – зв'язна. Треба довести $f(G) \subset Y$ –

зв'язна. Нехай $f(G)=E$ – не зв'язна, і її подано у вигляді об'єднання двох відкритих множин, які не перетинаються. Позначимо їх через E_1 та E_2. Але за критерієм неперервності прообраз множини E_1 – відкрита множина, і прообраз E_2 – також відкрита. Позначимо їх G_1 та G_2, вони не будуть перетинатися (в силу неперервності відображення). Тобто множину праобразів ми подали у вигляді об'єднання двох відкритих множин, що не перетинаються , а це суперечить тому, що G – зв'язна. Отже образ $f(G)$ – є множина зв'язна.

Теорему доведено.

Контрольні запитання.

1. Дати означення відображення множини $E\subset\left(X,\rho_x\right)$ у простір $\left(Y,\rho_y\right)$.
2. Дати означення неперервності відображень та гомеоморфізму.
3. Сформулювати критерій неперервності.
4. Сформулювати теорему про зв'язність образу при неперервному відображенні.
5. Дати означення рівномірної неперервності відображення.

Вправи.

1. Навести приклади відображень з простору R^1 в R^1; з R^2 в R^1; з $C_{[a,b]}$ в R^1; з $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$.
2. Дано оператор Фредгольма $Ax(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, причому всі функції, які тут фігурують неперервні на замкнених множинах. Довести неперервність даного відображення.
3. Чи буде неперервним відображення A простору $C_{[0,1]}$ в себе, що діє за формулою $Ax(t)=a(t)x(t)$, де $a(t)$ – задана неперервна функція.

4. Дана функція $f(x)=\sqrt{x+4}$. Довести на мові “$\delta-\varepsilon$” неперервність функції в точці x=5.

Розв’язання.

1. Прикладами таких відображень можуть бути відображення: $y=\sin x$, $z=x^2+y^2$, $y=\int_a^b x(t)dt$, $y(x)=x_0(t)x(t)$, де $x_0(t)$ – фіксована функція, а $x(t)$ – довільна.

2. Доведемо неперервність відображення за Гейне, тобто на мові послідовностей. Нехай маємо послідовність неперервних функцій $x_n(s)$, які прямують до x(s) в тому розумінні, що $\max_S|x(s)-x_n(s)|\to 0$, при $n\to\infty$. Тоді

$$|Ax(t)-Ax_n(t)|=\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-x_n(s))ds\right|\le\int_a^b M\cdot|x(s)-x_n(s)|ds=$$

$$=M\max_S|x(s)-x_n(s)|(b-a)\to 0\text{, при } n\to\infty,\ (M=\max|K(t,s)|).$$

Неперервність відображення доведена.

3. Дане відображення буде неперервним. В цьому можна переконатись точно так само, як це було зроблено в попередньому прикладі.

4. В точці x=5 функція визначена: $f(5)=3$. Задамо $\varepsilon>0$. Складемо різницю $f(x)-f(5)=\sqrt{x+4}-3$, оцінимо її за модулем. При $\delta>0$ для значень x, які задовольняють нерівності $|x-5|<\delta$, буде також виконуватись нерівність:

$$\left|\sqrt{x+4}-3\right|=\frac{|x-5|}{\left|\sqrt{x+4}+3\right|}<\frac{|x-5|}{3}<\frac{\delta}{3}.$$

Якщо тепер покласти $\delta=3\varepsilon$, то при значеннях x, для яких $|x-5|<3\varepsilon$, буде виконуватись нерівність $\left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon$.

Неперервність функції при x=5 доведена.

Задачі.

1. Навести приклади відображень: R^1 в R^1; з R^n в R^1; з R^n в R^n; з $C_{[a,b]}$ в R^1; з $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$; з R^1 в R^n.
2. Довести за означенням на мові “$\delta-\varepsilon$” неперервність функції $y=x^2$ в точці x_0.
3. Довести що функції $y=x$ і $y=\sin x$ рівномірно неперервні на всій числовій осі.
4. Довести, що функція $y=\dfrac{1}{x}$ неперервна на інтервалі $[0,1]$, але не є рівномірно неперервною на цьому проміжку.
5. Навести приклад неперервного відображення, яке не є гомеоморфізмом.
6. Довести неперервність числової функції $\rho(x,y)$ в будь-якому метричному просторі.
7. Довести неперервність векторної функції $y=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$ числового аргументу t, якщо координатні функції $\varphi_n(t)$ неперервні.
8. Довести неперервність відображення:

$-\ y=x(t_0),\ x(t)\in C_{[a,b]},\ t_0$ – фіксована точка сегменту $[a,b]$.

$-\ y=\int\limits_a^b x(t)dt,\ \ x(t)\in C_{[a,b]}$.

$-\ y=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx$, де $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ – довільний вектор,

$a=(a_1,a_2,...,a_n)$ – фіксований вектор.

$$-\ \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+b_1 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n=a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{nn}x_n+b_n \end{cases};$$

Тут матриця коефіцієнтів (a_{ij}) і стовпець вільних членів (b_s), $(i=1,2,...,n)$ задані, $(x_1, x_2,..., x_n)$ змінний довільний вектор x.

ПОВНОТА МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

В математичному аналізі фундаментальну роль відіграє критерій Коші збіжності числової послідовності (для того щоб послідовність була збіжна необхідно і достатньо щоб вона була фундаментальна). Цей критерій характеризує повноту метричного простору R , або числової прямої (на числовій осі немає дірок). Але цей критерій перестає бути справедливим в довільному просторі.

Приклад. Дійсно нехай маємо проміжок (0,1). Відстань задамо так: $\rho(x,y)=|x-y|$. Розглянемо послідовність: $\left\{\frac{1}{n}\right\},\ n\in N$. Очевидно, що при $n\to\infty$, границею нашої послідовності буде нуль, але нуль не належить нашому простору.

Розглянемо інший приклад: множину раціональних чисел і послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, при $n\to\infty$ границею цієї послідовності буде число e, яке є ірраціональним.

Означення. Метричний простір (X,ρ) називається *повним*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в цьому просторі має границю.

Приклад. Дослідимо на повноту простір (X,ρ), $X\subset N$, $\rho(x,y)=|x-y|$. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність складену із елементів такого простору. Такою послідовністю тут може бути така послідовність: скінчена кількість перших n членів послідовності буде довільними елементами, а починаючи з $(n+1)$-го, якийсь один із елементів повторюватиметься (інших випадків не може бути). Границею такої послідовності буде очевидно елемент, що повторюватиметься, він належатиме простору N, отже такий простір повний за означенням.

В математичному аналізі важливу роль відіграє теорема Кантора про систему вкладених і стискуючих сегментів, довжини яких прямують до нуля, яка стверджує, що така система має одну спільну точку. Цей факт виражає факт повноти числової прямої. Аналогічну роль відіграє теорема про вкладені одна в одну кулі.

<u>Теорема 1.</u> Будь-яка система вкладених одна в одну замкнених куль радіуси, яких прямують до нуля, мають в повному метричному просторі не порожній перетин.

<u>Доведення.</u> Дано:

1) Послідовність вкладених куль $B_1(x_1,r_1)\supset B_2(x_2,r_2)\supset\ldots\supset B_n(x_n,r_n)\supset\ldots$,

2) Кулі B_i – замкнені,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$,

4) Простір повний.

Довести, що кулі мають не порожній перетин. Розглянемо послідовність центрів куль $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ця послідовність буде фундаментальною. Справді, при $n\to\infty$ і $m>n$, $\rho(x_n,x_m)<r_n \to 0$, що означає фундаментальність. В силу повноти простору ця послідовність має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Покажемо що x належить всім кулям. Дійсно, x є граничною точкою для кожної кулі, бо в будь-якому її околі міститься нескінченна кількість точок кожної з куль. В силу замкненості куль, x належатиме кожній кулі, а значить належить перетину.

<u>Теорема 2.</u> Замкнений підпростір повного простору повний.

<u>Доведення.</u> Дано (X,ρ) – повний простір і $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$ – замкнений. Довести (Y,ρ) – повний. Розглянемо довільну

фундаментальну послідовність $\{y_n\}\subset(Y,\ \rho)\subset(X,\ \rho)$. Простір (X,ρ) – повний простір, отже ця послідовність має в ньому границю: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y\ \in\left(X,\rho\right)$. Але y – гранична точка множини $(Y,\ \rho)$, а $(Y,\ \rho)$ – замкнений, значить містить всі свої граничні точки, $y\in(Y,\rho)$.

Теорему доведено.

Повнота деяких важливих метричних просторів.

Теорема 1. Простір R^n – повний.

Доведення. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність у цьому просторі $\left\{(x_1^{(m)},x_2^{(m)},...,x_n^{(m)})\right\}$. Отже, $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ N$, що як тільки $m,k > N$, то $\rho(x^{(m)},x^{(k)})<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{(x_1^{(m)}-x_1^{(k)})^2+.....+(x_n^{(m)}-x_n^{(k)})^2}<\varepsilon\Rightarrow$ $|\,x_1^{(m)}-x_1^{(k)}\,|<\varepsilon,\ldots,\ |\,x_n^{(m)}-x_n^{(k)}\,|<\varepsilon$, а це є умови фундаментальності послідовностей відповідних координат в просторі R^1, але простір R^1 – повний, тому будуть існувати границі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(m)} = x_1^{\,*}, \ldots,$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(m)} = x_n^{\,*}$.

Складемо елемент простору R^n $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, який і буде границею нашої фундаментальної послідовності (оскільки в цьому просторі по координатна збіжність рівносильна збіжності за відстанню).

Теорему доведено.

Теорема 2. Простір $C_{[a,b]}$ – повний.

Доведення. Нехай $\{\,x_n(t)\,\}$ – довільна фундаментальна послідовність. Для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N$, $n,m>N$, $\rho(x_n(t),x_m(t))=\max\limits_t\left|x_n(t)-x_m(t)\right|<\varepsilon$. Обґрунтуємо існування границі даної послідовності. Зафіксуємо $t_0\in[a,b]$, одержимо числову послідовність $\{x_n(t_0)\}$, яка буде фундаментальною, і тому в цьому просторі вона матиме границю $x(t_0)$. Оскільки t_0 ми вибрали довільно, то буде існувати границя при $\forall t \in [a,b]$. Позначимо її через $x(t)$.

Перейшовши в нерівності $\max\limits_t |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ до границі, коли $m \to \infty$, дістанемо $\max\limits_t |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$. Остання нерівність означає, що $x_m(t)$ прямує до граничної функції рівномірно. Тоді за відомою теоремою з математичного аналізу $x(t)$ неперервна.

Теорему доведено.

<u>Теорема 3.</u> Простір l_2 – повний.

<u>Доведення.</u> Розглянемо в цьому просторі довільну фундаментальну послідовність $\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...)\}$. Причому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{\ 2} < \infty$ – збіжний. Запишемо умову фундаментальності: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ n, m > N$:

$$\rho(x_n, x_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|\, x_1^{(n)} - x_1^{(m)} \,| < \varepsilon,$$

....

$$|\, x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \,| < \varepsilon,$$

....

Останні нерівності означають, що числові послідовності координат фундаментальні. Але простір R^1 – повний, тому існують границі:

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1,$$

....

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k,$$

....

Складемо такий вектор $x = (x_1, x_2, ...x_k, ...)$. Він і буде границею вихідної фундаментальної послідовності.Для цього достатньо показати, що

1) послідовність $\{x_n\} \to x$ за метрикою даного простору;

2) $x \in l_2$, тобто ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2$ – збіжний.

Доведемо коротко перший факт.

Оскільки послідовність фундаментальна, то справедливою буде нерівність: $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)})^2 < \varepsilon^2$, для $\forall \varepsilon > 0$ і такого N, що $n,m > N$. Тоді для $\forall M \in N$ будемо мати: $\sum_{k=1}^{M} (x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)})^2 < \varepsilon^2$. Здійснимо граничний перехід при $m \to \infty$, і будемо мати: $\sum_{k=1}^{M} (x_k{}^{(n)} - x_k)^2 < \varepsilon^2$. Оскільки M – довільне, матимемо: $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^{(n)} - x_k)^2 < \varepsilon^2$, а це і означає, що вибрана послідовність прямує до граничного вектора: $x = (x_1, x_2, \dots x_k, \dots)$.

Доведемо другий факт, а саме що $x \in l_2$, тобто ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2 < \infty$ – збіжний. Використаємо нерівність $(a-b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$. Поклавши $a = x_k^{(n)}$, $b = x_k^{(n)} - x_k$, і, підставивши їх в нерівність, отримаємо: $x_k^2 \le 2(x_k^{(n)2} + (x_k^{(n)} - x_k)^2)$. Ряди, членами яких є $x_k^{(n)2}$ та $(x_k^{(n)} - x_k)^2$ є збіжними, звідси слідує, що ряд членами, якого є x_k^2 також буде збіжним, а це означає, що граничний елемент $x \in$ l_2. Отже, l_2– повний.

Теорему доведено.

Означення. Метричний простір R^* називається *поповненням* простору R, якщо виконується три умови:

1. Простір $R^* \supset R$,
2. R всюди щільний в просторі R^*,

3. R^* – повний.

<u>Теорема.</u> Усякий неповний метричний простір R можна поповнити, і причому єдиним чином.

Контрольні запитання.

