

В. О. Сідлецький

ЛЕКЦІЇ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ
МЕХАНІКИ

Рецензенти:

доктор хімічних наук, професор, завідувач кафедри фізики РДГУ
Колупаєв Б.С.

доктор технічних наук, професор кафедри інформатики та прикладної
математики РДГУ *Бомба А.Я.*

Сідлецький В.О. **Лекції з теоретичної механіки:** Навчальний посібник. – Рівне: РДГУ, 2006. – 292 с.

В посібнику викладені основні положення теоретичної механіки, включаючи елементи спеціальної теорії відносності. Основна увага приділяється дослідженню класичних і сучасних задач механіки, аналізу варіаційних принципів та найбільш змістовних з точки зору теорії розділів динаміки і методів аналітичної механіки.

Теоретичний матеріал ілюструється задачами, які мають прикладну спрямованість.

Для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, викладачів механіки, аспірантів.

Навчальний посібник

СІДЛЕЦЬКИЙ Валентин Олександрович

ЛЕКЦІЇ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Рекомендовано до друку науково-методичною радою РДГУ (протокол № 5 від 12.04.2006 р.)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	9
Лекція 1. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	11
1.1. Завдання кінематики. Системи відліку. Арифметизація простору і часу	11
1.2. Кінематичне вивчення механічного руху. Векторний, координатний і природний способи вивчення руху	13
1.3. Швидкість і прискорення для різних способів задання руху	15
1.4. Криволінійні координати. Проекції швидкості та прискорення на осі криволінійних координат	25
1.5. Секторна швидкість	30
Література	31
Лекція 2. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	32
2.1. Поняття про тверде тіло та ступені його вільності. Класифікація рухів твердого тіла	32
2.2. Теорема про траєкторії, швидкості та прискорення твердого тіла, що рухається поступально	34
2.3. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Кутові характеристики обертального руху	35
2.4. Лінійні швидкості та прискорення окремих точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі	36
2.5. Вектор кутової швидкості та кутового прискорення. Формула Ейлера	38
Література	41
Лекція 3. ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	41
3.1. Рівняння плоского руху. Переміщення плоскої фігури	41
3.2. Швидкості точок плоскої фігури	45
3.3. Миттєвий центр швидкостей. Центроїди	49
3.4. Прискорення точок плоскої фігури. Миттєвий центр прискорень ...	55
Література	60
Лекція 4. РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА, ЩО МАЄ НЕРУХОМУ ТОЧКУ	61
4.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки	61

4.2. Теорема Ейлера-Даламбера.....	64
4.3. Миттева вісь обертання. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення.....	66
4.4. Швидкості та прискорення точок тіла	69
4.5. Рухомий і нерухомий аксоїди. Теорема Пуансо	71
Література.....	73
Лекція 5. СКЛАДНИЙ РУХ.....	73
5.1. Поняття про відносний, переносний та абсолютний рухи точки ...	73
5.2. Зв'язок між повною і локальною похідними векторної функції по часу	75
5.3. Теорема додавання швидкостей і прискорень	76
5.5. Перетворення координат Галілея	79
Література.....	82
Лекція 6. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ.....	82
6.1. Основні поняття і завдання динаміки. Інерціальні системи відліку.....	82
6.2. Закони Ньютона	84
6.3. Принцип відносності Галілея.....	88
6.4. Диференціальні рівняння руху точки.....	89
6.5. Дві задачі динаміки. Сталі інтегрування і початкові умови	90
6.6. Рух невільної точки. Реакції зв'язків. Рівняння Лагранжа I-го роду.....	92
6.6.1. Рух точки по гладкій поверхні.....	93
6.6.2. Рух точки по гладкій кривій.....	95
6.7. Коливний рух матеріальної точки.....	96
6.8. Динаміка механічної системи	104
6.8.1. Задання станів системи матеріальних точок у класичній механіці	104
6.8.2. Класифікація сил, що діють на точки системи. Властивості внутрішніх сил.....	104
6.8.3. Диференціальні рівняння руху системи.....	106
Література.....	107
Лекція 7. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ.....	107
Вступ	107
7.1. Імпульс точки і механічної системи. Теорема про зміну імпульсу. Закон збереження імпульсу	108

7.2. Момент сили. Момент імпульсу точки та механічної системи	110
7.3. Теорема про зміну кінетичного моменту точки і механічної системи. Теорема Резаля. Закон збереження моменту імпульсу...	113
7.4. Центр мас системи. Теорема про рух центру мас	116
Література	118
Лекція 8. МЕХАНІЧНА РОБОТА. КІНЕТИЧНА І ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ	118
8.1. Елементарна робота та робота на скінченному переміщенні	118
8.2. Кінетична енергія точки та механічної системи. Теорема Кеніга	122
8.3. Теорема про зміну кінетичної енергії	123
8.4. Потенціальне силове поле. Умова потенціальності стаціонарного силового поля	126
8.5. Закон збереження повної механічної енергії	129
8.6. Механічна подібність. Теорема віріала	130
Література	132
Лекція 9. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА	133
9.1. Момент інерції. Теорема Штейнера	133
9.2. Залежність моменту інерції від напрямку осі. Тензор інерції	136
9.3. Еліпсоїд інерції. Головні осі інерції	138
9.4. Визначення головних моментів інерції та напрямку головних осей	142
9.5. Момент імпульсу твердого тіла. Динамічне рівняння обертання твердого тіла	144
Література	147
Лекція 10. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ	148
10.1. Зв'язки та їх класифікація. Дійсні, можливі та віртуальні переміщення	148
10.2. Віртуальна робота. Ідеальні зв'язки	150
10.3. Принцип віртуальних переміщень. Принцип Даламбера. Загальне рівняння механіки	152
10.4. Поняття про узагальнені координати, узагальнені швидкості та узагальнені сили. Узагальнені сили для систем в потенціальних силових полях	154
Література	157
Лекція 11. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА	158

11.1. Загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах. Рівняння Лагранжа другого роду.....	158
11.2. Кінетична енергія системи як квадратична функція узагальнених швидкостей.....	160
11.3. Рух системи в консервативному силовому полі. Функція Лагранжа та інтеграли руху	161
Література.....	164
Лекція 12. РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА.....	164
12.1. Канонічні змінні. Функція Гамільтона.....	164
12.2. Канонічні рівняння Гамільтона	166
12.3. Поняття про фазовий простір. Теорема Ліувілля.....	167
12.4. Дужки Пуассона	170
Література.....	174
Лекція 13. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ	174
13.1. Вступні зауваження. Класифікація принципів	174
13.2. Принцип Гамільтона-Остроградського	176
13.3. Принцип Мопертюї-Лагранжа	179
13.4. Два методи побудови класичної механіки.....	181
13.5. Канонічні перетворення.....	183
Література.....	185
Лекція 14. РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА–ЯКОБІ.....	186
14.1. Рівняння Гамільтона-Якобі. Теорема Якобі	186
14.1.1. Консервативна система.....	189
14.1.2. Метод розділення змінних	190
14.1.3. Змінні “дія-кут”	192
14.2. Адіабатичні інваріанти	197
Література.....	201
Лекція 15. ВИБРАНІ ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ	202
15.1. Динаміка відносного руху	202
15.2. Неінерціальність системи відліку, пов’язаної з Землею.....	205
15.2.1. Відносна рівновага точки поблизу поверхні Землі	205
15.2.2. Вплив обертання Землі на вільне падіння тіл.....	206
15.2.3. Вплив обертання Землі на рух тіла по горизонтальній площині	208
15.3. Принцип еквівалентності. Невагомість.....	210
15.4. Рух тіл змінної маси.....	212

15.4.1. <i>Поняття про тіло змінної маси. Рівняння Мещерського ...</i>	212
15.4.2. <i>Задачі Ціолковського</i>	214
Література	216
Лекція 16. РУХ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОМУ ПОЛІ	217
16.1. Закони руху і рівняння траєкторії частинки в централь- симетричному полі	217
16.2. Рух частинки в полі кулонівського потенціалу. Закони Кеплера	221
16.3. Задача двох тіл	225
16.4. Розсіювання частинок на силовому центрі	227
16.4.1. <i>Пружне розсіювання частинок</i>	227
16.4.2. <i>Діаграми швидкостей та імпульсів</i>	231
16.4.3. <i>Ефективний поперечний переріз розсіювання</i>	233
16.4.4. <i>Ефективний переріз розсіювання частинок з електростатичною взаємодією. Формула Резерфорда</i>	235
16.4.5. <i>Захоплення частинок. Повний переріз захоплення</i>	237
Література	238
Лекція 17. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ	238
17.1. Ознаки стійкості положення рівноваги	238
17.2. Коливання систем з багатьма ступенями вільності	241
17.2.1. <i>Інтегрування рівнянь малих коливань</i>	241
17.2.2. <i>Нормальні координати</i>	245
17.2.3. <i>Затухаючі коливання. Дисипативна функція</i>	247
Література	249
Лекція 18. НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ	249
18.1. Метод Крилова-Боголюбова	249
18.2. Резонанс у нелінійних коливних системах	252
Література	257
Лекція 19. РЕЛЯТИВІСТСЬКА КІНЕМАТИКА	258
19.1. Простір і час у спеціальній теорії відносності	258
19.1.1. <i>Передумови спеціальної теорії відносності та її експериментальне обґрунтування. Постулати Ейнштейна ..</i>	258
19.1.2. <i>Перетворення Лоренца та їх кінематичні наслідки. Перетворення швидкостей</i>	261
19.2. Простір Мінковського	267
19.2.1. <i>Поняття про чотиривимірний простір Мінковського</i>	267

19.2.2. Перетворення Лоренца як обертання системи координат у просторі Мінковського	270
19.2.3. Чотиривимірні швидкість та прискорення	271
Література	274
Лекція 20. РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА.....	274
20.1. Основне рівняння релятивістської динаміки.....	274
20.1.1. Чотиривимірний імпульс частинки.....	274
20.1.2. Чотиривимірна сила. Релятивістськи коваріантне узагальнення другого закону Ньютона	275
20.2. Релятивістська енергія	277
20.2.1. Фізичний зміст часової компоненти 4-імпульсу. Релятивістська енергія	277
20.2.2. Маса та її властивості. Частинки з нульовою масою	280
Література	284
Список рекомендованої та використаної літератури.....	285
Предметний покажчик	287

Передмова

Чим ближче ми знаходимося до деякої істини, тим простішими виявляються основні закони, що її описують.

У. Оккам

Для розв'язання принципово важливих і актуальних задач, вдосконалення свого професійного рівня майбутні фахівці з фізики повинні володіти достатньою підготовкою в області фундаментальних наук. З цієї точки зору теоретична механіка була і залишається не тільки однією з дисциплін, що дає поглиблені знання про явища, які відбуваються в природі й техніці, але й служить засобом виховання у майбутніх спеціалістів необхідних творчих навиків до побудови математичних моделей реальних фізичних процесів, вироблення вмінь до наукових узагальнень та висновків. Як наслідок, сучасний підхід до викладання принципових питань теоретичної механіки, особливо в умовах впровадження новітніх освітніх технологій, вимагає адекватного його втілення в навчальних і методичних посібниках.

Мета запропонованого курсу лекцій полягає в стислому, цілісному та послідовному викладі основних задач і методів теоретичної механіки.

Даний посібник повністю відповідає програмі курсу теоретичної механіки для вищих педагогічних закладів освіти і містить основні положення кінематики, динаміки, аналітичної механіки та спеціальної теорії відносності. Питання статички розглядаються як часткові задачі дина-

міки, що дозволило більшу увагу приділити додатковим положенням аналітичної механіки, які необхідні для вивчення інших теоретичних курсів. Це, зокрема, стосується гамільтонового формалізму та варіаційних методів – потужних інструментів дослідження різноманітних задач в широкому колі математичних і фізичних додатків.

Значна увага в посібнику приділена дослідженню класичних і сучасних задач механіки, коливним процесам у лінійних та нелінійних системах, проблемам релятивістської механіки. Конкретні приклади, що супроводжують розгляд найбільш складних та принципово важливих питань курсу, допоможуть студентам більш повно та різнопланово ознайомитися з методами теоретичного аналізу і оволодіти навиками їх практичного застосування.

Змістове навантаження посібника дозволяє оптимізувати навчальний матеріал при будь-якій реструктуризації курсу шляхом здійснення перерозподілу питань основної та варіативної частини.

Навчальний посібник з теоретичної механіки призначений для широкого спектру напрямків підготовки фахівців, оскільки питання і методи, що розглядаються в ньому, знаходять своє застосування в багатьох інших областях фізики та суміжних дисциплін.

Лекція 1

Кінематика матеріальної точки

1.1. Завдання кінематики. Системи відліку. Арифметизація простору і часу

Рух, як спосіб існування матерії, так чи інакше притаманний усім природним процесам. Він супроводжує кожне явище, розкриваючи при цьому внутрішній його зміст, визначає собою властивості і прояви оточуючої нас дійсності. Ця особливість матеріального світу в механіці знаходить своє відображення тією частиною, яка стосується механічного руху – найбільш простої форми руху тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну з часом взаємного положення тіл у просторі. При цьому слід зауважити, що в класичній механіці простір і час представлені своїми найпростішими абсолютними моделями, існування яких постулюється. Абсолютні простір і час вважаються незалежними один від одного; в цьому полягає основна відмінність класичної моделі простору і часу від її аналогу в теорії відносності, де прості і час взаємопов'язані.

Вважається, що абсолютний простір тривимірний евклідовий, однорідний та ізотропний. Як показують спостереження, для невеликих за розмірами областей реального фізичного простору евклідова геометрія справедлива.

Абсолютний час в класичній механіці вважається неперервно змінною величиною. Час однорідний, однонапрямлений, однаковий в усіх точках простору і не залежить від руху матерії.

Звичайно, характер руху матеріальних об'єктів визначається рядом причин, в тій чи іншій мірі здатних приводити до його зміни. Однак, в ряді важливих випадків можна підійти до вивчення руху з більш вузької, геометричної точки зору, абстрагуючись від будь-яких властивостей матерії та сил, а також несуттєвих (для конкретного руху, що розглядається) деталей. Саме в такому аспекті механічний рух вивчається в *кінематиці*. Незважаючи на прийняту в даному розділі ступінь абстракції, яка зближує кінематику з геометрією, останні мають між собою велику відмінність. Кінематика, розглядаючи рух з геометричної сторони, разом з тим пов'язує його з часовими змінами. Тому результати, які встановлюються в кінематиці, мають велике самостійне значення.

Цілком природно, що кінематика, як один з розділів теоретичної механіки, оперує поняттями, застосовність яких визначається характером здійснюваного руху. Її предметом вивчення є матеріальні тіла, представлені своїми найпростішими моделями, що розглядаються у зв'язку зі зміною їх взаємного положення у просторі й часі.

Основною вихідною моделлю всіх матеріальних об'єктів у кінематиці (і механіці загалом) є матеріальна точка. *Матеріальною точкою називають найпростішу модель тіла довільної форми, розмірами якого за даних умов можна знехтувати і яке можна вважати геометричною точкою з зосередженою в ній масою цього тіла.* При цьому довільна сукупність матеріальних точок утворює механічну систему, або систему матеріальних точок.

Важливу роль в механіці (і кінематиці зокрема) відіграє поняття суцільного середовища і її частковий вид – *абсолютно тверде тіло*, під яким розуміють систему матеріальних точок, відстані між якими не змінюються при довільних переміщеннях цієї системи, що, безумовно, відповідає тому ступеню абстракції, котрий притаманний геометричним образам кінематики.

Основна задача кінематики полягає у тому, щоб задати або визначити положення рухомого тіла в будь-який момент часу. При цьому суттєвою особливістю змісту кінематики служить те, що рух матеріального об'єкту розглядається лише по відношенню до деякого довільно вибраного тіла чи сукупності декількох нерухомих одне відносно одного тіл, які приймають за тіло відліку. Жорстко пов'язуючи з тілом відліку систему координат і прилади для вимірювання довжин (кутів) і часу, отримують систему відліку, відносно якої розглядається рух матеріального об'єкту. Характерно, що вибір системи відліку є цілком довільним і його доцільність, продиктована максимальним спрощенням розв'язку основної задачі механіки, визначається конкретними умовами руху.

У системі відліку за допомогою операції вимірювання відстаней між двома точками кожній точці простору ставиться у відповідність три дійсні числа (для загальності позначимо їх q_1, q_2, q_3) – координати точки в тій чи іншій системі координат. Такий процес називається арифметизацією простору. Це свідчить про те, що на відміну від математики, де не розглядаються методи і матеріальні засоби арифметизації, для фізики вимірювання відрізків є вихідною операцією, без якої ніякі інші вимірюван-

ня неможливі.

Аналогічно відбувається й арифметизація часу. Момент часу t відповідає точці на осі часу, проміжок часу – інтервалу між двома точками на цій осі: $\Delta t = t_2 - t_1$. Час визначається за допомогою годинника, хід якого перевіряється за еталонним фізичним процесом, прийнятим за рівномірний.

Зауважимо, що арифметизація простору й часу залежить від вибору системи відліку і процесів вимірювання в ній. Нехай в деякій системі K відбулася подія в точці з координатами q_1, q_2, q_3 в момент часу t . В будь-якій іншій системі K' координати і час тієї ж події будуть: q'_1, q'_2, q'_3, t' . Інакше кажучи, результати вимірювань мають відносний характер.

1.2. Кінематичне вивчення механічного руху. Векторний, координатний і природний способи вивчення руху

Законом руху тіла називається спосіб його переходу із деякого довільного положення в просторі й часі в інше довільне положення. Траскторія точки – геометричне місце її послідовних положень у просторі відносно вибраної системи відліку. Розглянемо способи визначення руху точки.

Візьмемо довільну, наприклад прямокутну декартову систему координат $OXYZ$. Нехай точка M рухається по кривій AB (рис. 1.1). При цьому положення точки M у просторі визначається її радіус-вектором \vec{r} відносно початку координатної системи $OXYZ$. Зміна положення точки в процесі її руху супроводжується однозначною зміною радіус-вектора. Таким чином, рух точки вважається заданим, якщо відомий її радіус-вектор як функція часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Співвідношення (1.1) визначає положення точки в просторі в довільний момент часу і називається **векторним рівнянням руху**.

Для характеристики змінного вектора використовують поняття годографа. *Годографом вектора називається геометричне місце його кінців, якщо змінний вектор у різні моменти часу відкладати від од-*

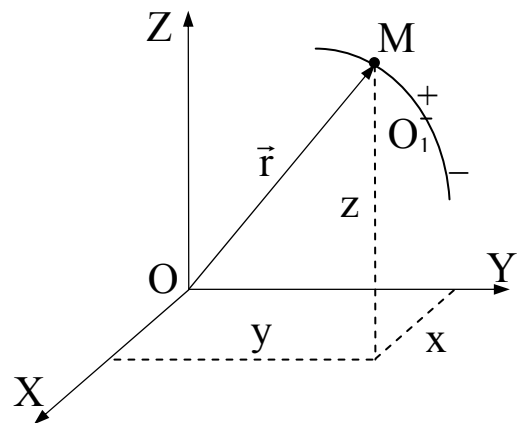


Рис. 1.1.

нієї й тієї ж спільної точки. Таким чином, годографом радіус-вектора, що задається рівнянням (1.1) є траєкторія руху точки.

Аналітично положення точки завжди визначається сукупністю трьох незалежних між собою чисел – координат. Покладемо, що точка M здійснює рух по відношенню до вибраної прямокутної системи координат $OXYZ$ (рис. 1.1). При русі точки в просторі її координати змінюються з часом, і по закону їх зміни можна судити про характер руху точки. Таким чином, координати x, y, z є деякими функціями часу:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1.2)$$

Ці рівняння називають *рівняннями руху точки в декартових координатах*. Замість декартових координат можна взяти будь-які інші: полярні, сферичні, циліндричні і т.д. Виражені як функції часу, вони дадуть рівняння руху точки у відповідній системі координат. Співвідношення (1.2) є рівняннями в параметричній формі деякої просторової кривої. Очевидно, що ця крива – траєкторія точки. Щоб отримати рівняння траєкторії у формі явних залежностей між координатами, потрібно виключити параметр часу t . Це можна зробити, наприклад, знайшовши час з третього рівняння системи (1.2): $t = \varphi(z)$. Підставивши знайдений вираз для t в перше і друге рівняння системи, отримаємо:

$$x = x[\varphi(z)] = \psi_1(z); \quad y = y[\varphi(z)] = \psi_2(z).$$

Отримані рівняння визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь.

Між векторним і координатним способами задання руху існує очевидний зв'язок. Прямокутні декартові координати x, y, z є проєкціями радіус-вектора \vec{r} , проведеного в точку M з початку координат (рис. 1.1), тобто

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей координат. Довжина і напрям радіус-вектора знаходяться із співвідношень

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad (1.3)$$

$$\cos(\vec{r} \wedge OX) = \frac{x}{r}, \quad \cos(\vec{r} \wedge OY) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\vec{r} \wedge OZ) = \frac{z}{r}, \quad (1.4)$$

Рух точки може бути визначений і по-іншому: заданням траєкторії і законом руху точки по цій траєкторії.

Нехай точка M (рис. 1.2) рухається по траєкторії AB . Для задання закону руху точки по траєкторії необхідно вибрати на траєкторії довільну точку O за початок відліку дугових координат S і вказати додатній напрям кривої. Таким чином, при русі точки кожному її положенню на кривій буде відповідати тільки одне значення S . Закон руху точки по траєкторії задається залежністю від часу дугової координати, що відраховується від точки O до миттєвого положення точки M на траєкторії:

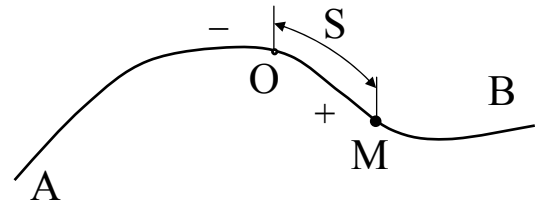


Рис. 1.2

$$S = S(t). \quad (1.5)$$

Функція (1.5) повинна бути неперервною і двічі диференційованою. Рівняння (1.5) називається **рівнянням руху точки по траєкторії**, а сам спосіб задання руху – природним (натуральним), або траєкторним.

Якщо задані рівняння руху в координатах, легко скласти й рівняння руху по траєкторії. Нехай дані рівняння руху точки у формі (1.2) і відомо, що в момент часу t_0 точка перебувала в початку відліку. Тоді диференціальна форма закону руху точки по траєкторії запишеться у вигляді

$$dS = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2} dt,$$

звідки

$$S = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2} dt.$$

Знак перед радикалом визначається тим, в якому напрямі – додатному чи від'ємному рухається точка в проміжку часу від t_0 до t .

1.3. Швидкість і прискорення для різних способів задання руху

Поняття швидкості руху тісно пов'язане з апіорними уявленнями про темпи розвитку тих чи інших природних процесів. Тому загальне і строге визначення фізичного змісту цієї основної характеристики руху має певні труднощі.

Розглянемо прямокутну декартову систему координат (рис. 1.3). Нехай \vec{r} – радіус-вектор початкового положення рухомої точки M у момент часу t . В інший момент часу $t' = t + \Delta t$ точка займе положення M' , яке визначатиметься радіус-вектором \vec{r}' . За час Δt радіус-вектор

точки зміниться на величину $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$.

Вектор $\Delta\vec{r}$, що з'єднує початкове та кінцеве положення точки, називається переміщенням точки за час Δt .

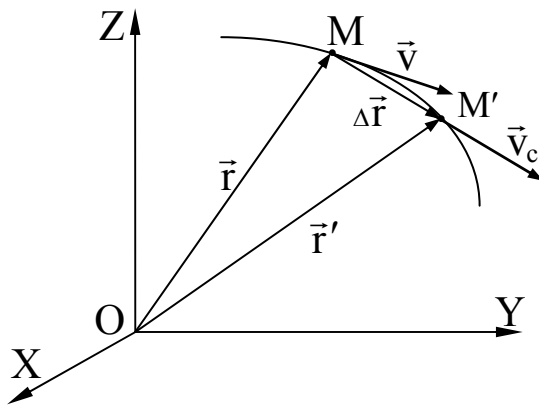


Рис. 1.3

Середньою швидкістю \vec{v}_c точки за час Δt називається відношення

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Очевидно, що середня швидкість паралельна переміщенню точки за час усереднення і не має конкретної точки прикладання на траєкторії.

Характерно, що середня швидкість залежить від часу усереднення. Чим менша величина проміжку часу Δt , тим точніше середня швидкість представляє бистроту переміщення. Тому цілком природним буде граничний перехід в рівності (1.6) при зменшенні Δt до нуля. **Границя відношення вектора переміщення до проміжку часу, протягом якого це переміщення відбувалось, коли проміжок прямує до нуля, називається швидкістю \vec{v} точки в даний момент часу:**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Швидкість точки напрямлена в бік її руху по граничному напрямку вектора $\Delta\vec{r}$ при Δt , прямує до нуля, тобто по дотичній до траєкторії в точці M (рис. 1.3). Таким чином, швидкість точки рівна першій похідній по часу від її радіус-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.8)$$

Фізичний зміст швидкості точки в момент часу t можна визначити наступним чином: **це та швидкість, яку мала б точка, якби, починаючи з моменту t , вона рухалась рівномірно і прямолінійно.**

Годографом вектора швидкості є лінія, яка визначає геометричне місце кінців цього вектора в різні моменти часу, якщо їх початки сумістити в одній спільній точці. Нехай рух точки розглядається в прямокутній системі координат (рис. 1.4,а). Для побудови годографа вектора швидкості вибирають довільну точку O' – полюс годографа, в яку паралельним перенесенням поміщають вектори швидкості для різних мо-

ментів часу без зміни їх величин. Кожній точці M траєкторії відповідатиме своя точка відображення M' на годографі швидкості (рис. 1.4,б).

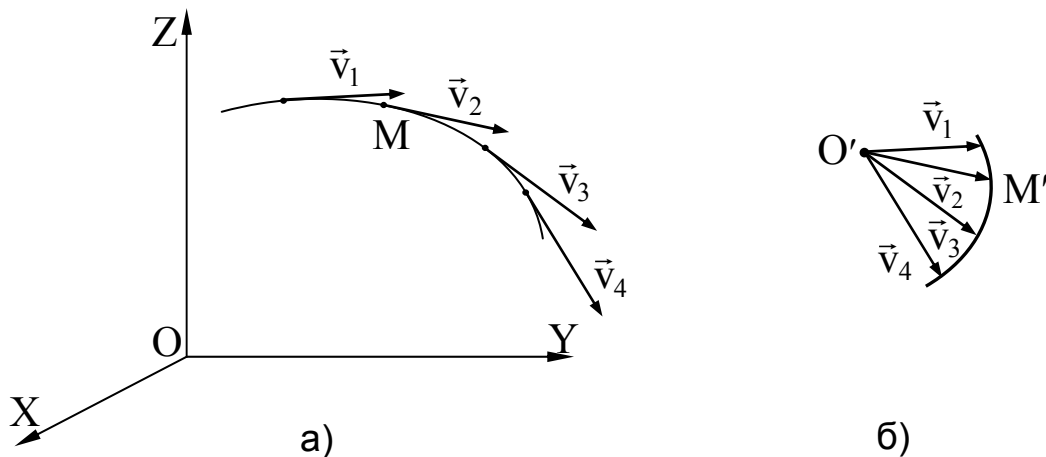


Рис. 1.4

Якщо точка рухається нерівномірно і непрямолінійно, то її швидкість змінюється, відповідно, за величиною і напрямом. Ця зміна швидкості в часі характеризується величиною, яка називається прискоренням.

Нехай точка в момент часу t має швидкість \vec{v} і займає на траєкторії положення M . В момент часу $t' = t + \Delta t$ ця точка володітиме швидкістю \vec{v}' і займе положення M' (рис. 1.5). За час Δt приріст швидкості

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}.$$

Для побудови вектора $\Delta \vec{v}$ потрібно перенести швидкість \vec{v}' паралельно самій собі в точку M і знайти геометричну різницю \vec{v}' і \vec{v} .

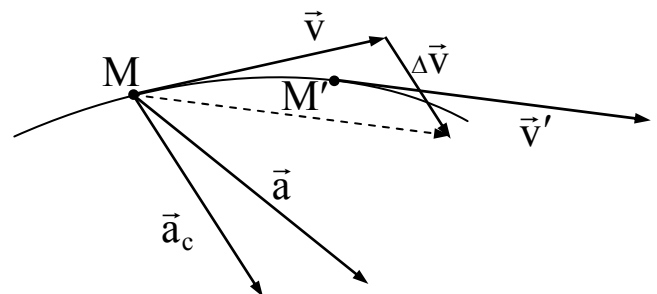


Рис. 1.5

Середнім прискоренням точки за час Δt називають відношення приросту швидкості до часу усереднення:

$$\vec{a}_c = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

Подібно до середньої швидкості, \vec{a}_c залежить від часу усереднення і не має конкретної точки прикладання на траєкторії, а тому зображена в точці M умовно. Напрямок середнього прискорення співпадає з напрямом приросту швидкості.

Таким чином, середнє прискорення характеризує середню зміну вектора швидкості, віднесено до одиниці часу. Для того, щоб визначити

прискорення точки в даний момент часу, у формулі (1.9) здійснюють граничний перехід при Δt , прямуючому до нуля.

Прискоренням \vec{a} точки в момент часу t називається границя, до якої прямує середнє прискорення при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.10)$$

Оскільки швидкість точки є векторною функцією часу, то границя (1.10) рівна похідній вектора швидкості по часу:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}. \quad (1.11)$$

Так як вектор швидкості рівний похідній по часу від радіус-вектора рухомої точки, то

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.12)$$

Отже, якщо рух точки задано векторним способом, то прискорення її обчислюють за формулами (1.11) або (1.12). Прискорення точки завжди

напрявлене в бік угнутості траєкторії (рис. 1.5). Якщо розглянути годограф вектора швидкості точки (рис. 1.6), то стає очевидним, що вектор прискорення, як граничне положення \vec{a}_c при Δt , прямуючому до нуля, має напрям дотичної до годографа швидкості.

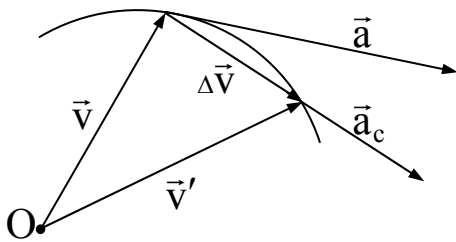


Рис. 1.6

Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі задання руху зводиться до знаходження проєкцій цих векторів на координатні осі. Нехай рух точки задано рівняннями (1.2). Тоді радіус-вектор точки можна представити у вигляді розкладу по ортах нерухомої декартової системи координат:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

Диференціюючи дане співвідношення по часу і враховуючи, що одиничні вектори координатних осей сталі за величиною і напрямом, на основі означення (1.3) отримуємо:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}. \quad (1.13)$$

З іншого боку, розкладаючи вектор швидкості по ортах координатних осей, маємо:

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z. \quad (1.14)$$

Порівнюючи останні співвідношення, отримуємо формули для проєкцій швидкості точки на осі декартової системи координат:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}. \quad (1.15)$$

Отже, *проекції вектора швидкості на осі нерухомої декартової системи координат рівні похідним по часу від відповідних координат.*

За проекціями визначають величину і напрям вектора швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad (1.16)$$

$$\cos(\vec{v} \wedge OX) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \cos(\vec{v} \wedge OY) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{v}; \quad (1.17)$$

$$\cos(\vec{v} \wedge OZ) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Знайдемо прискорення точки, диференціюючи, згідно (1.11), рівняння (1.14):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{i}\dot{v}_x + \vec{j}\dot{v}_y + \vec{k}\dot{v}_z. \quad (1.18)$$

В той же час вектор прискорення, як будь-який вектор, можна розкласти по одиничних векторах координатних осей:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z. \quad (1.19)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ортах осей у формулах (1.18) і (1.19) і приймаючи до уваги (1.15), отримаємо

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Отже, *проекції прискорення на координатні осі рівні похідним по часу відповідних проекцій швидкості або другим похідним відповідних координат.*

Якщо відомі проекції вектора прискорення на координатні осі, можна знайти його модуль і напрямні косинуси:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \quad (1.21)$$

$$\cos(\vec{a} \wedge OX) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos(\vec{a} \wedge OY) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad (1.22)$$

$$\cos(\vec{a} \wedge OZ) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Приклад 1.1. *Швидкість і прискорення точки в полярних координатах.*

Полярна система координат досить часто використовується для опису плоского руху. Нехай точка М здійснює плоский рух у площині рисунка (рис. 1.7). Виберемо в цій площині нерухому точку О – полюс, через яку проведемо полярну вісь ОХ. Полярними координатами точки

M називаються довжина r радіус-вектора точки і кут φ , утворений радіус-вектором з віссю OX . Полярний кут вважається додатним, якщо він відкладений від осі OX проти годинникової стрілки.

Отже, рівняння руху точки в полярних координатах мають вигляд

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t).$$

Введемо одиничний вектор \vec{r}_0 , який співпадає за напрямом з радіус-вектором точки, а також $\vec{\rho}_0$ – перпендикулярний до нього одиничний вектор, напрямлений в бік зростання кута φ (рис. 1.7). Загальний

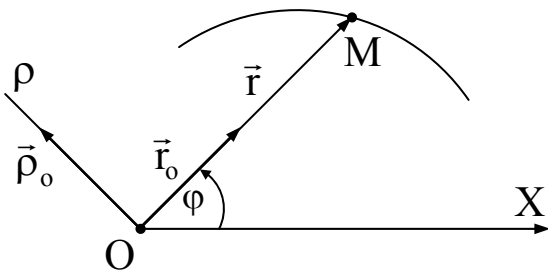


Рис. 1.7

вигляд розкладу вектора швидкості за ортами \vec{r}_0 і $\vec{\rho}_0$ полярної системи наступний:

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{r}_0 + v_\varphi \cdot \vec{\rho}_0,$$

де v_r і v_φ – проекції вектора швидкості, відповідно, на напрям радіус-вектора точки і напрям, перпендикулярний останньому.

Спроекуємо отриману рівність на полярну вісь:

$$v_x = v_r \cdot r_0 \cdot \cos \varphi - v_\varphi \cdot \rho_0 \cdot \sin \varphi.$$

Оскільки $r_0 = \rho_0 = 1$, то

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi. \quad (a)$$

З іншого боку, згідно визначення проекцій вектора швидкості на осі прямокутної системи координат

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(r \cdot \cos \varphi) = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (б)$$

Порівнюючи вирази (а) і (б), знаходимо шукані проекції вектора швидкості:

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}, \quad (1.23)$$

які називаються, відповідно, радіальною і трансверсальною складовими швидкості.

Проекції прискорення точки на осі полярної системи координат знайдемо, виконавши диференціювання по часу рівності (б):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \varphi + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot (-\sin \varphi) - \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \varphi - r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \varphi - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \varphi.$$

Спрощуючи останній вираз, отримуємо:

$$a_x = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi. \quad (в)$$

З іншого боку, розклавши вектор прискорення за ортами полярної системи:

$$\vec{a} = a_r \vec{r}_0 + a_\varphi \vec{\rho}_0$$

і спроектувавши отриману рівність на вісь OX , маємо:

$$a_x = a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi. \quad (\Gamma)$$

Порівнюючи вирази (в) і (г), отримуємо співвідношення для радіального a_r і трансверсального a_φ прискорень:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (1.24)$$

В силу ортогональності полярних координат модулі швидкості та прискорення, а також їх напрямки знаходяться за формулами

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}; \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2};$$

$$\cos(\vec{v} \wedge \vec{r}_0) = \frac{v_r}{v}; \quad \cos(\vec{v} \wedge \vec{\rho}_0) = \frac{v_\varphi}{v}; \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{r}_0) = \frac{a_r}{a}; \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{\rho}_0) = \frac{a_\varphi}{a}.$$

Для знаходження швидкості і прискорення точки у випадку природного задання руху, використаємо поняття *натурального триєдра*, або *природного тригранника*. З цією метою розглянемо деяку просторову криву, по якій рухається точка M (рис. 1.8). Положення цієї точки будемо визначати дуговою координатою S відносно початку відліку O , або радіус-вектором \vec{r} відносно довільно вибраної нерухомої точки O' . Проведемо через точку M дотичну до кривої, напрям якої в бік зростання S задамо одиничним вектором дотичної $\vec{\tau}$. Через проміжок часу Δt точка M перейде в положення M' , пройшовши дугу MM' , рівну ΔS . Одиничний вектор дотичної в точці M' позначимо $\vec{\tau}'$. Шляхом паралельного перенесення $\vec{\tau}'$ сумістимо його початок з початком вектора $\vec{\tau}$. Кут між вказаними векторами позначимо як $\Delta\varphi$. Якщо точка M'

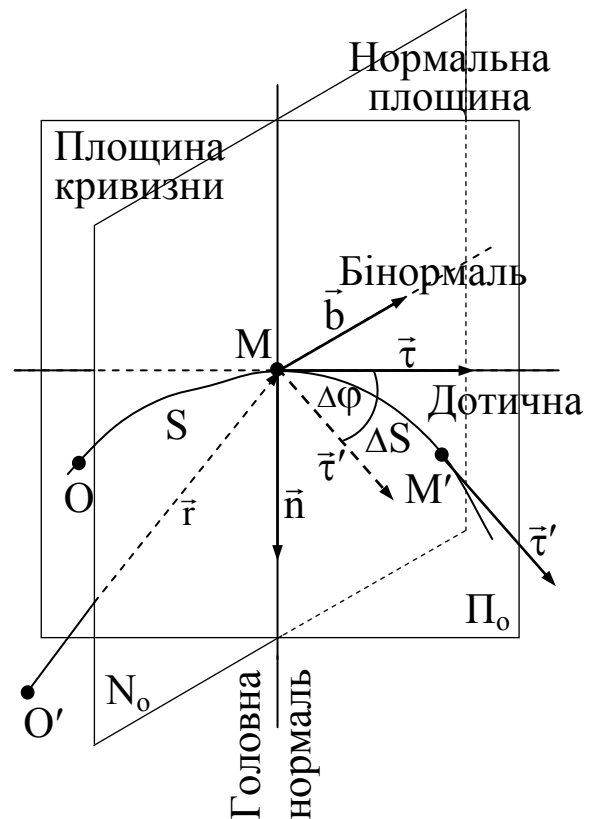


Рис. 1.8.