1. Дати означення повного метричного простору.
2. Сформулювати теорему про вкладені кулі.
3. Довести, що замкнений підпростір повного простору – повний.
4. Довести повноту просторів: R^n, l_2, $C_{[a,b]}$.
5. Сформулювати теорему про поповнення простору.

Вправи.

1. Дано множину натуральних чисел $\rho(x,y)=|x-y|$. Довести, що даний простір повний.
2. Дано множину натуральних чисел N, $\rho(m,n)=\frac{(m-n)}{mn}$. Довести, що даний простір не повний.
3. Дано множину ірраціональних чисел I_{pp}, $\rho(x,y)=|x-y|$. Дослідити цей простір на повноту.
4. Дослідити на повноту простір R_1^n.

Розв'язання.

1. Розглянемо у даному просторі довільну фундаментальну послідовність натуральних чисел. Вона обов'язково матиме таку структуру: скінченна кількість перших її членів буде довільними натуральними числами, а починаючи з деякого номера одне з натуральних чисел буде повторюватись, інакше послідовність не буде фундаментальною. Тоді ясно, що це натуральне число яке повторюється і буде границею послідовності.

2. Даний простір не є повним. Щоб це довести, достатньо вказати хоч одну фундаментальну послідовність, яка в цьому просторі не матиме границі. Такою послідовністю буде послідовність натуральних чисел 1,2,3…,n,… Справді, ця послідовність за даною метрикою буде фундаментальною, бо вираз $\frac{|m-n|}{mn}$ можна зробити як завгодно малим при достатньо великих m і n. Однак ця послідовність не матиме границі. Бо якби така границя існувала і дорівнювала б натуральному числу a, то ми мали б, що $\rho(m,a)=\frac{|m-a|}{ma}\to 0$. Насправді ж, наприклад при $m>a$ маємо $\frac{|m-n|}{mn}=\frac{|m-a|}{ma}=\frac{1}{a}-\frac{1}{m}=\frac{1}{a}\neq 0$ при $m\to\infty$.

3. Даний простір не є повним, тому що, наприклад, фундаментальна послідовність $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ірраціональних чисел у цьому просторі не має границі. (Послідовність прямує до нуля, який не є ірраціональним числом).

4. Розглянемо в цьому просторі довільну фундаментальну послідовність $\{(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_m^{(n)})\}$. Це означає, що для будь якого $\varepsilon>0$ існує номер N такий, що при $n,k\geq N$, виконується нерівність $f(x^n,x^k)=\sum_{i=1}^{m}\left|x_i^{(n)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon \;\Rightarrow\; \left|x_i^{(n)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon$ i=1,2,...,m. Це означає, що числові послідовності координат фундаментальні. Але простір R^1 – повний, так що ці числові послідовності матимуть границі: $\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$, i=1,2,...,m. Складемо вектор $x=(x_1,x_2,...,x_m)$. Він і буде границею вихідної послідовності, бо збіжність за відстанню у просторі R_1^n рівносильна покоординатній збіжності.

<u>Задачі.</u>

1. Довести повноту просторів R_1^n, R_0^n.
2. Довести, що простір ізольованих точок повний.
3. Дослідити на повноту C_L, C_{L_2}.
4. Дано $x \in (0,1)$, $\rho(x,y) = |x-y|$. Дослідити даний простір на повноту.
5. Дано множину Q раціональних чисел, $\rho(x,y) = |x-y|$. Дослідити даний простір на повноту.
6. Дано множину I_{pp} числової осі, $\rho(x,y) = |x-y|$. Дослідити даний простір на повноту.
7. Дослідити на повноту сегмент $[a,b]$ якщо $\rho(x,y) = |x-y|$.
8. Довести, що підпростір функцій *f(x),* які належать простору $C_{[a,b]}$ і які задовольняють умові $A \le f(x) \le B$ повний.
9. Дано множину неперервних функцій, які мають неперервні похідні, причому $\rho(f,g) = \sup|f(x) - g(x)| + \sup|f'(x) - g'(x)|$. Довести, що даний простір повний.
10. Дано метричний простір (X,ρ): $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, сума $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k| < \infty$, $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|$. Довести, що простір повний.

ТЕОРЕМА БАНАХА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Існує багато теорем пов’язаних з існуванням розв’язку рівнянь ($F(x)=0$, диференціальних рівнянь, інтегральних, СЛАР), які можуть бути доведені з єдиної точки зору: шляхом доведення існування нерухомої точки деякого відображення.

<u>Означення.</u> Точка x зветься *нерухомою точкою* відображення метричного простору (X,ρ) в себе, якщо справедливою є рівність $Ax = x$.

Означення. Відображення $y = Ax$ метричного простору (X,ρ) в себе зветься *стискуючим*, або просто *стиском*, якщо існує таке число α: $0 \le \alpha < 1$, що виконується нерівність: $\rho(Ax, Ay) \le \alpha \cdot \rho(x, y)$. Тобто відстань між образами не перевищує відстань між прообразами.

Теорема. Усяке стискуюче відображення є неперервним.

Доведення. Доведення проведемо на мові послідовностей, тобто за Гейне. Нехай $\{x_n\}$ – довільна послідовність, яка збігається до елемента x_0. Тобто $\rho(x_n, x_0) \to 0$, при $n \to \infty$. Запишемо умову стиску: $0 \le \alpha < 1$, $\rho(Ax_n, Ax_0) < \alpha\rho(x_n, x_0)$. При $n \to \infty$, $\rho(x_n, x_0) \to 0$, отже $\alpha\rho(x_n, x_0) \to 0$, звідки вираз у лівій частині теж прямує до нуля, що означає, що послідовність $\{Ax_n\} \to \{Ax_0\}$. Звідки слідує неперервність відображення.

Терема доведена.

Теорема (Банаха). Усяке стискуюче відображення, яке переводить повний простір (X,ρ) в себе, має в цьому просторі одну і тільки одну нерухому точку *x*, або що те саме, що рівняння $Ax = x$ має єдиний корінь *x*.

Доведення. Дано: (X,ρ) – повний простір; $Ax \subset (X,\rho)$ – відображення в себе;
$\rho(Ax, Ay) \le \alpha \cdot \rho(x, y)$, $0 \le \alpha < 1$ – стискуюче відображення.

Треба довести, що існує елемент $x \in (X,\rho)$, такий що $Ax = x$.

Нехай x_0 – довільна точка з простору (X,ρ). Побудуємо послідовність таким чином:

$x_1 = Ax_0$,

$x_2 = Ax_1$,

....

$x_n = Ax_{n-1}$.

Отримали в просторі (X,ρ) деяку послідовність $\{x_n\}$. Покажемо, що така послідовність є фундаментальною. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $n<m$. Оцінимо:

$$\rho(x_n,x_m)=\rho(Ax_{n-1},Ax_{m-1})\le\alpha\rho(x_{n-1},x_{m-1})=\alpha\rho(Ax_{n-2},Ax_{m-2})\le\alpha^2\rho(x_{n-2},x_{m-2})\le..$$
$$...\le\alpha^m\rho(x_{n-m},x_0),$$
$\alpha^m\to 0$, коли $m\to\infty$.

Невідомою залишається поведінка другого множника. Оскільки простір метричний, то ми можемо використати нерівність трикутника:

$$\rho(x_{n-m},x_0)\le\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_{n-m})\le\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+...+\rho(x_{n-m-1},x_{n-m}).$$

Оцінимо кожен доданок починаючи з другого даної нерівності:

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(Ax_0,Ax_1)<\alpha\rho(x_0,x_1),$$

$$\rho(x_2,x_3)=\rho(Ax_1,Ax_2)<\alpha\rho(x_1,x_2)<\alpha^2\rho(x_0,x_1),$$

Аналогічно будемо мати:

$$\rho(x_3,x_4)<\alpha^3\rho(x_0,x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho(x_{n-m-1},x_{n-m})<\alpha^{n-m-1}\cdot\rho(x_0,x_1).$$

Далі очевидно:

$$\rho(x_n,x_m)\le\alpha^m\rho(x_0,x_1)(1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{n-m-1})\le\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\cdot\rho(x_0,x_1).$$

Оскільки $\alpha^m\to 0$, коли $m\to\infty$, а $\dfrac{\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}$ є якась фіксована стала, то і весь вираз у правій частині при $m\to\infty$ теж прямує до нуля. Це означатиме, що наша послідовність є фундаментальною. Оскільки простір у нас повний, то фундаментальна послідовність матиме в цьому просторі границю: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Покажемо, що x буде нерухомою точкою відображення, тобто $Ax=x$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, а $x_n=Ax_{n-1}$. Відображення A є неперервним, отже якщо $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то Ax_{n-1} буде прямувати до Ax, тобто матимемо, що $Ax = x$ при $n \to \infty$, що й означає, що x – нерухома точка відображення.

Покажемо, що ця точка єдина.

Нехай існує y, таке що $Ay = y$, тоді матимемо, що $\rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y)$. Отже ми отримали, що: $\rho(x,y) \le \alpha\rho(x,y)$, це можливо лише тоді, коли $\rho(x,y)$=0. Оскільки простір метричний, тоді за першою аксіомою метрики слідує, що $x \equiv y$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. В процесі доведення теореми Банаха ми не тільки довели існування нерухомої точки, а й вказали спосіб її наближеного відшукання. Цей метод носить назву методу послідовних наближень. Кінцевий результат не залежить від вибору нульового наближення x_0. Цей факт з обчислювальної точки зору представляє значний інтерес, бо кожне з наступних наближень ми можемо прийняти за x_0, що не дасть накопичуватись похибкам, які будуть залежати від початкового наближення.

Зауваження 2. На практиці обчислення припиняють на якомусь кроці. Тоді виникає питання, як оцінити похибку між точним результатом і наближеним. Скористаємось нерівністю, яку отримали в процесі доведення теореми:

$\rho(x_n, x_m) = \dfrac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$, при $m \to \infty$ матимемо: $\rho(x_n, x) = \dfrac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$. Дана оцінка показує, що послідовні наближення збігаються до точного розв'язку із швидкістю геометричної прогресії.

Найпростіші застосування теореми Банаха.

Нехай є рівняння $x = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна функція однієї змінної, визначена на $[a,b]$ і її значення не виходять за межі сегмента $[a,b]$ (матимемо відображення в себе). Крім того $[a,b]$ є повним простором, як замкнений підпростір повного простору. Нехай виконується умова стиску, тобто: $\left|f(x_2)-f(x_1)\right| \le \alpha \cdot \left|x_2-x_1\right|$, $0 \le \alpha < 1$. Отже існуватиме єдиний корінь рівняння $x=f(x)$, який можемо знайти методом послідовних наближень. Зауважимо, що умова стиску, яку важко перевірити на практиці, буде виконуватися, якщо $f(x)$ має похідну, таку що: $|f'(x)|<M<1$. Дійсно, використавши теорему Лагранжа матимемо: $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, $c\in[x_1,x_2]$. Тоді взявши по модулю ліву та праву частини, отримаємо: $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|=\left|f'(c)\right|\cdot\left|x_2-x_1\right| \Rightarrow \left|f'(c)\right|<1$. Розглянемо складніший випадок рівняння: $F(x)=0$. Вихідне рівняння еквівалентне такому рівнянню: $-\lambda F(x)=0$. Додамо до обох частин по x: $x-\lambda F(x)=x$, отримали рівняння $f(x)=x$ із попереднього випадку. Вимагатимемо, щоб виконувався стиск, було відображення в себе, і щоб простір був повний (простір R^1 – повний). Вимагатимемо щоб: $\left|\left(x-\lambda F(x)\right)'\right|<1$, тобто $\left|1-\lambda F'(x)\right|<1$,

$$-1<1-\lambda F'(x)<1, \Rightarrow$$

$$-2<-\lambda F'(x)<0 \Rightarrow 0<\lambda F'(x)<2 \Rightarrow \lambda<\frac{2}{\max\limits_x F'(x)}.$$

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n. \end{cases}$$

Поставимо задачу розв’язати систему рівнянь в якої замість y_i стоятимуть x_i, $i=\overline{1,n}$.

По-перше, R^n – простір повний. По-друге, маємо відображення в себе ($R^n \to R^n$). По-третє, вияснимо виконання умови стиску, яка залежатиме від метрики простору R^n. Нехай маємо простір R_0^n, тоді:

$\rho(x'',x') = \max_i |x_i''-x_i'|$, відповідно матимемо: $\rho(y'',y') = \max_i |y_i''-y_i'|$.

Маємо:

$$\rho(y'',y') = \max_i |y_i''-y_i'| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j''-x_j') \right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j''-x_j'| \le$$

$$\le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_j |x_j''-x_j'| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \rho(x'',x').$$

Отже умова стиску буде такою: $\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$. Аналогічно доводяться умови стиску для просторів R_1^n: $\alpha = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$, R^n: $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2}} < 1$.

При виконанні однієї з трьох умов стиску, розв'язок системи можна знайти за теоремою Банаха. За нульове наближення можна прийняти стовпець вільних членів: $x^0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Підставивши його у систему отримаємо перше наближення. Продовжуючи цей процес отримаємо послідовність наближень, яка прямує до точного розв'язку. Для того щоб отримати наближення з певною точністю користуються оцінкою: $\rho(x,x_n) < \dfrac{\alpha^m}{1-\alpha} \cdot \rho(x_0,x_1)$.

Застосування теореми Банаха для доведення існування і єдності розв'язку задачі Коші диференціального рівняння $y' = f(x,y)$.

Нехай маємо диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$. Відомо, що воно має безліч розв'язків, які залежать від деякого параметра *c*. Розв'язок, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$ називається частковим. Відшукання часткового розв'язку такого диференціального рівняння звуть задачею Коші. Розв'язати її важко, інколи точно взагалі неможливо. Тоді розв'язують наближено. Але при цьому треба бути впевненим, що розв'язок існує і єдиний. Це доводиться за допомогою теореми Банаха.

<u>Теорема.</u> Нехай маємо рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$, де функція $f(x, y)$ – визначена і неперервна в деякій області D, що містить точку (x_0,y_0), і задовольняє в цій області умову Ліпшиця по змінній y: $\forall y_1, y_2 \in D$ $\left| f(x, y_2) - f(x, y_1) \right| \le M \left| y_2 - y_1 \right|$. Тоді існує такий сегмент $\left| x - x_0 \right| \le \alpha$ на якому існує єдина функція $y = y(x)$, яка є розв'язком вихідного рівняння і задовольняє початкову умову.

<u>Доведення.</u> Спочатку доведемо еквівалентність вихідного диференціального рівняння з початковою умовою та інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.

Нехай $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, (1).

Проінтегруємо це рівняння в межах від x_0 до x, вважаючи $y(x)$ неперервною.

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

$$y(t)\Big|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt;$$

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad (2).$$

Тепер нехай $y(x)$ є розв'язком рівняння (2). Оскільки $f(x, y)$ – неперервна і $y(t)$ – неперервна, то їх суперпозиція також є неперервною. Тоді можемо взяти похідну від інтеграла з верхньою змінною межею, і отримаємо: $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$.

Доведемо існування розв'язку інтегрального рівняння. Оскільки $f(x, y)$ неперервна в D, то буде неперервною і в деякій замкненій

$\overline{D}$, $\overline{D} \subset D$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса $f(x,y)$ буде обмеженою деяким числом k в $\overline{D}$: $|f(x,y)| < k$. Підберемо α, яке фігурує в умові теореми, так щоб:

1) $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| \le k\alpha$, то $(x,y) \in \overline{D}$

2) $M\alpha < 1$, M – константа з умови Ліпшиця.

Розглянемо простір C^*, елементами якого є неперервні функції $\varphi(x)$ на сегменті $|x - x_0| \le \alpha$, які задовольняють умову $|\varphi(x) - y_0| \le k\alpha$.

Розглянемо в цьому просторі C^* оператор $\psi = A\varphi$, $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$.

Покажемо, що до цього оператора може бути застосована теорема Банаха, яка забезпечує існування нерухомої точки цього оператора, або що те саме розв'язку інтегрального рівняння (2), а отже і еквівалентного йому рівняння (1). Перевіримо виконання умов теореми Банаха.

1. Простір C^* – повний, як замкнений підпростір повного простору $C_{[a,b]}$.

2. Маємо відображення в себе, дійсно: $\psi(x)$ – неперервна, як суперпозиція неперервних функцій. Крім того:

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \right| < \left| \int\limits_{x_0}^{x} k dt \right| = k\,|x - x_0| \le k\alpha .$$

3. Перевіримо умову стиску:

$$|\psi_2(x) - \psi_1(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_2(t))dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))dt \right| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| M dt \right| \le$$

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} \max_t |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| M dt \right| = M\rho(\varphi_1, \varphi_2) \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| = M\rho(\varphi_1, \varphi_2)|x - x_0| \le M\alpha\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Нерівність виконується для всіх x, то і для $\max\limits_x$ теж:

$\rho(\psi_1,\psi_2) \le M\alpha\rho(\varphi_1,\varphi_2)$. В припущенні, що $M\alpha < 1$, умова стиску виконується. Всі три умови теореми Банаха виконуються, отже існує нерухома точка оператора $\psi = A\varphi$.

Зауваження. В умові теореми фігурує умова Ліпшиця, її важко перевірити на практиці, тому замінюють простішою, а саме вимагають, щоб $f'_y(x,y)$ була неперервною, тоді за теоремою Веєрштрасса $\left|f'_y(x,y)\right| \le M$; $\left|f(x,y_2) - f(x,y_1)\right| = \left|f'_y(x,c)\right|\left|y_2 - y_1\right|$, $\left|f(x,y_2) - f(x,y_1)\right| \le M\left|y_2 - y_1\right|$.

Зауваження. В цьому методі наближений розв'язок наближається до точного розв'язку із швидкістю геометричної прогресії. Тут справедлива оцінка:

$\left|y(x) - y_n(x)\right| \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\left|y_1(x) - y_0(x)\right|$, для, будь-якого x. Крім того, в процесі обчислень не накопичуються похибки.

Застосування теореми Банаха для доведення існування задачі Коші нормальної системи диференціальних рівнянь.

Система виду:

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x\ , y_1, y_2 \ldots\ldots y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n(x) = f_n(x\ , y_1, y_2 \ldots\ldots y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

називається нормальною системою диференціальних рівнянь. Тут кожне рівняння розв'язане відносно похідної. Маємо n рівнянь з n невідомими функціями $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нехай маємо початкові умови:

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = y_{01}, \\ &y_2(x_0) = y_{02}, \qquad\qquad (1^*) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n(x_0) = y_{0n}, \end{aligned}$$

Система функцій $y_1(x),...,y_n(x)$ на деякому проміжку зміни x називаються розв'язком системи (1), якщо при підстановці в цю систему ми одержимо тотожності.

Відшукання розв'язків $y_1, y_2,..., y_n$, які задовольняють умови (1*) називається задачею Коші. Розв'язати цю задачу важче ніж попередню.

<u>Теорема.</u> Нехай маємо нормальну систему диференціальних рівнянь виду (1) з умовами (1*), де функції f_i $(i=\overline{1,n})$ визначені і неперервні в просторі R^{n+1}, який містить точку $(x_0, y_1,..., y_n)$, і f_i задовольняють умову Ліпшиця у формі

$$\left| f_i(x, y_1^{(2)}, y_2^{(2)},..., y_n^{(2)}) - f_i(x, y_1^{(1)}, y_2^{(1)},..., y_n^{(1)}) \right| \le M \max_i \left| y_i^{(2)} - y_i^{(1)} \right|,$$

$M>0$. Тоді існує сегмент $|x-x_0| \le \alpha$, на якому існують функції $y_1, y_2,..., y_n$, які є розв'язками нормальної системи (1) і задовольняють (1*).

Схема доведення. Аналогічно до попередньої теореми, спочатку замінюємо нормальну систему диференціальних рівнянь з початковими умовами еквівалентною системою інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{01} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1, y_2,..., y_n)dt, \\ .... \\ y_n(x) = y_{0n} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1, y_2,..., y_n)dt. \end{cases}$$

Введемо оператор $\psi = A\varphi$, який розписують так:

$$\psi_1(x) = y_{01} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, \varphi_1,..., \varphi_n)dt, \ldots, \psi_n(x) = y_{0n} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, \varphi_1,..., \varphi_n)dt,$$

який набору функцій $\varphi_1,..., \varphi_n$ ставить у відповідність $\psi_1,..., \psi_n$. Набір функцій $(\varphi_1(x),..., \varphi_n(x))$ визначений на деякому сегменті $|x-x_0| \le \alpha$, належать деякому підпростору неперервних функцій. Далі застосуємо до оператора теорему Банаха. Для цього переконаємось, що виконується три умови теореми:

1. Підпростір, на якому задані функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ повний, як замкнений підпростір повного простору.
2. Доводимо, що тут є відображення в себе.
3. Доводимо, що маємо оператор стиску.

Таким чином за теоремою Банаха існує нерухома точка даного оператора, тобто існує такий набір функцій $(y_1(x),..., y_n(x))$, образом якого є такий же набір функцій $(y_1(x),..., y_n(x))$, а це означає, що система інтегральних рівнянь має єдиний розв'язок, а саме $(y_1(x),..., y_n(x))$. Тоді і вихідна система диференціальних рівнянь теж має єдиний розв'язок, який задовольняє початковим умовам.

Застосування теореми Банаха до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II-го роду.

Інтегральним рівнянням Фредгольма II-го роду назвемо рівняння виду $\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x)$, де $K(x,t)$ – ядро, неперервна в деякому замкненому прямокутнику $[a,b;c,d]$ функція (відома), $f(x)$ – вільний член, неперервна функція, $\lambda -$параметр (дійсне чи комплексне число), $\varphi(x)$ – неперервна невідома функція.

Знайдемо $\varphi(x)$ методом послідовних наближень. Розглянемо оператор $\psi = A\varphi$.

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x),\ \varphi(x) \to \psi(x),\ \varphi(x) \subset C_{[a,b]}.$$

Перевіримо умови теореми Банаха:

1) Простір неперервних функцій заданих на $[a,b]$ є повним.

2) Маємо відображення в себе.

3) $|\psi_2(x)-\psi_1(x)| = |\lambda|\left|\int_a^b K(x,t)(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))dt\right| \le |\lambda|\int_a^b |K(x,t)||\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|dt \le$

$$\le |\lambda| M\int_a^b \max_t |\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|dt = |\lambda| M\rho(\varphi_1,\varphi_2)|b-a|.$$

Оскільки $K(x,t)$ неперервна в замкненому прямокутнику, то за теоремою Вейєрштрасса вона є обмежена, тобто $|K(x,t)|\le M$. Нерівність має місце $\forall x\in[a,b]$, отже виконується і для максимального. $\rho(\psi_1,\psi_2)\le|\lambda|M|b-a|\rho(\varphi_1,\varphi_2)$. Вимагатимемо, щоб $|\lambda|M|b-a|<1$, щоб виконувалася умова стиску. Підберемо λ, так щоб $|\lambda|<\dfrac{1}{M|b-a|}$.

Застосування теореми Банаха до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Гамерштейна

Це рівняння виду $\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt+f(x)$. Очевидно, що це рівняння є складнішим за рівняння Фредгольма, бо невідома функція входить в ядро. Будемо вважати, що $K(x,t,\varphi(t))$ – неперервна, як функція трьох змінних (x,t,z) і задовольняє по z умову Ліпшиця:
$|K(x,t,z_2)-K(x,t,z_1)|\le M|z_2-z_1|$, $f(x)$– неперервна. Розглянемо оператор $\psi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt+f(x)$, $\psi=A\varphi$.

Перевіримо виконання умов теореми Банаха:

1. $C_{[a,b]}$ – повний.
2. Відображення в себе.
3. Стиск:

$$\left|\psi_2(x)-\psi_1(x)\right| = |\lambda|\left|\int_a^b K(x,t,\varphi_2) - K(x,t,\varphi_1)dt\right| \le |\lambda|\int_a^b \left|K(x,t,\varphi_2) - K(x,t,\varphi_1)\right|dt \le$$

$$\le |\lambda| M \int_a^b \left|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\right|dt \le |\lambda| M |b-a| \rho(\varphi_2,\varphi_1).$$

Нерівність справедлива при всіх x, отже виконується і для максимального, $\underbrace{\max_x \left|\psi_2(x)-\psi_1(x)\right|}_{\rho(\psi_2,\psi_1)} \le |\lambda| M |b-a| \rho(\varphi_2,\varphi_1)$. Щоб виконувалась умова стиску вимагатимемо $|\lambda| < \dfrac{1}{M|b-a|}$. Отже вихідне інтегральне рівняння Гамерштейна має єдиний розв'язок.

Застосування теореми Банаха до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтера.

Інтегральним рівнянням Вольтера зветься рівняння виду: $\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x)$. Усі вимоги накладаємо на функції так як і в попередніх рівняннях. Покажемо, що метод послідовних наближень застосований для всіх x. Покажемо, що умови стиску виконуються завжди для n-того наближення при $n \to \infty$.

$$\left|\psi_2^{(1)}(x)-\psi_1^{(1)}(x)\right| = |\lambda|\left|\int_a^x K(x,t)(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))dt\right| \le M|\lambda|\rho(\varphi_2,\varphi_1)(x-a),\ x>a;$$

$$\left|\psi_2^{(2)}(x)-\psi_1^{(2)}(x)\right| = |\lambda|\left|\int_a^x K(x,t)(\psi_2^{(1)}-\psi_1^{(1)})dt\right| \le M^2|\lambda|^2\rho(\varphi_2,\varphi_1)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!};$$

…………………………………………………………………

$$\left|\psi_2^{(n)}(x)-\psi_1^{(n)}(x)\right| = |\lambda|\left|\int_a^x K(x,t)(\psi_2^{(n-1)}-\psi_1^{(n-1)})dt\right| \le M^n|\lambda|^n\rho(\varphi_2,\varphi_1)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Зафіксувавши $x=b$ матимемо:

$\left|\psi_2^{(n)}(x)-\psi_1^{(n)}(x)\right| \le \dfrac{M^n|\lambda|^n\rho(\varphi_2,\varphi_1)}{n!}(b-a)^n$. Завжди можна підібрати n, так щоб $\dfrac{M^n\,|\lambda|^n\,(b-a)^n}{n!}<1$.

<u>Контрольні запитання.</u>

1. Дати означення стискаючого відображення і довести його неперервність.
2. Сформулювати та довести теорему Банаха. Дати їй геометричне тлумачення.
3. Довести теорему існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння $y'=f(x,y)$, $f(x_0)=y_0$.
4. Дати означення нормальної системи диференціальних рівнянь.
5. Сформулювати теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь, вказати схему її доведення.
6. За допомогою теореми Банаха вияснити за яких умов існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма.
7. Сформулювати теорему існування і єдиності розв'язку нелінійного інтегрального рівняння та рівняння Вольтера.