наближається до точки M , то площина, в якій лежать вектори $\vec{\tau}'$ і $\vec{\tau}$, буде повертатись навколо орта дотичної $\vec{\tau}$, наближаючись до свого граничного положення Π_0 . **Граничне положення площини, що проходить через дотичну до кривої в даній точці і через пряму, паралельну дотичній в сусідній точці, якщо сусідня точка прямує до першої як до своєї границі, називається площиною кривизни.**

У точці M проведемо площину N_0 , перпендикулярну дотичній. Ця площина називається *нормальною площиною кривої*, а її лінія перетину з площиною кривизни – *головною нормаллю*. Напрямок головної нормалі задається одиничним вектором \vec{n} , напрямленим в бік угнутості кривої. *Нормаль, перпендикулярна головній нормалі, називається бінормаллю.*

Сукупність трьох взаємно перпендикулярних осей: дотичної, головної нормалі та бінормалі, одиничний вектор \vec{b} якої утворює з векторами $\vec{\tau}$ і \vec{n} праву трійку векторів, називається натуральним триєдром, або природним тригранником кривої.

Розглянемо векторну похідну $d\vec{r}/dS$. За визначенням векторної похідної цей вектор напрямлений по дотичній до годографа радіус-вектора \vec{r} у бік зростання дугової координати S . Іншими словами, вектор $d\vec{r}/dS$ за напрямом співпадає з одиничним вектором дотичної $\vec{\tau}$. Крім того, $|d\vec{r}/dS| = 1$, оскільки $|d\vec{r}|$ з точністю до нескінченно малих вищого порядку рівний елементу дуги dS . Отже,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}. \quad (1.25)$$

Похідна будь-якого вектора сталої величини перпендикулярна самому вектору. Переконаємось у цьому на прикладі вектора $\vec{\tau}$. Дійсно, $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$. Продиференціюємо цю тотожність по дузі S :

$$2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dS} = 0,$$

звідси слідує, що вектори $\vec{\tau}$ і $d\vec{\tau}/dS$ взаємно перпендикулярні, тобто вектор $d\vec{\tau}/dS$ напрямлений по нормалі до траєкторії точки, яка лежить у площині кривизни. Таким чином,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{dS} \right| \cdot \vec{n}.$$

Знайдемо модуль цього вектора. З цією метою розглянемо рівнобедрений трикутник, утворений векторами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}'$ (рис. 1.9). Основа цього

трикутника

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}| \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2\sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Так як $\Delta\varphi$ – нескінченно мала величина, то

$$|\Delta\vec{\tau}| \approx 2 \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta\varphi. \text{ Отже,}$$

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta S|},$$

або, з урахуванням попереднього виразу,

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta S|} = 1/\rho,$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці. Тоді

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{n}}{\rho},$$

звідки одиничний вектор головної нормалі

$$\vec{n} = \rho \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dS}, \quad (1.26, a)$$

або, використовуючи співвідношення (1.25),

$$\vec{n} = \rho \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dS^2}. \quad (1.26, б)$$

Одиничний вектор бінормалі знайдемо з умови вибору додатного напрямку бінормалі і виразів (1.25) та (1.26):

$$\vec{b} = [\vec{\tau}, \vec{n}] = \rho \left[\frac{d\vec{r}}{dS}, \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right]. \quad (1.28)$$

Нехай рух точки задано природним способом, тобто задані траєкторія точки і закон її руху по траєкторії $S=S(t)$. При русі точки (рис. 1.10) її радіус-вектор, проведений з нерухомої точки O' змінюється з часом, а відповідно, він змінюється в залежності від дугової координати S . З означення швидкості маємо:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \dot{S}.$$

Остаточно, на основі (1.25) для швидкості точки у випадку природного задання руху отримуємо вираз:

$$\vec{v} = \dot{S} \cdot \vec{\tau}, \quad (1.29)$$

де величину \dot{S} називають алгебраїчною швидкістю точки і позначають

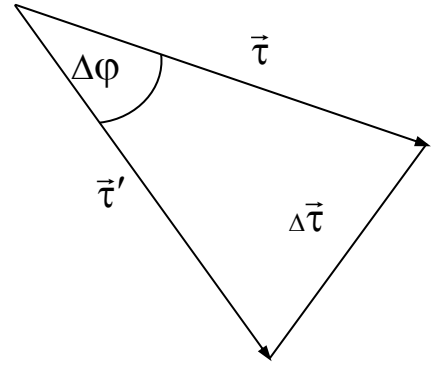


Рис. 1.9

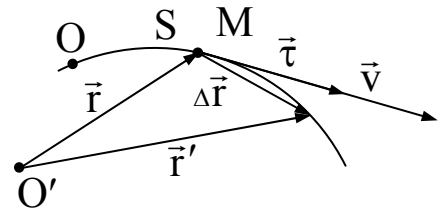


Рис. 1.10

v_τ . Вона є проекцією швидкості на додатній напрям дотичної до траєкторії, який співпадає з напрямом вектора $\vec{\tau}$.

Для знаходження прискорення точки у випадку природного задання руху використаємо векторним рівнянням (1.29). Продиференціюємо цей вираз як добуток двох змінних:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + v_\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt},$$

Одиничний вектор дотичної є складна функція часу, тому

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot v_\tau.$$

З урахуванням останнього виразу прискорення точки запишеться як

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + v_\tau^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dS},$$

або, використовуючи вираз (1.26),

$$\vec{a} = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (1.30)$$

Отримана рівність являє собою розклад вектора прискорення по осях натурального трієдра. Позначивши коефіцієнти при одиничних векторах $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} , тобто проекції прискорення на осі природного тригранника, відповідно, через a_τ , a_n , a_b , отримаємо

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} + a_b \cdot \vec{b}. \quad (1.31)$$

Порівнюючи формули (1.30) і (1.31), бачимо, що вектор \vec{a} має дві складові – по дотичній і головній нормалі. Це означає, що проекція прискорення на бінормаль дорівнює нулю і вектор прискорення лежить у площині кривизни траєкторії.

Складова прискорення

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} \quad (1.32)$$

називається *дотичним*, або *тангенціальним прискоренням*.

Складова

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} \vec{n} \quad (1.33)$$

називається *нормальним прискоренням* і напрямлена в бік додатного напрямку вектора головної нормалі до центра кривизни траєкторії (рис. 1.11).

В силу ортогональності векторів \vec{a}_τ і \vec{a}_n модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.34)$$

а його напрям визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg}(\vec{a} \wedge \vec{n}) = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (1.35)$$

Прискорення завжди напрямлене в бік угнутості траєкторії. Стосовно тангенціальної та нормальної складових прискорення слід відмітити, що \vec{a}_τ характеризує зміну величини вектора швидкості за величиною, а \vec{a}_n – за напрямом.

У світлі сказаного зауважимо, що не можна ототожнювати величини $|\dot{\vec{v}}|$ і $|\dot{v}|$, так як перший вираз визначає величину повного прискорення, а другий – абсолютне значення лише його тангенціальної складової.

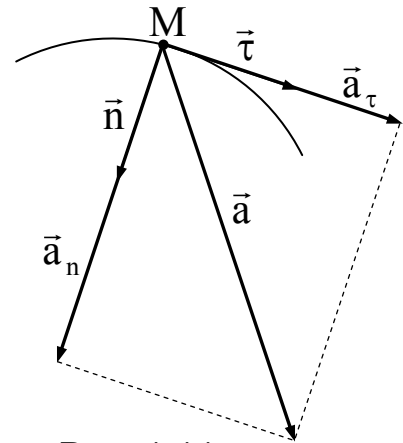


Рис. 1.11

1.4. Криволінійні координати. Проекції швидкості та прискорення на осі криволінійних координат

Для кінематичного вивчення руху точки крім декартових координат можна використовувати інші три довільні параметри (q_1, q_2, q_3) , які однозначно визначають положення точки в просторі. Величини q_1, q_2, q_3 називаються *криволінійними (узагальненими) координатами*. В силу однозначної відповідності між визначенням положення точки за допомогою радіус-вектора \vec{r} і сукупності чисел q_1, q_2, q_3 , радіус-вектор можна розглядати як функцію криволінійних координат:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (1.6)$$

Криву, яку описує кінець радіус-вектора \vec{r} при зміні координати q_i ($i = 1, 2, 3$) і фіксованих значеннях двох інших координат ($q_{i0}; j = 1, 2, 3; j \neq i$), називають координатною лінією (q_i). Через кожну точку $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$ можна провести три координатні лінії:

$$(q_1): \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{20}, q_{30}), \quad (q_2): \vec{r} = \vec{r}(q_{10}, q_2, q_{30}), \quad (q_3): \vec{r} = \vec{r}(q_{10}, q_{20}, q_3).$$

Дотичні, проведені в даній точці до кожної з трьох координатних ліній, називаються *координатними осями* $[q_i]$. Додатній напрям кожної

координатної осі задається в бік зростання відповідної криволінійної координати.

Якщо змінювати відразу дві координати, а ту, що залишилась фіксувати, то отримаємо поверхні $(q_i q_j)$, задані наступними рівняннями:

$$(q_1 q_2): \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_{30}); \quad (q_2 q_3): \vec{r} = \vec{r}(q_{10}, q_2, q_3); \quad (q_1 q_3): \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{20}, q_3).$$

Ці поверхні називаються *координатними поверхнями*, а дотичні до них в точці M площини – *координатними площинами*.

Розглянемо частинні похідні $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Як похідні від вектора по скалярному аргументу вони напрямлені по дотичних до координатних ліній. Тому очевидно, що три одиничні вектори \vec{k}_i ($i = 1, 2, 3$), напрямлені по векторах $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, будуть базисними у вибраній системі криволінійних координат (в загальному випадку базисні вектори можуть бути неортогональними). Тоді

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \cdot \vec{k}_i = H_i \cdot \vec{k}_i,$$

де величини

$$H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \quad (1.36)$$

називаються *коефіцієнтами Ламе*. Таким чином, одиничні вектори координатних осей \vec{k}_i ($i = 1, 2, 3$) виражаються через коефіцієнти Ламе формулами

$$\vec{k}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (1.37)$$

Користуючись співвідношеннями (1.37), легко знайти косинуси кутів криволінійних координатних осей з осями декартових координат:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{k}_i \wedge OX) &= \vec{k}_i \cdot \vec{i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x}{\partial q_i}; & \cos(\vec{k}_i \wedge OY) &= \vec{k}_i \cdot \vec{j} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial y}{\partial q_i}; \\ \cos(\vec{k}_i \wedge OZ) &= \vec{k}_i \cdot \vec{k} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial z}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Криволінійна система координат називається ортогональною, якщо в кожній точці простору її координатні осі взаємно перпендикулярні. Умова ортогональності криволінійної системи координат зада-

ється співвідношенням

$$\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j = 0, \quad (i \neq j), \quad (1.38)$$

або

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0. \quad (1.39)$$

При русі точки її радіус-вектор через узагальнені координати залежить від часу:

$$\vec{r} = \vec{r}[q_1(t), q_2(t), q_3(t)].$$

Диференціюючи останній вираз по часу, маємо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (1.40)$$

де похідні по часу криволінійних координат (\dot{q}_i) називаються *узагальненими швидкостями*. Тоді згідно формул (1.37) отримаємо:

$$\vec{v} = H_1 \dot{q}_1 \vec{k}_1 + H_2 \dot{q}_2 \vec{k}_2 + H_3 \dot{q}_3 \vec{k}_3. \quad (1.41)$$

Рівність (1.41) є розкладом вектора швидкості по одиничних векторах осей криволінійних координат. Тому проекції швидкості на координатні осі визначатимуться формулами

$$v_i = H_i \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.42)$$

Якщо базисні вектори ортогональні, то квадрат швидкості

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 (H_i \cdot \dot{q}_i)^2. \quad (1.43)$$

Для визначення проекцій прискорення на осі криволінійних координат представимо їх у вигляді

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{k}_i = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

$$H_i a_i = \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (1.44)$$

З рівності (1.40) безпосередньо слідує, що

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.45)$$

Крім того, за визначенням повної похідної

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3.$$

З іншого боку, оскільки узагальнені швидкості залежать тільки від часу, а не від узагальнених координат, то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3.$$

Порівнюючи два останні вирази, бачимо, що

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (1.46)$$

Підставляючи рівності (1.45) та (1.46) у співвідношення (1.44), отримаємо

$$H_i a_i = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Тут враховано, що $\vec{v}^2 = v^2$. Остаточно вирази для проекцій прискорення на осі криволінійної системи координат набувають вигляду

$$a_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right), \quad (1.47)$$

де $T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2)$.

Приклад 1.2. Швидкість і прискорення точки в циліндричних координатах.

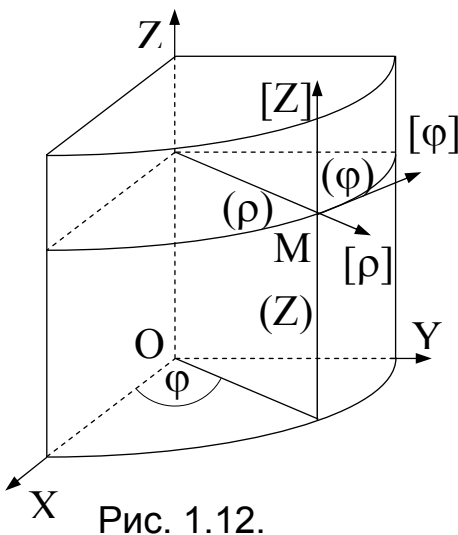


Рис. 1.12.

Циліндричними координатами точки є величини ρ , ϕ , z (рис. 1.12). Змінюючи лише координату ρ , отримуємо пряму, яка перетинає вісь OZ під прямим кутом. Вона є одночасно і координатною лінією (ρ) , і координатною віссю $[\rho]$. Змінюючи кут ϕ , отримуємо коло радіуса ρ , що лежить у площині, перпендикулярній до осі OZ , і знаходиться на відстані z від площини OXY . Це коло є координатною лінією (ϕ) , а дотична до неї, проведена

в бік зростання кута ϕ – координатною віссю $[\phi]$. Пряма, паралельна осі OZ , є одночасно координатною лінією (z) і координатною віссю $[z]$.

Зв'язок декартових і циліндричних координат точки описується залежностями:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z.$$

Коефіцієнти Ламе при цьому рівні:

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1;$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho;$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Тоді за формулами (1.42) знаходимо:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (1.48)$$

Оскільки функція T у випадку циліндричної системи координат рівна

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

то проекції прискорення, знайдені за співвідношеннями (1.47), набувають значень:

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \\ a_z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Приклад 1.5. Швидкість і прискорення точки в сферичних координатах.

Зв'язок декартових і сферичних координати точки r , φ , θ (рис. 1.13) має вигляд:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi; \quad y = r \cos \theta \sin \varphi; \quad z = r \sin \theta.$$

Координатною лінією (r) і віссю $[r]$ служить пряма, що виходить з початку координат і проходить через взятую точку. Лінією (θ) є коло великого круга, а віссю $[\theta]$ – дотична до цього кола в бік зростання кута θ . Координатною лінією (φ) є коло паралельного круга радіусом $r \cdot \sin \theta$, віссю $[\varphi]$ – дотична до нього в бік зростання кута φ .

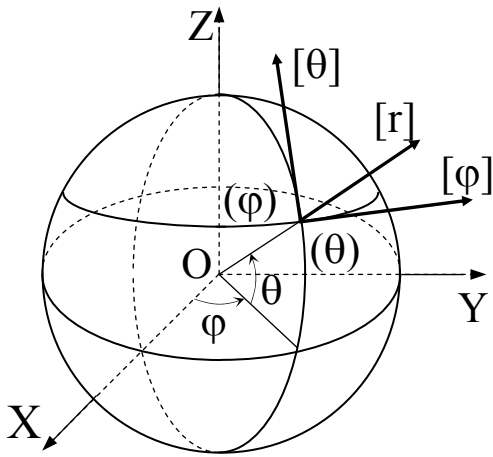


Рис. 1.13.

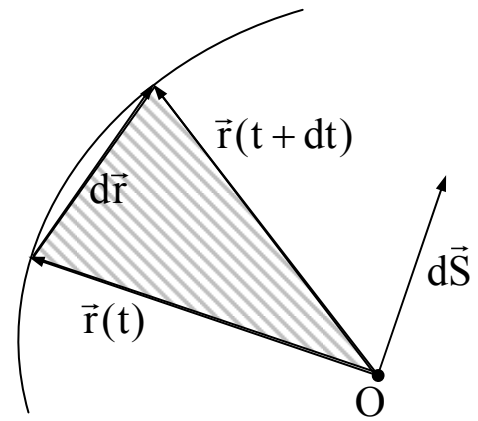


Рис. 1.14

За (1.36) обчислюємо коефіцієнти Ламе:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1;$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \cos \theta;$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r;$$

Проекції швидкості та прискорення на осі, напрямлені по базисних векторах, визначаємо, відповідно, за формулами (1.42) та (1.47):

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \cos \theta, \quad v_\theta = r\dot{\theta}; \quad (1.50)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2, \quad a_\varphi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta), \quad (1.51)$$

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta.$$

1.5. Секторна швидкість

Розглянемо траєкторію рухомої точки (рис. 1.14). За елемент часу dt її радіус-вектор опише елементарний сектор $d\vec{S}$. Вектор елементарної площадки $d\vec{S}$ має модуль, рівний її площі dS , і напрямлений по нормалі до площадки в сторону, яка утворює з напрямом обходу контуру правогвинтову систему.

Вектор

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} \quad (1.52)$$

називають *секторною швидкістю точки*. З точністю до нескінченно малих другого порядку площа елементарного сектора співпадає з площею трикутника, утвореного векторами $\vec{r}(t)$, $d\vec{r}$, $\vec{r}(t + dt)$ і рівною

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}].$$

Тоді для вектора секторної швидкості отримуємо вираз

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]. \quad (1.53)$$

Коли траєкторією точки служить плоска крива, вектор секторної швидкості завжди напрямлений по нормалі до площини руху. Проекцію її на нормаль у цьому випадку зручно обчислювати в полярних координатах. Елементарний сектор з точністю до нескінченно малих другого порядку можна вважати круговим. Тоді його площа буде рівною

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi.$$

Звідси для проекції секторної швидкості на нормаль отримуємо вираз:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi}, \quad (1.54)$$

а модуль секторної швидкості буде рівним

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2 |\dot{\phi}|. \quad (1.55)$$

Література

[5] – §§ 39–48

[7] – Гл. 1, § 1

[10] – Гл. 1, Р. 2, §§ 1–9

[12] – §§ 17, 18

[13] – § 1.1

Лекція 2

Кінематика твердого тіла

2.1. Поняття про тверде тіло та ступені його вільності. Класифікація рухів твердого тіла

Під твердим тілом в механіці розуміють неперервну систему матеріальних точок, відстані між якими залишаються незмінними при довільних переміщеннях. Тут ми знову вводимо абстракцію, яка дозволяє знехтувати несуттєвими для розглядуваних явищ деталями (наприклад, малими деформаціями реальних твердих тіл). Звичайно, розміри реальних тіл залишаються практично незмінними або за певних умов, або протягом певних інтервалів часу. Наприклад, річне кутове зміщення більшості зірок складає приблизно $0'',01$. Тому система Сонце – “нерухомі” зірки може бути прийнята з певною точністю за тверде тіло, причому для порівняно тривалих проміжків часу.

Аналітично опис положення і руху твердого тіла в просторі повинен визначати положення і рух будь-якої точки цього тіла. І хоча число точок твердого тіла необмежене, кількість його ступенів вільності завдяки жорстким зв'язкам невелика.

Числом ступенів вільності твердого тіла називають кількість незалежних параметрів, які визначають положення тіла відносно вибраної системи відліку.

Визначимо число ступенів вільності твердого тіла, яке може довільно переміщуватись (вільне тіло). Положення тіла в просторі відносно будь-якої системи координат визначається заданням трьох його точок, що не лежать на одній прямій. Відстань між точками в твердому тілі повинна залишатись незмінною при довільних його рухах. Це накладає на координати фіксованих точок три умови:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L_{21}^2,$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = L_{31}^2,$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = L_{32}^2,$$

де L_{ij} – відстані між відповідними точками. Кожне з цих рівнянь дозволяє виразити одну з координат через інші. Тобто, з дев'яти декартових координат трьох точок лише шість будуть незалежними. Залучення четвертої точки до цієї системи не збільшить число ступенів вільності, тому що її координати повинні задовольняти трьом незалежним рівнян-

ням зв'язків, які визначають відстані цієї точки до перших трьох. Таким чином, вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, тобто для однозначного визначення його положення у просторі необхідно задати шість незалежних координат¹.

Очевидно, що закріплення точок твердого тіла зменшує число ступенів його вільності. і, відповідно, спрощує задачу опису руху тіла.

Завдання кінематики твердого тіла полягає у розробці способів задання його руху, а також методів, які дозволяють за невеликим числом кінематичних характеристик, спільних для всього тіла, знаходити кінематичні характеристики кожної точки тіла.

Відмітимо найбільш характерні типи рухів, можливі для твердого тіла.

Поступальним рухом твердого тіла називають такий його рух, при якому будь-яка пряма, що належить тілу, залишається паралельною своєму початковому положенню в кожний момент часу. Точки тіла, яке рухається поступально, можуть описувати довільні криволінійні траєкторії, але рух тіла при цьому зберігає свій поступальний характер.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому дві точки тіла залишаються нерухомими протягом всього часу руху. Зрозуміло, що закріплення двох точок тіла є достатньою умовою здійснення такого типу руху, оскільки при цьому залишатиметься нерухомою вся пряма, яка проходить через нерухомі точки. Ця пряма називається *віссю обертання* тіла.

Рух тіла, при якому траєкторії усіх його точок розташовані в паралельних площинах, називається плоским (плоскопаралельним) рухом. У певному розумінні плоский рух тіла можна розглядати як суперпозицію двох рухів: поступального і обертального навколо осі.

Якщо тверде тіло рухається так, що одна з його точок залишається нерухомою, то рух називається обертальним навколо точки, або просто обертальним. У такому русі траєкторії всіх точок тіла лежать на сферах, спільний центр яких співпадає з нерухомою точкою.

Підсумовуючи сказане, відмітимо, що довільний рух тіла завжди можна розглядати як складний, компонентами якого є поступальний та обертальний рухи.

В подальшому буде показано, що поняття швидкості і прискорення твердого тіла мають зміст тільки для поступального руху, оскільки при

¹ В загальному це можуть бути довільні незалежні параметри, які є функціями координат трьох чи більшого числа точок тіла.

рухах, відмінних від поступального, швидкості та прискорення різних точок тіла, як правило, неоднакові.

2.2. Теорема про траєкторії, швидкості та прискорення твердого тіла, що рухається поступально

Розглянемо деяке тверде тіло і дві точки А і В у ньому (рис. 2.1). Положення цих точок задаватимемо радіус-векторами \vec{r}_A і \vec{r}_B . Якщо рух є поступальним, то, за означенням, вектор \vec{r}_{AB} залишається паралельним самому собі. Величина цього вектора $r_{AB} = AB$ не змінюється, так як тіло тверде. Отже, \vec{r}_{AB} є сталим вектором. Крім того,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.1)$$

Остання рівність показує, що траєкторія точки В може бути отримана з траєкторії точки А шляхом її паралельного перенесення на постійний за величиною і напрямом вектор \vec{r}_{AB} .

Т.ч., траєкторії точок твердого тіла, яке рухається поступально, являють собою конгруентні криві, що отримуються одна з одної шляхом паралельного перенесення.

Диференціюючи обидві частини рівності (2.1) по часу і враховуючи, що похідна сталого вектора \vec{r}_{AB} рівна нулю, отримаємо

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A, \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (2.2)$$

тобто, швидкості точок твердого тіла, що рухається поступально, в будь-який момент часу рівні за величиною і напрямом.

Диференціюючи по часу рівність (2.2), бачимо, що

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (2.3)$$

тобто прискорення всіх точок твердого тіла при його поступальному русі в будь-який момент часу однакові.

Все сказане про поступальний рух твердого тіла можна узагальнити теоремою: **всі точки твердого тіла при поступальному його русі мають однакові траєкторії, швидкості та прискорення, тобто рухаються однаково.**

Звідси слідує, що для вивчення поступального руху тіла достатньо вивчити рух однієї довільної його точки.

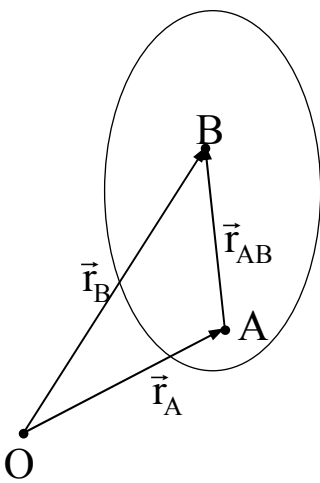


Рис. 2.1

2.3. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Кутові характеристики обертального руху

Перш за все відмітимо, що тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, володіє одним ступенем вільності. Тому для визначення положення такого тіла у просторі в достатньо задати лише один параметр.

Виберемо на осі обертання OZ додатній напрям (рис. 2.2). Положення тіла в початковий момент характеризується площиною N_0 , яка проходить через вісь обертання. Через деякий проміжок часу після початку руху ця площина займе нове положення N , утворивши двогранний кут з ребром AB . Лінійний кут φ , який відповідає двогранному кут між площинами N_0 і N , називається кутом повороту тіла. Кут повороту φ вважатимемо додатнім, якщо перехід від площини N_0 до площини N здійснюється проти годинникової стрілки.

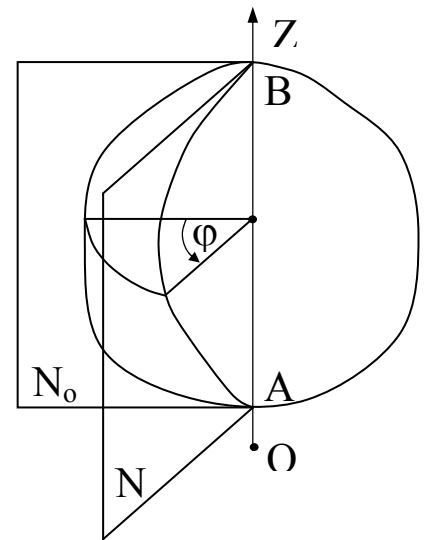


Рис. 2.2

При обертанні тіла кожному моменту часу можна поставити у відповідність певний кут φ . Таким чином, положення твердого тіла відносно вибраної системи відліку повністю визначається в будь-який момент часу, якщо задано рівняння

$$\varphi = f(t), \quad (2.4)$$

де $f(t)$ – довільна, двічі диференційована функція часу. Це рівняння називається *рівнянням обертання твердого тіла навколо нерухомої осі*.

З кутом повороту пов'язані дві основні кінематичні величини, що характеризують обертальний рух твердого тіла: *кутова швидкість* і *кутове прискорення*.

Кутовою швидкістю тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, називається фізична величина, що характеризує швидкість зміни кута повороту тіла при зміні часу. Величина кутової швидкості визначається як перша похідна по часу від кута повороту:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.5)$$

Кутова швидкість може бути як додатною, так і від'ємною в залежності від того, збільшується чи зменшується, відповідно, з часом кут повороту тіла. Якщо ω в даний момент часу перетворюється в нуль і змінює

свій знак, то кут φ досягає свого екстремального значення, а тіло змінює напрям обертання.

Кутовим прискоренням тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, називається перша похідна по часу від кутової швидкості, або друга похідна від кута повороту:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.6)$$

Якщо знаки ω і ε співпадають, то обертання тіла буде прискореним і абсолютне значення кутової швидкості збільшуватиметься з часом. Якщо кутове прискорення має знак, протилежний знаку ω , то обертання тіла буде сповільненим, абсолютне значення кутової швидкості з часом зменшуватиметься.

2.4. Лінійні швидкості та прискорення окремих точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Траєкторією довільної точки M твердого тіла, яке обертається нав-

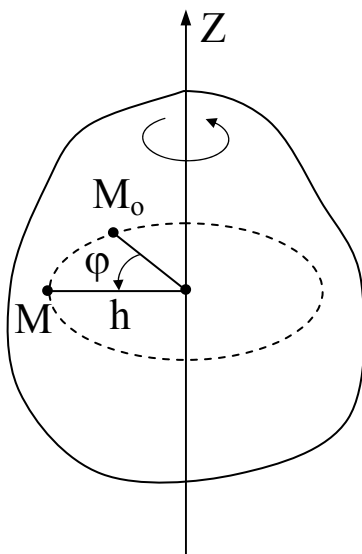


Рис. 2.3

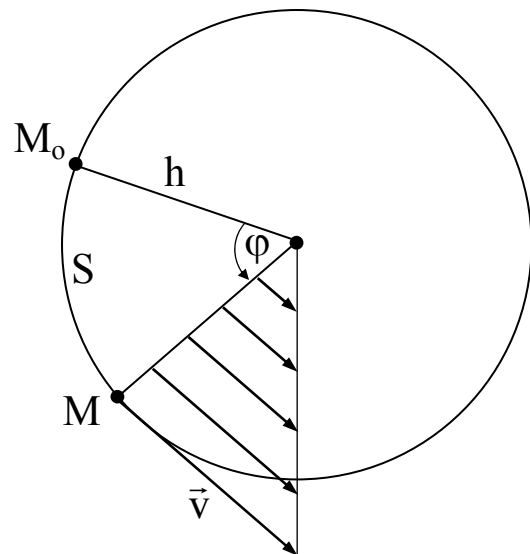


Рис. 2.4

коло нерухомої осі, є коло (рис. 2.3), розташоване у площині, проведеній через точку M перпендикулярно до осі обертання. Центр цього кола знаходиться в точці перетину вказаної площини з віссю обертання. Радіус кола рівний відстані h від точки M до осі обертання. Його називають *радіусом обертання точки*.

Виведемо закон розподілу лінійних швидкостей точок тіла. Для цього використаємо природний спосіб задання руху, оскільки відома форма траєкторії точок тіла і їх розташування в просторі.

Зобразимо траєкторію довільної точки M у плані (рис. 2.4). На

траєкторії відмітимо її початкове положення M_0 . Дуга S , відрахована від початкового положення до точки M в момент часу t , яка відповідає куту повороту φ , рівна

$$S = h \cdot \varphi(t).$$

Напрямок додатного відліку дугових координат відповідає напрямку додатного відліку кутів повороту. Напрямяючи, як завжди, дотичну до траєкторії точки в бік зростання дуги S , визначимо швидкість точки в проекції на дотичну:

$$v_\tau = \dot{S} = h \cdot \dot{\varphi} = h \cdot \omega, \quad (2.7)$$

Формула (2.7) показує, що лінійні швидкості розподіляються вздовж радіуса обертання за лінійним законом. Іншими словами, швидкості різних точок твердого тіла в даний момент часу будуть відрізнятися лише множителем h , так як кутова швидкість для всіх точок тіла в даний момент часу однакова і визначається законом зміни кута повороту тіла. Таким чином, можна встановити наступний закон розподілу швидкостей точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі: ***в даний момент часу швидкості різних точок тіла пропорційні їх відстаням до осі обертання і напрямлені в бік обертання тіла перпендикулярно до площин, що проходять через вісь обертання і точки, які розглядаються.***

Для виведення закону розподілу лінійних прискорень точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі скористаємося формулами проекцій прискорення на дотичну і головну нормаль до траєкторії – в даному випадку до кола радіуса h :

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot h) = \varepsilon \cdot h, \quad a_n = \frac{v^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 \cdot h. \quad (2.8)$$

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі тангенціальну і нормальну складові прискорення прийнято називати відповідно *обертвою* та *доосевою* складовими вектора прискорення. В подальшому будемо їх позначати як $\vec{a}_{об}$ та $\vec{a}_д$.

Модуль вектора прискорення рівний

$$a = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.9)$$

Як бачимо, тангенціальні, нормальні і повні прискорення точок також розподілені за лінійним законом. Вони лінійно залежать від відстаней точок до осі обертання. Нормальне прискорення напрямлене по радіусу кола до осі обертання. Напрямок тангенціального прискорення залежить від

знаку кутового прискорення. Тангенціальне прискорення напрямлене в той же бік, що й швидкість, якщо обертання прискорене, і в бік, протилежний швидкості, якщо обертання сповільнене. На рис. 2.5 показано взаємне розміщення \vec{a}_τ і \vec{a}_n та швидкості \vec{v} при одному й тому ж напрямі обертання тіла (саме тіло опущене і зображена лише траєкторія його точки М).

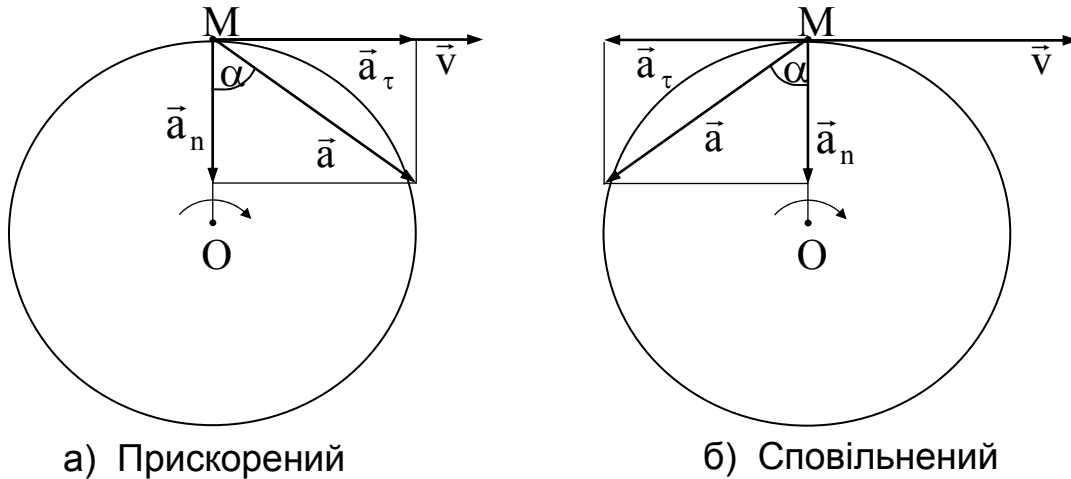


Рис. 2.5

Кут α , утворений вектором прискорення \vec{a} в напрямі нормалі до траєкторії, визначається із співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (2.10)$$

В даний момент часу для всіх точок тіла значення кутової швидкості та кутового прискорення однакові; отже, повні прискорення за величиною будуть відрізнятися лише множителем h . Кут, утворений вектором прискорення з відповідним радіусом обертання точки, буде в даний момент часу одним і тим же для всіх точок тіла. Таким чином, приходимо до закону розподілу прискорень в твердому тілі, що обертається навколо нерухомої осі: *в даний момент часу прискорення точок тіла пропорційні відстаням від точок до осі обертання і нахилені під однаковими кутами до радіусів обертання.*

2.5. Вектор кутової швидкості та кутового прискорення. Формула Ейлера

Розширимо поняття про кутову швидкість і кутове прискорення тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Виберемо початок прямокутної декартової системи координат на осі обертання тіла (рис. 2.6). Вісь OZ спрямуємо по осі обертання і вважатимемо, що система координат не-

змінно пов'язана з тілом і обертається разом з ним. Якщо \vec{k} – одиничний вектор осі обертання, то вектор кутової швидкості можна представити як

$$\vec{\omega} = \vec{k} \cdot \phi. \quad (2.11)$$

За домовленістю вектор кутової швидкості напрямлений вздовж осі

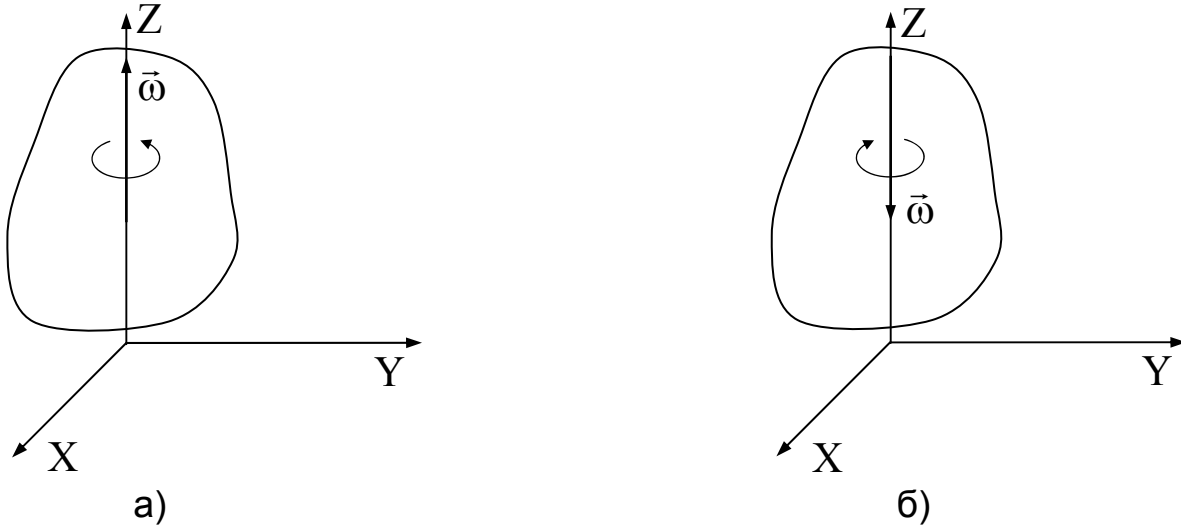


Рис. 2.6

обертання в сторону додатного напрямку осі OZ, якщо обертання тіла здійснюється проти годинникової стрілки (рис. 2.6). Напрямок $\vec{\omega}$ співпадає з напрямком осьового руху правого гвинта.

Вектор $\vec{\omega}$ можна розміщувати в будь-якому місці на осі обертання. Такі вектори називають *ковзними*.

Відкладаючи вектор $\vec{\omega}$ по осі обертання, можна визначити вектор лінійної швидкості \vec{v} довільної точки M як векторний добуток $\vec{\omega}$ на радіус-вектор цієї точки відносно будь-якої точки осі обертання (рис. 2.7):

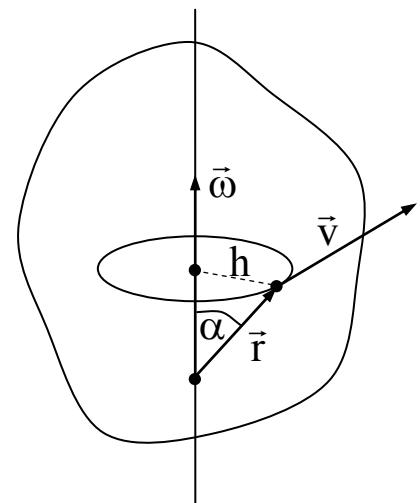


Рис. 2.7

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (2.12)$$

Вираз (2.12) називається *векторною формулою Ейлера*. Переконаємось у справедливості цієї формули. Дійсно, модуль векторного добутку рівний абсолютному значенню швидкості:

$$|[\vec{\omega}, \vec{r}]| = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega \cdot h = v.$$

Крім того, вектор $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r} . За напрямком він паралельний швидкості \vec{v} , напрямлений по дотичній до кола обертання. Таким чином, $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ за модулем і напря-

мом визначає швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Слід лише вважати цей вектор прикладеним у точці M ; він не залежить від точки прикладання вектора кутової швидкості на осі, а також точки осі, в яку поміщено початок радіус-вектора.

Вираз (2.12) є основною формулою кінематики твердого тіла. Проектуючи обидві частини цієї рівності на координатні осі, які орієнтовані довільно (необов'язково вісь Z співпадає з віссю обертання), і позначивши через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ проєкції $\vec{\omega}$, отримаємо три скалярні формули Ейлера, які визначають проєкції швидкості довільної точки M тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Виведемо векторну формулу прискорення довільної точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Для цього продиференціюємо обидві частини рівності (2.12) по часу:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (2.14)$$

Похідну

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} \quad (2.15)$$

називають *вектором кутового прискорення*. Так як в розглянутому випадку кутова швидкість $\vec{\omega}$ є вектором сталого напрямку (вісь обертання нерухома), то величина кутового прискорення буде рівна модулю похідної від величини кутової швидкості, а напрям його або співпадає, або протилежний $\vec{\omega}$.

В результаті вираз (2.14) запишеться як

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (2.16)$$

Тут перший доданок, $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, є *обертвою* складовою прискорення. Дійсно, вона рівна за величиною $\varepsilon \cdot r \cdot \sin(\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}) = \varepsilon \cdot h$, а за напрямом співпадає з швидкістю, якщо вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ співнапрямлені, і протилежна швидкості, якщо $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ протилежно напрямлені.

Другий доданок у формулі (2.16) є *доосевим* прискоренням. Його величина рівна $\omega \cdot v \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \omega^2 h$, оскільки вектори $\vec{\omega}$ і \vec{v} взаємно перпендикулярні, а $v = \omega \cdot h$.

Напрямок векторного добутку $[\vec{\omega}, \vec{v}]$ перпендикулярний осі обертання (вектору $\vec{\omega}$) і швидкості \vec{v} , тобто йде по радіусу кола, що описується точкою, до його центру. Таким чином,

$$\vec{a}_{об} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}], \quad \vec{a}_д = [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (2.17)$$

Звернемо увагу на такі часткові випадки.

1. Якщо тіло обертається рівномірно, то $\varepsilon = 0$ і, відповідно, обертове прискорення точок тіла рівне нулю.
2. Якщо в деякий момент часу кутова швидкість тіла досягає максимального чи мінімального значення, то $\dot{\omega}$ в цей момент стає рівним нулю і обертове прискорення всіх точок тіла також перетворюється в нуль.
3. Якщо в деякий момент часу кут повороту досягає екстремального значення, то $\omega = \dot{\phi}$ перетворюється в нуль і доосеве прискорення в цей момент для всіх точок тіла стає рівним нулю.

Література

[5] – §§ 49–52

[7] – Ч. 1, Гл. 1, § 2

[10] – Гл. 2, Р. 2, §§ 1-3

[13] – § 1.2

Лекція 3

Плоский рух твердого тіла

3.1. Рівняння плоского руху. Переміщення плоскої фігури

Плоским рухом називається такий рух, при якому всі точки твердого тіла, розташовані в площинах, паралельних деякій нерухомій площині, протягом усього часу руху залишаються в тих самих площинах.

Нехай тверде тіло здійснює плоский рух, паралельний площині Π_0 (рис. 3.1) Тоді будь-яка пряма, перпендикулярна цій площині і жорстко скріплена з тілом, буде рухатися поступально, тобто всі точки цієї прямої рухатимуться однаково. Отже, для вивчення руху точок, що лежать на розглянутій прямій, достатньо вивчити рух однієї точки цієї прямої

(наприклад, точки M). Міркуючи аналогічно стосовно будь-якої іншої прямої, перпендикулярної до Π_0 , можна зробити висновок, що для вивчення плоского руху твердого тіла достатньо вивчити рух точок цього

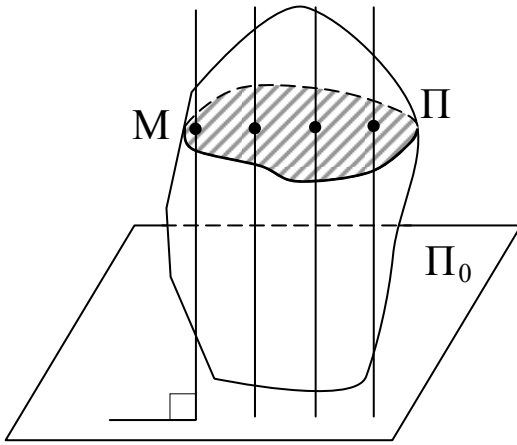


Рис. 3.1

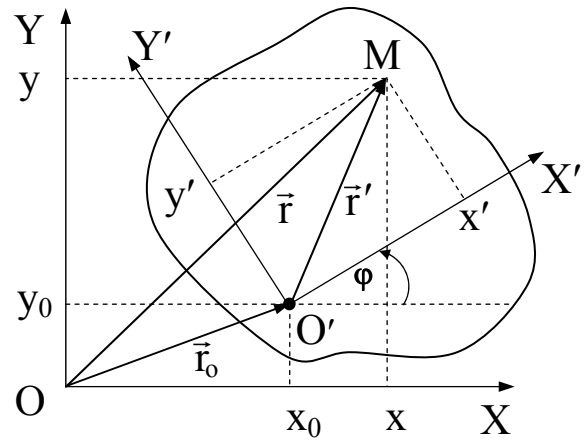


Рис. 3.2

тіла, які лежать в якій-небудь площині $\Pi \parallel \Pi_0$, тобто точок тіла, що лежать у його перерізі площиною Π . Таким чином, для вивчення плоского руху тіла достатньо вивчити рух плоскої фігури в її площині, паралельній нерухомій площині Π_0 . Положення фігури на її площині повністю визначається положенням відрізка прямої, жорстко скріпленої з цією плоскою фігурою.

Плоска фігура, що рухається у своїй площині, має три ступені вільності. Вибір незалежних параметрів руху здійснюють наступним чином.

Візьмемо дві системи координатних осей у площині руху фігури: нерухому OXY і рухому $O'X'Y'$, незмінно пов'язану з рухомою фігурою (рис. 3.2). Положення точки M фігури в нерухомій площині будемо визначати радіус-вектором \vec{r} , а в рухомій – радіус-вектором \vec{r}' . Щоб визначити положення рухомої системи відносно нерухомої, достатньо задати: 1) положення початку O' , тобто координати x_0, y_0 , або, що те саме, радіус-вектор \vec{r}_0 ; 2) кут одної з рухомих осей з однією з нерухомих, наприклад кут ϕ осі X з віссю X' . При цьому початок O' рухомої системи називають *основною точкою*, або *полюсом*.

Положення системи рухомих осей повністю визначається заданням трьох величин x_0, y_0, ϕ . Разом з тим за цими даними визначається і положення плоскої фігури. Тому рух плоскої фігури слід вважати відомим, якщо в будь-який момент часу відомі значення величин x_0, y_0, ϕ . Таким

чином, положення твердого тіла при його плоскому русі визначається:

1) рівнянням руху полюса

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t); \quad (3.1)$$

2) рівнянням обертання фігури навколо полюса

$$\varphi = f_3(t). \quad (3.2)$$

Щоб отримати рівняння руху довільної точки плоскої фігури, споектуємо на нерухомі осі координатної системи OXY рівність

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

В результаті отримаємо

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad (3.3)$$

Вираз (3.3) є рівнянням руху точки M, або параметричним рівнянням її траєкторії.

Нехай плоска фігура перемістилася з положення I в положення II (рис. 3.3). Розіб'ємо її перехід на дві частини. Спочатку перемістимо фігуру поступально в положення I', причому всі її точки отримують переміщення, геометрично рівні переміщенню $\overline{O'O_1}$ полюса O', а по-

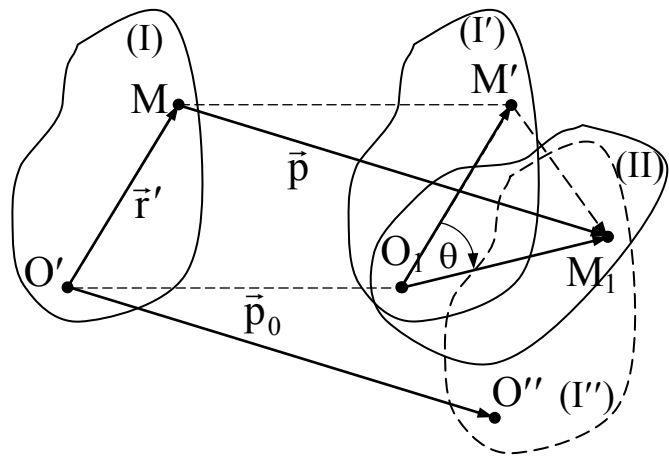


Рис. 3.3

тім повернемо фігуру на кут $\angle M'O_1M_1$ навколо осі, що проходить через точку O_1 перпендикулярно площині фігури. Відмітимо, що вектор поступального переміщення залежить від вибору полюса, а кут повороту не залежить від цього вибору. Дійсно, той же перехід із положення I в положення II можна здійснити, вибравши за полюс точку M і перемістивши спочатку фігуру в положення I'' (рис. 3.3), причому всі точки фігури отримують переміщення, рівні $\overline{MM_1}$ і відмінні від $\overline{O'O_1}$, а потім повернувши фігуру на $\angle O''M_1O_1$ навколо осі, яка проходить через M_1 . Але за властивістю поступального переміщення $\overline{O''M_1}$ паралельний $\overline{O'M}$. Так само $\overline{O_1M'}$ паралельний $\overline{O'M}$. Таким чином, $\overline{O''M_1}$ і $\overline{O_1M'}$ паралельні між собою і $\angle M'O_1M_1 = \angle O''M_1O_1$, причому в обох випадках поворот здійснюється в одну й ту ж сторону (за годинниковою стрілкою). На основі наведених міркувань можна зробити висновок: **будь-яке плоске**

переміщення твердого тіла можна представити у вигляді сукупності двох переміщень: 1) поступального, яке залежить від вибору полюса, і 2) обертального навколо полюса. Кут і напрям повороту від вибору полюса не залежать.

Дане твердження справедливе для скінченного переміщення. Для випадку нескінченно малого переміщення розглянемо векторну рівність

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \overline{M'M_1}, \quad (3.4)$$

де $\overline{M'M_1}$ – переміщення точки M внаслідок повороту фігури навколо полюса. З трикутника O_1M_1M' (рис. 3.3) бачимо, що $M'M_1 = O_1M' \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2}$.

Приймаючи поворот нескінченно малим, можна замінити $\sin \frac{\theta}{2}$ на $\frac{\theta}{2}$. Тоді

$$M'M_1 = O_1M' \cdot 2 \cdot \frac{\theta}{2} = r' \cdot \theta.$$

Введемо вектор нескінченно малого повороту $\vec{\theta}$ так, що:

- 1) величина вектора повороту рівна величині кута повороту;
- 2) вектор $\vec{\theta}$ перпендикулярний до площини переміщення, причому напрямлений в той бік, звідки поворот фігури видно як такий, що здійснюється в додатному напрямі.

За допомогою вектора $\vec{\theta}$ можна записати

$$\overline{M'M_1} = [\vec{\theta}, \vec{r}'].$$

Дійсно, цей векторний добуток за величиною рівний $\theta r' \cdot \sin(\vec{\theta} \wedge \vec{r}') = \theta r'$ і в граничному випадку нескінченно малого переміщення напрямлений так само, як і вектор $\overline{M'M_1}$, тобто перпендикулярно до \vec{r}' у бік повороту фігури. Тоді формулу (3.4) можна записати у вигляді

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + [\vec{\theta}, \vec{r}']. \quad (3.5)$$

Виникає питання, чи можна, використовуючи довільний вибір полюса, здійснити задане переміщення тіла одним поворотом, без поступального переміщення? Відповідь на нього дає теорема Ейлера: *будь-яке непоступальне переміщення плоскої фігури в її площині може бути здійснене одним поворотом навколо деякого центру.*

Доведення.

Нехай фігура перемістилася з положення I в положення II (рис. 3.4). Проведемо з середин переміщень точок A і B, тобто з середин

відрізків AA' і BB' , перпендикуляри і знайдемо їх перетин в точці C .

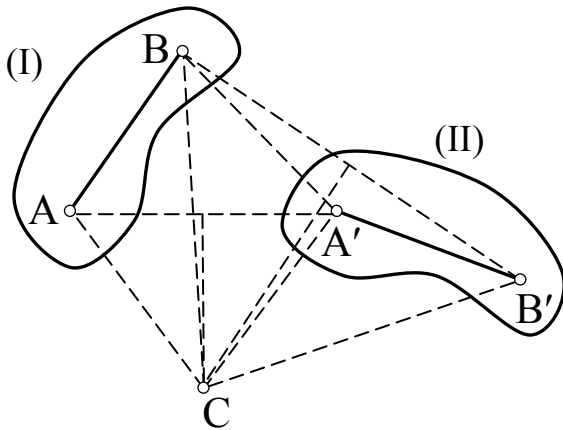


Рис. 3.4

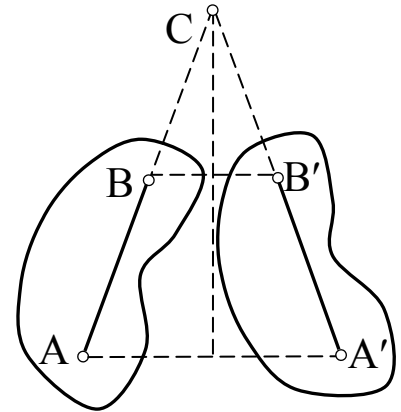


Рис. 3.5

Доведемо, що фігура I може бути переведена в положення II поворотом навколо центру C на $\angle ACA' = \angle BCB'$. Справді, трикутники ABC і $A'CB'$ рівні між собою, оскільки $AB = A'B'$ в силу незмінності фігури і $AC = A'C$, $BC = B'C$ за побудовою. Тому $\angle ACB = \angle A'CB'$. Додавши до обох частин цієї рівності однаковий кут BCA' , отримаємо $\angle ACA' = \angle BCB'$.

Повернемо тепер фігуру I на кут ACA' , тоді AC сполучиться з $A'C$, BC – з $B'C$, так як кути рівні, і AB сполучиться з $A'B'$, що й доводить теорему. Точка C називається *центром повороту*.

Тільки що наведена побудова не дає результату в двох випадках: 1) якщо перпендикуляри, проведені з середин переміщень, зливаються в одну лінію (рис. 3.5), але в цьому випадку центр повороту лежить на перетині продовжень відрізків AB і $A'B'$; 2) якщо перпендикуляри паралельні між собою, що має місце при *поступальному* переміщенні; цей випадок відповідає положенню центра повороту в нескінченності.

3.2. Швидкості точок плоскої фігури

Грунтуючись на формулі плоского переміщення і визначенні швидкості як границі при $\Delta t \rightarrow 0$ відношення нескінченно малого переміщення \vec{p} до проміжку часу Δt , протягом якого це переміщення відбулося:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}}{\Delta t}, \quad (3.6)$$

отримаємо згідно (3.5)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{\theta}}{\Delta t}, \vec{r}' \right]. \quad (3.7)$$

Перший доданок, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{p}_0 / \Delta t$, являє собою швидкість основної точки:

$$\vec{v}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_0}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Вектор $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\theta} / \Delta t$ назвемо вектором *кутової швидкості обертання фігури*:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\theta}}{\Delta t}. \quad (3.9)$$

Напрямок $\vec{\omega}$ збігається з напрямком $\vec{\theta}$; тому вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини руху, і якщо дивитися уздовж нього, то обертання фігури повинно відбуватися в додатному напрямі. Величина $\vec{\omega}$ дорівнює абсолютному значенню похідної кута повороту φ по часу. Дійсно, якщо назвати значення кута φ у моменти t і $t + \Delta t$ відповідно через φ і $\varphi + \Delta\varphi$, то $\theta = |\Delta\varphi|$ і, отже,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = |\dot{\varphi}|.$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ не змінюється при зміні полюса, тому що $\vec{\theta}$ від вибору полюса не залежить. Це дає можливість назвати $\vec{\omega}$ вектором кутової швидкості фігури.

Повернемося до формули (3.7). Підставляючи у нього вирази (3.8) і (3.9), отримуємо співвідношення для швидкостей точок при плоскому русі фігури

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}']. \quad (3.10)$$

Розглянемо два часткові випадки.

1. Поступальний рух: $\omega = 0$; згідно формули (3.10)

$$\vec{v} = \vec{v}_0,$$

тобто швидкості всіх точок однакові і рівні швидкості полюса.

2. Обертання навколо нерухомої осі: $v_0 = 0$. В цьому випадку

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}'],$$

тобто маємо вже відомий закон розподілу швидкостей при обертанні тіла навколо нерухомої осі.

В загальному випадку плоского руху тіла швидкість будь-якої точки складається зі швидкості, яку мали б усі точки тіла при поступальному русі тіла з швидкістю \vec{v}_0 полюса O' , і обертової швидкості $[\vec{\omega}, \vec{r}']$

точки M навколо полюса O' (рис. 3.6).

Говорячи про обертання тіла навколо якої-небудь точки, необхідно вказати систему відліку, відносно якої обертання розглядається. З цією

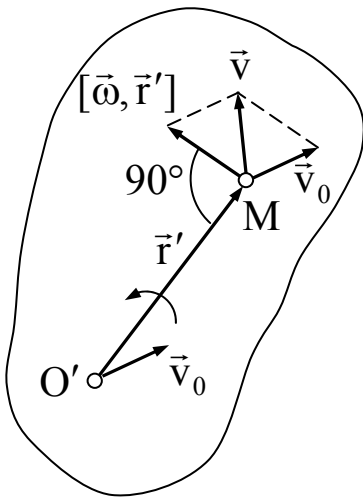


Рис. 3.6.

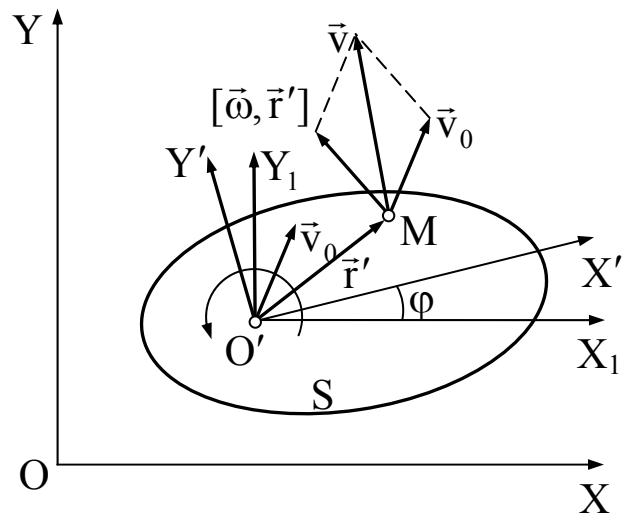


Рис. 3.7

метою з'єднаємо з полюсом O' (рис. 3.7) систему координат $O'X_1Y_1$, осі якої під час руху залишаються паралельними осям нерухомої системи координат OXY . Рух системи координат $O'X_1Y_1$ буде поступальним, обумовленим рухом полюса O' . Ця система і є системою відліку, відносно якої розглядається обертання тіла навколо полюса O' .

Назвемо рух плоскої фігури по відношенню до нерухомої системи OXY *абсолютним рухом*, рух тієї ж фігури відносно рухомої системи $O'X_1Y_1$ – *відносним рухом* і, нарешті, поступальний рух самої системи координат $O'X_1Y_1$ відносно нерухомої системи OXY – *переносним рухом*².

Користуючись поняттями абсолютного, переносного і відносного руху, можна сказати, що абсолютний рух плоскої фігури складається з переносного – поступального, обумовленого рухом полюса, і відносного – обертального руху навколо полюса. При цьому обертальна швидкість точки M плоскої фігури є не що інше, як відносна швидкість точки відносно системи координат $O'X_1Y_1$ а поступальна швидкість \vec{v}_0 , спільна для всіх точок системи $O'X_1Y_1$ – переносна швидкість.

Відмітимо важливий наслідок формули (3.10). Диференціюючи за часом рівняння $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, одержимо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}';$$

але перший доданок являє собою швидкість полюса і, отже,

² Ця термінологія запозичена із теорії складного руху, яка буде викладена пізніше.

$$\dot{\vec{r}}' = \vec{v} - \vec{v}_0 = [\vec{\omega}, \vec{r}'], \quad (3.11)$$

тобто обертова швидкість навколо полюса рівна похідній радіус-вектора \vec{r}' по часу.

Надалі будемо часто користатися іншими позначеннями – вектор швидкості позначатимемо внизу індексом, що вказує точку, швидкість якої розглядається. Наприклад, вектори \vec{v}_A , \vec{v}_B і т.д. будуть позначати швидкості точок А, В і т. д. Радіус-вектор точки В, якщо за початок його вибрана точка А, будемо позначати через \vec{r}_{AB} ; нарешті, обертову швидкість точки В, коли за полюс прийнята точка А, позначимо через \vec{v}_{AB} .

Формула розподілу швидкостей при цьому набуде вигляду (рис. 3.8)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad (3.12)$$

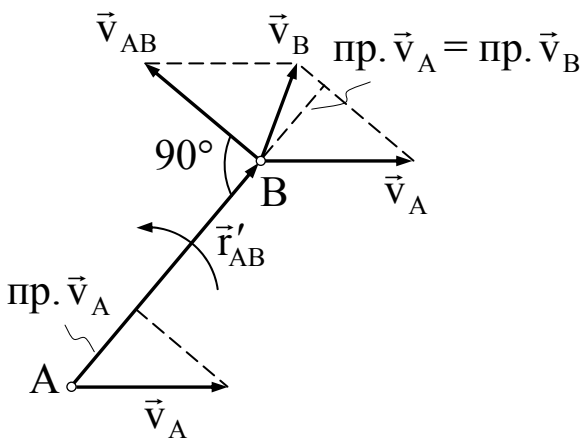


Рис. 3.8.

причому $\vec{v}_{AB} = [\vec{\omega}, \vec{r}'_{AB}]$, тобто обертова швидкість \vec{v}_{AB} дорівнює за величиною $\omega \cdot AB$ і напрямлена перпендикулярно до АВ у бік обертання фігури.

Складемо формули для проекцій швидкості точок плоскої фігури. Проектуючи обидві частини основної формули (3.10) на нерухомі осі

ОХ і ОУ, знайдемо за формулами для проекцій векторного добутку

$$v_x = v_{0x} - \omega(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} - \omega(x - x_0), \quad (3.13)$$

оскільки проекції \vec{r}' на осі ОХ та ОУ в даному випадку рівні $x - x_0$ і $y - y_0$, а вектор кутової швидкості має проекції $(0, 0, \omega)$.

Якщо рух плоскої фігури відомий, тобто x_0 , y_0 , ϕ задані як функції часу, то за цими функціями обчислюються

$$v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{0y} = \dot{y}_0, \quad \omega = \dot{\phi},$$

і швидкість будь-якої точки може бути визначена за формулами (3.13) і (3.3). Проекції швидкості на осі рухомої системи О'Х'У' одержимо, проектуючи рівність (3.10) на осі цієї системи:

$$v_{x'} = v_{0x'} - \omega y' = v_{0x} \cos \phi + v_{0y} \sin \phi - \omega y', \quad (3.14)$$

$$v_{y'} = v_{0y'} - \omega x' = -v_{0x} \sin \phi + v_{0y} \cos \phi + \omega x'.$$

На закінчення вкажемо на теорему, яка має часте застосування: **проекції швидкостей кінців відрізка на напрямок відрізка рівні між собою.**

Дійсно, проектуючи обидві частини (3.12) на напрям відрізка АВ, отримаємо:

$$\text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_B = \text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_A + \text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_{AB}.$$

Але вектор \vec{v}_{AB} перпендикулярний до напрямку відрізка АВ, тому $\text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_{AB} = 0$, і остаточно одержимо

$$\text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_B = \text{пр}_{\cdot AB} \vec{v}_A,$$

що і доводить теорему.

3.3. Миттєвий центр швидкостей. Центроїди

У попередньому пункті формула розподілу швидкостей при плоскому русі була отримана з представлення переміщення точки плоскої фігури у вигляді геометричної суми переміщення полюса і переміщення повороту навколо полюса. Спрощення картини розподілу швидкостей при плоскому русі можна одержати, ґрунтуючись на представленні переміщення плоскої фігури за теоремою Ейлера. Доведемо наступну теорему: *при будь-якому непереступальному русі плоскої фігури існує точка фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю.*

Для доведення (рис. 3.9) проведемо з точки А плоскої фігури перпендикуляр АN до напрямку швидкості \vec{v}_A так, щоб кут $\pi/2$ між \vec{v}_A і лінією АN був відрахований в бік обертання фігури. Тоді вектор швидкості довільної точки М на цьому перпендикулярі буде рівний

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \overline{AM}] = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM},$$

а величина швидкості

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM.$$

Змінюючи відстань точки М від точки А, можна при $\omega \neq 0$ знайти таку точку Р, щоб $\vec{v}_{AP} = -\vec{v}_A$. Тоді $AP = v_A/\omega$. При цьому будемо мати

$$v_P = v_A - \omega \cdot AP = v_A - \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = 0.$$

Точка Р плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу рівна нулю, називається *миттєвим центром швидкостей фігури*.

Для будь-яких точок фігури будемо мати, приймаючи Р за полюс ($v_P = 0$):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + [\vec{\omega}, \overline{PA}] = [\vec{\omega}, \overline{PA}], \quad \vec{v}_B = \vec{v}_P + [\vec{\omega}, \overline{PB}] = [\vec{\omega}, \overline{PB}],$$

так що швидкості точок плоскої фігури можна розглядати як обертові

швидкості навколо їх миттєвого центру швидкостей, а сам миттєвий центр – як миттєвий центр обертання плоскої фігури.

Звідси можна зробити висновок: *поле швидкостей у фігурі, яка здійснює плоский рух, в кожний момент часу таке, ніби фігура обертається навколо нерухомого миттєвого центру.* При цьому швидкість будь-якої точки плоскої фігури перпендикулярна до радіус-вектора, який з'єднує цю точку з миттєвим центром, і напрямлена в бік обертання фігури, а за величиною пропорційна відстані точки до миттєвого центру (рис. 3.10).

На відміну від розглянутого вище випадку обертання твердого тіла

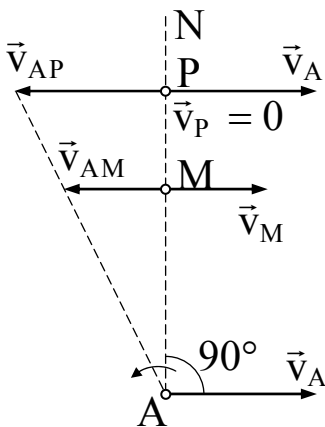


Рис. 3.9

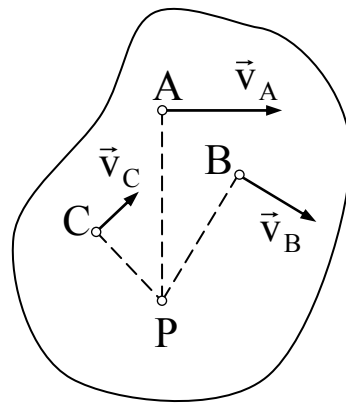


Рис. 3.10

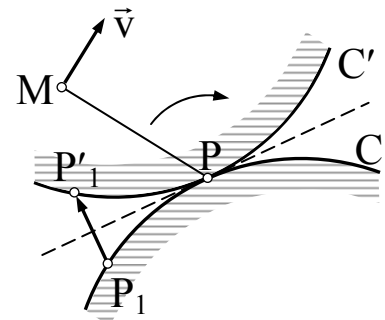


Рис. 3.11

навколо нерухомої осі, де вісь обертання була жорстко зв'язана з тілом і зберігала одне й те ж положення в нерухомому просторі, відносно якого обертання відбувалося, при плоскому русі миттєвий центр в кожний новий момент часу займає інше положення як в рухомій фігурі, так і в нерухомій площині.

Розглянемо кочення без ковзання жорсткого контуру C' (рис. 3.11) по нерухомому жорсткому контуру C ; будемо розуміти під цим такий рух, при якому контури дотикаються тільки в одній точці, а довжини дуг, які проходить точка дотику по обох контурах, рівні між собою: $\overset{\frown}{PP_1} = \overset{\frown}{PP'_1}$.

Доведемо, що точка P дотику контурів служить *миттєвим центром* руху фігури, зв'язаної з рухомим контуром C' , тобто що швидкість тієї точки фігури P , яка у даний момент збігається з точкою дотику контурів, дорівнює нулю. З цією метою поблизу точки дотику P виберемо на контурах точки P_1 і P'_1 , які деякий малий час Δt тому служили спільною точкою P_1 дотику контурів. За час Δt точка P'_1 здійснила переміщення $\overline{P_1P'_1}$. За визначенням кочення без ковзання малий трикутник $P_1PP'_1$ буде рівно-

бедреним, оскільки його сторони PP_1 і PP'_1 на малі вищих порядків відрізняються від рівних між собою дуг $\overset{\cup}{PP_1}$ і $\overset{\cup}{PP'_1}$. Звідси випливає, що відрізок $P_1P'_1$ перпендикулярний до спільної дотичної кривих у точці P і являє собою, таким чином, відстань між двома суміжними з точкою дотику точками кривих. Ця відстань, як відомо, є малою величиною другого чи більш високого порядку (в залежності від порядку дотикання кривих) у порівнянні з малою величиною дуги кривої, так що

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{P_1P'_1}{PP_1} = 0.$$

Відмітимо, що швидкість точки P рухомого контуру C' може бути визначена як границя

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1P'_1}{\Delta t} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{P_1P'_1}{PP_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP_1}{\Delta t}.$$

Перша границя у правій частині дорівнює нулю, а друга є скінченною величиною, рівною швидкості руху точки дотику по контурах. Таким чином, швидкість точки P дійсно рівна нулю, тобто ця точка фігури, зв'язаної з контуром C' , служить миттєвим центром швидкостей. Всі інші точки фігури C' у даний момент часу мають швидкості, що відповідають обертанню цих точок навколо миттєвого центру. При русі фігури все нові й нові точки контуру C' будуть приходити в дотикання з контуром C , причому це дотикання буде відбуватися в точці, яка переміщується по контуру C . Таким чином, миттєвий центр займає різні положення в рухомій фігурі і на нерухомій площині.

Якщо відомі напрями швидкостей двох яких-небудь точок фігури в даний момент, то, опускаючи в цих точках перпендикуляри до напрямів швидкостей, в перетині знайдемо шуканий миттєвий центр. Описана побудова впливає з раніше відміченої властивості миттєвого центра швидкостей бути центром миттєвого обертання плоскої фігури.

Використовуючи поняття миттєвого центру, легко одержати розв'язок наступної задачі: за відомими величиною і напрямом швидкості однієї точки фігури і за напрямом швидкості іншої її точки знайти розподіл швидкостей у фігурі, що рухається. До цієї задачі часто зводиться питання про дослідження швидкостей точок ланок механізму.

Нехай \vec{v}_A – відома за величиною і напрямом швидкість точки A (рис. 3.12), MVM_1 – лінія, вздовж якої спрямована швидкість точки B . Мит-

тевий центр повинен лежати на перетині перпендикулярів до \vec{v}_A і MM_1 ,

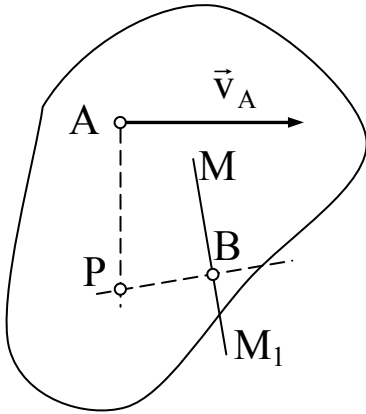


Рис. 3.12.

проведених через точки А і В. Припускаючи, що ці перпендикуляри перетинаються, знайдемо положення миттєвого центру. Щоб знайти розподіл швидкостей, потрібно знати ще величину кутової швидкості і напрямок обертання. Останнє визначається за відомим напрямком швидкості \vec{v}_A ; що ж стосується величини $\vec{\omega}$, то, знаючи \vec{v}_A , знаходимо

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

Після цього вже не складає труднощів визначити швидкості інших точок плоскої фігури.

Розглянемо деякі окремі випадки цієї задачі, коли зазначений спосіб визначення швидкостей не приводить до мети.

У тому випадку, коли швидкість \vec{v}_A паралельна лінії BM , причому точка В не лежить на перпендикулярі, проведеному через А до \vec{v}_A (рис.

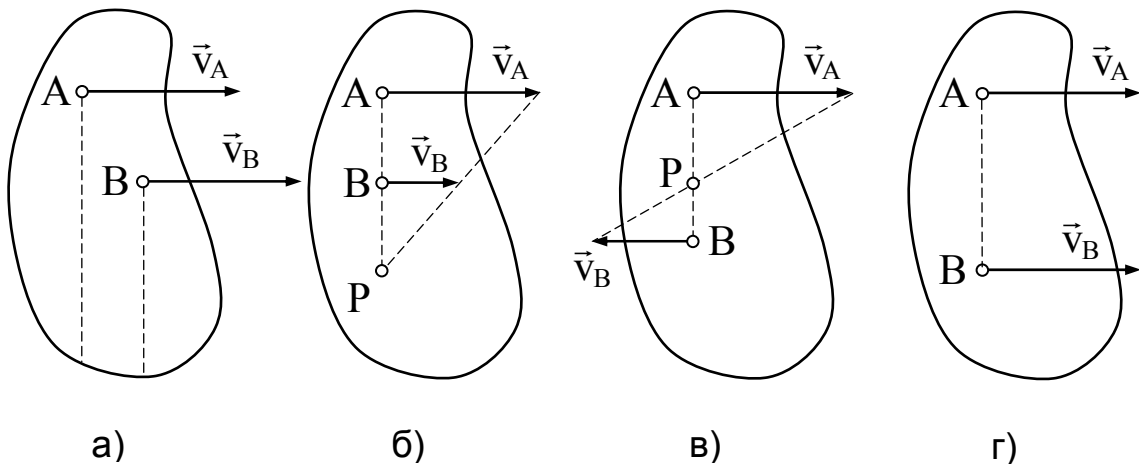


Рис. 3.13

3.13,а), вищевказані перпендикуляри не перетинаються, тобто миттєвого центра швидкостей у даний момент не існує $AP = \infty$ і обертання відсутнє. Розподіл швидкостей у цей момент такий же, як ніби фігура здійснювала поступальний рух. У цьому випадку рух називається *миттєво-поступальним*; швидкості всіх точок фігури в розглянутий момент однакові.

Можливий випадок, коли вектор \vec{v}_A паралельний BM , причому точка В лежить на перпендикулярі, проведеному до \vec{v}_A через точку А (рис. 3.13,б). Наявних даних у цьому випадку недостатньо для визначен-

ня розподілу швидкостей. Необхідно знати швидкість \vec{v}_B точки В не лише за напрямом, але й за величиною. Положення миттєвого центру і кутова швидкість фігури визначаються з умов

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \omega, \quad PA \mp PB = AB, \quad (3.15)$$

причому верхній знак відповідає однаковому напрямку швидкостей \vec{v}_A і \vec{v}_B (рис. 3.13,б), а нижній – протилежному (рис. 3.13,в). З рівностей (3.15) слідує, що геометричним місцем кінців векторів швидкостей точок прямої АВ є пряма, яка з'єднує кінець вектора \vec{v}_A з миттєвим центром швидкостей Р.

Нарешті, якщо в розглянутому випадку $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, то знову маємо миттєвий поступальний рух фігури (рис. 3.13,г).

Знайдемо координати миттєвого центру швидкостей. З цією метою скористаємося формулами (3.13) і, підставивши в праві частини замість x та y координати миттєвого центру x_P та y_P , прирівняємо ліві частини до нуля, оскільки швидкість тієї точки фігури, яка в даний момент часу відіграє роль миттєвого центру, дорівнює нулю. Отримаємо рівняння

$$v_{0x} - \omega(y_P - y_0) = 0, \quad v_{0y} + \omega(x_P - x_0) = 0,$$

звідки знаходимо

$$x_P = x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}, \quad y_P = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega}. \quad (3.16)$$

Аналогічно за (3.14) знайдемо координати x'_P , y'_P миттєвого центру в рухомій системі:

$$x'_P = \frac{1}{\omega}(v_{0x} \sin \varphi - v_{0y} \cos \varphi), \quad y'_P = \frac{1}{\omega}(v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi). \quad (3.17)$$

Рівняння (3.16)–(3.17) визначають координати миттєвого центру в будь-який момент часу.

При русі плоскої фігури в її площині миттєвий центр переміщується від однієї точки фігури до іншої. Так само і в нерухомій площині миттєвий центр займає все нові й нові положення. Таким чином, потрібно розрізняти точку плоскої фігури, яка в даний момент часу збігається з миттєвим центром і має швидкість, рівну нулю, від самого миттєвого центру, що переміщається по фігурі і має як відносно неї, так і відносно нерухомої площини швидкості, взагалі кажучи, відмінні від нуля і гео-

метрично рівні між собою. Останнє відразу випливає з того, що миттєвий центр проходить у даний момент через точку, яку внаслідок її миттєвої нерухомості можна однаково вважати належною як плоскій фігурі, так і нерухомій площині.

Траєкторія миттєвого центру в площині, пов'язаній з рухомою фігурою, утворює криву, яку називають *рухомою центроїдою*; точно так траєкторія миттєвого центру в нерухомій площині називається *нерухомою центроїдою*.

Рухома і нерухома центроїди мають у кожен момент часу спільну точку – миттєвий центр, траєкторіями якого вони служать. Вектор швидкості миттєвого центру, однаковий, згідно вище сказаного, як відносно нерухомої, так і рухомої площин, спрямований по дотичній до траєкторії миттєвого центру. Отже, дотична – одна і та ж для обох центроїд, тобто центроїди дотикаються.

Нарешті, з рівності за величиною швидкостей миттєвого центру по центроїдах випливає рівність шляхів, які пройдені миттєвим центром по рухомій та нерухомій центроїдах за один і той самий нескінченно малий проміжок часу, тобто рівність елементарних дуг центроїд між відповідними одне одному суміжними положеннями на них миттєвого центру.

Звідси, відповідно до визначення кочення без ковзання, випливає, що *при русі плоскої фігури у своїй площині рухома центроїда котиться без ковзання по нерухомій*.

Нехай C і C' (рис. 3.14) – нерухома й рухома центроїди, що дотикаються в даний момент t у миттєвому центрі P . Точки P_1, P_2 і т.д.