<u>Вправи.</u>

1. За допомогою теореми Банаха знайти кілька наближень розв'язку рівняння $x-\sqrt[4]{x+10}=0$ на відрізку [1,2].
2. Оператор A заданий співвідношеннями

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}8; \\ y_2 = 0{,}2x_1 - 0{,}1x_2 \qquad\qquad -1{,}2; \\ y_3 = \qquad\quad -0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 2{,}7. \end{cases}$$

Перевірити виконання умов теореми Банаха в просторі R_1^n.

3. Як оцінити похибку між n-тим наближенням x_n розв'язку рівняння $Ax=x$ та точним значенням x.

4. Знайти кілька наближень розв'язку задачі Коші $y' = y$, $y(0)=1$, і оцінити величину відрізка на якому розв'язок існує і єдиний.

<u>Розв'язання.</u>

1. Сегмент [1;2] є повний простір як замкнений підпростір повного простору. Покажемо, що $y=\sqrt[4]{x+10}$ є відображення в себе, тобто його значення не виходять за межі сегмента [1;2]. Маємо $f(1)=\sqrt[4]{11}>1$, $f(2)=\sqrt[4]{12}<2$. Крім того $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}}>0$, тобто функція монотонна, і, таким чином, найбільше і найменше значення функція досягає на кінцях сегменту. Маємо, що похідна $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}}<1$ для $\forall\, x\in[1,2]$, тобто виконується умова стиску. Таким чином виконуються всі три умови теореми Банаха і можемо знаходити наближене значення кореня рівняння методом послідовних наближень. Наприклад покладемо $x_0=1$. Тоді $x_1=\sqrt[4]{x+10}=\sqrt[4]{11}$, $x_2=\sqrt[4]{x_1+\sqrt{10}}=\sqrt[4]{\sqrt[4]{11}+\sqrt{10}}$ ...

2. По-перше, простір R_3 – повний. По-друге, маємо відображення в себе. Перевіримо виконання умов стиску:

$\alpha_1=\max\limits_k \sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ik}|=\max(\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i1}|,\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i2}|,\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i3}|)$, де $\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ij}|$ – сума модулів коефіцієнтів при x_j, які відповідно рівні 0,3; 0,7; 0,4. Оскільки найбільша з сум рівна 0,7, то $\alpha_1=0{,}7<1$ і умова стиску виконується.

3. В процесі доведення теореми Банаха, зокрема, при доведенні фундаментальності послідовності $\{x_n\}$, одержується оцінка $\rho(x_n,x_m)\le\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)$, де α–константа, яка фігурує в умові стиску. Перейдемо в нерівності до границі, коли m прямує до нескінченності. Дістанемо шукану оцінку: $\rho(x_n,x_m)\le\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)$.

4. Диференціальне рівняння $y' = y$ разом з початковою умовою $y(0)=1$, еквівалентне наступному інтегральному рівнянню $y(x)=1+\int_0^x y(t)dt$. Покладемо $y_0=1$, тоді отримаємо: $y_1=1+\int_0^x y_1 dt=1+x$;

$$y_2=1+\int_0^x (1+t)dt = \left(1+\frac{(1+t)^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = 1+\frac{(1+x)^2}{2}-\frac{1}{2}=1+x+\frac{x^2}{2};\ldots$$

Помічаємо, що послідовні наближення співпадають з частковими сумами ряду Тейлора для функції e^x. Зауважимо, як випливає з теореми Банаха, існування і єдиність розв'язку буде забезпечена в прямокутнику з центром в точці (0,1), $|x|<d, d<1, |y-1|<1$.

Задачі.

1. Вказати достатні умови, які забезпечують існування і єдиний корінь рівняння $F(x)=0$.
2. Показати, що коли функція $f(x)$ однієї змінної має похідну $f'(x)$, причому $f'(x)\le m<1$, то відображення $y=f(x)$ буде стискаючим.
3. За допомогою теореми Банаха знайти кілька наближених розв'язків рівнянь:

   а) $x^3+x-20=0$;

   б) $x=\frac{1+\cos x}{10}$, [0,1];

   в) $x=(x+1)$;

   г) $x=1-\frac{1}{x+2}$, [0,4];

   д) $x=x^3-2$, [1,2];

   е) $x=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

   є) $x=\sqrt{x+10}$, [0,1];

   ж) $x^2=\sin x$;

   з) $x^2=\ln(x+1)$;

   і) $x^3=e^x+2$.

4. Вказати умови стиску у просторах R^n, R_0^n, R_1 для розв'язання системи n рівнянь з n невідомими виду:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n. \end{cases}$$

5. Дано рівняння: а) $y' = x - y^2$, $y(0)=0$;

б) $y' = x^2 + y^2$, $y(0)=1$;

в) $y' = xy$, $y(0)=1$;

г) $y' = y^2 + xy + x^2$, $y(0)=1$.

Знайти кілька наближених розв'язків даних рівнянь і оцінити величину відрізка на якому розв'язок існує і єдиний.

КОМПАКТИ

Наведемо приклад простору, для якого не виконується теорема Больцано-Вейєрштрасса, а саме: з усякої обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. Ця теорема не справедлива в довільному метричному просторі. Розглянемо простір l_2: $x = (x_1, x_2, .., x_n, ...)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Розглянемо в цьому просторі послідовність:

$$\begin{gathered} (1,0,...,0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ (0,1,0,...,0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (0,0,...,0,1,0,0,...,0,...), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Ця послідовність буде обмеженою, бо всі її члени знаходяться в середині абстрактної кулі з центром в точці 0 і $R = 1$. Дійсно: $\rho(0, x^{(n)}) = \sqrt{\underbrace{(0-0)^2 + ... + 1^2}_{n} + (0-0)^2 + ...} = 1$. Очевидно, що з такої послідовності не можна виділити збіжну підпослідовність, бо якби це було б можливо, то отримана послідовність була б фундаментальною. Але $\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sqrt{2}$ (не прямує до нуля). Виділимо клас множин, для яких виконується теорема Больцано-Вейєрштрасса. Це приводить до поняття компактності.

<u>Означення.</u> Нехай маємо метричний простір (X, ρ) і множину $E \subset (X, \rho)$. Множина E називається компактною (*компактом*), якщо із будь-якої послідовності цієї множини можна виділити збіжну підпослідовність, границя якої належить множині E.

<u>Означення.</u> Множина E зветься *компактом*, якщо із будь-якого її нескінченого покриття системою відкритих множин можна виділити скінчене підпокриття.

<u>Приклади компактів.</u>

1. Сегмент $[a,b]$ – компакт.
2. Інтервал $(0,1)$ – не є компактом.

<u>Теорема.</u> Усякий компакт є множина замкнена і обмежена.

<u>Доведення.</u> Замкненість. Нехай x – гранична точка E. Доведемо, що вона належить E. Розглянемо систему абстрактних куль $B_1(x,1),\ B_2(x,\frac{1}{2}),...,\ B_n(x,\frac{1}{n}),\ldots$ з центром в точці x і радіусами $\frac{1}{n}$. Тоді виберемо з кожної кулі по представнику $x_1, x_2,..., x_n,...$. $\{x_n\} \subset E$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Отже і будь-яка підпослідовність теж прямує до x. І за означенням компакту належатиме E, а це і доводить замкненість.

Обмеженість. Нехай компакт E є множина необмежена. Візьмемо довільну кулю $B(x_0, r)$, де x_0 – довільна точка компакту, r– довільне число. В силу необмеженості буде існувати точка x_1, яка не належить кулі $B(x_0, r_1)$ з радіусом $r_1 = \rho(x_0, x_1) + 1$. В силу необмеженості буде існувати точка x_2, яка не належить кулі $B(x_0, r_2)$

з радіусом $r_2 = \rho(x_0, x_2) + 1$. Продовжуючи цей процес отримаємо послідовність елементів: $x_0, x_1, ..., x_n ...$. Ця послідовність не буде фундаментальною, бо відстань між будь-якими її елементами буде більшою 1. Тим більше, будь-яка підпослідовність теж не буде фундаментальною, а це суперечить тому, що E – компакт.

Теорему доведено.

Компакти в R^m.

Компакти в R^m можна описати теоремою.

Теорема. Для того, щоб множина $E \subset R^m$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона була замкненою і обмеженою.

Доведення. Необхідність. Дано E – компакт, тоді з попередньої теореми множина замкнена і обмежена.

Достатність. Нехай E – замкнена і обмежена. Доведемо, що E – компакт. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\} \subset E$. Вона буде обмеженою в тому розумінні, що всі її точки будуть знаходитись в кулі з центром в довільній точці x і скінченним радіусом R. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса з послідовності $\{x_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покажемо, що $x_0 \in E$. Так як x_0 – гранична точка, тоді в силу замкненості $x_0 \in E$.

Теорему доведено.

Властивості неперервних відображень компактів.

Теорема 1. Неперервний образ компакту є компакт.

Доведення. Дано, що E – компакт, $f(x)$ – неперервне відображення. Розглянемо довільну послідовність $y_1,...,y_n$, яка належить $f(E)$ і покажемо, що з неї можна виділити збіжну підпослідовність, границя якої належить множині образів. Розглянемо відповідну послідовність прообразів $x_1,...,x_n$. Вона належить E, а отже з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, таку що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, $x \in E$. Тоді в силу неперервності відображення $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, $f(x) \in f(E)$, бо x належить множині прообразів.

<u>Теорема 2.</u> Нехай маємо неперервне і взаємнооднозначне відображення $y = f(x)$ компакту E на множину Y. Тоді обернене відображення $x = f^{-1}(y)$ теж неперервне.

<u>Доведення.</u> Припустимо протилежне, що обернене відображення не є неперервним у довільній точці y. Тоді за означенням неперервності за Гейне буде існувати послідовність $\{y_n\} \to y$, однак, $\{x_n = f^{-1}(y_n)\}$ не прямує до $f^{-1}(y)$. Це означає, що можливі два випадки:

1. $x_n \to \bar{x} \neq x$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – не існує.

1. В силу неперервності прямого відображення $f(x_n) \to f(\bar{x})$, а за умовою $f(x_n) \to f(x)$, тоді маємо, що послідовність має дві границі, що неможливо.

2. $\{x_n\} \subset E$, то з цієї послідовності можна виділити збіжну підпослідовність границя, якої належить E, бо E – компакт. Отже, буде існувати $\{x_{n_k}\} \to \bar{x} \neq x$. Тоді в силу неперервності $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$, а це суперечить тому, що $\{y_n\} \to y$. Оскільки $\{y_n\} \to y$, то будь-яка підпослідовність $\{y_{n_k}\} \to y$. Прийшли до суперечності.

Теорему доведено.

Рівномірно неперервні відображення. Теорема Кантора.

<u>Означення.</u> Відображення *f(x)* називається *рівномірно*

неперервним на множині E, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\rho(x'', x') < \delta$, $\rho(f(x''), f(x')) < \varepsilon$.

Теорема (Кантора). Якщо відображення $y = f(x)$ – неперервне на компакті *E*, то воно рівномірно неперервне на ньому.

Доведення. Нехай відображення не є рівномірно неперервним. Тоді $\exists \varepsilon_0$, що яке б δ ми не брали, знайдеться хоча б два елементи x'', x', що як тільки $\rho(x'', x') < \delta$, то $\rho(f(x''), f(x')) \ge \varepsilon_0$. В силу довільності δ, виберемо його так: $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1,2,....$. Для кожного δ існуватиме пара точок x'_n *і* x''_n, що як тільки $\rho(x''_n, x'_n) < \dfrac{1}{n}$, то $\rho(f(x'), f(x'')) \ge \varepsilon_0$ (*). Отримали дві послідовності $\{x'_n\}, \{x''_n\}$, які належать E. Тоді з послідовності $\{x'_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність з границею x_0. Щоб не вводити нових індексів, будемо вважати, що $\{x'_k\} \to x_0$. Покажемо, що $\{x''_n\} \to x_0$.

Дійсно: $\rho(x''_n, x_0) \le \underbrace{\rho(x''_n, x'_k)}_{\Rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x'_k, x_0)}_{\Rightarrow 0}$. Тоді в силу неперервності відображення $f(x'_n) \to f(x_0)$ і $f(x''_n) \to f(x_0)$, а це суперечить (*), бо:

$$\rho(f(x''_n), f(x'_n)) \le \underbrace{\rho(f(x''_n), f(x_0))}_{=0} + \underbrace{\rho(f(x_0), f(x'_n))}_{=0}.$$

Теорему доведено.

Числові функції на компакті.

Відображення $y = f(x)$, $x \in E$, яке елементу довільної природи *x* ставить у відповідність число називається функціоналом.

Перша теорема Вейєрштрасса. Якщо числова функція $y = f(x)$ неперервна на компакті *E*, то вона обмежена на ньому.

Доведення. Неперервний образ компакту є компакт, а компакт є множина обмежена, що і доводить теорему.

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо числова функція $y = f(x)$

неперервна на компакті E, то вона досягає на ньому свого найбільшого і найменшого значення.