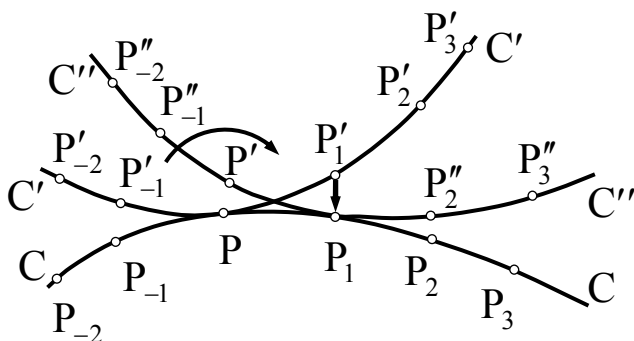


Рис. 3.14

визначають положення миттєвого центру в нерухомій площині в наступні моменти часу $t_1, t_2 \dots$, точки \dots, P_{-2}, P_{-1} – у попередні моменти. Аналогічно, точки P'_1, P'_2 і т.д. відмічають положення миттєвого центру в рухомій площині у ті ж моменти часу $t_1, t_2 \dots$, точки

\dots, P'_{-1}, P'_{-2} – у попередні моменти. Дуги $\overset{\cup}{PP'_1}$ і $\overset{\cup}{PP_{-1}}$, $\overset{\cup}{P'_1P'_2}$ і $\overset{\cup}{P_1P_2}$ і т.д. згідно вище сказаного рівні між собою; у момент часу t_1 точка P'_1 при-

йде в точку P_1 , а точка P_2' займе положення P_2'' . У момент часу t_2 точка P_2'' збігається з точкою P_2 і т.д. Такий послідовний збіг кінців рівних між собою за довжиною дуг рухомої і нерухомої кривих можливий лише за відсутності ковзання. Оскільки при цьому криві дотикаються, то описаний рух є *коченням без ковзання рухомої центроїди по нерухомій*.

3.4. Прискорення точок плоскої фігури. Миттєвий центр прискорень

Для визначення прискорення довільної точки плоскої фігури знайдемо похідну по часу від вектора швидкості цієї точки. Згідно (3.10) маємо:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}'] = \dot{\vec{v}}_0 + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}'] + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}']. \quad (3.18)$$

Перший доданок

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0, \quad (3.19)$$

однаковий для всіх точок фігури і рівний прискоренню полюса O' , називається поступальним прискоренням.

Другий доданок, рівний

$$\vec{a}_{об} = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}'] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'], \quad (3.20)$$

називається обертовим прискоренням. Тут вектор

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

є вектором кутового прискорення. Вектор $\vec{a}_{об}$ перпендикулярний до \vec{r}' і напрямлений в ту ж сторону, що й обертова швидкість точки плоскої фігури навколо полюса, або в протилежну, в залежності від того, буде обертання фігури прискореним чи сповільненим. Величина $\vec{a}_{об}$ рівна

$$a_{об} = \varepsilon r' \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}') = \varepsilon r'. \quad (3.21)$$

Третя складова, яку позначимо через $\vec{a}_д$, рівна

$$\vec{a}_д = [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}']. \quad (3.22)$$

Підставивши сюди замість $\dot{\vec{r}}'$ вираз (3.11), отримаємо

$$\vec{a}_д = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']],$$

або за відомою формулою розкладу подвійного векторного добутку:

$$\vec{a}_д = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}).$$

Але в плоскому русі вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r}' взаємно перпендикулярні, тому $\vec{\omega} \cdot \vec{r}' = 0$. Крім того, $\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2$. У результаті приходимо до виразу

$$\vec{a}_d = -\omega^2 \vec{r}' . \quad (3.23)$$

Ця складова прискорення, напрямлена від точки, що розглядається, до полюса, називається *доосевим прискоренням*.

Таким чином, маємо

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{об} + \vec{a}_d = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'] - \omega^2 \vec{r}' , \quad (3.24)$$

тобто *прискорення будь-якої точки у плоскому русі може бути представлено геометричною сумою поступального прискорення, рівного прискоренню полюса, обертового прискорення навколо полюса і доосевого прискорення до полюса*.

Оскільки $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$, то, проектуючи обидві частини рівності (3.24) на нерухомі осі X та Y , отримаємо:

$$a_x = \ddot{x}_0 - \ddot{\phi}(y - y_0) - \dot{\phi}^2(x - x_0), \quad a_y = \ddot{y}_0 - \ddot{\phi}(x - x_0) - \dot{\phi}^2(y - y_0). \quad (3.25)$$

Аналогічно знаходимо проекції прискорення на рухомі осі:

$$a_{x'} = a_{0x'} - \ddot{\phi}y' - \dot{\phi}^2x', \quad a_{y'} = a_{0y'} + \ddot{\phi}x' - \dot{\phi}^2y', \quad (3.26)$$

де $a_{0x'}$ і $a_{0y'}$ – проекції прискорення полюса на рухомі осі координат. Вони можуть бути легко знайдені за формулами переходу від однієї системи координат до іншої.

Коли плоский рух задано, то координати полюса x_0, y_0 , а також кут повороту ϕ відомі як функції часу, так що всі величини в правих частинах останніх формул можуть бути обчислені.

Якщо за полюс вибрати деяку точку A плоскої фігури, то для прискорення довільної її точки B у відповідності з формулою (3.24) можна записати:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{(об)} + \vec{a}_{AB}^{(д)}, \quad (3.27)$$

де \vec{a}_{AB} – прискорення точки B відносно системи координат з початком у точці A , яка рухається поступально. Окремі складові цього прискорення – обертове навколо полюса і доосеве до полюса – рівні:

$$\vec{a}_{AB}^{(об)} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_{AB}], \quad \vec{a}_{AB}^{(д)} = -\omega^2 \vec{r}'_{AB}. \quad (3.28)$$

Побудову цих складових показано на рис. 3.15. Відмічаючи, що $\vec{a}_{AB}^{(об)}$ і $\vec{a}_{AB}^{(д)}$ взаємно перпендикулярні, отримаємо

$$a_{AB} = r'_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.28)$$

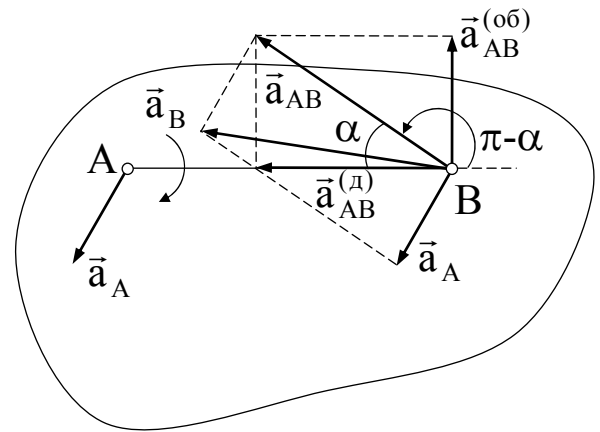
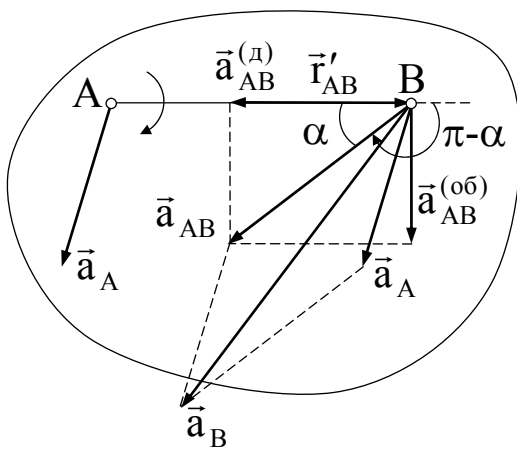
Позначимо через $\pi - \alpha$ тупий кут між векторами \vec{r}'_{AB} і \vec{a}_{AB} . З рис. 3.15 бачимо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{AB}^{(об)}}{a_{AB}^{(л)}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.29)$$

Якщо обертання прискорене (рис. 3.15,а), то кут $\pi - \alpha$ відраховується від \vec{r}'_{AB} в бік обертання фігури, а при сповільненому обертанні (рис. 3.15,б) – в протилежну сторону. У кожний даний момент часу кут α однаковий для всіх точок фігури.

Прискорене обертання

Сповільнене обертання



а)

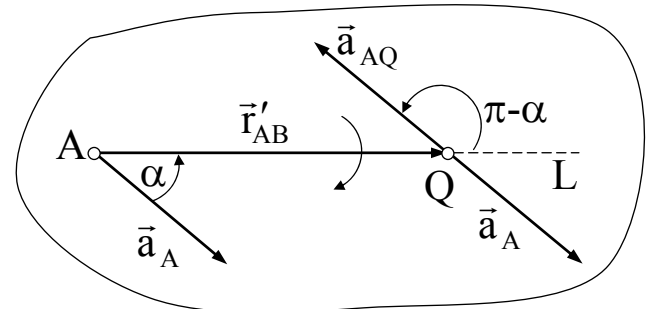
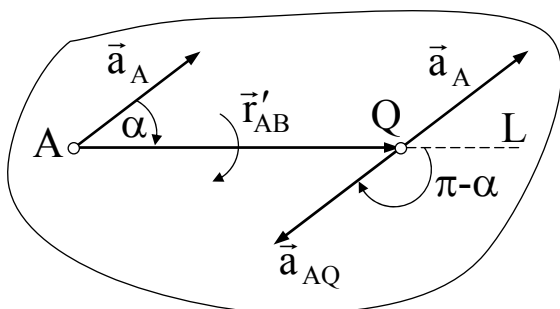
б)

Рис. 3.15

Доведемо, що в будь-який момент часу існує точка плоскої фігури, прискорення якої в цей момент рівне нулю. Таку точку називають *миттєвим центром прискорень*. Щоб переконатись в існуванні миттєвого

Прискорене обертання

Сповільнене обертання



а)

б)

Рис. 3.16

центру прискорень, проведемо через довільну точку А півпрямую AL (рис. 3.16,а,б) під кутом α , який визначається формулою (3.29), до вектора \vec{a}_A , відраховуючи α від \vec{a}_A у бік обертання фігури або протилежно йому, відповідно до того, буде обертання прискореним чи сповільне-

ним. Відкладемо на AL відрізок

$$r'_{AQ} = AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (3.30)$$

Кінець Q цього відрізка і буде миттєвим центром прискорень. Дійсно, згідно формули (3.28) маємо

$$a_{AQ} = r'_{AQ} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

З іншого боку, за побудовою вектор \vec{a}_{AQ} протилежний \vec{a}_A за напрямом, тобто

$$\vec{a}_{AQ} = -\vec{a}_A.$$

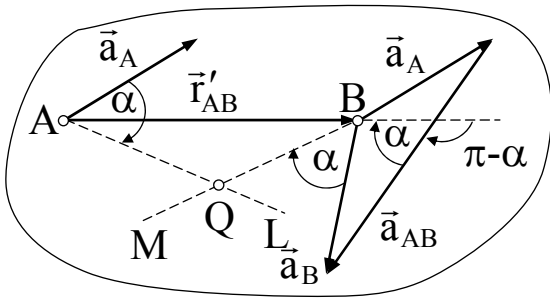


Рис. 3.17

Звідси на основі (3.27) робимо висновок, що $\vec{a}_Q = 0$, тобто Q – миттєвий центр прискорень.

Побудова миттєвого центру прискорень на основі сказаного потребує знання прискорення \vec{a}_A деякої точки

фігури і кута α . Покажемо, як побудувати миттєвий центр прискорень, знаючи прискорення двох точок фігури.

Побудову показано на рис. 3.17. За відомими \vec{a}_A і \vec{a}_B знаходять їх різницю:

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_B - \vec{a}_A.$$

Це визначає кут $\pi - \alpha$, що відраховується від \vec{r}'_{AB} до \vec{a}_{AB} . У тому ж напрямі відліку відкладають кут α від напрямів \vec{a}_A і \vec{a}_B і проводять промені AL і BM . Їх перетин і визначає точку Q – положення миттєвого центру прискорень.

Маючи миттєвий центр прискорень, можна отримати наочну картину розподілу прискорень у плоскій фігурі. Дійсно, використовуючи формулу (3.27) у припущенні, що за полюс A вибрано миттєвий центр Q , і відмічаючи, що за визначенням $\vec{a}_Q = 0$, отримаємо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{QB} = \vec{a}_{QB}^{(об)} + \vec{a}_{QB}^{(д)} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_{QB}] - \omega^2 \vec{r}'_{QB}. \quad (3.31)$$

Перша складова у правій частині – обертове прискорення $\vec{a}_{QB}^{(об)}$ – напрямлене перпендикулярно до радіус-вектора, який з'єднує центр прискорень з точкою, що розглядається, в той бік, куди проходить обертання, або в протилежний, в залежності від того, є обертання прискореним

чи сповільненим. Друга складова – доосеве прискорення – напрямлене завжди від точки до миттєвого центру прискорень.

Розміщення цих складових показано на рис. 3.18. За величиною вони рівні

$$a_{QB}^{(об)} = a_B^{(об)} = \varepsilon r'_{QB}, \quad (3.32)$$

$$a_{QB}^{(д)} = a_B^{(д)} = \omega^2 r'_{QB}. \quad (3.33)$$

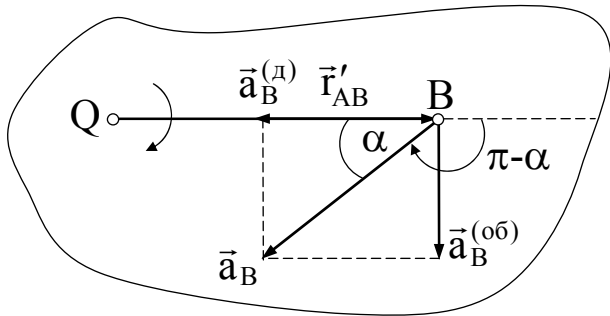


Рис. 3.18

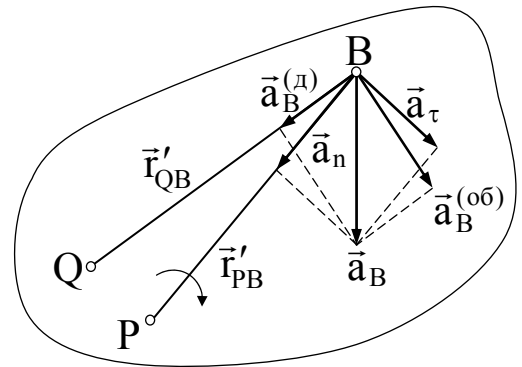


Рис. 3.19

Їх геометрична сума \vec{a}_B за величиною рівна

$$a_B = r'_{QB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.34)$$

Таким чином, *повне прискорення будь-якої точки фігури за величиною пропорційне її відстані від миттєвого центру прискорень і напрямлене під однаковим для всіх точок фігури кутом до радіус-вектора, що з'єднує розглянуту точку з миттєвим центром прискорень.*

Не можна ототожнювати обертове прискорення $\vec{a}_B^{(об)}$ з тангенціальною складовою прискорення, а доосеве $\vec{a}_B^{(д)}$ – з нормальною складовою. Справді, тангенціальне прискорення \vec{a}_τ і нормальне прискорення \vec{a}_n напрямлені по дотичній і головній нормалі до траєкторії, тобто по перпендикуляру до радіус-вектора \vec{r}'_{PB} , який з'єднує дану точку фігури з миттєвим центром швидкостей P, і уздовж цього радіус-вектора, в той час як $\vec{a}_B^{(об)}$ і $\vec{a}_B^{(д)}$ напрямлені перпендикулярно і вздовж радіус-вектора \vec{r}'_{QB} (рис. 3.19).

Легко отримати радіус-вектори \vec{r}_Q і \vec{r}'_Q центру прискорень в нерухомій і рухомій системах координат. Для цього розв'яжемо векторне рівняння

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_Q] - \omega^2 \vec{r}'_Q = 0. \quad (3.35)$$

З цією метою помножимо його векторно на $\vec{\varepsilon}$:

$$[\vec{\varepsilon}, \vec{a}_0] + [\vec{\varepsilon}, [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_Q]] - \omega^2 [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_Q] = 0,$$

і розкриємо подвійний векторний добуток. В результаті отримаємо

$$[\vec{\varepsilon}, \vec{a}_0] + \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q) - \vec{r}'_Q (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}) - \omega^2 [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_Q] = 0.$$

Зауважимо, що в плоскому русі $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}'_Q = 0$. Оскільки $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = \varepsilon^2$ і згідно (3.35)

$$[\vec{\varepsilon}, \vec{r}'_Q] = \omega^2 \vec{r}'_Q - \vec{a}_0,$$

то після підстановки цих виразів у рівняння (3.35) отримаємо

$$[\vec{\varepsilon}, \vec{a}_0] - (\varepsilon^2 + \omega^4) \vec{r}'_Q + \omega^2 \vec{a}_0 = 0,$$

або, розв'язуючи рівняння відносно радіус-вектора,

$$\vec{r}'_Q = \frac{[\vec{\varepsilon}, \vec{a}_0] + \omega^2 \vec{a}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \vec{r}'_Q = \vec{r}_0 + \frac{[\vec{\varepsilon}, \vec{a}_0] + \omega^2 \vec{a}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.36)$$

Проектуючи першу рівність на рухомі осі координат X' , Y' , а другу – на нерухомі осі X , Y , отримаємо формули координат миттєвого центру прискорень:

а) в рухомій системі осей

$$x'_Q = \frac{\omega^2 a_{0x'} - \ddot{\varphi} a_{0y'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \quad y'_Q = \frac{\omega^2 a_{0y'} + \ddot{\varphi} a_{0x'}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}; \quad (3.37)$$

б) в нерухомій системі

$$x_Q = x_0 + \frac{\omega^2 a_{0x} - \ddot{\varphi} a_{0y}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}, \quad y_Q = y_0 + \frac{\omega^2 a_{0y} + \ddot{\varphi} a_{0x}}{\ddot{\varphi}^2 + \omega^4}. \quad (3.38)$$

Література

[5] – §§ 53–58

[10] – Гл. 3, Р. 2, §§ 1-11

[13] – § 1.2

[19] – Ч. 1, Гл. 1, § 4

Лекція 4

Рух твердого тіла, що має нерухому точку

4.1. Кути Ейлера. Рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки

Тіло, яке здійснює обертання навколо нерухомої точки, володіє трьома ступенями вільності. Тому в цьому випадку для задання положення тіла відносно деякої системи координат потрібні лише три незалежні величини. З цією метою в теоретичній механіці найчастіше використовують так звані *кути Ейлера*.

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої точки O . Через цю точку проведемо нерухому систему координат $OXYZ$, відносно якої і розглядатимемо обертання тіла. Другу систему $OX'Y'Z'$ жорстко з'єднаємо з тілом, яке обертається (рис. 4.1). Лінію перетину площин XOY та $X'OY'$ називають лінією вузлів. Додатній напрям цієї лінії ON (рис. 5.1) вибирають так, щоб дивлячись з нього, бачити обертання осі OZ проти годинникової стрілки.

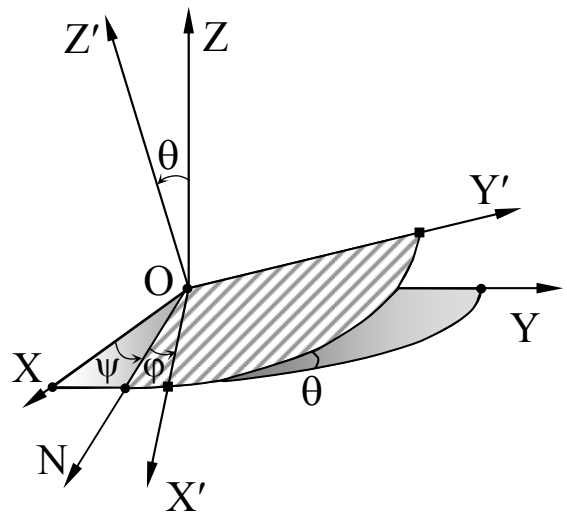


Рис. 4.1

Перший кут Ейлера – *кут прецесії* ψ , утворений в площині XOY лінією вузлів з нерухомою віссю OX . Відраховується він в додатному напрямі від осі OX до лінії вузлів, якщо дивитись з додатного напрямку осі OZ .

Другий кут Ейлера – *кут нутації* θ розташований в площині ZOZ' і відраховується від осі OZ до осі OZ' проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку лінії вузлів.

Третій кут називається *кутом власного обертання* ϕ . Він розташований у площині $X'OY'$ і відраховується проти годинникової стрілки від лінії вузлів до осі OX' .

В загальному випадку при обертанні тіла навколо нерухомої точки змінюються всі три кути Ейлера. Оскільки вони є незалежними параметрами, то їх можна вибрати як узагальнені координати, які характеризують положення тіла з однією нерухомою точкою відносно нерухомої

системи координат. Таким чином, для визначення положення тіла, яке обертається навколо нерухомої точки, в будь-який момент часу потрібно задати кути Ейлера як однозначні функції часу:

$$\psi = f_1(t); \quad \theta = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) є рівняннями обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.

Слід відмітити, що приведений вище спосіб вибору кутів Ейлера не єдино можливий. Більше того, в багатьох прикладних задачах (наприклад, в теорії малих коливань), де суттєвою є вимога, щоб за малих відхилень системи $OX'Y'Z'$ від $OXYZ$ Ейлерові кути залишались малими, попередня система цій умові не задовольняє. В таких випадках при виборі кутів Ейлера користуються наступними принципами:

1) вибирають дві “основні” осі, що належать до систем $OXYZ$ і $OX'Y'Z'$. Це можуть бути як однойменні (наприклад, OZ і OZ'), так і різнойменні осі. Якщо осі однойменні, як було в розглянутому випадку, то кут між ними позначають через θ (кут нутації), якщо різнойменні, то кут покладається рівним $\pi/2 \pm \theta$;

2) площини, перпендикулярні основним осям, називаються також “основними”. Їх перетин при заданому додатному напрямі дає лінію вузлів. Кути між основними осями відраховують в додатному напрямі навколо лінії вузлів;

3) в системах $OXYZ$ і $OX'Y'Z'$, поряд з “основними”, вибираються “осі відліку”. Кут між віссю відліку системи $OXYZ$ і лінією вузлів, відрахований в додатному напрямі навколо основної осі системи $OXYZ$, вибирають кутом прецесії. Кут між лінією вузлів і другою віссю відліку, відрахований в додатному напрямі навколо основної осі системи $OXYZ$, вибирають кутом власного обертання.

Повернемося до попереднього вибору кутів Ейлера і встановимо залежності між косинусами кутів координатних осей і кутами ψ , θ , φ .

Формули зв'язку між координатами в системах $OXYZ$ і $OX'Y'Z'$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z; \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z, \end{aligned} \quad (4.2)$$

або в оберненій формі:

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z'; \\
 y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z'; \\
 z &= \alpha_{13}x'' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z',
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

де α_{ij} – косинуси кутів між j -тою віссю “старої” системи та i -тою віссю “нової” системи (наприклад, $\alpha_{13} = \cos(\vec{k} \wedge \vec{i})$).

Введемо одиничні вектори наступних осей (рис. 4.2): \vec{n} – лінії вузлів ON ; \vec{n}_1 – осі ON_1 , перпендикулярної до осі ON , яка лежить у площині XOY ; \vec{n}'_1 – осі ON'_1 , яка перпендикулярна до осі ON і лежить у площині $X'OY'$. Напрямок ON_1 виберемо так, щоб осі ONN_1Z утворювали співнаправлений триєдр з системою $OX'Y'Z'$, а значить, і з системою $OXYZ$. Легко помітити, що кут між осями ON'_1 і ON_1 являє собою лінійний кут двогранного кута між площинами $X'OY'$ і XOY , тобто кут θ . З рисунка бачимо, що

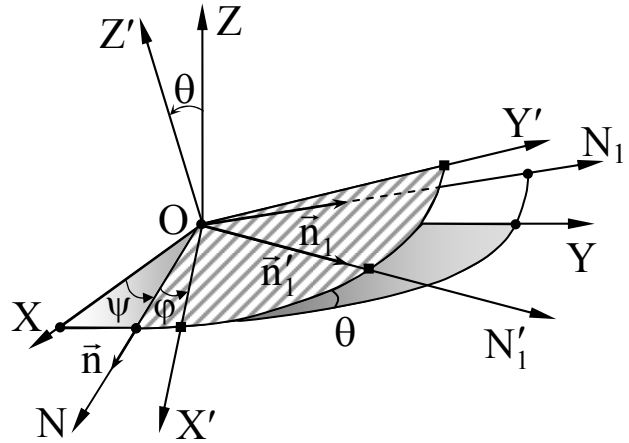


Рис. 4.2

$$\begin{aligned}
 \vec{i} &= \vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi, & \vec{j} &= \vec{n} \sin \psi + \vec{n}_1 \cos \psi, \\
 \vec{i}' &= \vec{n} \cos \varphi + \vec{n}'_1 \sin \varphi, & \vec{j}' &= -\vec{n} \sin \varphi + \vec{n}'_1 \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Враховуючи співвідношення (4.4), для напрямних косинусів координатних осей отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \vec{i} \cdot \vec{i}' = (\vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi)(\vec{n} \cos \varphi + \vec{n}'_1 \sin \varphi) = \\
 &= \vec{n}^2 \cos \psi \cos \varphi + \vec{n}\vec{n}'_1 \cos \psi \sin \varphi - \vec{n}\vec{n}_1 \sin \psi \cos \varphi - \vec{n}_1\vec{n}'_1 \sin \psi \sin \varphi = \\
 &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Тут враховано, що $\vec{n}^2 = 1$, $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{n}'_1 = 0$, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}'_1 = \cos \theta$. Отже,

$$\alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Аналогічно

$$\alpha_{21} = \vec{i} \cdot \vec{j}' = -(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta);$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{31} &= \vec{i} \cdot \vec{k}' = (\vec{n} \cos \psi - \vec{n}_1 \sin \psi) \cdot \vec{k}' = -\vec{n}_1 \vec{k}' \sin \psi = -\sin \psi \cos(90^\circ + \theta) = \\
 &= \sin \psi \sin \theta;
 \end{aligned}$$

$$\alpha_{12} = \vec{j} \cdot \vec{i}' = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta;$$

$$\alpha_{22} = \vec{j} \cdot \vec{j}' = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta;$$

$$\alpha_{32} = \vec{j} \cdot \vec{k}' = \cos \psi \cos(90^\circ + \theta) = -\cos \psi \sin \theta;$$

$$\alpha_{13} = \vec{k} \cdot \vec{i}' = \sin \varphi \cos(90^\circ - \theta) = \sin \varphi \sin \theta;$$

$$\alpha_{33} = \vec{k} \cdot \vec{k}' = \cos \theta; \quad \alpha_{23} = \vec{k} \cdot \vec{j}' = \cos \varphi \sin \theta.$$

4.2. Теорема Ейлера-Даламбера

Доведемо наступне твердження, відоме як теорема Ейлера-Даламбера: *будь-яке переміщення тіла, що має одну нерухому точку, може бути здійснене одним поворотом на певний кут навколо осі, яка проходить через нерухому точку тіла.*

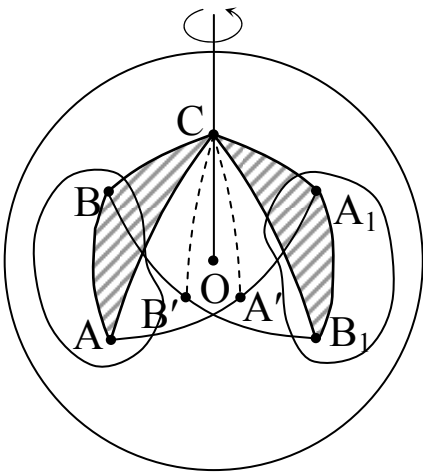


Рис. 4.3

Доведення теореми Ейлера-Даламбера ґрунтується на незмінності відстаней між усіма точками твердого тіла.

Нехай положення I тіла характеризується дугою великого кола АВ, описаного з нерухомої точки тіла, а в положенні II – тією ж дугою, але в іншому положенні на сфері A_1B_1 (рис. 4.3). З'єднаємо точки А і A_1 та В і B_1 дугами великого кола і відмітимо середини дуг AA_1 і BB_1 точками A' і B' , відповідно. Через отримані точки проведемо сферичні перпендикуляри. Ці перпендикуляри перетнуться в деякій точці С. З рівності сферичних трикутників ABC і A_1B_1C (дуга АВ рівна дузі A_1B_1 за побудовою, а дуги АС і ВС рівні, відповідно, дугам A_1C і B_1C як сферичні похилі, однаково віддалені від основ сферичних перпендикулярів) слідує, що трикутник ABC може бути суміщений з трикутником A_1B_1C одним поворотом на кут ACA_1 навколо центра С. Звідси слідує, що й сферичний відрізок АВ суміститься з відрізком A_1B_1 . При такому переміщенні залишаються нерухомими дві точки О і С, тобто й пряма ОС залишається нерухомою. Ця пряма виступає як вісь повороту тіла, що й доводить теорему Ейлера-Даламбера.

Підкреслимо, що ця теорема справедлива для поворотів як на скінченні, так і на нескінченно малі кути. Однак самі ці повороти відрізняються один від одного: *результат двох поворотів на скінченні кути, взагалі кажучи, залежить від послідовності цих поворотів, в той час як результат двох довільних нескінченно малих поворотів з точ-*

ністю до нескінченно малих величин вищого порядку від їх послідовності не залежить.

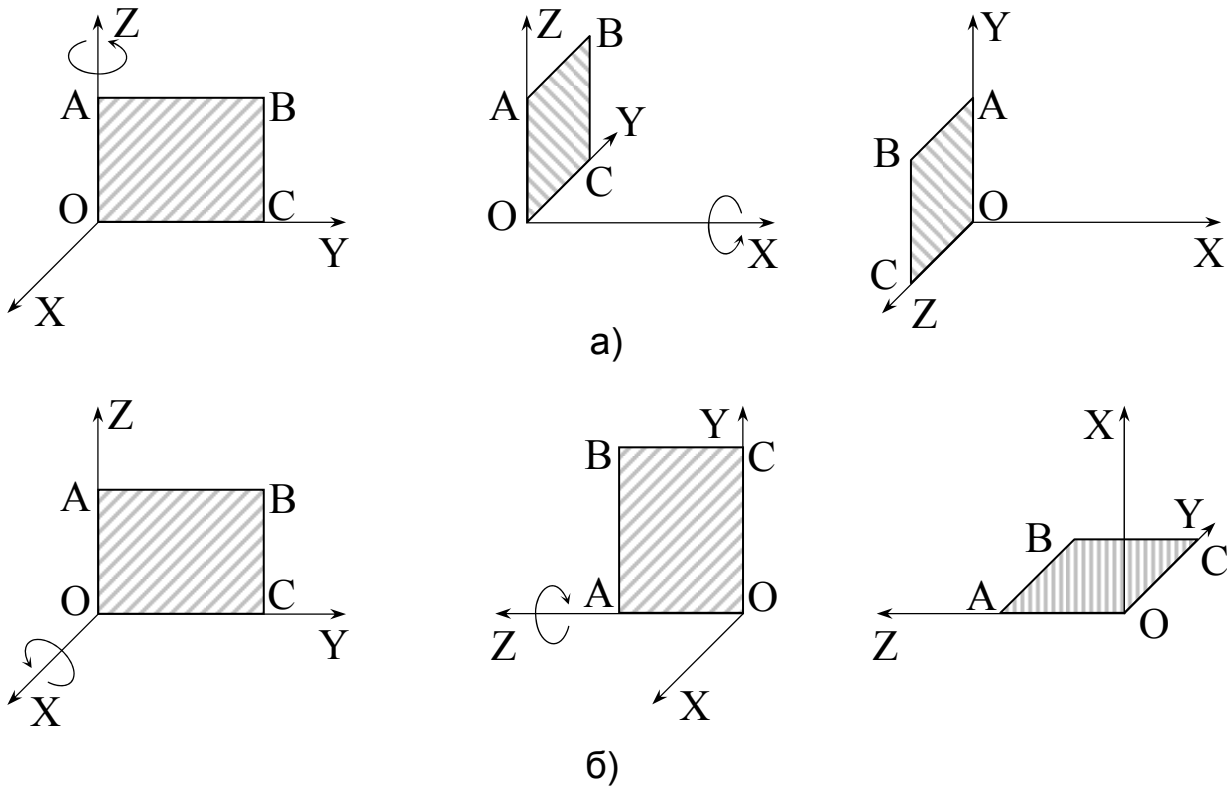


Рис. 4.4.

Проілюструємо це на прикладі поворотів прямокутника OABC (рис. 4.4). Спочатку повернемо його навколо осі OZ на 90° , а потім навколо осі OX також на 90° (рис. 4.4, а). Після цього змінимо послідовність поворотів: повернемо прямокутник спочатку навколо осі OX на 90° , а потім навколо OZ на 90° (рис. 4.4, б). Як бачимо, результат одних і тих же поворотів на скінченні кути є різним в залежності від послідовності поворотів.³

Проаналізуємо приведені твердження для нескінченно малого повороту. Нехай тверде тіло має нерухому точку O. Введемо до розгляду вектор малого повороту $\vec{d\Omega}$, рівний за величиною куту повороту тіла $d\Omega$ і напрямлений вздовж осі повороту в ту сторону, щоб з кінця вектора $\vec{d\Omega}$ обертання відбувалось в додатному напрямі (рис. 4.5). Довільна точка M тіла з ра-

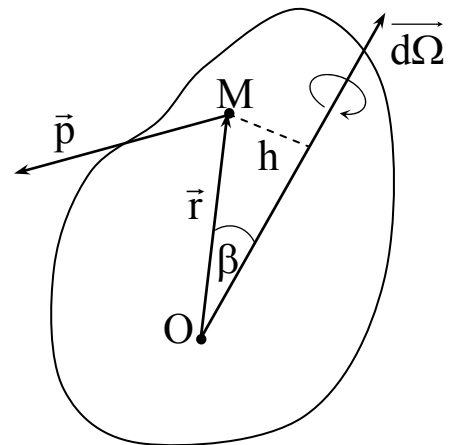


Рис. 4.5

³ В зв'язку з цим кажуть, що операція повороту на скінченний кут *некомутативна*. Цьому відповідає некомутативність множення матриць скінченних поворотів.

діус-вектором \vec{r} , яка знаходиться на відстані $h = r \cdot \sin \beta$ від осі повороту, в результаті нескінченно малого повороту здійснить переміщення

$$\vec{p} = [\overline{d\Omega}, \vec{r}], \quad (4.6)$$

напрямок якого співпадає з перпендикуляром до площини, що містить вектори $\overline{d\Omega}$ і \vec{r} , в бік повороту тіла.

Нехай тепер тіло здійснило два послідовні малі повороти $\overline{d\Omega}_1$ і $\overline{d\Omega}_2$. Після повороту $\overline{d\Omega}_1$ точка М перейде в положення M_1 з радіус-вектором

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{p} = \vec{r} + [\overline{d\Omega}_1, \vec{r}].$$

В результаті другого повороту точка M_1 переходить в положення M_2 з радіус-вектором

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{p}' = \vec{r}_1 + [\overline{d\Omega}_2, \vec{r}_1] = \vec{r}_1 = \vec{r} + [\overline{d\Omega}_1, \vec{r}] + [\overline{d\Omega}_2, (\vec{r} + [\overline{d\Omega}_1, \vec{r}])] = \\ &= \vec{r} + [(\overline{d\Omega}_1 + \overline{d\Omega}_2), \vec{r}] + [\overline{d\Omega}_2, [\overline{d\Omega}_1, \vec{r}]]. \end{aligned}$$

В отриманому виразі останній доданок є нескінченно малим вектором другого порядку, яким можна знехтувати. Тоді

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + [(\overline{d\Omega}_1 + \overline{d\Omega}_2), \vec{r}].$$

Згідно теореми Ейлера-Даламбера ця сукупність двох поворотів може бути замінена одним поворотом, що визначається вектором $\overline{d\Omega}$. В нашому випадку це твердження можна записати як

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + [\overline{d\Omega}, \vec{r}].$$

Порівнюючи останні формули і врахувавши довільність вектора \vec{r} , отримуємо:

$$\overline{d\Omega} = \overline{d\Omega}_1 + \overline{d\Omega}_2. \quad (4.7)$$

Таким чином, *два послідовні нескінченно малі повороти тіла можуть бути замінені одним результируючим поворотом з вектором повороту, рівним геометричній сумі складових векторів повороту; від зміни порядку поворотів результируючий поворот не змінюється.*

4.3. Миттєва вісь обертання. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення

Кутову швидкість тіла, яке обертається навколо нерухомої точки, визначають як вектор $\vec{\omega}$, рівний відношенню вектора нескінченно ма-

лого повороту $\overline{d\Omega}$ до приросту часу:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}. \quad (4.8)$$

При цьому необхідно зауважити, що в кожний момент часу тіло обертається навколо миттєвої осі, яка проходить через нерухому точку тіла. Орієнтація миттєвої осі обертання, на відміну від нерухомої, весь час змінюється. Тому й кутова швидкість обертання (4.8), напрямлена по миттєвій осі, має зміст *миттєвої кутової швидкості*. Що стосується величини вектора $\vec{\omega}$, то вже не можна, як раніше, визначати її похідною від кута повороту по часу, оскільки при обертанні тіла навколо нерухомої точки такого кута не існує. Саме тому вектор нескінченно малого повороту було позначено $\overline{d\Omega}$, а не $d\vec{\Omega}$ (вектора $\vec{\Omega}$ не існує, оскільки скінченний поворот, як показано вище, не комутативний, а додавання векторів повинно бути комутативною операцією).

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ пов'язана з величинами кутів Ейлера та їх похідними по часу. Для знаходження цього зв'язку врахуємо, що в результаті повороту $\overline{d\Omega}$ кути Ейлера отримують прирости $d\psi$, $d\theta$, $d\phi$, а сам поворот може бути отриманий трьома поворотами (згідно теореми Ейлера-Даламбера), здійсненими в будь-якій послідовності, а саме: поворотами навколо осі OZ на $d\psi$, навколо лінії вузлів на $d\theta$ і навколо осі OZ' на $d\phi$. Таким чином, вектор повороту $\overline{d\Omega}$ дорівнює сумі трьох векторів:

$$\overline{d\Omega} = \vec{k}d\psi + \vec{n}d\theta + \vec{k}'d\phi,$$

а кутова швидкість, згідно (4.8), може бути задана у вигляді

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\phi}\vec{k}'. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) по суті є розкладом вектора кутової швидкості на три вектори (рис. 4.6): $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi}\vec{k}$ – кутову швидкість повороту тіла навколо осі OZ , $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{n}$ – кутову швидкість повороту тіла навколо лінії вузлів, $\vec{\omega}_3 = \dot{\phi}\vec{k}'$ – кутову швидкість повороту тіла навколо осі OZ' .