Доведення. За попередньою теоремою $\exists m \text{ і } M$, що $m \le f(x) \le M$. Якщо функція обмежена знизу і зверху, то вона має свою точну верхню і нижню грані. $m^* \le f(x) \le M^*$. Доведемо для означеності, що *f(x)* досягає свого $\sup M^*$, де M^* – гранична точка *f(E)*, бо у будь-якому її околі є нескінченна кількість точок з *f(E)*. А оскільки *f(E)* замкнена, то $M^* \in f(E)$.

Контрольні запитання.

1. Навести приклад простору в якому не виконується теорема Больцано-Вейєрштрасса.
2. Дати означення компакту.
3. Сформулювати основні властивості компактів.
4. Охарактеризувати компакти в просторі R^n.
5. Вказати схему доведення теореми про компактність образу при неперервному відображенні.
6. Сформулювати теорему про неперервність оберненого відображення.
7. Сформулювати першу і другу теореми Вейєрштрасса та теорему Кантора про властивості числових функцій на компакті.

Вправи.

1. Дослідити на копактність простір ізольованих точок.
2. Довести, що сегмент $[a,b]$ є компактним.
3. Довести першу теорему Вейєрштрасса про обмеженість неперервної числової функції на компакті використовуючи властивості компактності.
4. Дослідити на копактність інтервал (0,1).

Розв'язання.

1. Розглянемо довільну послідовність із простору ізольованих точок. Оскільки послідовність нескінченна, то одна або кілька точок будуть повторюватись. Тоді ясно, як з такої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.
2. Візьмемо довільну числову підпослідовність, яка належить сегменту $[a,b]$. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса з неї можна виділити збіжну підпослідовність, границя якої, в силу замкненості сегменту, належатиме $[a,b]$.
3. Оскільки неперервний образ компакту є компакт, а компакт є множина обмежена, то звідси і випливає, що множина значень неперервної функції *f(x),* $x \in [a,b]$ буде обмеженою, що і доводить першу теорему Вейєрштрасса.
4. Інтервал (0,1) не є компакт, бо послідовність $\left(\frac{1}{n}\right)$ (значить і будь-яка її підпослідовність) прямує до нуля, коли $n \to \infty$, а нуль не належить проміжку (0,1).

Задачі.

1. Дослідити на копактність множину раціональних і ірраціональних точок сегменту [0,1].
2. Довести що замкнений одиничний квадрат з простору R_2 є компакт.
3. Довести, що всякий компакт є множина замкнена і обмежена.
4. Довести, що перетин двох компактів є компакт.
5. Довести, що об'єднання двох компактів є компакт.
6. Довести першу і другу теореми Вейєрштрасса про властивості числових функцій на компакті, використовуючи той факт, що компакт є множина замкнена і обмежена.

ЛЕМА ГЕЙНЕ-БОРЕЛЯ

Розглянемо разом з проміжком $[a,b]$ деяку систему $\sum$ відкритих відрізків σ, яка може бути як скінченною так і нескінченною. Домовимось, що система $\sum$ покриває проміжок $[a,b]$, якщо для кожної точки $x\in[a,b]$ найдеться в $\sum$ проміжок σ, який містить її.

Лема Бореля. Якщо замкнений проміжок $[a,b]$ покривається нескінченною системою $\sum=\{\sigma\}$ відкритих відрізків, то із неї завжди можна виділити скінчену підсистему $\sum^*=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}$,яка також покриє проміжок $[a,b]$.

Доведення 1 (Метод Больцано).

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо проміжок $[a,b]$ не може бути покритий скінченним числом відрізків σ із $\sum$. Розділимо проміжок $[a,b]$ навпіл. Тоді хоча б одна з його половин також не може бути покрита скінченим числом σ. Дійсно, якщо одна із них могла бути покрита відрізками $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m$ (із $\sum$), а друга – відрізками $\sigma_{m+1},\sigma_{m+2},...,\sigma_n$ (із $\sum$), то із всіх цих відрізків склалася б скінченна система $\sum^*$, яка б покрила весь проміжок $[a,b]$. А це суперечить припущенню. Позначимо через $[a_1,b_1]$ ту половину відрізка, яка не покривається скінченним числом σ (якщо обидві такі, то будь-яку з них). Цей проміжок знову розділимо навпіл і позначимо через $[a_2,b_2]$ ту із його половин, яку не можна покрити скінченим числом σ, і т. д.

Продовжуючи цей процес, ми одержимо нескінчену послідовність вкладених відрізків $[a_n,b_n]$ ($n=1,2,3,...$), кожен із яких складає половину від попереднього. Всі ці проміжки вибираються так, що жоден з них не покривається скінченним числом відрізків σ. Згідно з лемою про вкладені відрізки, існує спільна їм всім точка c, до якої прямують кінці $[a_n, b_n]$.

Ця точка c, як і будь-яка точка проміжку $[a,b]$, лежить в одному із відрізків σ, який ми позначимо $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, так що $\alpha < c < \beta$. Проте послідовносі $\{a_{\text{n}}\}$ і $\{b_{\text{n}}\}$ прямують до c, і починаючи з деякого номера будуть самі лежати між α і β, таким чином, що визначений ними проміжок $[a_n, b_n]$ виявиться покритим лиш одним відрізком σ_0, всупереч самому вибору цих проміжків $[a_n, b_n]$. Отримана суперечність і доводить лему.

<u>Доведення 2 (Лебега)</u>

Розглянемо точки $x^* \in [a,b]$, які володіють тими властивостями, що відрізок $[a, x^*]$ покривається скінченим числом відрізків σ. Такі точки x^*, загалом, знайдуться: так як, наприклад, точка a лежить в одному із σ, то і всі близькі до неї точки, які знаходяться в даному відрізку σ, відповідно виявляються точками x^*.

Нашою задачею є встановити, що точка b належить до числа точок x^*. Так як всі $x^* \le b$, то: $\sup\{x^*\} = c \le b$. Як і всі точки з проміжку $[a,b]$, c належить деякому $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, $\alpha < c < \beta$. Проте, по властивостям точної верхньої грані, знайдеться x_0^*, таке що $\alpha < x_0^* \le c$. Проміжок $[a, x_0^*]$ покривається скінченим числом відрізків σ (за означенням точок x^*), якщо до цих проміжків приєднати ще один відрізок σ_0, то й покриється весь проміжок $[a,c]$, так що c є одною із точок x^*.

Разом з цим, ясно, що с не може бути менше b, бо інакше між c і β знайшлася б ще точка x^*, всупереч знаходження числа c, як верхньої межі всіх x^*. Таким чином, необхідно щоб b=c, значить b є одна із x^*, тобто $[a,b]$ покривається скінченим числом відрізків σ.

Зауважимо, що лема справедлива тоді, коли $[a,b]$ – замкнений, а $\sum$ – відкриті. Наприклад, система відкритих відрізків: $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ldots,\left(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n}\right),\ldots$ покриває проміжок $(0,1]$, проте з них не можна виділити скінченну підсистему з вище вказаними властивостями. Аналогічно, система замкнених відрізків: $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right],\ldots,\left[\frac{2^{n-1}}{2^n},\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right],\ldots$ та $[1,2]$, покриває проміжок $[0,2]$, але й тут виділення скінченної підсистеми неможливе.

Нові доведення основних теорем.

Покажемо тепер як Лема Бореля може бути використана для доведення основних теорем про неперервні функції.

I. Перша теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і приймає на кінцях відрізка значення різних знаків. Тоді в інтервалі (a,b) найдеться точка, значення функції в якій рівне нулю, тобто $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists\xi\in(a,b): f(\xi)=0$.

Доведення

Цього разу доводити її будемо від супротивного. Припустимо, що – при дотримані припущення теореми – все ж в жодній точці функція $f(x)$ не перетворюється в нуль. Тоді кожну точку x' проміжку $[a,b]$ можна обмежити таким околом $\sigma'=(x'-\delta',x'+\delta')$, що в його межах $f(x)$ зберігає певний знак.

Нескінченна система $\sum=\{\sigma\}$ цих околів покриває весь проміжок $[a,b]$. Тоді, згідно леми Бореля, буде існувати $\sum^*$ околів, яка покриє даний відрізок ($\sum^*$ – скінченна).

Лівий кінець a нашого проміжку належить одному із околів системи $\sum^*$, нехай околу $\sigma_1=(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$. Його правий кінець $x_1+\delta_1$, в свою чергу, належить околу $\sigma_2=(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)$ із $\sum^*$, точка $x_2+\delta_2$ міститься в околі (інтервалі) $\sigma_3=(x_3-\delta_3, x_3+\delta_3)$ із $\sum^*$, і т. д.

Після скінченного числа кроків, рухаючись вправо, ми дійдемо до околу $\sigma_n=(x_n-\delta_n, x_n+\delta_n)$ із $\sum^*$, який містить в собі правий кінець b даного проміжку. Якби $\sum^*$ містила ще якійсь інші проміжки, крім $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$, то їх, очевидно, можна було би просто не врахувати.

В околі σ_1 функція $f(x)$ зберігає певний знак, саме знак $f(a)$. Проте і в σ_2 функція має визначений знак, який повинен також співпадати із знаком $f(a)$, оскільки σ_1 і σ_2 взаємно налягають. Також переконуємося в тому, що цей знак функція зберігає і в наступному по порядку околі σ_3, який налягає на σ_2, і т.д. В кінці-кінців, прийдемо до висновку, що і в останньому околі σ_n функція має знак $f(a)$, так що $f(b)$ співпадає по знаку із $f(a)$. Отримали суперечність.

Теорема доведена.

Проміжне значення неперервної на відрізку функції. Метод дихотомії.

Припустимо $f(a)<0$, $f(b)>0$. Поділимо відрізок $[a,b]$ пополам $\frac{a+b}{2}$. Можливі три випадки:

1. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0 \Rightarrow \xi=\frac{a+b}{2}$, тобто теорема доведена.
2. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$. Покладемо $a_1=a$, $b_1=\frac{a+b}{2}$.
3. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. Покладемо $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$.

Отримаємо $[a,b]\supset[a_1,b_1]$, $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Знову поділимо отриманий відрізок точкою $\frac{a_1+b_1}{2}$. Знов-таки можливі три випадки:

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0 \Rightarrow \xi=\frac{a_1+b_1}{2}$, тобто теорема доведена.

2. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$. Покладемо $a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.

3. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$. Покладемо $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$.

Отримаємо: $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$, $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$.

Продовжимо процес побудови таких відрізків. На $(n-1)$-му кроці маємо:

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_{n-1},b_{n-1}]$, $f(a_{n-1})<0$, $f(b_{n-1})>0$.

Розділимо даний відрізок $[a_{n-1},b_{n-1}]$ на 2 частини точкою $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Знову маємо три випадки:

1. $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=0 \Rightarrow \xi=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, тобто теорема доведена.

2. $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)>0$. Покладемо $a_n=a_{n-1}$, $b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

3. $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0$. Покладемо $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n=b_{n-1}$, отримаємо

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]$, $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$.

Довжина n-го відрізка $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$,

$a_n\to\xi$, $b_n\to\xi$ при $n\to\infty$ (згідно з лемою про вкладені відрізки). $f(a_n)\to f(\xi)$, $f(b_n)\to f(\xi)$, через неперервність функції.

Одночасно $f(\xi)\le 0$ (так як $f(a_n)<0$) і $f(\xi)\ge 0$ (так як $f(b_n)>0$), тобто $f(\xi)=0$.

Теорема доведена.

Геометричний зміст теореми Больцано-Коші полягає в тому, що неперервна функція перетинає вісь *Ох* хоча б один раз.

ІІ. <u>Перша теорема Вейєрштрасса.</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$, то вона обмежена на цьому сегменті, тобто $\exists M\ ,m:\quad m\le f(x)\le M$.

<u>Доведення.</u>

В силу неперервності функції $f(x)$, яку би точку $x\in[a,b]$ ми не взяли, знайдеться таке число $\varepsilon>0$, що можна виділити як завгодно малий окол цієї точки $\sigma'=(x'-\delta',x'+\delta')$, так щоб для всіх його значень *x* виконувалися б нерівності:

$\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon$, або $f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon$.

Таким чином, в межах кожного такого околу функція $f(x)$ наперед обмежена: знизу – числом $f(x')-\varepsilon$, а зверху – числом $f(x')+\varepsilon$.

Зрозуміло, що тут до нескінченної системи $\sum$ околів, які володіють вказаною властивістю потрібно застосувати лему Бореля. З неї випливає, що знайдеться в $\sum$ скінченне число околів $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$, які в сукупності покриють весь відрізок $[a,b]$. Якщо:

$m_1\le f(x)\le M_1$ *в* σ_1,

$m_2\le f(x)\le M_2$ *в* σ_2,

………………………

$m_n\le f(x)\le M_n$ *в* σ_n,

Поклавши $m=\min\{m_1,m_2,...,m_n\}$ і $M=\max\{M_1,M_2,...,M_n\}$. Очевидно будемо мати $m\le f(x)\le M$ на всьому проміжку $[a,b]$.

Теорема доведена.

ІІІ. <u>Теорема Кантора.</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на цьому сегменті.

<u>Доведення.</u>

Задамося довільним числом $\varepsilon>0$. На цей раз кожну точку x' проміжку $[a,b]$ обмежимо таким околом $\sigma'=(x'-\sigma',x'+\sigma')$, щоб в його межах виконувалася нерівність: $\left|f(x)-f(x')\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Якщо x_0 також точка цього околу, то одночасно і $\left|f(x')-f(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким чином, для будь-яких точок x та x_0 із σ' будемо мати: $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Стягнемо кожен окіл σ' вдвічі, зберігаючи його центр, тобто замість σ' розглянемо окіл: $\overline{\sigma'}=\left(x'-\dfrac{\delta'}{2},x'+\dfrac{\delta'}{2}\right)$.

Із цих околів відповідно складеться система $\overline{\overline{\Sigma}}$, яка покриває відрізок $[a,b]$, і саме до неї ми застосуємо лему Бореля. Проміжок $[a,b]$ покриється скінченним числом відрізків із $\overline{\overline{\Sigma}}$:

$\overline{\sigma_i}=\left(x_i-\dfrac{\delta_i}{2},x_i+\dfrac{\delta_i}{2}\right)$ $(i=1,2,...,n)$.

Нехай тепер δ буде найменшим із цих всіх чисел $\dfrac{\delta_i}{2}$, і x_0, x – будь-які дві точки нашого проміжку, що задовольняють умову:

$|x-x_0|<\delta$. (*)

Точка x_0 повинна належати одному із виділених околів, наприклад, околу:

$\overline{\sigma_{i_0}}=\left(x_{i_0}-\dfrac{\delta_{i_0}}{2},x_{i_0}+\dfrac{\delta_{i_0}}{2}\right)$, так що $\left|x_0-x_{i_0}\right|<\dfrac{\delta_{i_0}}{2}$.

Оскільки $\delta\le\dfrac{\delta_{i_0}}{2}$, то , згідно (*), $|x-x_0|<\dfrac{\delta_{i_0}}{2}$, звідки $|x-x_i|<\delta_{i_0}$, тобто точка x (тим більше точка x_0) належить тому початковому взятому околу: $(x_{i_0}-\delta_{i_0},x_{i_0}+\delta_{i_0})$, стисненням якого отримаємо окіл $\overline{\sigma_{i_0}}$. В цьому випадку, в силу властивостей раніше взятих околів, отримаємо: $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Оскільки δ було вибране незалежно від положення точки x_0, рівномірна неперервність функції $f(x)$ доведена.

Теорема доведена.

Як видно з приведених міркувань, лема Бореля з успіхом застосовується в тих випадках, коли «локальна» властивість, зв'язана з околом окремої точки, підлягає розповсюдженню на весь розглядуваний проміжок.

Контрольні запитання.

1. Сформулювати і довести лему Гейне-Бореля.
2. Дати означення копактності множини через покриття.
3. Довести першу теорему Больцано-Коші про існування кореня рівнянь $f(x)=0$ за допомогою леми Гейне-Бореля.
4. Сформулювати лему Гейне-Бореля в довільному абстрактному просторі.
5. Довести за допомогою леми Гейне-Бореля, теорему Кантора про рівномірну неперервність числової функції $f(x)$, яка неперервна на сегменті $[a,b]$.

Вправи.

1. Довести за допомогою леми Гейне-Бореля, першу теорему Вейєрштрасса про обмеженість числової функції, яка неперервна на сегменті $[a,b]$.

Розв'язання.

1. Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то яку б точку x' відрізка $[a,b]$ ми не взяли, задавши число $\varepsilon>0$, ми можемо взяти досить малий окіл $\sigma'=(x'-\delta',x'+\delta')$ такий, щоб для всіх точок x околу виконувались нерівності $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ або $f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon$. Множина цих околів утворює нескінченне покриття сегменту $[a,b]$.

В межах кожного такого околу функція $f(x)$ є наперед обмеженою: знизу – числом $f(x')-\varepsilon$, а зверху – числом $f(x')+\varepsilon$. За лемою Гейне-Бореля, з даного нескінченого покриття можна виділити скінченне під покриття. Якщо

$$m_1 \le f(x) \le M_1 \ \ в \ \ \sigma_1,$$
$$m_2 \le f(x) \le M_2 \ \ в \ \ \sigma_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_n \le f(x) \le M_n \ \ в \ \ \sigma_n,$$

то взявши в якості m найменше з чисел $m_1, m_2, ..., m_n$, а в якості M – найбільше з чисел $M_1, M_2, ..., M_n$, очевидно, будемо мати

$$m \le f(x) \le M$$

на всьому сегменті $[a,b]$, що і потрібно було довести.

ЛІНІЙНІ, НОРМОВАНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

Лінійні простори.

Поняття лінійного простору належить до основних у функціональному аналізі.

<u>Означення.</u> Множина елементів довільної природи $\{x, y, z, ...\}$ називається *лінійним простором* якщо:

1. На цій множині визначена операція додавання елементів, яка двом елементам x і y ставить у відповідність третій елемент z, який називають сумою. $\forall x, y \to z$, $z = x + y$ і виконуються властивості:

а) $x + y = y + x$ – комутативність.

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$ – асоціативність.

в) $\exists 0,\ x + 0 = x$.

г) $\exists \overline{x},\ \overline{x} + x = 0$.

2. Визначена операція множення на число α (дійсне або

комплексне) $\alpha \cdot x = \alpha x$ і виконуються властивості:

а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$ – асоціативність;

б) $\exists 1,\ 1 \cdot x = x$;

в) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ – розподільний закон;

г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ – розподільний закон.

<u>Приклади.</u>

1. R^1 – лінійний простір.
2. R^n: $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$,

   $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, $x \cdot \alpha = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.
3. $C_{[a,b]}$: $x = x(t),\ y = y(t)$; $x + y = x(t) + y(t)$; $\alpha \cdot x(t) = \alpha x(t)$.

Введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності елементів.

<u>Означення.</u> Елементи довільної природи $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існує набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоч одне відмінне від нуля, що виконується рівність $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$.

Факт лінійної залежності означає, що один із елементів можна виразити як лінійну комбінацію інших елементів:

$$\alpha_1 \neq 0, \qquad x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n.$$

<u>Означення.</u> Елементи $x_1, ..., x_n$ звуться *лінійно незалежними*, якщо рівність $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$, має місце тоді і тільки тоді, коли всі $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

<u>Приклад.</u>

Дослідити на лінійну залежність функцій:

1) $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, 5 $\quad(-\infty, \infty)$. Маємо: $1\sin^2 x + 1\cos^2 x - \frac{1}{5} \cdot 5 = 0$, тобто функції лінійно залежні.

2) $1, x, x^2, ..., x^n$ $(-\infty, \infty)$; $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0$; Незалежні.

В лівій частині алгебраїчний многочлен n-того степеня. Має $m \le n$ коренів, а нам потрібною щоб він був рівний нулю для будь-якого x. Це можливо тільки тоді, коли всі $\alpha_i = 0$.

<u>Означення.</u> Лінійний простір зветься *n-вимірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних елементів, а будь-які $(n+1)$ елементів вже лінійно залежні.

Ці n лінійно незалежних елементи звуть базисом даного простору.

$$R^n : \begin{matrix} (1,0,0,...,0) \\ (0,1,0,...,0) \\ \dots\dots\dots \\ (0,0,0,...,1) \end{matrix} \text{ – базис.}$$

<u>Означення.</u> Лінійний простір звуть *нескінченно вимірним*, якщо в ньому існує як завгодно велика кількість лінійно незалежних елементів. Скінченно вимірні простори вивчаються в лінійній алгебрі, а нескінченно вимірні в функціональному аналізі.

1. $C_{[a,b]}: \quad x = x(t), \quad 1, x, x^2, \ldots, \ x^n \ldots$ – базис

2. $l_2 \ : \ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty; \ \begin{pmatrix} (1,0,\dots\dots.) \\ (0,1,\dots\dots.) \\ (0,...,0,1,....) \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$ – базис .

<u>Означення.</u> *Підпростором* L^* лінійного простору L називається множина елементів з простору L, якщо з того, що x і $y \in L^*$ випливає, що $(\alpha x + \beta y) \in L^*$, при всіх α і β.

Всякий простір L містить підпростір самого себе і нуль простір. Підпростір який не співпадає з L і нуль підпростором зветься власним підпростором L.

Нехай маємо деяку множину $\{x_k\} \subset L$. Лінійною оболонкою даної множини називається найменший лінійний підпростір з простору L, який містить елементи множини $\{x_k\}$.

Нормовані простори.

У функціональному аналізі приходиться мати справу з просторами, які є одночасно лінійними і метричними. До таких просторів належать нормовані простори. Нехай маємо лінійний простір L.

<u>Означення.</u> Простір L зветься *нормованим*, якщо кожному елементу $x \in L$ поставлено у відповідність число $\|x\|$ – норма x, яке задовольняє аксіомам:

1. $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \alpha \in R, C$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, R – дійсні, C– комплексні;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Інтерес до цих просторів викликаний тим, що їх легко метризувати, тобто ввести поняття відстані $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

1. $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$;
2. $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Норма елемента x – це відстань між ним і нульовим елементом $\|x\| = \|x - 0\| = \rho(x, 0)$.

<u>Приклади.</u>

1. R^n, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$;
2. l_2, $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ – збіжний;
3. $C_{[a,b]}$, $x = x(t)$, $\|x\| = \max\limits_t |x(t)|$.

<u>Означення.</u> Повні нормовані простори звуться просторами Банаха.

Евклідові простори.

Розглянемо простір R^n, його елементами є набори дійсних чисел

$x=(x_1,x_2,...,x_n),\ \ y=(y_1,y_2,...,y_n)$.

Скалярним добутком двох векторів називається число $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

У довільному лінійному абстрактному просторі поняття скалярного добутку означається аксіоматично. Нехай маємо деякий лінійний простір *L*.

<u>Означення.</u> Число (x,y) зветься *скалярним добутком* двох елементів, якщо воно задовольняє наступним аксіомам:

1. $(x,y)=(y,x)$;
2. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\ \ \lambda$ – число;
3. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;
4. $(x,x)\ge 0$, $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

<u>Означення.</u> Лінійний простір з фіксованим в ньому скалярним добутком зветься евклідовим.

<u>Приклади.</u>

1. l_2, $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n+...$. Збіжність ряду випливає з очевидної нерівності $|x_iy_i|\le\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2)$.

2. $C_{[a,b]}$, $x=x(t)$, $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$.

Виконання всіх аксіом скалярного добутку випливає з властивостей визначеного інтеграла.

1. $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt=\int\limits_a^b y(t)x(t)dt=(y,x)$;
2. $(\lambda x,y)=\int\limits_a^b \lambda x(t)y(t)dt=\lambda\int\limits_a^b x(t)y(t)dt=\lambda(x,y)$;
3. $(x_1+x_2,y)=\int\limits_a^b (x_1(t)+x_2(t))y(t)dt=\int\limits_a^b x_1(t)y(t)dt+\int\limits_a^b x_2(t)y(t)dt=(x_1,y)+(x_2,y)$;.
4. $(x,x)=\int\limits_a^b x^2(t)dt\ge 0$. Якщо $x(t)=0$, то $\int\limits_a^b 0dt=0$; Нехай $\int\limits_a^b x^2(t)dt=0$,

доведемо, що $x(t)=0$. Нехай існує точка t_0, у якій $x(t_0)>0$, тоді в силу неперервності функція $x(t)$ буде більшою нуля і в деякому околі t_0. Тоді $\int\limits_a^b x^2(t)dt \neq 0$. Суперечність.

Евклідів простір можна зробити нормованим поклавши $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Щоб довести це доведемо спочатку лему Коші-Буняковського.

<u>Лема.</u> В евклідовому просторі має місце нерівність: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

<u>Доведення.</u> Використаємо функцію $\rho(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$,

$$\rho(\lambda) = (\lambda x, \lambda x + y) + (y, \lambda x + y) = (\lambda x, \lambda x) + (\lambda x, y) + (y, \lambda x) + (y, y) =$$

$$= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x,y) + \|y\|^2 \geq 0;$$

Отримали квадратний тричлен відносно параметра λ.

$$D = 4(x,y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0; \quad (x,y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2; \quad |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Розглянувши конкретні простори R^n і $C_{[a,b]}$, та знайшовши в них скалярний добуток, норми *x* та *y*, ми отримаємо дві відомі нам класичні нерівності Коші-Буняковського. Далі перевіримо виконання аксіом норм.

1. $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq$

   $\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$

Добувши корінь квадратний із обох частин отримаємо: $\|x+y\|^2 \leq \|x\| + \|y\|$. Нерівність Коші-Бунявського дозволяє ввести поняття косинуса кута між двома абстрактними елементами $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Два елементи x та y з евклідового простору будемо вважати ортогональними, якщо їх скалярний добуток рівний нулеві.

<u>Означення.</u> Система елементів $\{x_\alpha\}$ із Евклідового простору зветься *ортогональною*, якщо: $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$; $(x_\alpha, x_\beta) \neq 0$ при $\alpha = \beta$. Якщо $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$, то така система зветься *ортонормованою*.

Можна довести, що коли система ортонормована, то вона лінійно незалежна, тобто, що $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = 0$. Дійсно розглянемо скалярний добуток

$$(x_i\alpha_i, x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n) = 0,$$

$$\underbrace{(x_i\alpha_i, x_1\alpha_1)}_{=0} + \underbrace{(x_i\alpha_i, x_2\alpha_2)}_{=0} + \ldots + \underbrace{(x_i\alpha_i, x_i\alpha_i)}_{\neq 0} + \ldots + \underbrace{(x_i\alpha_i, x_n\alpha_n)}_{=0} = 0;$$

$$(x_i\alpha_i, x_i\alpha_i) = 0, \ \alpha_i = 0;$$

<u>Означення.</u> Ортогональна система елементів евклідового простору L називається *ортогональним базисом* цього простору, якщо найменший лінійний підпростір, який містить ортогональну систему співпадає з усім простором L.