Користуючись представленням вектора $\vec{\omega}$ у формі (4.9), знайдемо

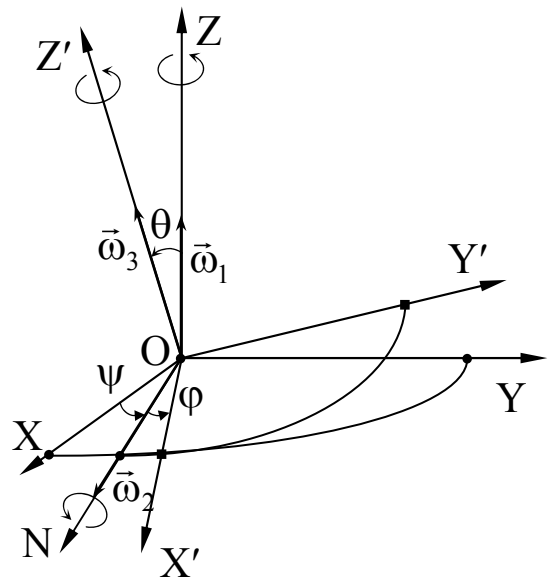


Рис. 4.6

проекції кутової швидкості на осі нерухомої системи OXYZ:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_{31};$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \alpha_{32};$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \alpha_{33},$$

або, користуючись формулами (5.5),

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta;$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta; \quad (4.10)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

Аналогічно отримуємо і проекції кутової швидкості на рухомі осі, проектуючи рівність (4.9) на осі системи OX'Y'Z', пов'язаної з рухомим тілом:

$$\omega_{x'} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_{y'} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \quad (4.11)$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

Співвідношення (4.10) і (4.11) називаються *кінематичними формулами Ейлера*. Вони встановлюють зв'язок кутової швидкості зі значеннями кутів Ейлера та їх похідними по часу.

З виведених формул слідує, що модуль кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta}. \quad (4.12)$$

Проекції кутової швидкості можна виразити також і через напрямні косинуси координатних осей системи OX'Y'Z'. Для цього скористаємося формулою Ейлера, на основі якої можна записати:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}'], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}'] \quad (4.13)$$

Розкладемо вектор $\vec{\omega}$ за тими ж ортами:

$$\vec{\omega} = \vec{i}' \cdot \omega_{x'} + \vec{j}' \cdot \omega_{y'} + \vec{k}' \cdot \omega_{z'}$$

і підставимо в систему рівностей (4.13). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}'}{dt} &= \omega_{y'} [\vec{j}', \vec{i}'] + \omega_{z'} [\vec{k}', \vec{i}'] = \omega_{z'} \cdot \vec{j}' - \omega_{y'} \cdot \vec{k}', \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= \omega_{x'} \cdot \vec{k}' - \omega_{z'} \cdot \vec{i}', \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= \omega_{y'} \cdot \vec{i}' - \omega_{x'} \cdot \vec{j}'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Помноживши скалярно обидві частини рівностей (4.14) відповідно на $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, отримаємо:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' = -\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{j}', \\ \omega_{y'} &= \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' = -\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{k}', \\ \omega_{z'} &= \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' = -\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{i}'.\end{aligned}\tag{4.15}$$

4.4. Швидкості та прискорення точок тіла

Слід відмітити, що формула Ейлера (2.12), отримана для випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, справедлива й при русі тіла навколо нерухомої точки. Таким чином, швидкість \vec{v} будь-якої точки тіла, що має одну нерухому точку,

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}].\tag{4.16}$$

Для конкретних обчислень потрібно володіти проекціями швидкостей точок на координатні осі. За допомогою (5.9) отримаємо вирази швидкості в проекціях на нерухомі та рухомі осі.

$$\begin{aligned}v_x &= \omega_y z - \omega_z y; & v_{x'} &= \omega_{y'} z' - \omega_{z'} y'; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; & v_{y'} &= \omega_{z'} x' - \omega_{x'} z'; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x; & v_{z'} &= \omega_{x'} y' - \omega_{y'} x'.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Розв'язуючи питання, якими проекціями слід користуватись, потрібно мати на увазі, що мова йде про одну й ту ж швидкість – швидкість руху точки в нерухомій системі і тому вибір системи координат для вираження проекцій диктується тільки зручністю.

Модуль швидкості

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega \cdot h,\tag{4.18}$$

де h – найкоротша відстань від точки, що розглядається, до миттєвої осі обертання (рис. 4.7). Напрямок швидкості довільної точки тіла перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r} , тобто перпендикулярний відріzkу h .

Для визначення прискорення довільної точки M тіла при його русі навколо нерухомого центру, продиференціюємо по часу обидві частини формули (4.16). В результаті отримаємо:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}]. \quad (4.19)$$

Як і раніше похідна по часу вектора кутової швидкості визначає вектор кутового прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}. \quad (4.20)$$

За величиною та напрямом цей вектор співпадає з швидкістю руху кінцевої точки вектора $\vec{\omega}$ вздовж її годографа.

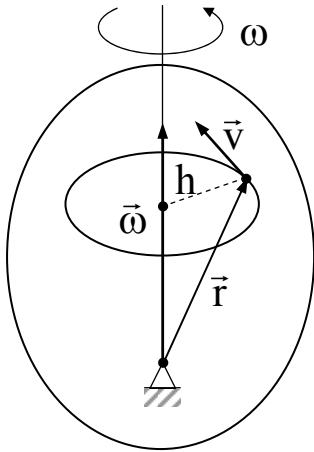


Рис. 4.7

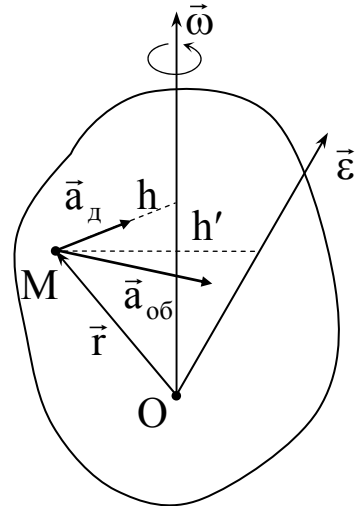


Рис. 4.8

Так як $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, то

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]. \quad (4.21)^4$$

Складова

$$\vec{a}_{об} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] \quad (4.22)$$

називається *обертним прискоренням*.

Друга складова загального прискорення

$$\vec{a}_д = [\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \quad (4.23)$$

називається *доосевим прискоренням*.

Таким чином, формула (4.21) набуває вигляду

$$\vec{a} = \vec{a}_{об} + \vec{a}_д. \quad (4.24)$$

Співвідношення (4.24) відображає наступну теорему: **прискорення точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомого центру, рівне векторній сумі обертвого і доосевого прискорень**.

Розглянемо тепер окремо обертве і доосеве прискорення. В загальному випадку обертання тіла навколо нерухомої точки ці вектори не взаємно перпендикулярні. Обертве прискорення – це вектор, перпендикуляр-

⁴ Вираз (4.21) часто називають формулою Рівальса.

ний площині, що проходить через вектор кутового прискорення і радіус-вектор взятої точки тіла (рис. 4.8). На відміну від випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, вектор кутового прискорення не лежить на одній прямій з вектором кутової швидкості, а напрямлений по деякій прямій, що проходить через нерухому точку тіла. Ця пряма називається *віссю кутового прискорення*.

Вісь кутового прискорення, як уже відмічалось, паралельна швидкості кінця вектора $\vec{\omega}$. Тому вектор обертового прискорення перпендикулярний не радіусу обертання h , а відрізку h_1 – найкоротшій відстані від точки M до осі кутового прискорення. Модуль обертового прискорення рівний

$$a_{об} = \varepsilon \cdot h_1. \quad (4.25)$$

Доосеве прискорення перпендикулярне площині, що містить вектори $\vec{\omega}$ і \vec{v} , тобто по найкоротшій відстані між точкою M і миттєвою віссю обертання, причому завжди в той бік, звідки обертання $\vec{\omega}$ до \vec{v} на найменший кут видно додатнім. Модуль доосевого прискорення

$$a_d = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h. \quad (4.26)$$

Величина повного прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомого центру визначається співвідношенням

$$a = \sqrt{a_{об}^2 + a_d^2 - 2a_{об} \cdot a_d \cdot \cos(\vec{a}_{об} \wedge \vec{a}_d)}. \quad (4.27)$$

4.5. Рухомий і нерухомий аксоїди. Теорема Пуансо

Миттєву вісь обертання можна також визначити як геометричне місце точок тіла, які в даний момент часу мають нульову швидкість. Якщо позначити радіус-вектор довільної точки M миттєвої осі через \vec{r}' , то з умови рівності нулю швидкості цієї точки слідує, що

$$[\vec{\omega}, \vec{r}'] = 0. \quad (4.28)$$

Співвідношення (4.28) є векторним рівнянням миттєвої осі обертання. Воно виражає той факт, що вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r}' колінеарні. Але оскільки обидва вектори мають спільний початок у точці O , то вони розміщені на одній прямій – миттєвій осі обертання.

Якщо проєкції кутової швидкості $\omega_x, \omega_y, \omega_z, (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'})$ знайдені як функції часу t , то рівняння миттєвої осі обертання мають вигляд

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \quad (4.29, a)$$

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}}. \quad (4.29, б)$$

Миттєва вісь у різні моменти часу буде займати різні положення як в нерухомій системі $OXYZ$, так і в самому тілі, тобто в системі $OX'Y'Z'$. Переміщуючись у нерухомому просторі, як і в тілі, що обертається, миттєва вісь описуватиме в них деякі поверхні. Очевидно, що ці поверхні будуть конічними, оскільки миттєва вісь обертання завжди проходить через нерухому точку O . Поверхня, утворена рухом миттєвої осі у нерухомому просторі, називається *нерухомим аксоїдом*, а в тілі, що обертається – *рухомим аксоїдом*. Рівняння нерухомого і рухомого аксоїдів отримують, виключаючи час з відповідних співвідношень (4.29):

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \quad F'\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right) = 0. \quad (4.30)$$

Властивості аксоїдів описуються теоремою Пуансо: ***при обертанні тіла навколо нерухомого центру рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому.***

Доведення.

Поверхні аксоїдів у кожний момент часу мають спільну пряму OC (рис. 4.9) – миттєву вісь обертання. Перетнемо обидва аксоїди площиною, яка проходить через точку C перпендикулярно миттєвій осі, і від-

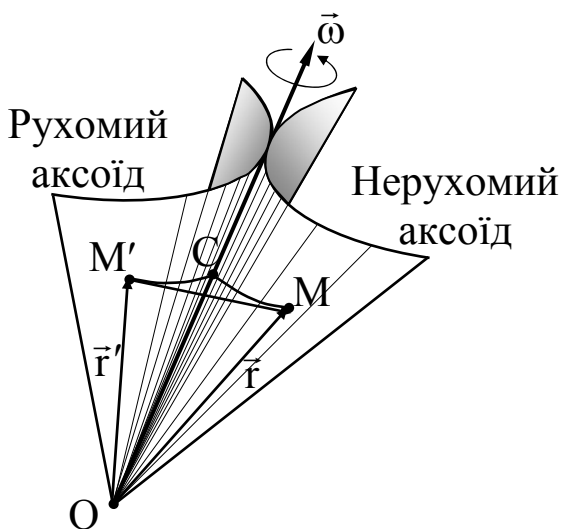


Рис. 4.9

мітимо ті точки M і M' , що належать нерухомому та рухомому аксоїдам, які в момент часу $t + dt$ будуть знаходитись на новій миттєвій осі і, таким чином, співпадуть. Переміщення точки M' згідно рівняння (4.9) буде рівним

$$\begin{aligned} \overline{M'M} &= [\bar{\omega} dt, \bar{r}'] = [\bar{\omega} dt, \overline{OM'}] = \\ &= [\bar{\omega}, (\overline{OC} + \overline{CM'}) dt] = [\bar{\omega}, \overline{CM'} dt], \end{aligned}$$

оскільки

$$[\bar{\omega}, \overline{OC}] = 0.$$

З попередньої рівності слідує, що вектор $\overline{M'M}$ за довжиною є малою величиною другого порядку, якщо вважати малими величинами першого порядку проміжок часу dt і дугу

М'С. Це доводить, що рухомий аксоїд доторкається нерухомого по спільній твірній, тобто котиться по нерухомому. Залишається додати, що кочення відбувається без ковзання., оскільки будь-яка точка тіла, яка знаходиться в даний момент на миттєвій осі, має швидкість, рівну нулю.

Література

[5] Ч. 2, Гл. XV, §§ 59–63

[7] Ч. 1, Гл. I, § 2

[10] Розділ II, Гл. 4, §§ 1–8

[13] Розділ I, Гл. II

Лекція 5

Складний рух

5.1. Поняття про відносний, переносний та абсолютний рухи точки

Як уже відмічалось, для опису руху можна використовувати будь-які системи відліку, що рухаються одна відносно одної як завгодно. Іншими словами, вибір системи відліку не обмежений ніякими умовами. Однак, розглядаючи один і той самий рух точки в різних координатних системах, може виявитись, що в одних системах він описується складніше, ніж в інших. Поняття відносності руху у наведеному контексті слід розглядати під таким кутом зору: знаючи рух однієї системи відліку по відношенню до іншої, знайти зв'язок між кінематичними елементами руху точки по відношенню до кожної системи окремо.

Нехай рух точки M у просторі розглядається у двох рухомих одна відносно одної системах координат (рис. 5.1): $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$. В залежності від змісту поставленої перед нами задачі одну з цих систем (наприклад, $OXYZ$) прийме-

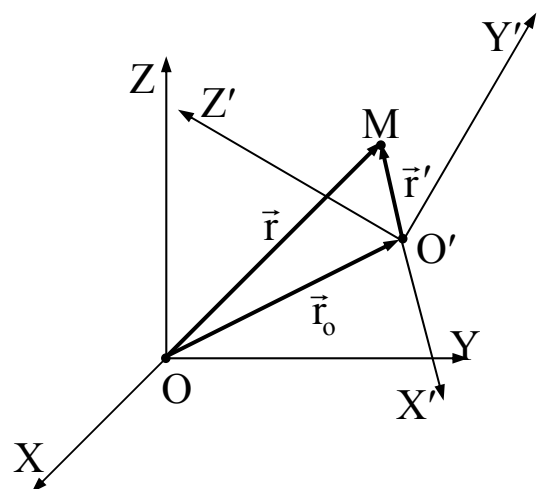


Рис. 5.1

мо за основну (нерухому) і назвемо *абсолютною* системою координат, а рух і всі його кінематичні елементи відносно до цієї системи – *абсо-*

лутними. Другу систему, $O'X'Y'Z'$, назвемо *відносною* і відповідно рух по відношенню до цієї системи, а також його кінематичні елементи – відносними. Зауважимо, що терміни “абсолютний” і “відносний” мають умовне значення. Елементи абсолютного руху позначатимемо індексом “ a ”, а відносного – індексом “ r ”.

Переносним рухом точки називають рух (по відношенню до абсолютної системи) того пункту відносної системи, через який в даний момент часу проходить рухома точка. Усі кінематичні елементи такого руху будемо називати *переносними* і позначатимемо індексом “ e ”.

Якщо позначити радіус-вектори точки M в абсолютній та відносній системах, відповідно, через \vec{r} і \vec{r}' , то для будь-якого моменту часу матиме місце рівність:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad (5.1)$$

де \vec{r}_0 – радіус-вектор точки O' по відношенню до системи $OXYZ$. По цій формулі можна, знаючи *рівняння відносного руху точки*

$$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t), \quad z' = f_3(t) \quad (5.2)$$

і рівняння руху відносної системи по відношенню до абсолютної, знайти *рівняння абсолютного руху точки*. Для цього достатньо скласти відомі залежності між координатами точки M в системах $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Принципова відмінність рівностей (5.3) від рівнянь руху твердого тіла, які мають такий же зовнішній вигляд, полягає в тому, що в даному випадку x' , y' , z' вже не сталі величини, які визначають вибір точки твердого тіла, а функції часу, що задані рівностями (5.2) і характеризують відносний рух точки M .

Рівняння переносного руху отримують, фіксуючи в рівностях (5.2) величини x' , y' , z' . При цьому, оскільки координати полюса x_0 , y_0 , z_0 відомі як функції часу, а напрямні косинуси α_{ij} виражаються через кути Ейлера, які в свою чергу також задані як функції часу, то рівняння переносного руху зводяться до рівнянь руху твердого тіла.

Таким чином, праві частини рівностей (5.2) при заданих відносному і переносному рухах будуть відомими функціями часу, тобто являтимуть

собою рівняння абсолютного руху. Виключаючи згідно загального правила з рівнянь абсолютного руху час, отримують *абсолютну траєкторію* – слід руху точки М в абсолютній системі координат. Так само, виключаючи час з рівнянь відносного руху, отримують *відносну траєкторію*. Слід відмітити, що завдяки рухові відносної координатної системи абсолютна і відносна траєкторії точки відрізняються одна від одної.

5.2. Зв'язок між повною і локальною похідними векторної функції по часу

Розглянемо деяку векторну функцію $\vec{A}(t)$, проекції якої у відносній системі координат $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$ є заданими функціями часу, і порівняємо між собою векторні похідні від цієї функції, обчислені в абсолютній та відносній системах. Оскільки

$$\vec{A} = A_{x'} \cdot \vec{i}' + A_{y'} \cdot \vec{j}' + A_{z'} \cdot \vec{k}',$$

то для похідної по часу від вектора \vec{A} в абсолютній системі, яку називають повною, або *абсолютною* похідною отримуємо вираз:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_{x'}}{dt} \cdot \vec{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt} \cdot \vec{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt} \cdot \vec{k}' + A_{x'} \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} + A_{y'} \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} + A_{z'} \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt}. \quad (5.4)$$

Сума перших трьох доданків у правій частині рівності (5.4) являє собою похідну від вектора \vec{A} , обчислену в припущенні *незмінності напрямку одиничних векторів осей відносної системи координат*. Її називають *відносною*, або *локальною* похідною векторної функції і позначають $d'\vec{A}/dt$:

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \frac{dA_{x'}}{dt} \cdot \vec{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt} \cdot \vec{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt} \cdot \vec{k}'. \quad (5.5)$$

Як бачимо, проекції локальної похідної на осі відносної системи координат рівні похідним від проекцій диференційованого вектора на ці ж осі.

Для перетворення інших трьох складових рівності (5.4) використаємо формули Пуассона:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}'], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}'],$$

де вектор $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання відносної системи координат. Тоді

$$A_{x'} \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} + A_{y'} \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} + A_{z'} \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, (A_{x'} \cdot \vec{i}' + A_{y'} \cdot \vec{j}' + A_{z'} \cdot \vec{k}')] = [\vec{\omega}, \vec{A}], \quad (5.6)$$

а вираз (5.4) з урахуванням співвідношень (5.5) і (5.6) перепишеться у вигляді

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{A}]. \quad (5.7)$$

Співвідношення (5.7), яке називається *формулою Бура*, відображає наступну лему: *абсолютна похідна по часу від деякого вектора рівна геометричній сумі відносної похідної того ж вектора і векторного добутку вектора кутової швидкості обертання відносної системи координат на диференційований вектор.*

Проектуючи вираз (5.7) на осі відносної системи координат, отримуємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{x'} &= \frac{dA_{x'}}{dt} + \omega_{y'z'} - \omega_{z'y'}; \\ \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{y'} &= \frac{dA_{y'}}{dt} + \omega_{z'x'} - \omega_{x'z'}; \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{z'} = \frac{dA_{z'}}{dt} + \omega_{x'y'} - \omega_{y'x'}. \end{aligned}$$

5.3. Теореми додавання швидкостей і прискорень

Отримана вище залежність між повною і локальною похідними векторної функції дає можливість вивести *теорему додавання швидкостей* у випадку складного руху точки. З цією метою знайдемо абсолютну похідну по часу від обох частин рівності (5.1):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (5.8)$$

За визначенням, повна похідна по часу від радіус-вектора \vec{r} являє собою абсолютну швидкість \vec{v}_a рухомої точки М. Величина $d\vec{r}_0/dt = \vec{v}_o$ є швидкістю початку O' відносної системи координат. Абсолютну похідну відносного радіус-вектора за допомогою формули Бура виразимо у вигляді:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{r}']. \quad (5.9)$$

В останньому рівнянні локальна похідна по часу відносного радіус-вектора являє собою *відносну швидкість* \vec{v}_r точки М:

$$\vec{v}_r = \frac{d'\vec{r}'}{dt}. \quad (5.10)$$

В результаті підстановок виражених компонент у співвідношення

(5.8) для абсолютної швидкості точки отримуємо формулу

$$\vec{v}_a = \vec{v}_o + [\vec{\omega}, \vec{r}'] + \vec{v}_r. \quad (5.11)$$

При цьому зауважимо, що сума двох перших доданків у правій частині останнього виразу є швидкістю точки вільного твердого тіла, скріпленого з відносною системою координат, через яку в даний момент часу проходить точка М. За визначенням це є *переносна швидкість* точки. Таким чином,

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad (5.12)$$

і для абсолютної швидкості отримуємо вираз

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (5.13)$$

Вираз (5.13) є математичним записом теореми додавання швидкостей при складному русі: **абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей.**

Абсолютне прискорення точки визначимо, обчисливши повну похідну по часу від абсолютної швидкості (5.11). Отримаємо

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}' \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}'}{dt} \right] + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \quad (5.14)$$

Перетворимо цю рівність так, щоб похідні від векторів брались в тій системі координат, до якої диференційований вектор віднесений. Так для похідних відносних векторів \vec{r}' та \vec{v}_r на основі формули Бура отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d'\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{r}'], \\ \frac{d\vec{v}_r}{dt} &= \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{v}_r]. \end{aligned}$$

Враховуючи також, що

$$\frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{a}_o, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_r, \quad \frac{d'\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r,$$

для абсолютного прискорення точки отримуємо співвідношення

$$\vec{a}_a = \vec{a}_o + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] + \vec{a}_r + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r], \quad (5.15)$$

де \vec{a}_r – відносне прискорення точки.

Сума трьох перших складових рівності (5.15) визначають прискорення точки вільного твердого тіла в загальному випадку його руху разом з рухомою системою відліку відносно абсолютної. Перша складова \vec{a}_o – прискорення точки О; $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}']$ і $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$ – відповідно обертове і до-

осеве прискорення точки M , якби вона рухалась тільки разом з відносною системою осей координат, не маючи в даний момент часу відносного руху. Таким чином, сукупність зазначених векторів являє собою переносне прискорення точки:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]. \quad (5.16)$$

Остання складова

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r] \quad (5.17)$$

називається *прискоренням Коріоліса*. В результаті формула для абсолютного прискорення набуває остаточного вигляду

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \quad (5.18)$$

і виражає теорему додавання прискорень точки при складному її русі, або кінематичну теорему Коріоліса: ***абсолютне прискорення точки рівне геометричній сумі переносного, відносного та Коріолісового прискорень.***

Відносне прискорення обчислюється у відносній системі координат за правилами кінематики точки; його проекції на осі цієї системи визначаються як перші похідні по часу проекцій відносної швидкості на ті ж осі або як другі похідні відносних координат. Для обчислення відносного прискорення можна також користуватись його розкладом по осях натурального тригранника відносної траєкторії.

Переносне прискорення обчислюється методами кінематики твердого тіла в залежності від того, який рух здійснює відносна координатна система.

Зупинимось тепер докладніше на прискоренні Коріоліса (5.17). Як слідує із загального виведення, воно є результатом взаємного впливу двох рухів. Одна його частина, $[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, виникає внаслідок зміни переносної швидкості точки через відносний рух, а друга, також $[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$, – є результатом зміни відносної швидкості внаслідок переносного руху. Величина прискорення Коріоліса визначається за формулою

$$a_k = 2\omega \cdot v_r \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r), \quad (5.19)$$

а напрям – згідно загального правила векторного множення: вектор \vec{a}_k напрямлений по перпендикуляру до площини, яка містить $\vec{\omega}$ і \vec{v}_r , в той бік, звідки обертання $\vec{\omega}$ до \vec{v}_r на найменший кут буде видно додатнім.

Для визначення прискорення Коріоліса часто використовують правило Жуковського, яке ґрунтується на формулі (5.17). Нехай маємо точку M , що рухається з відносною швидкістю \vec{v}_r (рис. 5.2). Побудуємо

площину Φ , перпендикулярну кутовій швидкості, і спроектуємо вектор відносної швидкості на цю площину. Отриману проекцію, яка також є вектором, позначимо \vec{v}_r^* . Її модуль рівний

$$v_r^* = v_r \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r).$$

З урахуванням останнього виразу прискорення Кориоліса запишеться у вигляді

$$a_k = 2\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r^*.$$

Звідси отримуємо правило Жуковського: *абсолютне значення прискорення Кориоліса рівне подвоєному добутку кутової швидкості переносного обертання на модуль проекції відносної швидкості на площину, перпендикулярну осі переносного обертання. Щоб отримати напрям прискорення Кориоліса, потрібно вектор проекції відносної швидкості повернути на 90° навколо осі, паралельної осі переносного обертання, в напрямі цього обертання.*

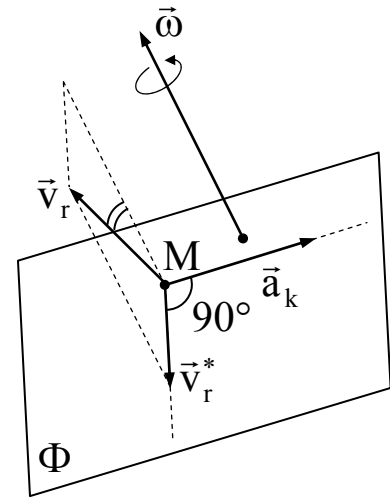


Рис. 5.2.

5.5. Перетворення координат Галілея

Повертаючись до рівності (5.1), відмітимо, що при всій удаваній очевидності вона фізично не тривіальна, оскільки \vec{r} та \vec{r}_0 , з одного боку, і \vec{r}' – з іншого, вимірюються в *різних* системах. Рівність ґрунтується на тому припущенні, що довжина і напрям відрізка не залежать від характеру і швидкості його руху в системі. Останнє, в свою чергу, витікає із раніше прийнятого постулату про нескінченно швидкі сигнали і можливу синхронізацію годинників в рухомих системах з їх допомогою.

Крім розв'язання конкретної задачі, пов'язаної з дослідженням кінематичних характеристик складного руху, співвідношення (5.1) визначає перетворення координат при переході від однієї системи координат до іншої і, таким чином, є одним із основних в побудові класичної механіки. В подальшому нас буде цікавити такий випадок, коли одна із систем рухатиметься відносно іншої рівномірно, прямолінійно і поступально з швидкістю \vec{v}_0 . Тоді перетворення координат і швидкостей запишуться у вигляді:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (5.20)$$

Без обмеження загальності і в силу ізотропності простору та рівноправності всіх декартових осей можна вибрати системи $OXYZ$ та $O'X'Y'Z'$

однаково орієнтованими, причому так, що швидкість початку O' буде напрямлена по одній з осей (наприклад, по осі OX), а в початковий момент часу точки O' і O співпадатимуть. У цьому випадку рівність (5.1) приводить до формул (в декартових координатах)

$$x = v_0 t + x', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (5.21)$$

Як уже відмічалось, перетворення (5.21), як і їх узагальнений аналог (5.1), ґрунтуються на фундаментальному припущенні класичної механіки стосовно перетворення часу

$$t = t'. \quad (5.22)$$

Сукупність співвідношень (5.21) і (5.22) називаються *перетвореннями Галілея*. З них, зокрема, слідує, що проекції швидкості точки при переході від однієї системи координат до іншої перетворюються як

$$v_x = v_0 + v_{x'}, \quad v_y = v_{y'}, \quad v_z = v_{z'}, \quad (5.23)$$

а прискорення є інваріантом відносно перетворень Галілея:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r.$$

На основі спостережень Галілеєм був сформульований класичний принцип відносності, згідно якого *закони механіки однакові у будь-яких інерціальних⁵ системах відліку*. Це означає, по-перше, що рівняння руху відносно довільних інерціальних систем K і K' співпадають між собою і, по-друге, спостерігаючи механічні процеси, не можна сказати, знаходимося ми в нерухомій системі відліку, чи в системі, яка рухається з постійною швидкістю.

Приклад 5.1. Кінематична “задача переслідування”.

У площині XOY рухаються дві точки з постійними за модулем швидкостями, причому $\vec{V}_1 = (v, 0)$, а вектор \vec{V}_2 увесь час спрямований на точку 1. Знайти траєкторію точки 2 у системі осей $XO'Y$, що рухаються разом із точкою 1 рис. 5.3, та інтервал часу Δt , через який відбудеться зустріч, вважаючи, що $|\vec{V}_2| = 2v$ і при $t = t_0 = 0$, $\vec{r}_1(0) = (0, H)$, $\vec{r}_2(0) = (0, 0)$.

В рухомій системі відліку $XO'Y$ введемо полярні координати точки

⁵ Поняття інерціальної системи відліку більш детально розглядатиметься в розділі “Динаміка”. Зараз ми обмежимося лише її визначенням: *система відліку, відносно якої ізолювана матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно з будь-якого початкового положення при довільному напрямі швидкості, називається інерціальною*.

2 r, φ згідно співвідношень $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Кінематична умова

$$\dot{x} = -v_2 \cos \varphi - v_1, \quad \dot{y} = -v_2 \sin \varphi.$$

З іншого боку,

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

тому

$$\frac{\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi}{\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi} = -\frac{v_1}{v_2 \sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Переходячи в цій рівності до диференціювання по φ , одержимо

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{d\varphi} = r \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right).$$

Розділяючи змінні

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right) d\varphi$$

та інтегруючи, отримуємо

$$\frac{v_1}{v_2} (\ln r + C) = \operatorname{Intg} \frac{\varphi}{2} - \frac{v_1}{v_2} \ln \sin \varphi.$$

Визначивши константу C з умови, що при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $r = H$, знаходимо рівняння траєкторії в полярних координатах у системі $XO'Y'$:

$$\left(\frac{r}{H} \right)^{\frac{v_1}{v_2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{(\sin \varphi)^{\frac{v_1}{v_2}}}.$$

Якщо $|v_2| = 2v$, $|v_1| = v$, то $r = H \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$.

Для відшукування інтервалу часу Δt скористаємося рівністю

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi = (5 - 4 \cos \varphi) v^2$$

і врахуємо, що $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{2}{\sin \varphi} (2 - \cos \varphi) \dot{\varphi}$.

З останніх двох співвідношень одержимо

$$\frac{H}{(1 + \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = \pm v, \quad \int_{\pi/2}^0 \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{v}{H} (t - t_0).$$

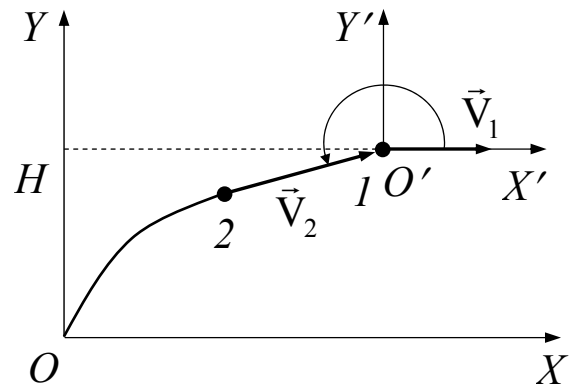


Рис. 5.3.

Інтеграл у лівій частині за допомогою заміни змінної $x = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ зводиться до вигляду $-\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) dx$.

З огляду на те, що $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi(T) = 0$, знаходимо

$$\Delta t = \frac{2H}{3v}.$$

Література

[5] – §§ 67–72

[7] – Ч. 1, Гл. 1, § 3

[10] – Р. 2, Гл. 1, §§ 1-4

Лекція 6

Динаміка матеріальної точки і механічної системи

6.1. Основні поняття і завдання динаміки.

Інерціальні системи відліку

Предметом динаміки є ті ж моделі матеріальних тіл, що й в кінематиці: матеріальна точка, система дискретних матеріальних точок, суцільне середовище (у тому числі і абсолютно тверде тіло). Однак, на відміну від кінематики в динаміці розглядаються не тільки геометричні властивості рухів матеріальних об'єктів, але й ті причини, які впливають на ці рухи.

Будь-яка зміна руху тіла є результатом його взаємодії (при безпосередньому контакті або за допомогою створених полів) з іншими матеріальними об'єктами. При цьому *матеріальну точку, поставлену в такі умови, за яких її взаємодіями з іншими тілами можна знехтувати*, будемо називати *ізолюваною*, або *вільною*. В класичній механіці кількісною мірою дії одного матеріального об'єкту на інший є *сила* – векторна величина, яка в кожний момент часу характеризується числовим значенням, напрямом у просторі і точкою прикладання. *Пряма, вздовж якої напрямлений вектор сили, називається лінією дії сили*.

Рух матеріальних об'єктів завжди слід розглядати відносно певної

системи відліку. При цьому закони механіки в різних системах відліку мають, взагалі кажучи, різний вигляд і може виявитись, що в довільній системі відліку закони навіть зовсім простих явищ будуть досить складними. Природно, виникає задача відшукування такої системи відліку, в якій закони механіки були б, по можливості, найбільш простими. Така система відліку, очевидно, найзручніша для опису механічних явищ.

Для вирішення цієї задачі розглянемо прискорення матеріальної точки відносно деякої довільної системи відліку. Причиною цього прискорення можуть бути як дія на точку певних тіл, так і властивості самої системи.

Можна, однак, припустити, що існує така система відліку, в якій прискорення матеріальної точки повністю обумовлене лише її взаємодіями з іншими тілами. Ізольована матеріальна точка рухатиметься відносно такої системи рівномірно і прямолінійно, або, як кажуть, за інерцією. Таку систему відліку називають *інерціальною*. В інерціальній системі відліку радіус-вектор ізольованої точки є лінійною функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (6.1)$$

при будь-яких постійних \vec{r}_0 і \vec{v}_0 . Система відліку, в якій умова (6.1) для ізольованої точки не виконується, називається *неінерціальною*.

Існування інерціальних систем відліку підтверджується дослідами. Спочатку було встановлено, що такою системою відліку є Земля. Наступні більш точні досліди (дослід Фуко і всі аналогічні йому) показали, що ця система відліку не зовсім інерціальна⁶: були виявлені прискорення, існування яких не можна пояснити дією певних тіл. В той же час спостереження прискорень планет показали інерціальність геліоцентричної системи, пов'язаної з центром Сонця і “нерухомими” зірками. На даний час інерціальність геліоцентричної системи відліку підтверджується всією сукупністю дослідів.

Будь-яка інша система відліку, що рухається відносно геліоцентричної рівномірно і прямолінійно, також є інерціальною. Таким чином, існує не одна, а безліч інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно.

Дослід показує, що кожне тіло “виявляє опір” при будь-яких спробах змінити його швидкість – як за величиною, так і за напрямком. Цю властивість, що виражає ступінь непіддатливості тіла до зміни його швидкості,

⁶ Відмітимо, що в багатьох випадках систему відліку, пов'язану з Землею, можна вважати практично інерціальною.

називають *інертністю*. Мірою інертності служить величина, яка називається *масою* тіла.

Введемо поняття інертної маси, визначивши відношення мас двох різних тіл за оберненими відношеннями прискорень, наданих їм однаковими силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (6.2)$$

Таким чином, порівняння мас двох тіл, на які діє одна і та ж сила, зводиться до порівняння прискорень цих тіл. Вибравши деяке тіло за еталон маси, ми маємо можливість порівняти масу будь-якого іншого тіла з цим еталонем.

В межах Ньютонівської механіки маса володіє двома важливими властивостями:

- 1) маса – величина адитивна, тобто маса складного тіла рівна сумі мас його частин;
- 2) маса ізольованої системи – величина постійна.

До цього слід додати, що маса тіла не залежить від характеристик його руху і природи сили, прикладеної до нього. Ці властивості маси підтверджуються експериментально, якщо швидкість точки мала у порівнянні з швидкістю світла і якщо не враховувати внутрішньоатомні процеси в речовині.

Існує й інший спосіб вимірювання маси, який ґрунтується на зважуванні тіл. У цьому випадку порівняння маси тіла з масою еталону відбувається шляхом порівняння сил притягання тіла до Землі. Іншими словами, вимірюється не інертна маса, а відмінна від неї (з фізичної точки зору) величина – *гравітаційна маса* тіла. Інертність та здатність створювати поле тяжіння є різними проявами властивостей матерії, однак обидві властивості завжди існують спільно, а їх числові характеристики пропорційні одна одній. Тому при належному виборі одиниць вимірювання міру тієї та іншої властивості можна виражати одним і тим же числом. На даний час з великою точністю експериментально встановлено еквівалентність інертної та гравітаційної мас.

6.2. Закони Ньютона

В основі класичної механіки Ньютона лежать три встановлені і сформульовані ним закони руху.

Перший закон класичної механіки описує найпростіший з можли-

вих механічних рухів – рух матеріальної точки за умов повної її ізолюваності від дії інших матеріальних тіл. По цій причині його часто називають *законом інерції Галілея–Ньютона*⁷. У формулюванні Ньютона (переклад А.Н. Крилова) закон говорить, що *будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки і оскільки прикладені сили не змусять його змінити цей стан*. Термін “тіло” тут означає “матеріальну точку”, що не має розмірів, але володіє масою, яка і обумовлює вказаний у формулюванні рух “за інерцією”.

Необхідно відмітити, що перший закон Ньютона по суті містить в собі твердження існування інерціальних систем відліку. У зв’язку з цим його формулювання часто наводять наступним чином: *ізольована матеріальна точка володіє здатністю зберігати стан свого спокою або рівномірного прямолінійного руху відносно інерціальної системи відліку*.

Другий закон Ньютона є одним із фундаментальних законів природи. Він встановлює кількісний зв’язок між зміною руху, який здійснює матеріальна точка, і прикладеною до неї силою. Згідно другого закону Ньютона *прискорення матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку пропорційне прикладеній до точки силі і напрямлене вздовж лінії дії сили*:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{F},$$

причому коефіцієнт пропорційності, в силу сказаного вище, є величина, обернена до інертної маси точки. Таким чином, другий закон Ньютона виражається векторною рівністю

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (6.3)$$

Зауважимо при цьому, що другий закон Ньютона і рівняння (6.3) набувають конкретного змісту лише після того, як встановлено вигляд функції \vec{F} – закон сили.

При формулюванні другого закону Ньютона можуть виникати певні труднощі, пов’язані з тим, що ми не в змозі *a priori* вирішити, чи піддається розглянуте нами тіло силовій дії. Адже сили можуть бути далекодіючими. Ми зіштовхуємося з необхідністю знайти таку систему відліку, відносно якої можна було б вимірювати прискорення тіл. Така система відліку, очевидно, повинна рухатися без прискорення. Згідно першого закону ми бачимо, що спосіб знаходження такої системи відліку

⁷ Закон інерції не в такій широкій узагальненій формі, як це зробив Ньютон, був встановлений раніше Галілеєм для часткового випадку руху тіла по гладкій горизонтальній площині.