Ортонормована система функцій називається повною в деякому просторі, якщо будь-який елемент x з цього простору можна як завгодно точно наблизити лінійною комбінацією базисних векторів у розумінні норми даного простору.

<u>Контрольні запитання.</u>

1. Дати означення лінійного простору. Навести приклади.
2. Який лінійний простір називається *n*-вимірним? Нескінченно вимірним?
3. Дати означення лінійного многовиду.
4. Дати означення норми та нормованого простору.
5. Дати означення скалярного добутку та евклідового простору.

6. Записати нерівність Коші-Буняковського в евклідовому просторі.
7. Дати означення ортонормованого базису в евклідовому просторі.
8. Сформулювати теорему про ортогоналізацію.
9. Записати нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.

Вправи.

1. Розглянемо множину M_{mn} усіх прямокутних матриць порядку $m\times n$ із скалярними елементами

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ....\,....... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ ....\,....... \\ b_{m1}b_{m2}...b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означимо в M_{mn} операції $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),\ \lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})$ Довести, що M_{mn} є лінійний простір.

2. Покладемо в нормованому просторі $\|x-y\|=\rho(x,y)$. Перевірити виконання аксіом так означеної метрики.
3. Нехай $E_{[a,b]}$ – лінійний простір усіх дійсних функцій, визначених на сегменті $[a,b]$. Довести, що простір $C_{[a,b]}$ – неперервних функцій на сегменті $[a,b]$. є лінійним многовидом .
4. У просторі C_l означемо скалярний добуток за формулою $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$ Перевірити виконання аксіом скалярного добутку.

Розв'язання.

Оскільки операції над матрицями зводяться до виконання операцій над числами, то справедливість аксіом лінійного простору очевидна.

1. Перевіримо виконання аксіом метрики, враховуючи виконання аксіом норми.

   a) $\rho(x,y)=\|x-y\|\geq 0,$ причому $\rho(x,y)=0$ тоді, і тільки тоді, коли $x\equiv y$.

   b) $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|(-1)|\,\|y-x\|=\rho(x,y).$

   c) $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leq\|(x-z)\|+\|(z-y)\|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$

2. Це випливає з відомого з математичного аналізу факту, що лінійна комбінація двох неперервних на сегменті $[a,b]$. функцій є функція неперервна на цьому відрізку.

3. Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку. $(x,x)=\int_a^b x^2(t)dt$, причому $(x,x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x(t)\equiv 0$.

   Справді, якщо $x(t)\equiv 0,$ то $(x,x)=\int_a^b 0dt=0.$

   Якщо ж $(x,x)=\int_a^b x^2(t)dt=0$, то звідси випливає, що $x(t)\equiv 0$, коли б $x(t)\neq 0$ хоча б в одній точці t_1, то в силу неперервності функція $x(t)$ була б, наприклад, більшою від нуля і в деякому колі точки t_1, а тоді не виконувалася б рівність $\int_a^b x^2(t)dt=0.$

   Виконання трьох інших аксіом скалярного добутку випливає з властивостей визначеного інтеграла.

<u>Задачі.</u>

1. У просторі R^n і $C_{[a,b]}$ операції додавання елементів і множення елемента на число введені за формулами:

   а) $x+y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n),\ \lambda x=(\lambda x_1,...,\lambda x_n);$

   б) $x+y=x(t)+y(t),\ \lambda y=\lambda x(t);$

Перевірити лінійність просторів R^n і $C_{[a,b]}$.

2. Покажіть, що в $C_{[0,\pi]}$ функції $1, \cos t, \cos^2 t$ лінійно незалежні, а функції $1, \cos 2t, \cos^2 t$ лінійно залежні.
3. Довести, що простори $C_{[a,b]}, l_2$ нескінченно вимірні.
4. Покажіть, що множна всіх многочленів степеня не вищого за $m \in (m+1) -$ є вимірним лінійним многовидом в $C_{[a,b]}$.
5. Покажіть, що в $C_{[a,b]}$ множина всіх функцій, які задовольняють граничним умовам $x(a)=\alpha, x(b)=\beta$, буде лінійним многовидом тоді і тільки тоді, коли $\alpha=\beta=0$.
6. У просторах $R_n^0, C_{[a,b]}, C_l$ норми елементів означені за формулами: $\| x \| = \max | x_i |$; $\| x \| = \max | x(t) |$; $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$ відповідно. Перевірити виконання аксіом норм.
7. Довести нерівність Коші-Буняковського в евклідовому просторі.
8. У просторі l_2 скалярний добуток означимо за формулою $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Доведіть, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ – збіжний і виконується аксіома скалярного добутку. Як виглядає в l_2 множина ортогональних елементів.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ І ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Нехай є два лінійних простори L_1 і L_2. Якщо кожному елементу x простору L_1 поставлено у відповідність цілком певний елемент y із простору L_2, то кажуть, що заданий оператор $y = Ax$, який діє у просторі L_1 із значеннями в L_2.

<u>Означення.</u> Оператор A називається *лінійним*, якщо для $\forall x_1, x_2 \in L_1$ і для будь-яких чисел α_1 і α_2 виконується рівність $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$.

<u>Приклад.</u>

$$y = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Оператор діє в просторі $C_{[a,b]}$. Будемо вважати, що K і φ – неперервні. Перевіримо умову лінійності:

$$\int_a^b K(x,t)(\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t))dt = \alpha_1 \cdot \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt + \alpha_2 \cdot \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt =$$
$$= \alpha_1 A\varphi_1 + \alpha_2 A\varphi_2.$$

З лінійності оператора випливають властивості:

1. $A(-x) = -Ax$;
2. $A(0) = A(x - x) = Ax - Ax = 0$.

<u>Означення.</u> Лінійний оператор $y = Ax$ називається *неперервним в точці x_0*, якщо із збіжності будь-якої послідовності $\{x_n\} \to x_0$ випливає, що відповідна послідовність значень оператора $\{Ax_n\} \to Ax_0$. Тут збіжність розуміється за нормою даного простору, тобто якщо при $n \to \infty$ $\|x_n - x_0\| \to 0$, то $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$.

<u>Теорема.</u> Якщо лінійний оператор неперервний в точці x_0, то він неперервний і в довільній точці довільного простору.

<u>Доведення.</u> Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\} \to x$ і покажемо, що $\{Ax_n\} \to Ax$. Розглянемо довільний елемент $(x_n - x + x_0) \to x_0$. Тоді в силу неперервності в x_0 $A(x_n - x + x_0) \to Ax_0$. Використаємо лінійність: $(Ax_n - Ax + Ax_0) \to Ax_0$, тоді $(Ax_n - Ax) \to 0$, $Ax_n \to Ax$ (при $n \to \infty$).

<u>Означення.</u> Лінійний оператор, який діє в лінійному просторі L_1 із значеннями в лінійному просторі L_2 називається *обмеженим*,

якщо існує таке число $M>0$, що для $\forall x \quad \|Ax\| \le M\|x\|$.

Теорема. Для того, щоб лінійний оператор був неперервним у будь-якій точці x, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Доведення. Необхідність. Дано: $y = Ax$ – неперервний оператор. Доведемо обмеженість, тобто що $\exists M>0$, $\|Ax\| \le M\|x\|$. Припустимо протилежне, що оператор необмежений. Це означає, що для $\forall n \in N \quad \exists x_n$, $\|Ax_n\| > n\|x\|$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Розглянемо елемент $z_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$ і оцінимо за нормою:

$\|z_n\| = \dfrac{1}{n\|x_n\|}\cdot\|x_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$, $n\to\infty$; $\|z_n - 0\| \to 0$, $n\to\infty$, $z_n \to 0$. Тоді, в силу неперервності, $\|Az_n\| \to 0$.

З іншого боку $\|Az_n\| = \left\|A\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \dfrac{1}{n\|x_n\|}\cdot\|Ax_n\| \ge \dfrac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$, не прямує до нуля, $n\to\infty$. Отримали суперечність.

Достатність. Дано, що оператор обмежений, тобто $\exists M>0$, $\|Ax\| \le M\|x\|$. Доведемо, що для $\forall x_n \to x$, $Ax_n \to Ax$.

$\|A(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\|$; $0 \le \|Ax_n - Ax\| \le M\|x_n - x\| \Rightarrow Ax_n \to Ax$.

Теорему доведено.

Норма оператора.

Нехай маємо лінійний обмежений оператор: $\exists M>0$, $\|Ax\| \le M\|x\|$.

Означення. Найменша з компонент M, яка фігурує в умові обмеженості зветься *нормою* оператора A і позначається $\|A\|$, $\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$.

По-іншому, число $\|A\|$ зветься нормою оператора, якщо для

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1$, $\|Ax_1\| > \|A - \varepsilon\| \cdot \|x_1\|$.

Приклад. Маємо відображення $R^n \to R^1$,

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n .$$

$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – фіксований вектор.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – змінний вектор.

Знайдемо норму оператора

$$\|Ax\| = |Ax| = \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{\text{Нерівність Коші–Буняковського}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \|x\| ,$$

$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} .$$

Покажемо, що насправді $\|A\|$ рівна правій частині. Для цього достатньо знайти елемент x, щоб нерівність перетворювалася б в рівність. Розглянемо елемент $x = \left(\frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \right)$, тоді:

$$\|Ax\| = |Ax| = \frac{a_1^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} + ... + \frac{a_n^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} .$$

Контрольні запитання.

1. Дати означення лінійного оператора.
2. Дати означення неперервності лінійного оператора.
3. Який оператор називається обмеженим?
4. Що називається нормою оператора?
5. Дати означення лінійного функціоналу. Навести приклади.
6. Який загальний вигляд лінійних функціоналів у просторах R^n і $C_{[a,b]}$?
7. Який оператор називається оборотним?

Вправи.

1. Розглянемо у просторі неперервних функцій на відрізку $[a,b]$. оператор, який визначається формулою $\varphi(s)=\int_a^b k(s,t)\gamma(t)dt,$ де $k(s,t)$ – деяка фіксована неперервна функція двох змінних. Довести лінійність даного оператора.
2. Показати, що оператор диференціювання $f(t)=f'(t)$, який діє в підпросторі неперервних функцій, є лінійним, але не неперервним.
3. Довести, що в просторі R^n будь-який лінійний функціонал може бути поданий за формулою $y=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$, де $a=(a_1,a_2...a_n)$ цілком певний вектор, а $x=(x_1,x_2...x_n)$ – довільний вектор.
4. Знайти норму оператора, який діє з простору R^n в просторі R^1 і який визначається рівністю $y=Ax=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

Розв'язання.

1. Маємо: $A(\alpha x_1+\beta x_2)=S\int_a^b k(s,t)(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))dt=$ $=\alpha\int_a^b k(s,t)x_1(t)dt+\beta\int_a^b k(s,tx_2(t)dt=\alpha Ax_1+\beta Ax_2$, що й доводить лінійність оператора.
2. Лінійність даного оператора очевидна. Той факт, що даний оператор не є неперервним випливає, наприклад, з того, що послідовність $\varphi_n(t)=\dfrac{\sin(nt)}{n}$ збігається до нуля (в метриці $C_{[a,b]}$), а послідовність $\varphi_n'(t)=\cos nt$ ні.

3. Подамо x через одиничні вектори $\vec{e_i}$ за формулою $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Тоді, використавши лінійність функціонала, дістанемо
$Ax = A(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1Ae_1 + ... + x_nAn_n = a_1x_1 + ... + a_nx_n$, що й треба було довести.
4. Маємо, що $\|Ax\| = |Ax| \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \|x\|$. За означенням норми оператора виходить, що $\|A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.
Розглянемо елемент $x^* = \left(\frac{a_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_n^2}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_n^2}}\right)$. Оскільки $\| Ax^* \| = |Ax| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$, то $\|A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

<u>Задачі.</u>

1. Довести, що коли лінійний оператор А неперервний в одній точці x_0 лінійного нормованого простору R, то він неперервний в R.
2. Довести, що будь-який обмежений лінійний оператор є неперервним.
3. Встановити загальний вигляд лінійного функціонала в просторі l_2.
4. Дано функціонали
   – $Ax = x(t_0),\ x(t) \in C_{[a,b]},\ t_0$ – фіксована точка із сегмента $[a,b]$.
   – $Ax = x_0(t)x(t),\ x(t) \in C_{[a,b]},\ x_0(t)$ – фіксована точка із сегмента $C_{[a,b]}$.

– $Ax=\int_a^b x(t)dt,\ x(t)\in C_{[a,b]}$

– $Ax=x,\ x=(x_1,...,x_n)\in R^n$

Дослідити дані функціонали на лінійність, обмеженість і знайти їх норми.

5. Чи буде лінійним оператор $Ax=u+x(u),\ 0\le u\le 1$?
6. Чи буде лінійним оператор $Ax=u+x(0),\ 0\le u\le 1$? Чи буде він неперервним оператором з $C_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$?

ЛІНІЙНІ ДОДАТНІ ОПЕРАТОРИ

В теорії наближень функції, фундаментальну роль відіграє теорема Вейєрштрасса, про те, що будь-яку неперервну функцію $f(x)$ на сегменті $[a,b]$. можна як завгодно точно наблизити алгебраїчним многочленом.