заснований на припущенні про існування деякої незалежної (від другого закону) можливості довідатися, що на тіло відліку не діють ніякі сили. Неважко зрозуміти, однак, що такої можливості ми не маємо, оскільки критерій, згідно якого прискорення немає, якщо сила дорівнює нулеві, призводить до вимоги існування системи відліку, відносно якої необхідно вимірювати прискорення. І так далі.

Разом з цим із дослідних даних відомо, що величина будь-якої сили, яка діє між двома тілами, швидко зменшується зі збільшенням відстані між тілами (сили гравітаційної й електромагнітної взаємодій $\sim r^{-2}$, сильної, $\sim e^{-r/r_0}/r$, де $r_0 \sim 10^{-15}$ м). Якби такого зменшення сил з відстанню не було, то, скажімо, задача про взаємодію двох тіл (безвідносно до інших тіл Всесвіту) була б позбавлена всякого сенсу просто тому, що не можна було б ізолювати ці два тіла так, щоб вони не взаємодіяли б зі всіма іншими тілами Всесвіту. Ми ж, знаходячись на Землі, зазнаємо притягання головним чином до її центру й у значно меншій мірі до якої-небудь віддаленої (від нас) частини Всесвіту.

Кілька слів про глобальні інерціальні системи відліку. Можна виділити, відповідно до наших міркувань, “ієрархію” цих систем. Поставимо питання про те, в якій мірі відомі системи відліку є інерціальними. Так, геоцентрична система відліку (з початком O в центрі Землі й осями, спрямованими на визначені зірки) здійснює еліптичний рух навколо Сонця з періодом обертання $T = 1$ рік $= 3 \cdot 10^7$ с. Оскільки радіус орбіти $R \cong 1,5 \cdot 10^{11}$ м, то доцентрове прискорення руху Землі по орбіті навколо Сонця за порядком величини дорівнює $a_3 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cong 6 \cdot 10^{-3}$ м/с².

Нагадаємо, що прискорення тіла поблизу поверхні Землі $g = 9,81$ м/с².

Прискорення геліоцентричної системи відліку (з початком у центрі Сонця та осями, спрямованими на визначені зірки), що рухається навколо центру нашої Галактики, неважко оцінити, використовуючи дослідні дані: $\omega \sim 10^{-15}$ с⁻¹, $R \sim 3 \cdot 10^{20}$ м, звідки $a_c \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м/с².

У 1981 р. англійський фізик Берч повідомив, виходячи з обробки даних спостережень за великомасштабними областями Всесвіту (це області, розмір яких за порядком величини збігається з розміром видимої частини Всесвіту), що ці області беруть участь в обертальному русі з частотою $\omega \sim 3 \cdot 10^{-21}$ с⁻¹. Оскільки R в цьому випадку $\sim 10^{26}$ м, то $a \sim 10^{-14}$ м/с².

Ці приклади наочно демонструють зроблені вище зауваження про сили взаємодії. Крім того, слід підкреслити, що відповідь на питання: “чи потрібно враховувати “неінерціальність” систем відліку в рівняннях руху?” залежить від того, яка точність розв’язку даної динамічної задачі нас влаштовує.

В той час як перший і другий закони відносяться до однієї матеріальної точки, третій закон Ньютона розглядає взаємодію двох матеріальних точок і є основою динаміки механічної системи. У ньому стверджується, що **сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на одну, рівні за величиною і напрямлені в протилежні сторони вздовж прямої, що з’єднує точки** (рис. 6.1). Таким чином, для довільних двох точок 1 і 2

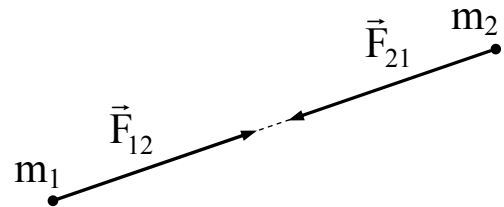


Рис. 6.1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (6.4)$$

З наведеного закону слідує, що сили взаємодії завжди виникають парами і мають однакову природу. Обидві сили прикладені до різних матеріальних точок і тому не можуть компенсувати одна одну.

До цього слід додати, що третій закон Ньютона пов’язаний з моделлю миттєвої передачі взаємодій між точками. Дійсно, сили дії та протидії рівні лише за умови, що друге тіло миттєво реагує на зміну відстані до першого, тобто взаємодія передається з нескінченно великою швидкістю.

Закон (6.4) легко поширюється на системи з довільного числа матеріальних точок. Для цього лише необхідно доповнити закони Ньютона *принципом незалежності дії сил*, або *принципом суперпозиції сил*, який розглядається як четверта аксіома руху. Згідно принципу **прискорення, набуте точкою при одночасній дії на неї декількох сил, рівне геометричній сумі прискорень, наданих точці при дії кожної з цих сил зокрема**.

Звідси слідує, що рівнодійна сила рівна геометричній сумі векторів усіх сил, прикладених до даної точки. Дійсно, нехай на матеріальну точку масою m діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. За другим законом вони надають точці прискорень

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результуюче прискорення (згідно принципу суперпозиції) при спільній дії сил рівне

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n).$$

З останнього виразу випливає, що рівнодійна сила $\vec{F} = m\vec{a}$ визначається формулою

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (6.5)$$

6.3. Принцип відносності Галілея

Для інерціальних систем відліку справедливий принцип відносності, згідно якому *всі інерціальні системи за своїми механічними властивостями еквівалентні одна одній*. Це означає, що жодним механічним дослідом, проведеним “всередині” даної інерціальної системи, не можна встановити, рухома ця система, чи знаходиться в стані спокою. В усіх інерціальних системах відліку властивості простору і часу однакові, однакові також і всі закони механіки.

Наведене твердження складає зміст *принципу відносності Галілея* – одного з найважливіших принципів класичної механіки. Він є узагальненням дослідних даних і підтверджується прикладним застосуванням Ньютонівської механіки до рухів тіл, швидкості яких значно менші від швидкості поширення світла.

Принцип відносності постулює, що будь-яке механічне явище відбувається в усіх інерціальних системах за одними й тими законами, які мають інваріантну форму. Існують також незмінні величини – інваріанти перетворень Галілея. Вони виявляються особливо суттєвими при вивченні руху, оскільки виражають незмінні в усіх системах відліку властивості тіл і рухів.

У відповідності з перетвореннями Галілея прискорення – величина інваріантна. За принципом відносності система матеріальних точок знаходиться в однакових механічних умовах у будь-якій інерціальній системі. А це означає, що сила, яка діє на матеріальну точку, повинна бути інваріантом перетворень Галілея.

В цілому за принципом відносності повинен бути інваріантним другий закон Ньютона. Для цього необхідно, щоб маса матеріальної точки була інваріантною величиною. В справедливості цього твердження

переконає той факт, що в рамках ньютонівської механіки маса не залежить від швидкості руху тіла.

Таким чином, *другий закон Ньютона не тільки зберігає свою форму в усіх інерціальних системах, але й пов'язує інваріантні величини*. Те ж саме відноситься і до третього закону та принципу незалежності дії сил – вони справедливі в усіх інерціальних системах відліку.

6.4. Диференціальні рівняння руху точки

Основним рівнянням динаміки матеріальної точки є математичний вираз другого закону Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}, \quad (6.6)$$

або

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (6.7)$$

Співвідношення (6.6) і (6.7) є, по суті, диференціальними рівняннями руху точки у векторній формі. Їх розв'язок складає зміст основної задачі динаміки матеріальної точки.

Якщо спроектувати обидві частини рівності (6.7) на осі декартової системи координат, отримуємо три диференціальні рівняння виду

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (6.8)$$

де F_x, F_y, F_z – проекції вектора сили на осі X, Y, Z . Необхідно пам'ятати, що проекції є алгебраїчними величинами: в залежності від орієнтації вектора \vec{F} вони можуть бути як додатними, так і від'ємними. Знак проекції результуючої сили \vec{F} визначає і знак проекції вектора прискорення.

У випадку природних рухомих осей координат диференціальні рівняння руху точки набувають вигляду

$$m\dot{v}_\tau = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad (6.9)$$

Тут F_τ, F_n – проекції сили на дотичну і головну нормаль траєкторії. Вектори $\vec{F}_\tau = \vec{\tau} \cdot F_\tau$ і $\vec{F}_n = \vec{n} \cdot F_n$ називаються, відповідно, *тангенціальною* і *нормальною* складовими сили.

Проектуючи вираз (6.3) на осі довільної криволінійної системи, отримуємо рівняння руху точки в криволінійних координатах:

$$ma_{q_i} = F_{q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.10)$$

Оскільки

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q_i} \right],$$

то рівнянням (6.10) можна надати вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (6.11)$$

де $T = \frac{1}{2}mv^2$. Величини $Q_i = H_i \cdot F_{q_i}$ називаються *узагальненими силами*, а самі співвідношення (6.11) – *рівняннями руху матеріальної точки у формі Лагранжа*.

6.5. Дві задачі динаміки. Сталі інтегрування і початкові умови

Маючи основні динамічні рівняння в одному з вказаних вище видів, можна поставити і розв'язати дві задачі.

Перша задача динаміки. Задано рух матеріальної точки відомої маси m :
 $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Необхідно визначити силу, прикладену до точки.

Розв'язання першої задачі в наведеному трактуванні не складає труднощів, так як потребує застосування методів лише диференціального числення.

Якщо задані кінематичні рівняння руху, наприклад, в декартовій системі координат

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

і маса точки рівна m , то сила, що викликає цей рух, буде, згідно (6.8), мати проєкції

$$F_x = m\ddot{x} = mf_1''(t), \quad F_y = m\ddot{y} = mf_2''(t), \quad F_z = m\ddot{z} = mf_3''(t)$$

і, таким чином, в будь-який момент часу може бути знайдена простим диференціюванням по часу рівнянь руху.

Знаючи проєкції сили, легко визначити її модуль і косинуси кутів, які утворює вектор \vec{F} з осями координат:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (6.12)$$

$$\cos(\vec{F} \wedge OX) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge OY) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge OZ) = \frac{F_z}{F}. \quad (6.13)$$

Друга задача динаміки. За відомою масою і діючою на точку силою визначити рух цієї точки.

В загальному випадку сила \vec{F} , а відповідно і її проекції на координатні осі можуть залежати від часу, координат рухомої точки, її швидкості, прискорення і т.д. Для простоти обмежимося випадком

$$\vec{F} = \vec{F}(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Тоді розв'язком другої задачі будуть координати x, y, z матеріальної точки як функції часу. Проектуючи основне рівняння (6.7) на осі декартових координат, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для знаходження рівнянь руху точки необхідно проінтегрувати отриману систему трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь руху (6.14) служить система рівнянь в кінцевій формі

$$\begin{aligned} \psi_1(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \\ \psi_2(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \\ \psi_3(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

яка пов'язує час, координати і шість довільних сталих інтегрування, що відповідають числу рівнянь та їх порядку. Рівняння (6.15) є *другими інтегралами руху*.⁸

Диференціюючи кожне з рівнянь (6.15) по часу, отримуємо систему рівностей виду

$$\begin{aligned} \Phi_1(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \\ \Phi_2(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \\ \Phi_3(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

які є *першими інтегралами руху*.

Задаючи значення координат і проекцій швидкості точки в початковий момент часу (*початкові умови задачі*):

⁸ *Інтеграл руху* – це така функція часу, координат і швидкостей, яка при русі точки зберігає стале значення, що визначається початковими умовами. Інтеграл руху, які містять швидкості точки, називаються *першими інтегралами*. *Другі інтеграли* – такі функції часу, координат і довільних констант, які при русі точки зберігають сталі значення.

$$\text{при } t = t_0 \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (6.17)$$

і підставляючи їх до систем рівнянь (6.15) і (6.16), отримуємо систему шести рівнянь з шістьма невідомими C_1, \dots, C_6 :

$$\begin{aligned} \Psi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \Phi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

користуючись якими, виразимо C_1, \dots, C_6 через початкові координати і проекції швидкості (6.17). Підставляючи отримані значення сталих в систему (6.15) і розв'язуючи її відносно координат, знаходимо шукані рівняння руху матеріальної точки:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= f_2(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= f_3(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таким чином, друга задача динаміки виявляється повністю розв'язаною. Однак у більшості випадків диференціальні рівняння руху не можуть бути проінтегровані і не можна отримати точного розв'язку задачі. У таких випадках розв'язання задачі за приведеною вище схемою недоцільне. Замість повного розв'язку тут може виявитись достатнім знання деяких перших інтегралів руху.

Відмітимо також, що розв'язок системи диференціальних рівнянь руху (6.14) при заданих початкових значеннях координат і швидкостей являє собою приклад т.зв. *задачі Коші*, яка при досить загальних обмеженнях має розв'язок, і притому єдиний. В теоретичній механіці можуть ставитися задачі й іншого типу – *краєві задачі*. Так, наприклад, можна задати положення точки, яке відповідає двом різним моментам часу. Тоді, на відміну від задачі Коші, такого роду краєва задача може і не мати розв'язку, або розв'язок може бути не єдиним.

6.6. Рух невільної точки. Реакції зв'язків. Рівняння Лагранжа I-го роду

При практичному застосуванні рівнянь руху часто зустрічаються системи, в яких, крім досліджуваної рухомої матеріальної точки, наявні рухомі чи нерухомі тіла скінчених розмірів, що беруть участь у взаємодії. В принципі їх дія на дану точку також зводиться до сил, які вини-

кають при контакті, – це сили пружності, тертя і т.п. Але задати їх зарання до розв’язування задачі про рух точки практично неможливо. Простіше розглянути ті очевидні обмеження, які накладають вказані тіла на рух точки, її траєкторію і швидкість.

Матеріальна точка називається невільною, якщо її рух обмежений деякими додатковими умовами; рівняння, що виражають ці умови, називаються рівняннями зв’язків (зв’язками).⁹

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки мають такий же вигляд, як і для вільної, тільки до діючих на точку сил потрібно додати всі сили реакції зв’язків. Звичайно, що в цьому випадку руху точки можуть виникати відповідні особливості при розв’язуванні першої і другої задач динаміки, оскільки сили реакції зарання невідомі.

При розв’язуванні першої задачі діюча на точку рівнодійна сила визначається за заданим рівнянням руху. Потім з цієї рівнодійної за заданими зв’язками виділяють сили реакції. Т.ч. отримують задачу про розклад відомої сили на її складові.

Повну силу реакції при русі точки звичайно розкладають на дві складові. Складова сили реакції зв’язків, яка врівноважує задані сили, прикладені до точки, називається *статичною реакцією*. Друга складова повної сили реакції, яка залежить тільки від руху точки під дією заданих сил, називається *динамічною реакцією*.

При розв’язуванні другої задачі динаміки частина сил, що діють на точку, а саме всі сили реакції зв’язків, зарання невідомі і їх необхідно визначити по заданих зв’язках у процесі розв’язку. Розглянемо два приклади розв’язку такої задачі.

6.6.1. Рух точки по гладкій поверхні

Нехай гладка нерухома поверхня, по якій рухається точка масою m під дією сили \vec{F} , задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$, де x, y, z – координати рухомої точки. Так як поверхня гладка, то сила тертя відсутня. Позначивши через \vec{N} невідому нормальну силу реакції поверхні, з другого закону Ньютона отримаємо:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{N}, \quad (6.20)$$

або в проекціях на осі декартової системи

⁹ Більш детальне ознайомлення з типами зв’язків та їх властивостями буде проведене у розділі “Аналітична механіка”.

$$m\ddot{x} = F_x + N_x, \quad m\ddot{y} = F_y + N_y, \quad m\ddot{z} = F_z + N_z. \quad (6.21)$$

Позначимо одиничний вектор зовнішньої нормалі через \vec{n} . Очевидно, що вектори \vec{n} і \vec{N} колінеарні. Як відомо, косинуси кутів зовнішньої нормалі до поверхні з осями координат, а значить і сили \vec{N} , можна обчислити за формулами

$$\cos(\vec{N} \wedge OX) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos(\vec{N} \wedge OY) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos(\vec{N} \wedge OZ) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z},$$

де

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} N_x &= N \cos(\vec{N} \wedge \vec{i}) = \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}; \\ N_y &= N \cos(\vec{N} \wedge \vec{j}) = \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}; \\ N_z &= N \cos(\vec{N} \wedge \vec{k}) = \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Підставляючи рівняння (6.22) в систему (6.21), отримаємо

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (6.23)$$

де $\lambda = N/\Delta f$ – множник зв'язку.

Співвідношення (6.23) називаються *диференціальними рівняннями Лагранжа першого роду* для руху невідільної матеріальної точки. Із цих трьох диференціальних рівнянь і рівняння поверхні можна знайти чотири невідомі – координати точки x, y, z і невизначений множник Лагранжа λ як функції часу і довільних сталих інтегрування. Довільні сталі, в свою чергу, визначають з початкових умов.

У векторній формі ці рівняння набувають виду

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \text{grad } f. \quad (6.24)$$

З іншого боку, порівнюючи вирази (6.20) і (6.24), бачимо, що

$$\vec{N} = \lambda \cdot \text{grad } f. \quad (6.25)$$

Абсолютна величина множника зв'язку в цьому випадку рівна

$$|\lambda| = \frac{N}{|\text{grad } f|} = \frac{N}{\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + (\partial f/\partial z)^2}}. \quad (6.26)$$

Вектор $\text{grad } f$ має напрям т.зв. *зовнішньої нормалі* до поверхні, тобто напрямлений в ту область простору, де $f > 0$. Таким чином,

$$\text{grad } f = |\text{grad } f| \cdot \vec{n}.$$

При цьому, згідно рівняння (6.25)

$$\lambda = \frac{N_n}{|\text{grad } f|}.$$

6.6.2. Рух точки по гладкій кривій

Нерухому криву в просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь $f_1(x, y, z) = 0$ і $f_2(x, y, z) = 0$. Ці поверхні створюють для рухомої точки дві нормальні реакції \vec{N}_1 і \vec{N}_2 . Тому повна реакція

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2. \quad (6.27)$$

Тоді диференціальні рівняння Лагранжа 1-го роду для руху точки по гладкій кривій лінії матимуть вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad (6.28)$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

або у векторній формі

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2. \quad (6.29)$$

Порівнюючи останній вираз з рівнянням

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{N} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2,$$

бачимо, що

$$\vec{N}_1 = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1, \quad \vec{N}_2 = \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2. \quad (6.30)$$

Абсолютні значення множників зв'язків

$$|\lambda_1| = \frac{N_1}{|\text{grad } f_1|}, \quad |\lambda_2| = \frac{N_2}{|\text{grad } f_2|},$$

або

$$\lambda_1 = N_{1n_1} / |\text{grad } f_1|, \quad \lambda_2 = N_{2n_2} / |\text{grad } f_2|,$$

де \vec{n}_1 і \vec{n}_2 – одиничні вектори зовнішніх нормалей до відповідних повер-

хонь, додатній напрям яких залежить від вибору виду цих рівнянь.

Отже, при русі точки по ідеальних поверхнях або кривих множини зв'язків являють собою величини, пропорційні реакціям зв'язків.

6.7. Коливний рух матеріальної точки

Розглянемо одномірний рух частинки масою m під дією сили, пропорційної відхиленню частинки від положення рівноваги і напрямленої протилежно зміщенню:

$$F(x) = -fx. \quad (6.31)$$

Для загальності приймемо, що на частинку крім того діють сила опору $R = -c\dot{x}$, пропорційна першій степені швидкості, і зовнішня періодична сила $F_m \cos \omega t$. Тоді рівняння руху частинки під дією прикладених сил матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -fx - c\dot{x} + F_m \cos \omega t.$$

Якщо ввести позначення: $f/m = \omega_0^2$, $g/m = \alpha$, $c/m = 2\gamma$, $F_m/m = f_m$, то останнє рівняння переписеться у вигляді

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t. \quad (6.32)$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (6.32) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.33)$$

і довільного частинного розв'язку неоднорідного рівняння. При цьому характерно, що вираз (6.33) є рівнянням *вільних коливань*, тобто коливань, які здійснюються за відсутності зовнішньої змушуючої сили. Тому загальний його розв'язок викликає самостійний інтерес у плані вивчення вільних коливань малої амплітуди.

Загальний розв'язок рівняння (6.33) має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.34)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі, які визначаються з початкових умов; λ_1 і λ_2 – корені відповідного характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.35)$$

Розв'язуючи рівняння (6.35), бачимо, що $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. При цьому можливі три випадки.

1. $\gamma < \omega_0$. Дана нерівність еквівалентна твердженню, що сила пружності більша від сили опору. У цьому випадку корені характеристич-

ного рівняння є комплексними числами:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_1,$$

де $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – дійсна величина. Тоді розв'язок (6.34) запишеться у вигляді

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_1 t}) = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t),$$

або

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (6.36)$$

де $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$; $\alpha = \arctg(-A_2/A_1)$.

У співвідношенні (6.36) аргумент косинуса ($\omega_1 t + \alpha$) називається *фазою коливань*, а кут α – *початковою фазою*, яка, очевидно, залежить від вибору початку відліку часу. Величина ω_1 називається *циклічною частотою коливань*.

За відсутності сил опору $\gamma = 0$ і тоді розв'язок (6.36) записується у вигляді

$$x = A \cos(\omega_1 t + \alpha). \quad (6.37)$$

У цьому випадку точка здійснює незатухаючі гармонічні коливання з власною частотою $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ і періодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Коефіцієнт A при періодичному множнику в рівнянні (16.10) є *амплітудою вільних незатухаючих коливань*.

Звичайно, в реальних механічних системах сила опору (тертя) в тій чи іншій мірі завжди присутня, і тому коефіцієнт $\gamma \neq 0$. Тому загальний розв'язок (6.36) описує *затухаючі коливання*.

Визначимо сталі інтегрування A_1 і A_2 , використовуючи початкові умови: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. При цьому, згідно (6.36)

$$\dot{x} = e^{-\gamma t} [(A_2 \omega_1 - A_1 \gamma) \cos \omega_1 t + (-A_1 \omega_1 - A_2 \gamma) \sin \omega_1 t]. \quad (6.38)$$

Підставляючи значення координати і проекції швидкості у початковий момент часу в рівняння (6.36) і (6.37), отримуємо:

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega_1}.$$

Тоді

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \alpha = \arctg\left(-\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{x_0 \omega_1}\right). \quad (6.39)$$

З рівняння руху частинки (16.9) слідує, що x періодично змінює

знак, тобто рух точки має коливний характер. Однак поняття періоду, який у випадку затухаючих коливань рівний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}}, \quad (6.40)$$

має зміст лише для процесу послідовного проходження частинкою положення рівноваги. Тобто координата x точки набуває значень, відмінних від x_0 , неперіодично.

Швидкість зменшення максимальних відхилень точки від положення рівноваги визначається параметром γ , який називається *коефіцієнтом затухання*.

Як слідує з виразу (6.40), при невеликих значеннях γ/ω_0 відносно збільшення періоду вільних коливань

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega_0} \right)^2 + \dots$$

за рахунок опору має порядок $(\gamma/\omega_0)^2$, тобто є дуже малим.

Для характеристики інтенсивності затухання коливного процесу поряд з коефіцієнтом γ застосовують поняття *логарифмічного декременту затухання*, який визначається як натуральний логарифм відношення двох послідовних амплітуд:

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\gamma t}}{Ae^{-\gamma(t+T)}} = \gamma T. \quad (6.41)$$

Це означає, що амплітуда коливань частинки за кожен період зменшується в e^δ разів.

З логарифмічним декрементом затухання пов'язана *добротність коливної системи* Q , яка визначається наближеним співвідношенням

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (6.42)$$

Дійсно, з виразів (6.40) і (6.41) слідує, що

$$\delta = \pi / \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}. \quad (6.43)$$

Підсумовуючи сказане, можна зробити висновок, що малі лінійні опори незначно збільшують період коливань у порівнянні з випадком відсутності опору, однак сильно зменшують послідовні значення амплітуд.

2. $\gamma > \omega_0$. У цьому випадку частинка (або механічна система) зазнає

значного лінійного опору. Обидва корені характеристичного рівняння будуть дійсними від'ємними числами:

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm \omega_2,$$

де $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Як наслідок, загальний розв'язок рівняння (16.6) матиме вигляд:

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 e^{-\omega_2 t} + C_2 e^{\omega_2 t}) = e^{-\gamma t} (A_1 \operatorname{ch} \omega_2 t + A_2 \operatorname{sh} \omega_2 t). \quad (16.44)$$

Такий рух не має коливного характеру і називається *aperiodичним*. З виразу (16.17) слідує, що при будь-яких скінчених значеннях сталих C_1 і C_2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1}{\exp((\gamma + \omega_2)t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{\exp((\gamma - \omega_2)t)} = 0,$$

оскільки $(\gamma - \omega_2) > 0$. Внаслідок швидкого спадання показникової функції величина x буде досить малою вже для невеликих t . Це означає, що точка практично повернулася у положення рівноваги.

Характер руху визначається початковими умовами. Якщо при $t = 0$ $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0$, то аналогічно попередньому випадку отримаємо

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 \gamma}{\omega_2},$$

тобто

$$x = e^{-\gamma t} \left(x_0 \operatorname{ch} \omega_2 t + \frac{\dot{x}_0 + x_0 \gamma}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t \right),$$

$$\dot{x} = e^{-\gamma t} \left(\dot{x}_0 \operatorname{ch} \omega_2 t - \frac{\gamma \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t \right).$$

З останнього виразу слідує, що точка досягає максимального відхилення від положення рівноваги ($\dot{x} = 0$) у момент часу τ , який визначається з рівності

$$\operatorname{th} \omega_2 \tau = \frac{\sqrt{1 - (\omega_0/\gamma)^2}}{1 + \omega_0^2 x_0 / (\gamma \dot{x}_0)}, \quad (6.45)$$

причому в цей момент часу

$$x(\tau) = e^{-\gamma \tau} x_0 \left(1 + \frac{1 + \dot{x}_0 / (\gamma x_0)}{1 + \omega_0^2 x_0 / (\gamma \dot{x}_0)} \right) \operatorname{ch} \omega_2 \tau.$$

Оскільки при $0 \leq \varphi \leq \infty$ функція $\operatorname{th} \varphi$ монотонно зростає від 0 до 1, то рівняння (6.45) може мати додатній корінь τ (і тільки один) лише при

виконанні нерівності

$$0 < \frac{\sqrt{1 - (\omega_0/\gamma)^2}}{1 + \omega_0^2 x_0 / (\gamma \dot{x}_0)} < 1. \quad (6.46)$$

Якщо $x_0 > 0$, то можливі три випадки поведінки функції $x(t)$ в залежності від знаку і величини \dot{x}_0 .

а) $\dot{x}_0 > 0$. Тоді функція $x(t)$ зростає до максимального значення $x(\tau)$, а потім спадає, асимптотично наближаючись до положення рівноваги (рис. 6.2,а)

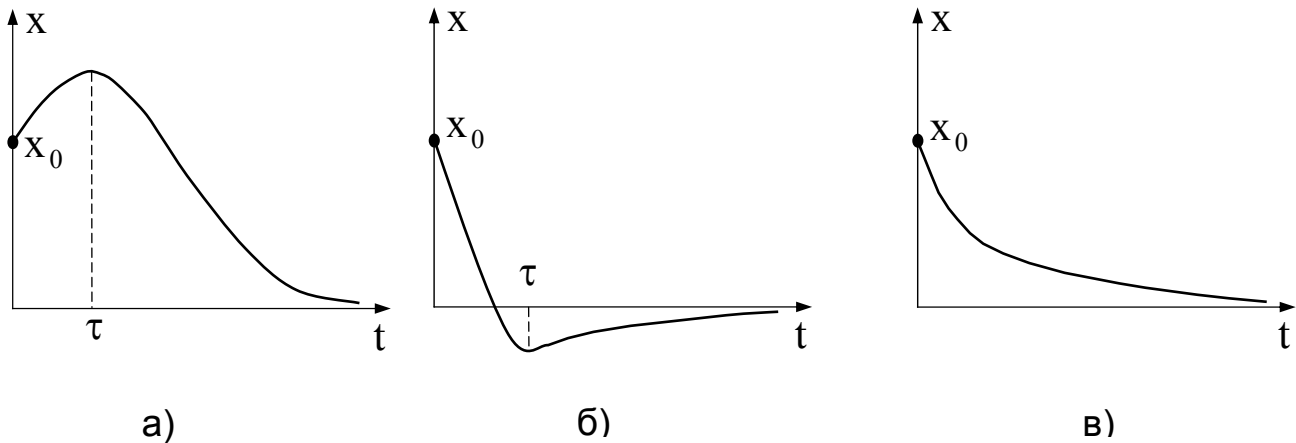


Рис. 6.2

б) $\dot{x}_0 < 0$ і притому $\frac{\omega_0^2 x_0}{\gamma \dot{x}_0} > \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2} - 1$, тобто $|\dot{x}_0| > x_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$.

В цьому випадку $x(\tau) < 0$. Точка один раз проходить через положення рівноваги, досягає максимального від'ємного значення $x(\tau)$, а після цього асимптотично наближається до рівноважного положення (рис. 6.2,б).

в) $\dot{x}_0 < 0$ і притому $\frac{\omega_0^2 x_0}{\gamma \dot{x}_0} < \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2} - 1$, тобто $|\dot{x}_0| < x_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$.

В цьому випадку нерівність (6.46) не виконується. Функція $x(t)$ монотонно зменшується, тобто точка наближається до положення рівноваги, не досягаючи його (рис. 6.2,в).

3. $\gamma = \omega_0$. Цей випадок відповідає граничному аперіодичному рухові. Загальний розв'язок рівняння (6.33) за даної умови матиме вигляд

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 t + C_2). \quad (6.47)$$

При $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow 0$, тобто точка поступово і досить швидко повертається в положення рівноваги. В залежності від знаку і величини по-

чаткової швидкості частинка здійснюватиме один з трьох розглянутих вище аперіодичних асимптотичних рухів.

Якщо на частинку діє зовнішня періодична сила $F_m \cos \omega t$, то до загального розв'язку (6.36) потрібно додати частинний розв'язок рівняння (6.32). Шукатимемо його у вигляді

$$x_1 = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t. \quad (6.48)$$

Знайшовши першу і другу похідні функції $x_1(t)$ по часу

$$\dot{x}_1 = \omega(-D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t),$$

$$\ddot{x}_1 = \omega^2(-D_1 \cos \omega t - D_2 \sin \omega t)$$

і підставивши їх в рівняння (6.32), отримаємо

$$(-\omega^2 D_1 + 2\gamma\omega D_2 + \omega_0^2 D_1) \cos \omega t + (\omega_0^2 D_2 - \omega^2 D_2 - 2\gamma\omega D_1) \sin \omega t = f_m \cos \omega t.$$

Звідси знаходимо два рівняння, які дозволяють визначити невідомі сталі D_1 і D_2 :

$$D_1(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega D_2 = f_m,$$

$$D_2(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega D_1 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримуємо:

$$D_1 = \frac{f_m(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad D_2 = \frac{2\gamma\omega f_m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (6.49)$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{f_m(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2\gamma\omega f_m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin \omega t.$$

Покладаючи

$$\cos \varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (6.50)$$

отримуємо

$$x_1 = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varepsilon) = D \cos(\omega t + \varepsilon), \quad (6.51)$$

де величина $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = f_m / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$ є амплітудою вимушених коливань.

Повний розв'язок неоднорідного рівняння (6.32) у випадку малих опорів матиме вигляд

$$x = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) + D \cos(\omega t + \varepsilon),$$

або, з урахуванням початкових умов, визначивши сталі A_1 і A_2

$$x = e^{-\gamma t} \left(q_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - D e^{-\gamma t} \left(\cos \varepsilon \cos \omega_1 t - \frac{\omega \sin \varepsilon - \gamma \cos \varepsilon}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + D \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (6.52)$$

У правій частині рівності (6.52) стоїть сума трьох доданків, перший з яких визначає затухаючі коливання, що відбуваються внаслідок початкового відхилення системи від положення рівноваги і надання їй початкової швидкості. Частота цих коливань ω_1 менша власної частоти ω_0 . Другий доданок описує затухаючі коливання тієї ж частоти, що й вільні, однак виникають вони за наявності змушуючої сили. Нарешті, третя складова визначає *вимушені коливання*, що відбуваються з частотою зовнішньої сили. Як слідує з рівняння (6.51), амплітуда вимушених коливань D при заданій величині ω є сталою, тоді як амплітуди коливань, що відповідають двом першим складовим, за рахунок множника $\exp(-\gamma t)$ з часом зменшуються. По цій причині через деякий час перші два доданки у формулі (6.52) стануть практично рівними нулю. Тому, розглядаючи рух, що встановився через достатньо великий проміжок часу (тим менший, чим більша сила опору), можна констатувати наявність лише вимушених коливань:

$$x = D \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (6.53)$$

Знайдемо залежність амплітуди вимушених коливань D від частоти зовнішньої сили ω . Амплітуда вимушених коливань

$$D = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (6.54)$$

хоча й зростає при наближенні частоти ω до ω_0 , але не перетворюється в нескінченність, як це спостерігається у випадку відсутності опору. Функція $D(\omega)$ має максимум, положення якого визначається з умови екстремуму $dD/d\omega = 0$. Диференціюючи вираз (6.54) і прирівнюючи похідну до нуля, отримуємо значення частоти, за якої амплітуда вимушених коливань досягає екстремуму:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (6.55)$$

Ця частота називається *резонансною*. Максимальна амплітуда зміщення,

яка відповідає резонансній частоті

$$D_{\max} = \frac{f_m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (6.56)$$

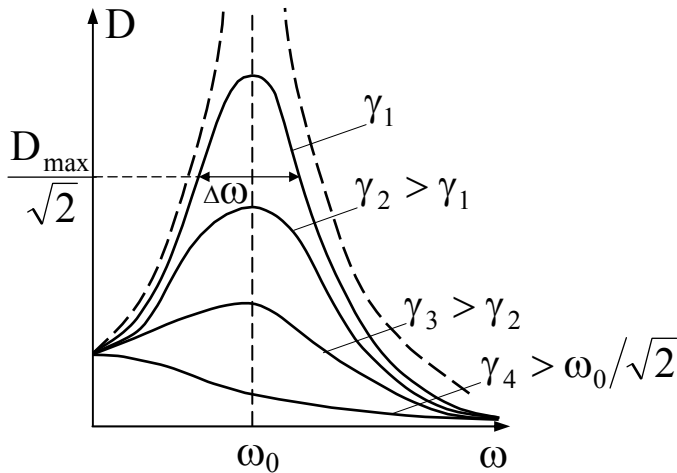


Рис. 6.3

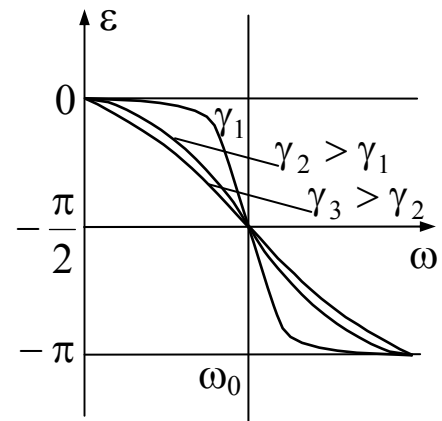


Рис. 6.4

Явище, яке полягає в тому, що при певному значенні частоти зовнішньої сили амплітуда коливань набуває максимального значення, називається *резонансом*. При збільшенні сили тертя D_{\max} зменшується і, як слідує з (6.55), при $\gamma > \omega_0/\sqrt{2}$ максимум зникає (рис. 6.3).

Характеристикою резонансної кривої $D(\omega)$ є її *півширина* $\Delta\omega$, під якою розуміють *відстань по осі абсцис між точками, де квадрат амплітуди набуває значення, вдвічі меншого від максимального*. При зменшенні коефіцієнта затування резонансна крива стає вужчою (рис. 6.3). Разом з тим площа під кривою залишається при цьому незмінною.

Відмітимо характерну особливість ходу зміни різниці фаз ε між коливанням і зовнішньою періодичною силою при зміні частоти останньої. Оскільки

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

то ε завжди від'ємна, тобто коливання “запізнюється” відносно зовнішньої сили (рис. 6.4). Далеко від резонансу, з боку $\omega < \omega_0$, різниця фаз прямує до нуля, а з боку $\omega > \omega_0$ – до значення $-\pi$. Зміна ε від 0 до $-\pi$ відбувається у вузькій (шириною $\sim\gamma$) області частот, близьких до ω_0 . Через значення $-\pi/2$ різниця фаз проходить при $\omega = \omega_0$.

6.8. Динаміка механічної системи

6.8.1. Задання станів системи матеріальних точок у класичній механіці

Механічною системою називається сукупність матеріальних точок, положення і рух яких пов'язані між собою. При цьому в механіці рух системи вважається визначеним, якщо відомий рух кожної її точки.

Вказана вище залежність між точками системи може бути зумовлена двома причинами:

- 1) сили, які діють на кожну точку залежать від положень і швидкостей решти, причому можливі рухи точок не підкоряються ніяким умовам;
- 2) точки системи підкоряються відомим кінематичним умовам, що виражаються аналітично за допомогою рівнянь чи нерівностей між їх координатами, в силу чого рухи точок не можуть бути довільними.

В силу принципової відмінності наведених причин виникає необхідність у визначенні наступних станів механічної системи.

Система називається вільною, якщо координати і швидкості її точок можуть набувати довільних значень в залежності від сил, прикладених до них, і початкових умов руху.

Механічна система називається невольною, якщо на рухи точок, що їй належать, накладені наперед задані кінематичні обмеження.

Фізичні реальності, які обмежують рух точок системи і перетворюють її з вільної у невольну, називаються зв'язками. Сили, з якими зв'язки діють на точки системи, називаються реакціями зв'язків. Відмітимо, що реакції зв'язків для конкретного тіла чи точки залежать від прикладених сил, виду зв'язків і характеристик руху.

Розглянемо аксіому звільнення від зв'язків, яка дозволяє формально зводити дослідження руху невольної системи матеріальних точок до вивчення руху вільної системи, що досить суттєво, оскільки закони Ньютона застосовні до розгляду руху лише вільних механічних систем: *не змінюючи руху системи, будь-який зв'язок можна відкинути, змінивши його дію силами, рівними реакціям відкинутого зв'язку.*

6.8.2. Класифікація сил, що діють на точки системи. Властивості внутрішніх сил

Існує два способи класифікації сил, прикладених до точок системи. Згідно першого способу класифікації розрізняють *активні сили* і *реакції*

зв'язків. При цьому під активними розуміють *сили, які своєю дією викликають прискорення точок системи і виникнення реакцій*. Слід, однак, додати, що активні сили не є єдиною можливим джерелом виникнення реакцій зв'язків.

Згідно другого способу класифікації сили поділяють на *внутрішні* та *зовнішні*.

Зовнішніми силами механічної системи називаються сили, з якими діють на точки системи тіла і точки, що не входять до цієї системи. Внутрішніми силами механічної системи називаються сили взаємодії між точками системи, що розглядається. Відмітимо, що внутрішні та зовнішні сили можуть включати в себе як активні сили, так і реакції зв'язків.

Зовнішню і внутрішню сили, прикладені до k -ої точки системи позначатимемо, відповідно, $\vec{F}_k^{(e)}$ і $\vec{F}_k^{(i)}$. Тоді повна сила, що діє на точку, запишеться як

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}. \quad (6.57)$$

Розглянемо деякі властивості внутрішніх сил.

1. *Геометрична сума всіх внутрішніх сил системи рівна нулю.*¹⁰

Доведення.

Нехай система складається з N точок. Сила, що діє на k -ту точку з боку решти буде рівна

$$\vec{F}_k^{(i)} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj},$$

а повна сила взаємодії між усіма точками системи

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(i)} = 0. \quad (6.58)$$

Дійсно,

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{F}_{jk}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^N (\vec{F}_{kj} + \vec{F}_{jk}) = 0,$$

($k \neq j$)

оскільки за третім законом Ньютона кожній дії, прикладеній від однієї точки до іншої, відповідає рівна за величиною і протилежно напрямлена протидія, прикладена від другої точки до першої.

¹⁰ Геометричну суму однотипних векторних величин у механіці називають *головним вектором* цих величин.

Зауваження: зовнішні сили також є силами взаємодії, однак для них сили дії прикладені до точок системи, що розглядається, а сили протидії прикладені до тіл і точок, які не входять до цієї системи.

2. Геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил відносно довільної нерухомої точки системи рівна нулю.

Доведення.

Розглянемо суму моментів внутрішніх сил $\vec{F}_1^{(i)}$ і $\vec{F}_2^{(i)}$ для двох довільних точок системи M_1 і M_2 (рис. 6.5) відносно нерухомої точки O . Легко помітити, що

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^{(i)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^{(i)}) = 0,$$

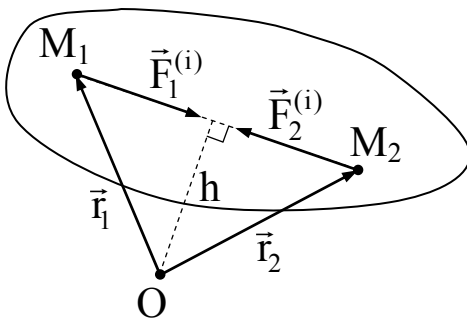


Рис. 6.5

оскільки обидві сили мають однакові плечі і протилежні напрями векторних моментів. Головний момент внутрішніх сил $\vec{L}_O^{(i)}$ відносно точки O складається із векторної суми таких виразів, рівних нулю. Таким чином,

$$\vec{L}_O^{(i)} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^{(i)}) = \sum [\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k^{(i)}] = 0. \quad (6.59)$$

З векторної рівності (6.59) слідує, що і проєкції головного моменту внутрішніх сил системи на координатні осі також рівні нулю.

6.8.3. Диференціальні рівняння руху системи

Нехай задані внутрішні та зовнішні сили, які діють на систему, що складається з N точок. Якщо до кожної точки системи прикласти рівнодійну зовнішніх сил $\vec{F}_k^{(e)}$ і рівнодійну всіх внутрішніх сил $\vec{F}_k^{(i)}$, то для будь-якої k -тої точки системи можна записати диференціальне рівняння руху. У векторній формі воно має вигляд

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (6.60)$$

Систему N диференціальних рівнянь (6.60) називають *диференціальними рівняннями руху механічної системи у векторній формі*.

Спроєктувавши співвідношення (6.60) на осі інерціальної декартової системи координат, отримаємо систему $3N$ диференціальних рівнянь, що описують рух точок механічної системи:

$$\begin{aligned}
 m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^{(e)} + F_{kx}^{(i)}; \\
 m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^{(e)} + F_{ky}^{(i)}; \\
 m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^{(e)} + F_{kz}^{(i)}.
 \end{aligned}
 \tag{6.61}$$

Проекції рівнодійних зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до k -ї точки, є заданими функціями часу, координат і проекцій швидкостей не тільки k -тої, але й в загальному випадку всіх точок системи. Таким чином, рівняння (6.61) утворюють систему $3N$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з $3N$ невідомими величинами x_i , y_i , z_i , які повинні бути визначені як функції часу. Початкові умови, необхідні для визначення довільних сталих інтегрування, є сукупністю початкових умов для кожної точки системи зокрема. Як бачимо, задача інтегрування рівнянь (6.61) винятково складна вже для випадку двох матеріальних точок, які рухаються під дією сил взаємодії за законом всесвітнього тяжіння і не має точного розв'язку у випадку трьох взаємодіючих точок. В деяких випадках з диференціальних рівнянь руху системи можна отримати перші інтеграли, що полегшує задачу інтегрування. Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь зручно отримувати з т.зв. *загальних теорем динаміки*, коли виконуються деякі додаткові умови для діючих сил.

Література

- [6] – §§ 79–94
- [7] – Ч. 1, Гл. 2, §§ 5-7, Гл. 4, § 13
- [10] – Р. 3, Гл. 1, §§ 1-8
- [11] – Ч. 1, Гл. 1, §§ 1-8

Лекція 7

Загальні теореми динаміки

Вступ

Якщо по суті поставленої задачі необхідно вивчити рух кожної точки системи окремо, то повне інтегрування рівнянь руху необхідне. В інших випадках достатньо визначити зміну деяких сумарних мір руху системи в цілому в залежності від сумарних мір дії сил. Такого роду співвідношення між зазначеними характеристиками виражають *загальні*

теорему динаміки системи матеріальних точок, які застосовують як для окремих точок та їх систем, так і для суцільних середовищ.

Загальні теореми динаміки можуть бути виведені з диференціальних рівнянь руху як в диференціальній, так і в скінченній (інтегральній) формах.

7.1. Імпульс точки і механічної системи. Теорема про зміну імпульсу. Закон збереження імпульсу

Однією з мір руху точки або механічної системи є *імпульс*.

Імпульсом (кількістю руху) \vec{q} матеріальної точки називають вектор, рівний добутку маси точки на її швидкість:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v}. \quad (7.1)$$

Імпульсом \vec{Q} механічної системи називається головний вектор (векторна сума) імпульсів усіх матеріальних точок цієї системи:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (7.2)$$

Проекції вектора \vec{Q} на осі інерціальної декартової системи координат рівні

$$Q_x = \sum_{i=1}^N m_i v_{ix}, \quad Q_y = \sum_{i=1}^N m_i v_{iy}, \quad Q_z = \sum_{i=1}^N m_i v_{iz}. \quad (7.3)$$

На відміну від імпульсу точки вектор кількості руху системи не має конкретної точки прикладання і тому відноситься до числа *вільних векторів*.

Нехай механічна система складається з N точок, на які діють внутрішні та зовнішні сили. Тоді рівняння руху i -тої точки матиме вигляд

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}.$$

Просумувавши записану рівність по всіх точках системи, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(i)}. \quad (7.4)$$

Оскільки за властивістю внутрішніх сил $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(i)} = 0$, то, враховуючи означення (7.2), співвідношення (7.4) перепишеться у вигляді

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}. \quad (7.5)$$

Остання рівність виражає *теорему про зміну імпульсу системи* в диферен-

ціальній формі: **векторна похідна по часу від імпульсу системи рівна головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок цієї системи.**

Рівність нулю головного вектора внутрішніх сил приводить до висновку, що *внутрішні сили не можуть впливати на зміну імпульсу системи.*

Проектуючи векторну рівність (7.5) на нерухомі осі декартової системи координат, отримуємо систему трьох рівнянь

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{ix}^{(e)}; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{iy}^{(e)}; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{iz}^{(e)}, \quad (7.6)$$

які виражають той факт, що *похідні по часу від проекцій імпульсу системи на координатні осі рівні сумі проекцій всіх зовнішніх сил системи на відповідні осі.*

Диференціальна форма теореми про зміну імпульсу механічної системи може бути представлена в іншому вигляді. Дійсно, з рівності (7.5) слідує, що

$$d\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} dt. \quad (7.7)$$

Вираз $\vec{F}_i^{(e)} dt$ є *елементарним імпульсом зовнішніх сил, що діють на i-ту точку системи.* Таким чином, рівняння (7.7) показує, що **диференціал імпульсу системи матеріальних точок рівний векторній сумі елементарних імпульсів усіх зовнішніх сил, які діють на систему.**

Обчислюючи інтеграли по часу від обох частин рівності (7.7), отримуємо теорему імпульсів в скінченій, або інтегральній формі: **зміна імпульсу системи матеріальних точок за деякий проміжок часу рівна повному імпульсу всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, за той же проміжок часу.** Математичний запис наведеного формулювання має вигляд

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} dt, \quad (7.8,а)$$

або

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i^{(e)}, \quad (7.8,б)$$

де $\vec{S}_i^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} dt$ – імпульс зовнішньої сили, що діє на i-ту точку за час інтегрування.

В залежності від особливостей зовнішніх сил, прикладених до меха-

нічної системи, частковими випадками теореми про зміну імпульсу є закони збереження кількості руху. Внутрішні сили при цьому можуть бути якими завгодно, оскільки вони явно не впливають на зміну імпульсу системи. Можливі два випадки.

1. **Якщо зовнішні сили такі, що проекція їх головного вектора на одну з осей координат рівна нулю, то проекція вектора імпульсу на ту ж вісь буде протягом всього часу руху зберігати сталі значення.**

Наведене твердження називають *законом збереження проекції імпульсу системи*. Його справедливність слідує безпосередньо з рівностей (7.6).

Так, наприклад, якщо $\sum_{i=1}^N F_{ix}^{(e)} = 0$, то

$$\dot{Q}_x = 0,$$

звідки

$$Q_x = \text{const}. \quad (7.9)$$

Як бачимо, у співвідношення (7.9) входять похідні по часу від координат точок не вище першого порядку. Це означає, що закон збереження проекції кількості руху дає можливість отримати один перший інтеграл руху.

2. **Якщо головний вектор зовнішніх сил, прикладених до системи, рівний нулю, то кількість руху системи постійна за величиною і напрямом:**

$$\vec{Q} = \overline{\text{const}}. \quad (7.10)$$

У цьому полягає *закон збереження імпульсу системи матеріальних точок*.

Слід відмітити, що цей закон виконується і для випадку *ізолюваної системи*, коли точки, що входять до її складу, взаємодіють лише між собою.

Спроектуювавши співвідношення (7.10) на осі декартової системи координат, отримуємо три скалярні рівності

$$Q_x = C_1, \quad Q_y = C_2, \quad Q_z = C_3, \quad (7.11)$$

де C_1, C_2, C_3 – сталі величини. Таким чином, при виконанні закону збереження імпульсу можна одержати три перші інтеграли диференціальних рівнянь руху системи.

7.2. Момент сили. Момент імпульсу точки та

МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Моментом сили \vec{F} відносно довільної точки O називається вектор \vec{M} , за величиною і напрямом рівний векторному добутку радіус-вектора \vec{r} точки прикладання сили і вектора сили (рис. 7.1):

$$\vec{M}_O = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (7.12)$$

Як слідує з визначення, вектор моменту сили напрямлений перпендикулярно площині, в якій розташовані вектори \vec{r} і \vec{F} , і утворює з ними правогвинтову систему. Момент \vec{M} залежить від вибору точки O . Якщо взяти точку прикладання моменту сили за початок координат, то його проекції на координатні осі декартової системи будуть рівними

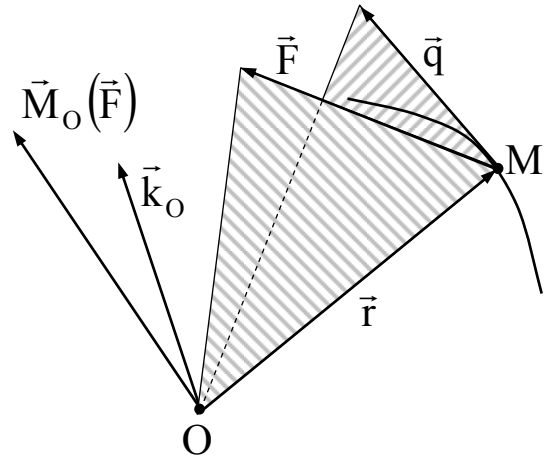


Рис. 7.1

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x. \quad (7.13)$$

Величина моменту сили рівна подвоєній площі трикутника, утвореного векторами \vec{r} і \vec{F} . Якщо ввести одиничні вектори осей координат, то систему рівностей (7.13) можна переписати у формі одного векторного виразу:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (7.14)$$

Моментом сили відносно деякої осі називають проекцію на вісь вектора моменту сили, взятого відносно будь-якої точки на цій осі. Доцільність такого визначення полягає в тому, що момент сили відносно осі не залежить від вибору моментної точки, достатньо лише, щоб вона знаходилася на цій осі.

З визначення моменту сили відносно осі слідує, що він може бути рівним нулю в двох випадках: 1) якщо лінія дії сили перетинається з віссю; 2) якщо лінія дії сили паралельна осі, тобто коли сила і вісь лежать в одній площині.

Виходячи з означення, відмітимо, що моменти сили відносно осей прямокутної декартової системи координат рівні проекціям на ці осі

вектора моменту сили відносно початку координат, тобто визначаються співвідношеннями (7.13).

Поряд з імпульсом як векторну міру руху можна використовувати *кінетичний момент*, або *момент імпульсу*. Для матеріальної точки масою m , яка рухається з швидкістю \vec{v} , **кінетичним моментом \vec{k} відносно довільного центру O називається векторний добуток радіус-вектора точки на вектор її кількості руху** (рис. 7.1):

$$\vec{k} = [\vec{r}, \vec{q}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (7.15)$$

Якщо точка O співпадає з початком системи координат, то момент імпульсу можна пов'язати з секторною швидкістю точки:

$$\vec{k} = 2m\vec{\sigma}. \quad (7.16)$$

Проекції вектора моменту кількості руху на осі координат виражаються формулами:

$$k_x = m(yv_z - zv_y), \quad k_y = m(zv_x - xv_z), \quad k_z = m(xv_y - yv_x). \quad (7.17)$$

Кожна з цих формул визначає момент імпульсу матеріальної точки відносно відповідної координатної осі.

Кінетичним моментом або головним моментом імпульсу механічної системи називається векторна сума моментів імпульсу всіх матеріальних точок цієї системи відносно одного й того ж центру:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{k}_i = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \quad (7.18)$$

Проекції кінетичного моменту механічної системи, що складається з N точок, на осі інерціальної декартової системи координат визначаються формулами

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}), \\ K_y &= \sum_{i=1}^N m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}), \\ K_z &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Кінетичний момент деякого об'єму суцільного середовища є границею суми моментів імпульсу його елементів Δm_i :

$$\vec{K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i] = \int_{(m)} [\vec{r}, \vec{v}] dm. \quad (7.20)$$

Як буде показано далі, кінетичний момент є тою фізичною величи-

ною, яка разом з кількістю руху тіла повністю визначає його динамічні властивості.

7.3. Теорема про зміну кінетичного моменту точки і механічної системи. Теорема Резаля. Закон збереження моменту імпульсу

Доведемо *теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної точки відносно центру: векторна похідна по часу від моменту імпульсу матеріальної точки відносно довільного центру рівна моменту рівнодійної прикладених до точки сил відносно того ж центру.*

Доведення.

Продиференціюємо по часу вираз (7.15). В результаті отримаємо:

$$\dot{\vec{k}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{q}] + [\vec{r}, \dot{\vec{q}}]. \quad (7.21)$$

Перший доданок правої частини одержаного виразу рівний нулю, оскільки вектори, що входять до векторного добутку паралельні:

$$[\dot{\vec{r}}, \vec{q}] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0.$$

На основі теореми про зміну імпульсу в застосуванні до матеріальної точки маємо

$$\dot{\vec{q}} = \vec{F},$$

де \vec{F} – рівнодійна сил, прикладених до точки. В результаті співвідношення (7.21) запишеться у вигляді:

$$\dot{\vec{k}} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O(\vec{F}), \quad (7.22)$$

що і доводить теорему.

В проекціях на осі декартових прямокутних координат теорема виражається системою наступних трьох рівнянь:

$$\dot{k}_x = M_x(\vec{F}), \quad \dot{k}_y = M_y(\vec{F}), \quad \dot{k}_z = M_z(\vec{F}), \quad (7.23)$$

кожне з яких можна трактувати як теорему про зміну моменту імпульсу матеріальної точки відносно відповідної координатної осі: *похідні по часу від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої осі рівна моменту рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно тієї ж осі.*

Розглянута теорема в застосуванні до однієї матеріальної точки являє собою простий наслідок другого закону Ньютона, який виявляється

корисним при розв'язуванні деяких задач динаміки.

Подальшим узагальненням цієї теореми динаміки є теорема про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок: *похідна по часу від вектора моменту імпульсу системи відносно довільного центру рівна головному моменту зовнішніх сил, прикладених до точок системи, відносно того ж центру.*

Доведення.

Нехай система складається з N числа точок масами m_1, m_2, \dots, m_N . Серед сил, прикладених до точок системи, виділимо групи зовнішніх та внутрішніх сил. До кожної точки системи окремо застосуємо теорему про зміну моменту імпульсу. На основі рівності (7.22) знаходимо

$$\dot{\vec{k}}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (7.24)$$

Тут $\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$ та $\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)})$ – моменти рівнодійних зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до i -тої точки, відповідно.

Додаючи почленно рівняння системи (7.24), знайдемо

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{k}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) + \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}).$$

Але за властивістю внутрішніх сил їх геометрична сума відносно довільної нерухомої точки рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) = 0,$$

тому, враховуючи вираз (7.18), остаточно отримуємо

$$\dot{\vec{K}} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}). \quad (7.25)$$

Рівняння (7.25) є математичним вираженням теореми про зміну моменту імпульсу механічної системи.

Проектуючи рівняння (7.25) на нерухомі осі, отримуємо

$$\dot{K}_x = M_x^{(e)}, \quad \dot{K}_y = M_y^{(e)}, \quad \dot{K}_z = M_z^{(e)}, \quad (7.26)$$

тобто, *похідна по часу від головного моменту імпульсу системи відносно деякої осі сталого напрямку рівна головному моменту зовнішніх сил відносно тієї ж осі.*

Теоремі про зміну моменту імпульсу системи можна дати наступну кінематичну інтерпретацію. Як відомо з основ векторного числення, по-

хідна вектора по часу є швидкістю кінця цього вектора на його годографі. Зокрема, вектор

$$\vec{u}_O = \frac{d\vec{K}_O}{dt}$$

є швидкістю кінця вектора кінетичного моменту, якщо його початком служить нерухомий центр моментів O (рис. 7.2). Таким чином, теорему про зміну кінетичного моменту у цій геометричній формі можна сформулювати наступним чином: **швидкість руху точки, яка описує годограф кінетичного моменту системи, рівна головному моменту всіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи.** Наведене формулювання носить назву *теорема Резаля*. Точка, відносно якої обчислюється кінетичний момент системи і головний момент зовнішніх сил, одна й та сама.

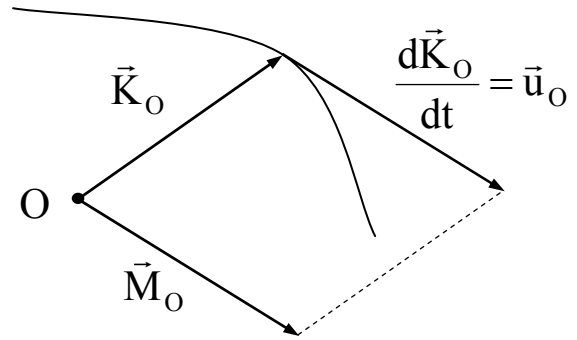


Рис. 7.2

Повертаючись до теореми про зміну моменту імпульсу, відмітимо два часткові її випадки.

1. Якщо зовнішні сили лежать в одній площині, наприклад, з віссю OX , то

$$M_x = \sum_{i=1}^N M_x(\vec{F}_i^{(e)}) = 0$$

і при цьому

$$K_x = \text{const}. \quad (7.27)$$

В такому випадку має місце закон збереження головного моменту імпульсу системи відносно осі: **кінетичний момент системи відносно координатної осі зберігає сталі значення, якщо головний момент зовнішніх сил відносно цієї осі рівний нулю.**

2. Якщо головний момент зовнішніх сил системи відносно деякої точки рівний нулю, то кінетичний момент системи відносно тієї ж точки буде постійним за величиною і напрямом:

$$\vec{K}_O = \overline{\text{const}}. \quad (7.28)$$

Цей частковий випадок теореми про зміну кінетичного моменту системи називають **законом збереження головного моменту імпульсу.**

Площина, проведена перпендикулярно до вектора \vec{K}_O , зберігає сталий напрям у просторі. Вона називається *площиною Лапласа*.

Із векторної рівності (7.28) можна отримати три перші скалярні інтеграли диференціальних рівнянь руху системи, якщо спроектувати її на координатні осі:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) &= C'_1, \\ \sum_{i=1}^N m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) &= C'_2, \\ \sum_{i=1}^N m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) &= C'_3.\end{aligned}\tag{7.29}$$

Підсумовуючи сказане в пп. 7.1–7.3, відмітимо, що розглянуті теорети динаміки дозволяють отримати шість інтегралів руху: три інтеграли проєкцій імпульсу і три інтеграли проєкцій кінетичного моменту. Однак не всі ці інтеграли є незалежними. Дійсно, перемножуючи скалярно рівності (7.1) та (7.15), отримаємо:

$$\vec{q} \cdot \vec{k} = m^2 \vec{v} \cdot [\vec{r}, \vec{v}] = 0,$$

оскільки мішаний добуток, що містить два однакові вектори, рівний нулю. Звідси

$$C_1 C'_1 + C_2 C'_2 + C_3 C'_3 = 0,$$

тобто з шести перших інтегралів проєкцій імпульсу та кінетичного моменту незалежними є тільки п'ять.

7.4. Центр мас системи. Теорема про рух центру мас

Закон зміни імпульсу механічної системи тісно пов'язаний з поняттям *центру мас*. Розглянемо систему N матеріальних точок з радіус-векторами \vec{r}_i і масами m_i . Очевидно, що маса всієї системи рівна

$$M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Центром мас механічної системи називається уявна точка, в якій зосереджена маса всієї системи, і положення якої визначається радіус-вектором

$$\vec{r}_C = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i / \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.\tag{7.30}$$

Координати центру мас дорівнюють

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i; \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i; \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i. \quad (7.31, a)$$

У випадку суцільного середовища, наприклад, абсолютно твердого тіла, формули (7.31, a) після відповідного граничного переходу набувають вигляду

$$x_C = \frac{1}{M_{(m)}} \int x \, dm; \quad y_C = \frac{1}{M_{(m)}} \int y \, dm; \quad z_C = \frac{1}{M_{(m)}} \int z \, dm. \quad (7.31, б)$$

Взявши похідну по часу від обох частин рівності (7.30), отримаємо

$$M \dot{\vec{r}}_C = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

або

$$M \vec{v}_C = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{Q}. \quad (7.32)$$

Звідси слідує, що *імпульс системи матеріальних точок рівний добутку маси системи на швидкість руху її центру мас*, або, іншими словами, *імпульсу центру мас, де за припущенням зосереджена вся маса системи*.

Диференціюючи рівняння (7.32) по часу і використовуючи теорему про зміну кількості руху, отримаємо

$$M \vec{a}_C = \dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}. \quad (7.33)$$

Отриману рівність можна розглядати як основне рівняння динаміки точки – центру мас C системи, – при виконанні умов, що обумовлені в теоремі про рух центру мас: *центр мас системи рухається як точка, в якій зосереджена вся маса системи і до якої прикладений головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему*.

Звідси слідує, що внутрішні сили не впливають на рух центру мас і лише зовнішні сили здатні призводити до його зміни.

Теорема про рух центру мас дає можливість будь-яку матеріальну точку розглядати як центр мас тіла скінчених розмірів.

Якщо незмінна система рухається поступально, то теорема про рух центру мас дає можливість повністю визначити закон її руху. Таким чином, можна вважати, що в динаміці точки була розглянута задача про визначення закону руху незмінної системи, що рухається поступально.

Частковими випадками розглянутої теореми є закони збереження

руху центру мас системи матеріальних точок:

1. *Якщо головний вектор зовнішніх сил протягом всього часу руху системи рівний нулю, то центр мас цієї системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно й прямолінійно.*
2. *Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на деяку нерухому вісь впродовж всього часу руху рівна нулю, то проекція центру мас механічної системи на цю ж вісь або нерухома, або рухається рівномірно.*

Література

[6] – §§ 101–122

[7] – Ч. 1, Гл. 3, §§ 9, 10, Гл. 4, §§ 13, 14

[10] – Р. 3, Гл. 4, §§ 3, 4

[11] – §§ 9-20, 22–29

[20] – Ч. 2, Гл. VI, §§ 1–2

Лекція 8

Механічна робота. Кінетична і потенціальна енергія

8.1. Елементарна робота та робота на скінченному переміщенні

Однією з основних характеристик, що оцінює дію сили на тіло при його переміщенні, є робота. *Робота A постійної за величиною і напрямом сили \vec{F} на прямолінійному переміщенні $\Delta\vec{r}$ рівна скалярному добутку векторів сили та переміщення:*

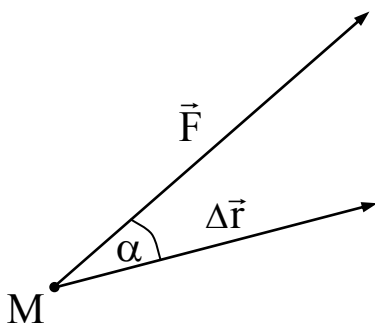


Рис. 8.1

Робота A постійної за величиною і напрямом сили \vec{F} на прямолінійному переміщенні $\Delta\vec{r}$ рівна скалярному добутку векторів сили та переміщення:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha, \quad (8.1)$$

де α – кут між векторами сили та переміщення (рис. 8.1). Таким чином, у визначенні роботи враховується залежність ефекту дії сили від її напрямку по відношенню до переміщення.

Відмітимо часткові випадки, які можна отримати з виразу (8.1):

$$\alpha = 0^\circ, \quad A = F \cdot \Delta r;$$

$$\alpha = 90^\circ, \quad A = 0;$$

$$\alpha = 180^\circ, \quad A = -F \cdot \Delta r.$$

Отже, якщо сила перпендикулярна переміщенню, то її робота рівна нулю. Зокрема, робота нормальної складової сили \vec{F}_n завжди рівна нулю.

Із визначення роботи випливають наступні її властивості.

1. Робота сталої за величиною і напрямом сили \vec{F} , яка має проєкції F_x, F_y, F_z на осі прямокутної системи координат, на переміщенні $d\vec{r}$ з проєкціями $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ на ті ж осі рівна

$$A = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y + F_z \cdot \Delta z.$$

2. Робота рівнодійної кількох сил, прикладених до точки, рівна сумі робіт складових сил на спільному для них переміщенні точки прикладання сил.

Дійсно, якщо до точки на переміщенні $\Delta\vec{r}$ прикладені сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ з рівнодійною \vec{F} , то робота цієї сили рівна

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r};$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

3. Робота сили на сукупності послідовних переміщень рівна роботі сили на результуючому переміщенні.

Справді, якщо точка, до якої прикладена сила \vec{F} , здійснює послідовні переміщення $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \dots, \Delta\vec{r}_n$, то

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \vec{F} \cdot (\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \dots + \Delta\vec{r}_n) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = A,$$

де $\Delta\vec{r} = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r}_i$ – результуюче переміщення.

Визначення роботи, приведені для постійної сили і прямолінійного шляху, можна узагальнити на випадок сили, змінної за величиною і напрямом, і криволінійної траєкторії.

Нехай траєкторією матеріальної точки є крива АВ (рис. 8.2). Розіб'ємо ділянку кривої між точками А та В на нескінченно малі елементи, які можна вважати за прямолінійні. Нехай $d\vec{r}$ – вектор нескінченно малого переміщення, а \vec{F} – сила для даного положення М точки на кривій. Радіус-вектор \vec{r}

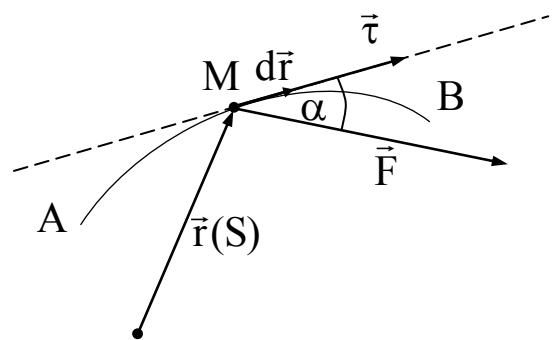


Рис. 8.2

Радіус-вектор \vec{r}

точки M є функцією дугової координати S , тому елементарне переміщення на нескінченно малій дузі dS визначиться нескінченно малим вектором

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot dS = \vec{\tau} \cdot dS,$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої в точці M . Робота сили \vec{F} на цьому елементарному переміщенні, або *елементарна робота* δA , визначиться як

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot dS = F \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (8.2)$$

або

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (8.3)$$

Для визначення роботи на скінченному шляху AB потрібно знайти суму елементарних робіт на окремих нескінченно малих відрізках, тобто

$$A_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F \cos \alpha dS. \quad (8.4)$$

або

$$A_{AB} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt, \quad (8.5)$$

де t_1, t_2 – моменти часу, що відповідають положення A і B точки на траєкторії.

Інтеграл виду (8.4) називається *криволінійним інтегралом*, взятим вздовж дуги кривої від точки A до точки B . Він визначає *циркуляцію* вектора сили по дузі AB . Таким чином, **робота сили на криволінійному шляху рівна циркуляції сили на цьому шляху**. Замінивши дугу AB замкнутим контуром L , у якому точки A і B співпадають, отримаємо роботу сили \vec{F} на замкнутому контурі L . Вона визначається *циркуляцією вектора сили по замкнутому контурі L* :

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{r}. \quad (8.6)$$

Для обчислення роботи сили в загальному випадку необхідно знати кінематичні рівняння руху точки. Тоді криволінійний інтеграл (8.4) може бути зведений до визначеного інтегралу. Дійсно, якщо рух точки задано рівняннями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

і відомий закон зміни сили як функції часу, координат і швидкості:

$$F_x = F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$F_y = F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$F_z = F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

то елементарна робота після підстановки координат та їх похідних запишеться:

$$\begin{aligned} \delta A = & F_x [t; f_1(t), f_2(t), f_3(t); f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)] \cdot f'_1(t) dt + \\ & + F_y [t; f_1(t), f_2(t), f_3(t); f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)] \cdot f'_2(t) dt + \\ & + F_z [t; f_1(t), f_2(t), f_3(t); f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)] \cdot f'_3(t) dt, \end{aligned}$$

або

$$\delta A = \Phi(t) dt,$$

де $\Phi(t)$ – відома функція часу. Визначивши з рівнянь руху моменти часу t_1, t_2 , які відповідають положенням точки А і В, знаходимо роботу на шляху АВ як

$$A_{AB} = \int_A^B \delta A = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt.$$

Потрібно відмітити, що в загальному випадку лінійна функція диференціалів координат у виразі (8.3) не є повним диференціалом деякої функції координат і символ "δ" слід розуміти лише як символ нескінченно малої величини.

Для характеристики роботи з точки зору часу її виконання вводиться поняття потужності. **Потужністю називається відношення виконаної роботи до часу, протягом якого вона виконувалась.** Іншими словами, *потужність – це робота, віднесена до одиниці часу:*

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (8.7)$$

На основі співвідношення (8.2) можна записати:

$$N = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z, \quad (8.8)$$

тобто *потужність рівна скалярному добутку векторів сили та швидкості.*

У випадку руху системи точок роботу й потужність визначають як суму робіт або потужностей сил, прикладених до кожної з точок системи:

$$\begin{aligned} A = & \sum_{i=1}^n \int_A^B (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i); \\ N = & \sum_{i=1}^n (F_{ix} v_{ix} + F_{iy} v_{iy} + F_{iz} v_{iz}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

8.2. Кінетична енергія точки та механічної системи. Теорема Кеніга

З метою переходу від сили, що діє на матеріальну точку, до роботи цієї сили, в основному рівнянні динаміки помножимо скалярно обидві його частини на вектор нескінченно малого переміщення:

$$m\dot{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

звідки після тотожного перетворення $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ отримаємо

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \delta A. \quad (8.10)$$

Величина, яка стоїть під диференціалом у лівій частині рівності (8.10), називається *кінетичною енергією точки*:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (8.11)$$

Кінетичною енергією механічної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, що входять до системи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (8.12)$$

Згідно визначення, кінетична енергія є завжди невід'ємною величиною, не залежить від напряму швидкостей точок і рівна нулю лише за умови, що швидкості усіх точок системи рівні нулю.

При обчисленні кінетичної енергії часто використовують *теорему Кеніга: кінетична енергія системи матеріальних точок в абсолютному русі рівна сумі кінетичної енергії поступального (переносного) руху її центру мас і кінетичної енергії системи відносно центру мас.*

Доведення.

Розкладемо швидкість i -тої точки системи на переносну швидкість, рівну швидкості \vec{v}_C поступального руху системи разом з центром мас, і відносну швидкість \vec{v}_{ir} :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ir}. \quad (8.13)$$

Підставляючи рівність (8.13) у формулу (8.12), отримуємо

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{ir})(\vec{v}_C + \vec{v}_{ir});$$

$$T = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^n m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ir}^2 + \vec{v}_C \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{ir}.$$

Останній доданок у правій частині отриманого виразу рівний нулю. Дійсно,

$$\vec{v}_C \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{ir} = \vec{v}_C \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right).$$

За визначенням радіус-вектора центру мас

$$\vec{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i / M.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{r}_C \cdot M.$$

Якщо початок системи координат, що рухається поступально, взято в центрі мас системи, то $\vec{r}_C \cdot M = \text{const}$. Це означає, що

$$\vec{v}_C \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = 0.$$

Таким чином, кінетична енергія системи буде рівною

$$T = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^n m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ir}^2,$$

або

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + T_r, \quad (8.14)$$

де $T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ir}^2$ – кінетична енергія системи при її русі відносно центру мас.

З цієї теореми, зокрема, слідує, що кінетична енергія незмінної системи, яка рухається поступально, визначається формулою

$$T = \frac{M v_C^2}{2}. \quad (8.15)$$

8.3. Теорема про зміну кінетичної енергії

Повернемось до співвідношення (8.10), переписавши його у вигляді

$$dT = \delta A. \quad (8.16)$$

Формула (8.16) виражає *теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі: приріст кінетичної енергії матеріальної точки на елементарному переміщенні рівний елементарній роботі сил,*

прикладених до точки на цьому переміщенні.

Знайдемо похідну від кінетичної енергії точки по часу:

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = m\vec{v}\dot{\vec{v}}; \quad \dot{T} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Відмічаючи, що, згідно (8.8) $\vec{F} \cdot \vec{v} = N$, приходимо до іншого формулю-

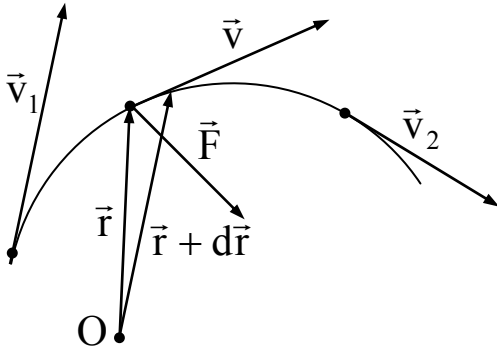


Рис. 8.3

вання теореми, яке часто використовується в ряді прикладних задач: **похідна по часу від кінетичної енергії матеріальної точки рівна потужності прикладених до точки сил:**

$$\dot{T} = N. \quad (8.17)$$

Інтегруючи рівняння (8.10) в межах від початкового (А) до кінцевого (В) положень точки, і позначаючи через v_1 та v_2

швидкості точки в цих положеннях (рис. 8.3), отримуємо

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(A)}^{(B)} \delta A = A_{AB},$$

або

$$T_2 - T_1 = A_{AB}. \quad (8.18)$$

Рівняння (8.18) виражає **теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі: приріст кінетичної енергії матеріальної точки на скінченному переміщенні рівний сумі робіт сил, що діяли на точку на цьому переміщенні.**

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки легко узагальнюється на випадок механічної системи.

Нехай маємо механічну систему, що складається з n матеріальних точок масами m_i . Для кожної i -тої точки рівняння (8.10) запишеться як

$$d \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) = \delta A_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сумуючи ці рівняння по всіх точках системи, приходимо до виразу

$$dT = d \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^n \delta A_i, \quad (8.19)$$

де T – кінетична енергія системи, $\sum_{i=1}^n \delta A_i$ – сума елементарних робіт сил,

які діяли на кожну точку системи на розглянутому елементарному переміщенні. Враховуючи, що в загальному випадку на точки системи діють як внутрішні, так і зовнішні сили, величина $\sum_{i=1}^n \delta A_i$ може бути представ-

лена сумою елементарної роботи зовнішніх сил $\delta A^{(e)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i$ і елементарної роботи внутрішніх сил $\delta A^{(i)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(i)} d\vec{r}_i$.¹¹

Таким чином, отримали теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі: ***приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок на елементарному переміщенні рівний сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діяли на систему на цьому переміщенні.***

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}. \quad (8.20)$$

Інтегруючи останню рівність між початковим і кінцевим положеннями системи, в яких її кінетичні енергії рівні, відповідно, T_1 і T_2 , отримаємо вираз

$$T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta A^{(e)} + \int_{(1)}^{(2)} \delta A^{(i)} = A_{1,2}^{(e)} + A_{1,2}^{(i)}, \quad (8.21)$$

що виражає теорему в інтегральній формі: ***зміна кінетичної енергії системи на скінченному переміщенні рівна сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діяли на точки системи на тому ж переміщенні.***

На завершення даного питання зупинимось на тих особливостях, які відрізняють теорему про зміну кінетичної енергії системи від розглянутих вище основних теорем динаміки.

Теореми про рух центру мас, зміну імпульсу системи та зміну її кінетичного моменту дозволяють виключити з розв'язку задач механіки внутрішні сили. Так іноді вдається спростити математичний розв'язок задачі, але одночасно з цим втрачається можливість глибше проникнути у внутрішні фізичні зв'язки між складовими частинами системи і, відповідно, зникає можливість отримати повні уявлення про те фізичне явище, яке лежить в основі задачі механіки. Цей недолік відсутній в теоремі про зміну кінетичної енергії.

¹¹ В загальному сума робіт внутрішніх сил може відрізнитися від нуля. Рівність її нулю на довільних переміщеннях завжди виконується лише у випадку незмінної системи матеріальних точок.