Якщо функція достатньо гладка (має багато похідних) і залишковий член формули Тейлора прямує до нуля, то теорема Вейєрштрасса очевидна. В ролі многочлена в цьому випадку виступатиме многочлен Тейлора.

Однак функція може мати похідні всіх порядків, і її не можна наблизити многочленом Тейлора.

Крім того можна уявити функцію, яка є неперервною і немає похідну в жодній точці. Виявляється, що й таку функцію можна наблизити алгебраїчним многочленом. Доведемо теорему Вейєрштрасса за допомогою лінійних додатних операторів.

Розглянемо лінійний оператор $L(f,x)$, який заданий у просторі неперервних функцій $C_{[a,b]}$, так, що він залежить від функції f і від x. Прикладом такого оператора можуть бути многочлени Бернштейна $B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$.

Означення. Лінійний оператор $L(f,x)$ зветься *додатним*, якщо він кожній невід'ємній функції $f(x)$ ставить у відповідність невід'ємне значення оператора. Оператор Бернштейна буде таким оператором для функцій f, які задані на $[0,1]$.

Ясно, що коли $f_2 \ge f_1$, то $L(f_2,x) \ge L(f_1,x)$. Справді, $f_2 - f_1 \ge 0$, тоді $L(f_2,x) - L(f_1,x) \ge 0$, $L(f_2 - f_1, x) \ge 0$.

Теорема (Коровкіна). Нехай маємо послідовність лінійних додатних операторів $L_n(f,x)$, які задані в просторі неперервних функцій $C_{[a,b]}$ і виконуються умови:

1. $L_n(1,x) = 1 + \alpha_n(x)$,
2. $L_n(t,x) = x + \beta_n(x)$,
3. $L_n(t^2,x) = x^2 + \gamma_n(x)$,

де $\alpha_n, \beta_{n,}, \gamma_n$ – нескінченно малі, які рівномірно по всіх x прямують до нуля, при $n \to \infty$. Тоді послідовність лінійних операторів рівномірно прямує до неперервної функції $f(x)$.

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то за першою теоремою Вейєрштрасса вона буде обмежена, тобто:

$-M \le f(x) \le M$,

$-2M \le f(t) - f(x) \le 2M$. (1)

За теоремою Кантора функція $f(x)$ буде рівномірно неперервна на $[a,b]$. Це означає, що для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|t - x| < \delta$:

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon,$

$-\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$. (2)

З нерівностей (1) і (2) випливає така нерівність:

$$-\varepsilon - \frac{2M(t-x)^2}{\delta^2} < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M(t-x)^2}{\delta^2}. \quad (3)$$

Потрібно проаналізувати два випадки, коли $|t-x| < \delta$ і $|t-x| \ge \delta$. Подіємо на нерівність (3) оператором і врахуємо, що він додатній і лінійний.

$$-\varepsilon L_n(1,x)-\frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2,x)<L_n(f,x)-f(x)L_n(1,x)<\varepsilon L_n(1,x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2,x) \quad (4)$$

Маємо: $L_n((t-x)^2,x)=L_n(t^2,x)-2xL_n(t,x)+x^2L_n(1,x)=$

$=x^2+\gamma_n(x)-2x(x+\beta_n(x))+x^2(1+\alpha_n(x))=\gamma_n(x)-2x\beta_n(x)+x^2\alpha_n(x)=\theta_n(x)\to 0$, при $n\to\infty$.

Тоді нерівність (4) набуває вигляду :

$$-\varepsilon(1+\alpha_n(x))-\frac{2M}{\delta^2}\theta_n(x)<L_n(f,x)-f(x)(1+\alpha_n(x))<\varepsilon(1+\alpha_n(x))+\frac{2M}{\delta^2}\theta_n(x).$$

При досить великому натуральному *M*, ми можемо досягти того, що буде виконуватися нерівність:

$$-2\varepsilon<L_n(f,x)-f(x)<2\varepsilon,$$

$$|L_n(f,x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

А це і доводить, що послідовність лінійних додатних операторів прямує до $f(x)$ рівномірно (бо нерівність виконується для всіх *x*).

Теорема доведена.

<u>Теорема Бернштейна.</u> Нехай маємо функцію $f(x)$, яка неперервна на сегменті $[0,1]$. Тоді многочлени Бернштейна $B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ прямують до $f(x)$ рівномірно.

<u>Доведення.</u> Для доведення достатньо переконатись, що для многочленів Бернштейна виконуються умови теореми Коровкіна.

Справді, даний оператор додатний і лінійний. Крім того маємо:

1. $B_n(1,x)=\sum_{k=0}^{n}1\cdot\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1=1+0$, $\alpha_n(x)=0$.

Перша умова виконується.

2. $B_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$,

$$\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}=\frac{(n-1)...(n-k+1)}{(k-1)!}=C_{n-1}^{k-1}.$$

Будемо мати:

$$B_n(t,x)=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^k\left(1-x\right)^{n-k}=x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}\left(1-x\right)^{n-1-(k-1)}=x\left(x+(1-x)\right)^{n-1}=x=x+0,$$

$\beta_n=0$.

3. $B_n(t^2,x)=x^2+\gamma_n(x)$,

$$B_n(t^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n-1}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-2-(k-2)}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n}=x^2-\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}=$$

$=x^2+\gamma_n(x),\ \gamma_n(x)$ – нескінченно мала.

Всі умови теореми Коровкіна виконуються. Отже, многочлени Бернштейна рівномірно прямують до функції $f(x)$, яка задана на $[0,1]$.

<u>Теорема Вейєрштрасса.</u> Для будь-якої функції $f(x)$ неперервної на довільному сегменті $[a,b]$ існує послідовність алгебраїчних многочленів $P_n(x)$, які рівномірно прямують до функції $f(x)$.

<u>Доведення.</u> Зробимо заміну $x=a+(b-a)y$, якщо $x=a$, *y=0*,

$x=b$, *y=1*.

Тоді функція $f(a+(b-a)y)=\varphi(y)$ задана на сегменті $[0,1]$. Цю функцію $\varphi(y)$, яка вже задана на $[0,1]$, ми можемо як завгодно точно наблизити многочленом Бернштейна $P_n(y)$:

$\left|\varphi(y)-P_n(y)\right|<\varepsilon$.

Повертаємось до старої змінної *x*: $y=\dfrac{x-a}{b-a}$. В результаті цієї заміни функція $\varphi(y)$ перетвориться в $f(x)$, $x\in[a,b]$, а $P_n(y)$ буде алгебраїчним многочленом $P_n^*(x)$. Матимемо, що $\left|f(x)-P_n^*(x)\right|<\varepsilon$.

Теорема доведена.

Контрольні запитання.

1. Який оператор на просторі неперервних функцій називається додатнім?
2. Довести лінійність й додатність операторів Бернштейна і Валле-Пуассона.
3. Довести теорему Коровкіна про збіжність послідовності лінійних додатніх операторів до неперервної функції $f(x)$.
4. Довести теорему Бернштейна.
5. Довести теорему Вейєрштрасса про збіжність послідовності алгебраїчних многочленів до неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Зразок контрольної роботи.

1. $f(x)=\frac{1}{2}\ln x,\ 1\le x\le\infty$. Довести, що дане відображення стискаюче. Однак рівняння $x=f(x)$ не має дійсних коренів. Чому?
2. Довести, що замкнений одиничний квадрат є компакт.
3. У просторі $\boldsymbol{R}_0^n$ норму елемента введено за формулою $\|x\|=\max|x_i|$. Перевірити виконання аксіоми норми.
4. Знайти норму функціонала $Ax=\int\limits_{-4}^{4}(t^2-1)x(t)dt,\quad x(t)\in C_{[a,b]}$
5. За допомогою леми Гейне-Бореля довести першу теорему Больцано-Коші.

Розв'язання.

1. Дане відображення не є відображенням в себе. (Чому?). Отже, не виконується одна з умов теореми Банаха.

2. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса з обмеженої послідовності у просторі R_2 можна виділити збіжну підпослідовність. В силу замкненості одиничного квадрата границя підпослідовності належатиме даному квадрату.
3. Маємо:

   a). $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі координати вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ рівні нулеві;

   b). $\|\lambda x\| = \max\limits_i |\lambda x_i| = |\lambda| \max\limits_i |x_i| = |\lambda| \|x\|$;

   c). $|x_l + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max\limits_i |x_i| + \max\limits_i |y_i| = \|x\| + \|y\|$.

   Дана нерівність виконується при всіх i, зокрема й тоді, коли в лівій частині стоїть максимум з усіх і, тобто $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
4. $\|Ax\| = |Ax| = \left| \int\limits_{-2}^{2} (t^2 - 1) x(t) dt \right| \leq \int\limits_{-2}^{2} \left| t^2 - 1 \right| \left| x(t) \right| dt \leq \int\limits_{-2}^{2} \left| t^2 - 1 \right| \left\| x(t) \right\| dt =$

   $= \|x\| \int\limits_{-2}^{2} \left| t^2 - 1 \right| dt = \|x\| \cdot 2 \left(\int\limits_0^1 (1 - t^2) dt + \int\limits_1^2 (t^2 - 1) dt \right) = 4\|x\|$. Отже, $\|A\| \leq 4$.

   Взявши тепер в якості функції $x(t)$ дещо згладжену функцію $sign(t^2 - 1)$, переконаємось, що насправді $\|A\| = 4$.
5. Припустимо, міркуючи від супротивного, що в жодній точці сегмента $[a, b]$ функція $f(x)$ не перетворюється в нуль, тобто зберігає знак у всіх внутрішніх точках сегмента $[a, b]$. В силу неперервності функція $f(x)$ зберігатиме знак і в деякому околі точки x. Ця система околів утворює нескінченне відкрите покриття сегмента $[a, b]$. За лемою Гейне-Бореля з даного нескінченного покриття можна виділити скінченне підпокриття, в кожному з інтервалів якого функція зберігає знак. А це суперечить тому, що на кінцях сегмента $[a, b]$ функція має різні знаки.

ПРОГРАМНІ ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Із історії виникнення та розвитку функціонального аналізу. Предмет функціонального аналізу.
2. Метричні простори. Приклади.
3. Послідовності в метричних просторах. Границя послідовності. Властивості.
4. Збіжність у метричних просторах. Збіжність в R^n.
5. Збіжність у просторі l_2.
6. Збіжність у просторі $C_{[a,b]}$.
7. Околи точок в метричному просторі. Відкриті і замкнені множини, зв'язок між ними.
8. Відображення метричних просторів. Приклади неперервних відображень. Критерій неперервності.
9. Зв'язність множини та її збереження при неперервному відображенні.
10. Повнота метричних просторів. Повнота замкненого підпростору повного простору.
11. Теорема про вкладені кулі.
12. Повнота $C_{[a,b]}$.
13. Повнота R^n.
14. Повнота l_2.
15. Принцип стискуючих відображень, теорема Банаха.
16. Застосування т. Банаха до розв'язування рівнянь типу $x = f(x)$, $F(x) = 0$.
17. Застосування т. Банаха до розв'язування n лінійних рівнянь з n невідомими.
18. Застосування т. Банаха для доведення існування та єдності розв'язку задачі Коші диференціального рівняння $y' = f(x, y)$.

19. Застосування теореми Банаха для доведення існування та єдності розв’язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь.
20. Розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.
21. Розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь Гаммерштейна.
22. Розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду.
23. Компактність. Приклад простору у якому не виконується теорема Больцано-Вейєрштрасса.
24. Теорема про замкненість та обмеженість компакту.
25. Компакти в R^n .
26. Компактність образу при неперервному відображенні.
27. Неперервність оберненого відображення компакту.
28. Теорема Кантора на компакті.
29. Числові функції на компакті (І і ІІ теореми Вейєрштрасса).
30. Лінійні простори. Приклади. Нескінченно вимірні простори.
31. Нормовані простори. Приклади. Метрика, породжена нормою.
32. Нерівність Коші-Буняковського в довільному лінійному просторі.
33. Евклідові простори. Ортогональність.
34. Лінійні оператори. Неперервність і обмеженість.
35. Норма лінійного оператора. Приклади.
36. Лінійні функціонали. Загальний вигляд лін. функціоналу у деяких просторах.
37. Лінійні додатні оператори. Теорема Коровкіна.
38. Теорема Бернштейна.
39. Теорема Вейєрштрасса про наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами.

ЛІТЕРАТУРА

1) Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.—К.:Вища школа, 1974 – 624с.;

2) Давидов М.О. Курс математичного аналізу, т.3. – К.: Вища школа, 1979–384с.;

3) Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980 – 496с.;

4) Фішман І.М. Основи теорії функцій дійсної змінної. К.: Радянська школа, 1963 –226с.;

5) Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций: учеб. пособие. – К.: Высшая школа, 1990 – 660с.;

6) Люстерик Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функціонального анализа. – М.: Высшая школа, 1982 –272с.

7) Столярчук В.К., Присяжнюк І.М. Функціональний аналіз. Навчально – методичні плани проведення методичних занять з функціонального аналізу для студентів ІІ курсу спеціальностей "Прикладна математика", "Інформатика". – Рівне, 2003р.;

8) Демчик С.П. Теорія функцій дійсної змінної. Методичний посібник для самостійної роботи студентів математичних спеціальностей. Частина 4. – Рівне: РДГУ, 2000р., – 42ст..

9) Бомба А.Я., Столярчук В.К. Дійсні числа. – Рівне, 1994р.