8.4. Потенціальне силове поле. Умова потенціальності стаціонарного силового поля

Як уже відмічалось, для визначення роботи сили на довільному переміщенні в загальному випадку необхідно знати закон руху точки на цьому переміщенні. Однак існує клас сил, величина і напрям яких залежить тільки від положення точки простору, в якій знаходиться рухома точка, або від взаємного положення взаємодіючих точок. Очевидно, що робота цих сил, які називаються *потенціальними*, не залежить від характеру руху точки на заданому переміщенні.

Якщо точка чи механічна система рухається у просторі під дією потенціальних сил, то кажуть, що цей рух здійснюється у *силовому полі*.

Силове поле називається стаціонарним, якщо діючі сили не залежать від часу. В протилежному випадку силове поле є *нестаціонарним*.

Стаціонарне силове поле називається потенціальним, якщо робота сил поля, прикладених до точки (системи точок), не залежить від способу переходу точки (системи) з початкового положення в кінцеве, а визначається тільки координатами цих положень.

Необхідною і достатньою умовою того, що стаціонарне силове поле є потенціальним, є існування однозначної функції координат $U(x, y, z)$ (силової функції), частинні похідні якої по x, y, z рівні проєкціям діючої сили \vec{F} на осі координат, тобто

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8.22)$$

Дана система рівностей еквівалентна одній векторній формулі

$$\vec{F} = \text{grad } U, \quad (8.23)$$

де $\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}$.

Елементарна робота сил потенціального силового поля, таким чином, визначається диференціалом силової функції:

$$\delta A = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (8.24)$$

Повна робота сили \vec{F} при переміщенні точки з положення (1) в положення (2) дорівнює

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = \int_{(1)}^{(2)} dU = U_2 - U_1. \quad (8.25)$$

Як слідує з останнього виразу, наслідком припущення про однозначність силової функції є рівність нулю роботи при співпаданні початкової і кінцевої точок шляху інтегрування. **Робота в потенціальному силовому полі по будь-якій замкнутій траєкторії рівна нулю.** Цю ознаку можна прийняти за визначення потенціального силового поля.

Умова потенціальності (8.23) іноді виявляється незручною для практичного застосування, оскільки потребує знання силової функції, яку часто необхідно знаходити. Тому вона замінюється наступною еквівалентною умовою

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0, \quad (8.26)$$

яка слідує з відомої тотожності

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

де φ – деяка скалярна функція. Таким чином, **для того, щоб силове поле було потенціальним, необхідно й достатньо, щоб воно було безвихровим.**

У проекціях на координатні осі рівність (8.26) записується як

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (8.27)$$

Якщо покласти

$$U(x, y, z) = \operatorname{const} = C, \quad (8.28)$$

то отримаємо рівняння сімейства поверхонь, на кожній з яких силова функція зберігає фіксоване значення C . Такі поверхні називаються *еквіпотенціальними*, або *поверхнями рівня*.

Як слідує з рівності (8.24), силова функція в довільній точці поля виражається за допомогою невизначеного інтегралу

$$U = \int \vec{F} d\vec{r} + C$$

і завжди обчислюється з точністю до деякої адитивної сталої. Таким чином, будь-яку еквіпотенціальну поверхню сімейства (8.28) можна вважати *нульовою*. Якщо, наприклад, покласти, що початкове положення точки відповідає еквіпотенціальній поверхні нульового рівня, то робота по переміщенню точки з деякого її положення M у початкове M_0 (рис. 8.4), визначиться як

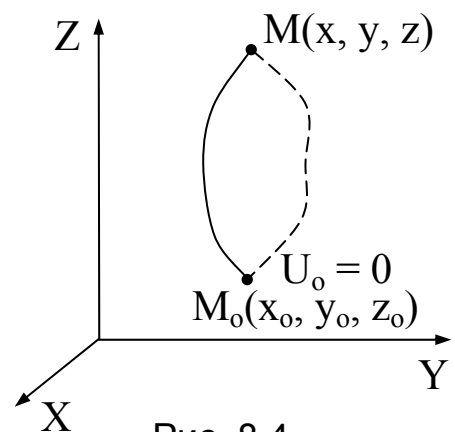


Рис. 8.4

$$A_{MM_0} = U_0 - U = -U.$$

Роботу, яку виконують сили поля, що діють на матеріальну точку при її переміщенні з точки M у початкове положення M_0 , називають потенціальною енергією Π матеріальної точки в розглянутій точці силового поля.

Таким чином,

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z). \quad (8.29)$$

Відповідно, сили поля можна визначити також за допомогою потенціальної енергії:

$$\vec{F} = -\text{grad} \Pi. \quad (8.30)$$

Вектор градієнта скалярної функції напрямлений перпендикулярно до її поверхні рівня, а величина цього вектора дорівнює похідній скалярної функції по додатному напрямі нормалі. Тому, приймаючи до уваги рівність (8.30), можемо зробити висновок, що *в потенціальному силовому полі сила напрямлена по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік спадання потенціальної енергії і за величиною рівна абсолютному значенню похідної потенціальної енергії по нормалі до поверхні рівня.*

Для механічної системи в потенціальному силовому полі потенціальну енергію (як і силову функцію) визначають як функцію координат точок системи $\Pi(x_1, \dots, z_n)$, частинні похідні якої по координатах точок, взяті з від'ємним знаком, рівні відповідним проекціям сил, що діють на ці точки:

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \quad (8.31)$$

При цьому вираз для елементарної роботи буде мати вигляд

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i) = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi. \quad (8.32)$$

Інтегруючи цей вираз при переміщенні точок системи із деякого положення (1) в положення (2), отримуємо

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (8.33)$$

Тобто, робота потенціальних сил при переході системи з одного положення в інше визначається зменшенням потенціальної енергії від значення в початковому положенні системи до значення в кінцевому її положенні.

8.5. Закон збереження повної механічної енергії

Повною механічною енергією називають суму кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = T + \Pi. \quad (8.34)$$

Якщо всі сили, під дією яких здійснюється рух матеріальної точки або механічної системи, є потенціальними, то теорема про зміну кінетичної енергії з урахуванням рівності (8.33) може бути записана у вигляді

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (8.35)$$

Рівність (8.35) показує, що *приріст кінетичної енергії на деякій ділянці шляху точки (системи) в потенціальному силовому полі рівний зменшенню потенціальної енергії на цій же ділянці.*

Переписавши (8.35) у вигляді

$$T_1 + \Pi_2 = T_2 + \Pi_1,$$

бачимо, що *повна механічна енергія точки (системи) при її русі в стаціонарному потенціальному силовому полі є сталою величиною:*

$$E = \text{const}. \quad (8.36)$$

Дане твердження називають *законом збереження повної механічної енергії*. Механічні системи, для яких виконується закон збереження механічної енергії, називаються *консервативними*.

Значення сталої в рівності (8.36) визначається заданням координат і швидкостей у деякому проміжному стані, зокрема на початку руху.

З математичної точки зору закон збереження енергії дає один з інтегралів руху, оскільки рівняння (8.36) містить лише координати точок та їх швидкості.

При русі точки або системи в непотенціальному силовому полі, що більш реально відображає оточуючу нас дійсність, механічна енергія змінюється. З одного боку, частина енергії руху йде на подолання сил опору, з другого – для підтримання руху або для його прискорення необхідно створити приток енергії на подолання опорів, частково на збільшення кінетичної енергії системи. Таким чином, завжди спостерігається накладання один на одного декількох складних процесів. У більшості випадків доводиться мати справу з перетворенням механічної енергії в інші види. Тому в найбільш загальній формі рівняння, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії, може бути записане у вигляді

$$dT = -d\Pi + \delta A' - \delta A'',$$

де dT – приріст кінетичної енергії системи, $-d\Pi = \delta A$ – елементарна

робота консервативних сил, $\delta A'$ – елементарна робота непотенціальних сил, виконана за рахунок привнесеної до системи енергії, $-\delta A''$ – втрата енергії на подолання опорів. При переході до інтегральної форми запису, тобто на скінченному переміщенні, отримаємо:

$$E_2 - E_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta A' - \int_{(1)}^{(2)} \delta A'' = E' - E''.$$

Це означає, що *приріст механічної енергії на деякому переміщенні рівний різниці привнесеної та розсіяної енергії.*

8.6. Механічна подібність. Теорема віріала

Розглянемо рух у полі консервативних сил системи точок, потенціальна енергія якої є однорідною функцією координат, тобто функцією, що задовольняє умові

$$\Pi(\alpha \vec{r}_1, \alpha \vec{r}_2, \dots, \alpha \vec{r}_n) = \alpha^\nu \Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n),$$

де α – деяка стала, а число ν – ступінь однорідності функції. Запишемо рівняння руху

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.37)$$

і проведемо в них перетворення, при якому поряд зі зміною всіх радіус-векторів в α разів одночасно змінюється в β разів час:

$$\vec{r}_i \rightarrow \alpha \vec{r}_i, \quad t \rightarrow \beta t. \quad (8.38)$$

Рівняння руху в результаті цього перетворення, очевидно, набувають вигляду

$$\frac{\alpha}{\beta^2} m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \alpha^{\nu-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i}. \quad (8.39)$$

Нехай стала β пов'язана з α співвідношенням

$$\beta = \alpha^{1-\nu/2}. \quad (8.40)$$

Тоді рівняння руху залишаться незмінними. Але радіус-вектори всіх частинок ми змінили в α разів, тобто зробили перехід до геометрично подібних траєкторій, які відрізняються від початкових лише своїми лінійними розмірами. При цьому відношення всіх часів руху (між відповідними точками траєкторій) рівне

$$t'/t = (l'/l)^{1-\nu/2}. \quad (8.41)$$

Тут l'/l – відношення лінійних розмірів двох траєкторій.

Розглянутий перехід можливий тільки в тому випадку, коли потенціальна енергія системи є однорідною функцією степені ν від декартових координат. Співвідношення типу (8.41) для часу можна отримати також і для будь-яких механічних величин у відповідних точках траєкторій для відповідних моментів часу. Так, для імпульсів отримаємо

$$\frac{q'}{q} = \frac{l'/l}{t'/t} = \frac{l'}{l} \cdot \left(\frac{l'}{l}\right)^{\nu/2-1} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\nu/2}.$$

Доведемо тепер теорему віріала для системи матеріальних точок. Звернемо увагу на те, що ця теорема має статистичний характер.

Розглянемо величину $G = \sum_{i=1}^n (\vec{q}_i \cdot \vec{r}_i)$ і знайдемо її повну похідну по часу:

$$\dot{G} = \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{q}}_i \cdot \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{q}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i). \quad (8.42)$$

Перетворимо праву частину (8.42):

$$\sum_{i=1}^n (\vec{q}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = 2T, \quad \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{q}}_i \cdot \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i).$$

З урахуванням цих перетворень маємо

$$\dot{G} = 2T + \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i). \quad (8.43)$$

Усереднимо (8.43) по часу згідно формули

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau, \quad (8.44)$$

в результаті чого отримуємо

$$2\bar{T} + \overline{\sum_{i=1}^n (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i)} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Для періодичного руху справа стоїть нуль, оскільки τ можна вибрати рівним періоду. Аналогічно права сторона перетворюється в нуль, якщо координати і швидкість точок системи залишаються обмеженими (тобто не перетворюються в нескінченність). Тому в будь-якому випадку

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^n (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i)}. \quad (8.45)$$

Права частина цієї рівності називається *віріалом Клаузіуса*, а сама рівність виражає так звану *теорему віріала*.

Можна показати, що коли в сили \vec{F}_i будуть входити сили тертя, пропорційні першим степеням швидкостей точок, то віріал системи від них залежати не буде. При цьому, звичайно, слід припустити, що рух системи не припиняється внаслідок тертя, тобто в систему надходить енергія на підтримання руху (в протилежному випадку всі середні значення будуть прямувати при $\tau \rightarrow \infty$ до нуля і рівність (8.45) втратить зміст).

Розглянемо випадок, коли всі сили \vec{F}_i є потенціальними. Тоді замість (8.45) будемо мати

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \overline{\left(\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i} \right)}. \quad (8.46)$$

Якщо до того ж потенціальна енергія є однорідною функцією n -ї степені від усіх радіус-векторів \vec{r}_i , то згідно теореми Ейлера про однорідні функції отримаємо

$$\bar{T} = \frac{n}{2} \bar{\Pi}. \quad (8.47)$$

Теорема віріала. Кінетична енергія системи матеріальних точок, усереднена по нескінченному інтервалу часу, рівна усередненому по тому ж інтервалу часу віріалу сил.

Так як $\bar{T} + \bar{\Pi} = \bar{E} = E_0$, то співвідношення (8.47) можна представити у формах, корисних для розв'язання прикладних задач:

$$\bar{\Pi} = \frac{2}{n+2} E_0. \quad \bar{T} = \frac{n}{n+2} E_0.$$

З (8.47) слідує, що для гармонічного осцилятора ($n = 2$) $\bar{T} = \bar{\Pi}$, для ньютонівської взаємодії ($n = -1$) $\bar{T} = -\frac{\bar{\Pi}}{2}$ і $\bar{T} = -E_0$.

Теорема віріала використовується в класичній та статистичній механіці, атомній фізиці, її модифікація застосовується і в квантовій механіці.

Література

[6] – §§ 123–133

[7] – Ч. 1, Гл. 3, §§ 11, 12; Гл. 4, §§ 13, 14

[10] – Р. 3, Гл. 4, §§ 5–7

[11] – §§ 33–40

[20] – Ч. 2, Гл. VI, §§ 1–2

Лекція 9

Динаміка твердого тіла

9.1. Момент інерції. Теорема Штейнера

Як уже відмічалось, при розгляді динамічних процесів дуже важливу роль відіграють інертні властивості тіл. У випадку поступального руху інертні властивості повністю визначаються масою тіл. Для обертового руху найбільш суттєве значення має розподіл маси по об'єму тіла. Інертні властивості твердих тіл в обертальному русі визначаються *моментом інерції*.

Моментом інерції системи, яка складається з n матеріальних точок, відносно точки O , називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до точки O (рис. 9.1):

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (9.1)$$

У випадку суцільного тіла момент інерції відносно точки визначається як

$$I_O = \int_V h^2 dm = \int_V h^2 \rho dV, \quad (9.2)$$

де $\rho = dm/dV$ – об'ємна густина тіла, dm – елемент маси тіла, що відповідає об'єму dV .

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі l називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до осі (рис. 9.1):

$$I_l = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (9.3)$$

Як і в попередньому випадку, момент інерції суцільного тіла відносно осі знаходиться шляхом переходу до інтегралу:

$$I_l = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV. \quad (9.1)$$

Моменти інерції однакових за формою однорідних тіл, виготовлених з різних матеріалів, відрізняються один від одного. Характеристикою, яка не залежить від маси матеріалу, є *радіус інерції*. Радіус інерції R_l відносно осі l визначається за формулою

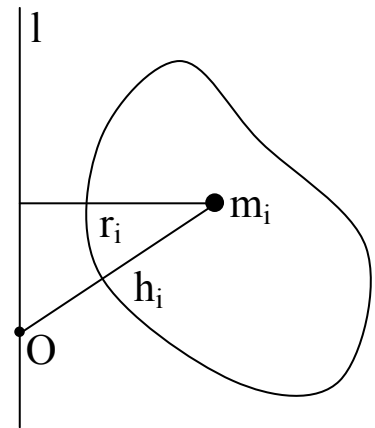


Рис. 9.1

$$R_1 = \sqrt{\frac{I_1}{m}}, \quad (9.4)$$

де m – маса тіла. Радіус інерції тіла є середнім значенням квадратів відстаней елементів маси до даної осі.

Моменти інерції тіла відносно осей декартових координат X, Y, Z та їх початку – точки O (рис. 9.2) визначаються рівностями

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_V (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm, \quad (9.5)$$

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (9.6)$$

З наведених рівностей слідує, що

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (9.7)$$

Якщо через точку O провести іншу систему координат $OX'Y'Z'$, то буде виконуватись рівність, аналогічна (9.7): $2I_O = I'_x + I'_y + I'_z$. Порівнюючи два останні вирази, бачимо, що

$$I'_x + I'_y + I'_z = I_x + I_y + I_z.$$

Отже, сума моментів інерції відносно декартових осей координат не залежить від орієнтації цих осей в даній точці, тобто є величиною, інваріантною до напрямку осей координат.

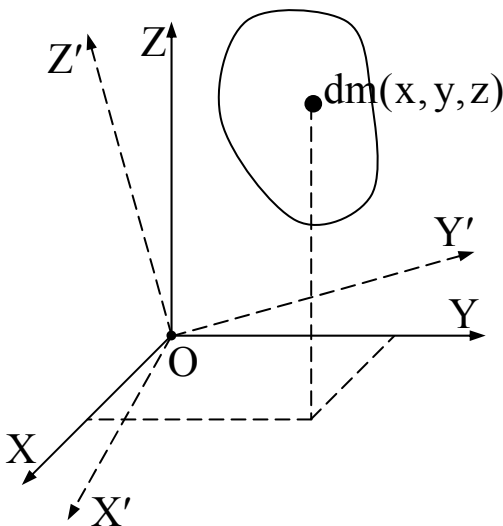


Рис. 9.2

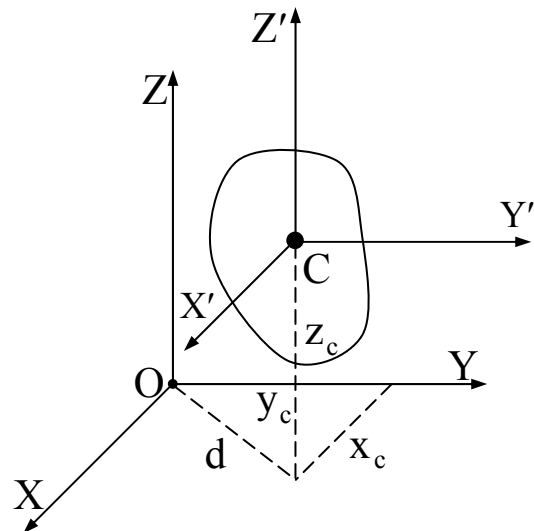


Рис. 9.3

Відмітимо також, що сума моментів інерції відносно будь-яких двох осей більша моменту інерції відносно третьої осі. Дійсно, на основі рівностей (9.5) маємо

$$I_x + I_y - I_z = \int_V 2z^2 dm \geq 0,$$

звідки

$$I_x + I_y \geq I_z.$$

Із сказаного вище слідує, що момент інерції тіла (системи) залежить від вибору осі, відносно якої він визначається. Залежність між моментами інерції відносно паралельних осей встановлюється *теоремою Штейнера: момент інерції системи відносно деякої осі рівний моменту інерції відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас, плюс добуток маси системи на квадрат відстані між осями.*

Доведення.

Введемо дві системи декартових координатних осей: $OXYZ$ і $CX'Y'Z'$, причому друга система має початок у центрі мас C тіла, а її осі паралельні відповідним осям першої системи (рис. 9.3). Координати центра мас в системі $OXYZ$ позначимо x_c, y_c, z_c (в системі $CX'Y'Z'$ вони рівні нулю). Тоді координати довільної точки M_i тіла в розглянутих системах будуть пов'язані співвідношеннями

$$x_i = x'_i + x_c, \quad y_i = y'_i + y_c, \quad z_i = z'_i + z_c.$$

Крім того, відстань між осями OZ та CZ' визначиться як $d = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$.

За визначенням моменту інерції маємо

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i [(x'_i + x_c)^2 + (y'_i + y_c)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + (x_c^2 + y_c^2) \sum_{i=1}^n m_i + 2x_c \sum_{i=1}^n m_i x'_i + 2y_c \sum_{i=1}^n m_i y'_i. \end{aligned}$$

У цьому виразі $\sum_{i=1}^n m_i = m$ – маса системи, $\sum_{i=1}^n m_i x'_i = mx'_c = 0$ і

$\sum_{i=1}^n m_i y'_i = my'_c = 0$, внаслідок того, що за умовою центр мас знаходиться в

початку координат системи $CX'Y'Z'$. Тому остаточно отримуємо рівність

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + m(x_c^2 + y_c^2),$$

або

$$I_z = I_{z'} + md^2. \quad (9.8)$$

Очевидним наслідком доведеної теореми є те, що момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас тіла, менший моменту інерції відносно будь-якої іншої паралельної осі.

Якщо виразити моменти інерції, які входять у формулу (9.8), через відповідні радіуси інерції, то отримаємо

$$I_z = mR_z^2, \quad I_{z'} = mR_{z'}^2.$$

Ця рівність показує, що радіус інерції відносно центральної осі менший, ніж радіус інерції відносно довільної осі, паралельної центральній.

9.2. Залежність моменту інерції від напрямку осі. Тензор інерції

Знайдемо залежність моменту інерції тіла відносно осі, що проходить через задану точку тіла, від напрямку осі. В заданій точці O помістимо

початок координат прямокутної декартової системи. Нехай вісь O_l утворює з осями координат кути α, β, γ (рис. 9.4). Не обмежуючи загальності, вважатимемо суцільне тіло системою n матеріальних точок M_i ($i = 1, \dots, n$). За визначенням момент інерції відносно осі O_l

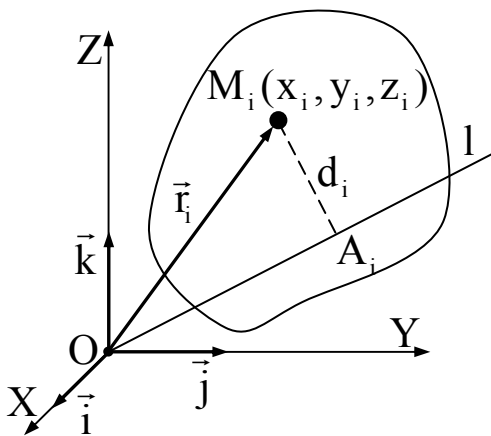


Рис. 9.4

$$I_l = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2. \quad (9.9)$$

Із прямокутного трикутника OA_iM_i для квадрату відстані від точки M_i до осі маємо вираз:

$$d_i^2 = r_i^2 - (OA_i)^2, \quad (9.10)$$

де $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Тут відрізок OA_i є проекцією радіус-вектора

$$\vec{r}_i = \vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i$$

точки M_i на вісь O_l . Для визначення OA_i помножимо скалярно \vec{r}_i на одиничний вектор осі O_l : $\vec{l}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} OA_i &= \vec{r}_i \cdot \vec{l}_0 = (\vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i)(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) = \\ &= x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma. \end{aligned}$$

З урахуванням отриманого виразу співвідношення (9.10) запишеться:

$$\begin{aligned} d_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (z_i^2 + x_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

При перетворенні останнього співвідношення використано тригонометричну тотожність, якій задовольняють напрямні косинуси:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

В результаті підстановки виразу для d_i^2 у формулу (9.9) отримуємо:

$$I_1 = \cos^2 \alpha \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) + \cos^2 \gamma \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{i=1}^n m_i z_i y_i .$$

Коефіцієнти при квадратах напрямних косинусів є моментами інерції тіла відносно координатних осей. Постійні величини

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad (9.11)$$

називаються *добутками інерції*, або *відцентровими моментами інерції*. Остаточний вираз залежності моменту інерції тіла від напрямку осі набуває вигляду

$$I_1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (9.12)$$

Як видно з формули (9.12), момент інерції є однорідною квадратичною функцією напрямних косинусів осі. Для визначення моменту інерції крім кутів α, β, γ необхідно знати всі шість величин $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$, які відіграють роль своєрідних складових моменту інерції в даній системі координат. Звідси слідує, що момент інерції належить до тензорних величин. *Тензор інерції тіла (механічної системи) є фізичною величиною, яка характеризує в цілому сукупність моментів інерції відносно осей, що належать до множини координатних трієдрів з вершинами у фіксованій точці – початку координат.*

Тензор інерції можна записати у вигляді матриці

$$(I) = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

де діагональні компоненти є моментами інерції відносно координатних осей, а недіагональні ($I_{ij} = I_{ji}$) – взяті з від'ємними знаками відцентрові моменти інерції. Підкреслимо, що компоненти матриці (9.13) залежать

від вибору в тілі координатних осей, однак їх сукупність в цілому є незалежною від такого вибору фізичною величиною – тензором інерції.

9.3. Еліпсоїд інерції. Головні осі інерції

Для характеристики розподілу моментів інерції тіла відносно різних осей, що проходять через задану точку, вводиться поняття *еліпсоїда інерції*.

Відкладемо вздовж осі $O1$ (рис. 9.5) відрізок ON довжиною

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_1}}. \quad (9.14)$$

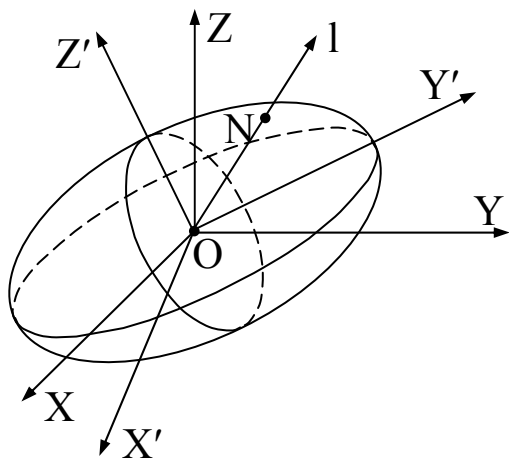


Рис. 9.5

Координати кінця цього відрізка в системі $OXYZ$ будуть рівними

$$x = ON \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_1}},$$

$$y = ON \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I_1}},$$

$$z = ON \cos \gamma = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I_1}},$$

звідки

$$\cos \alpha = x\sqrt{I_1}, \quad \cos \beta = y\sqrt{I_1}, \quad \cos \gamma = z\sqrt{I_1}.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (9.12) і скорочуючи спільний множник I_1 , отримуємо

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1. \quad (9.15)$$

Поверхня другого порядку, що описується цим рівнянням, дає геометричне місце кінців відрізка ON при всіх можливих напрямках осі $O1$. Радіус-вектор, проведений з початку координат до будь-якої точки поверхні (9.15), за величиною обернено пропорційний квадратному кореню з моменту інерції відносно осі, яка має напрям цього радіус-вектора.

Поверхня (9.15) не має нескінченно віддалених точок, оскільки відрізок ON є скінченним. Дійсно, цей відрізок, як видно з формули (9.14), міг би стати нескінченно великим лише за умови, що I_1 перетворюється в нуль. Однак, як видно з означення моменту інерції відносно осі, I_1 завжди є додатньою величиною, відмінною від нуля. Таким чином, поверхня, що визначається рівнянням (9.15), може бути тільки еліпсоїдом,

який називається *еліпсоїдом інерції*.

Рівняння еліпсоїда інерції можна звести до простішого (так званого канонічного) вигляду, якщо осі координат спрямувати по осях еліпсоїда. В новій системі координат $OX'Y'Z'$ замість (9.15) отримаємо

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1, \quad (9.16)$$

або

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

де $a = 1/\sqrt{I_{x'}}$, $b = 1/\sqrt{I_{y'}}$, $c = 1/\sqrt{I_{z'}}$ – півосі еліпсоїда. Таким чином, відцентрові моменти інерції у системі координат $OX'Y'Z'$ рівні нулю:

$$I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0.$$

Осі симетрії еліпсоїда інерції, побудованого для деякої точки, називаються головними осями інерції, а моменти інерції відносно головних осей – головними моментами інерції. Еліпсоїд інерції для центру мас тіла називають центральним еліпсоїдом інерції, його осі – головними центральними осями інерції, а моменти інерції відносно цих осей – головними центральними моментами інерції.

Розглянемо основні властивості головних осей інерції.

Теорема 1. *Якщо одна з декартових осей координат є головною віссю інерції для точки O , а дві інші осі – довільні, то два відцентрові моменти інерції, що містять індекс головної осі інерції, рівні нулю.*

Доведення.

Припустимо, що яка-небудь вісь, наприклад вісь OZ , є головною віссю інерції, а отже, і віссю симетрії еліпсоїда інерції. Останній факт означає, що кожній точці еліпсоїда, наприклад $M(0, y, z)$, відповідає симетрична відносно цієї осі точка $M_1(0, -y, z)$ (рис. 9.6). Підставляючи в рівняння (9.15) послідовно координати цих точок, отримаємо

$$I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz = 1,$$

$$I_y (-y)^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} (-y)z = 1.$$

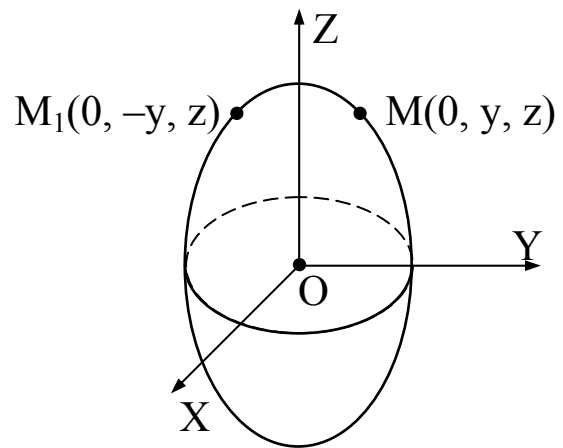


Рис. 9.6

Розв'язуючи спільно отримані рівняння, бачимо, що

$$I_{yz}yz = 0.$$

Оскільки завжди можна вибрати точки, для яких координати x та y відмінні від нуля, то

$$I_{yz} = 0.$$

Аналогічні міркування стосовно двох точок $N(x, 0, z)$ і $N_1(-x, 0, z)$, симетричних відносно осі OZ , приводять до висновку, що $I_{xz} = 0$.

Відмітимо, що справедливе й обернене твердження: *якщо відцентрові моменти інерції, що містять індекс деякої координатної осі, рівні нулю, то ця вісь є головною віссю інерції*. Таким чином, перетворення в нуль відцентрових моментів інерції є необхідною й достатньою умовою того, щоб відповідна їм вісь була головною віссю інерції.

Наступні теореми дозволяють в ряді випадків знаходити головні осі інерції.

Теорема 2. *Якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то ця вісь для кожної точки, що їй належить, є головною віссю інерції.*

Доведення.

Припустимо, що вісь OZ , є віссю симетрії однорідного тіла (рис. 9.7). Знайдемо відцентрові моменти інерції I_{xz} та I_{yz} і доведемо, що вони рівні нулю.

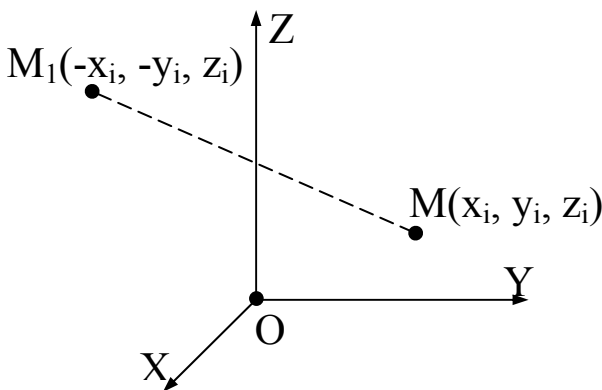


Рис. 9.7

Опустимо перпендикуляр на вісь OZ з точки $M(x_i, y_i, z_i)$, в якій зосереджена маса m_i , і продовжимо його далі на рівну йому відстань. Тоді знайдемо симетричну точці M відносно осі OZ точку $M_1(-x_i, -y_i, z_i)$, в якій знаходиться така ж маса m_i . Останнє впливає з умови однорідності тіла.

Тоді момент інерції

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = \sum_{(I)} m_i x_i z_i + \sum_{(II)} m_i (-x_i) z_i = 0,$$

оскільки суми по симетричних відносно осі частинах тіла (I) і (II) відрізняються одна від одної лише знаком координати x_i .

Аналогічно доводиться, що $I_{yz} = 0$.

Відмітимо, крім того, що центр мас тіла знаходиться на осі симетрії. Таким чином, в даному випадку вісь OZ є головною центральною віссю інерції.

Теорема 3. *Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то кожна пряма, перпендикулярна цій площині, є головною віссю інерції тіла для точки її перетину з площиною.* Теорема доводиться аналогічно попередній.

Зауваження. Теорема 2 і 3 залишаються в силі для неоднорідних тіл, якщо ці тіла мають матеріальну вісь або площину симетрії, тобто в цих тілах у симетричних точках знаходяться однакові елементи маси.

Теорема 4. *Головні осі інерції для точки O , розташованої на головній центральній осі інерції, паралельні головним центральним осям інерції.*

Доведення.

Виберемо в точці O головної центральної осі інерції CZ систему декартових осей координат $OX'Y'Z'$, взаємно паралельних головним центральним осям інерції $CXYZ$ (рис. 9.8). Тоді координати точки M_i тіла в двох системах будуть пов'язані між собою формулами паралельного перенесення:

$$x'_i = x_i, \quad y'_i = y_i, \quad z'_i = z_i - h,$$

де $h = OC$. Використовуючи ці формули, обчислюємо відцентрові моменти інерції $I_{y'z'}$,

$I_{z'x'}$, $I_{x'y'}$. Маємо

$$I_{y'z'} = \sum_{i=1}^n m_i y'_i z'_i = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - h \sum_{i=1}^n m_i y_i = I_{yz} - h m y_C,$$

де m – маса тіла, y_C – координата центру мас відносно системи $CXYZ$.

Аналогічно отримуємо

$$I_{z'x'} = I_{zx} - h m x_C; \quad I_{x'y'} = I_{xy}.$$

Якщо C – центр мас тіла, то $x_C = 0$ і $y_C = 0$. Для головних центральних осей інерції відцентрові моменти інерції рівні нулю, тобто

$$I_{yz} = 0, \quad I_{zx} = 0, \quad I_{xy} = 0.$$

Використовуючи отримані формули за цих умов, маємо:

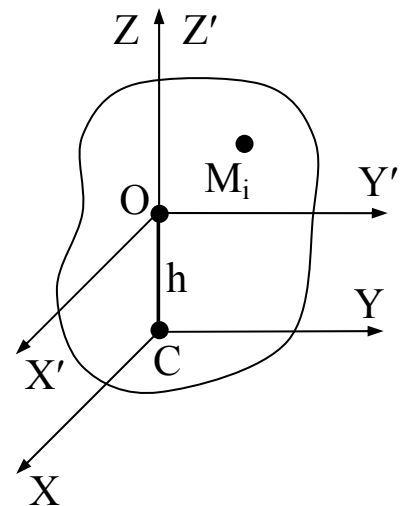


Рис. 9.8

$$I_{y'z'} = 0, \quad I_{z'x'} = 0, \quad I_{x'y'} = 0.$$

Таким чином, осі OX' , OY' , OZ' є головними осями інерції для довільної точки O , розташованої на головній центральній осі інерції.

9.4. Визначення головних моментів інерції та напрямку головних осей

Нехай відомі компоненти тензора інерції в точці O відносно осей координатної системи $OXYZ$. Для визначення напрямку головних осей інерції в точці O використаємо рівняння еліпсоїда інерції відносно цих осей у вигляді

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy - 1 = \Phi(x, y, z). \quad (9.17)$$

Якщо осі координат деякої іншої системи $OX'Y'Z'$ є головними осями інерції, то радіус-вектор \vec{r} точки M еліпсоїда інерції, розташованої на головній осі, наприклад осі OZ' (рис. 9.9), напрямлений по нормалі до еліпсоїда, тобто паралельно вектору $\text{grad} \Phi$, який, за його визначенням, обчислюється як

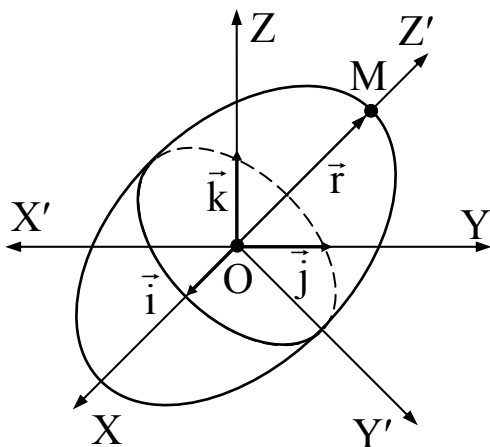


Рис. 9.9

$$\text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}.$$

Запишемо умову колінеарності вказаних векторів:

$$2I\vec{r} = \text{grad} \Phi, \quad (9.18)$$

або в скалярній формі

$$2I_x x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad 2I_y y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad 2I_z z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9.19)$$

У цих рівняннях x, y, z є координатами кінця вектора \vec{r} , проведеного з точки O вздовж якої-небудь головної осі інерції для цієї точки. З рівняння (9.17) отримуємо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2I_x x - 2I_{xy} y - 2I_{xz} z,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2I_{yx} x + 2I_y y - 2I_{yz} z,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2I_{zx} x - 2I_{yz} y + 2I_z z$$

Підставляючи знайдені значення частинних похідних в (9.19), отримуємо систему рівнянь для визначення координат точки М перетину головної осі з поверхнею еліпсоїда інерції:

$$\begin{cases} (I_x - I)x - I_{xy}y - I_{xz}z = 0, \\ -I_{yx}x + (I_y - I)y - I_{yz}z = 0, \\ -I_{zx}x - I_{zy}y + (I_z - I)z = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Ця система має нетривіальний (відмінний від нуля) розв'язок, якщо її визначник рівний нулю:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y - I & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z - I \end{vmatrix} = 0. \quad (9.21)$$

Кубічне рівняння (9.21) для визначення I називається *рівнянням власних значень тензора інерції*. В алгебрі доводиться, що дійсність і симетричність коефіцієнтів I_{xy} , I_{xz} і I_{yz} забезпечують дійсність усіх коренів цього рівняння.

Нехай рівняння (9.21) має три дійсні і різні корені I_1 , I_2 , I_3 . Підставляючи їх послідовно в систему лінійних рівнянь (9.20), ми отримаємо три системи рівнянь, з яких можна буде знайти три точки перетину головних осей з еліпсоїдом інерції. Розглянемо це питання детальніше.

Якщо підставити корінь рівняння (9.21) I_i в систему лінійних рівнянь (9.20), то по крайній мірі одне з них буде наслідком інших. Припустимо, що цим рівнянням є третє рівняння системи (9.20). Тоді розв'язок решти рівнянь можна записати в такій формі:

$$\frac{x}{\Delta_1(I_i)} = \frac{y}{\Delta_2(I_i)} = \frac{z}{\Delta_3(I_i)}, \quad (9.22)$$

де $\Delta_j(I_i)$ – алгебраїчні доповнення відповідних елементів останнього рядка визначника (9.21).

Співвідношення (9.22) є рівняннями прямої, що проходить через початок координат і точку $M(x, y, z)$, тобто рівняннями шуканої головної осі. Якщо два рівняння системи (9.20) є наслідками третього, то кожне з них можна розглядати як рівняння площини, в якій лежать прямі, кожна з яких є головною віссю інерції. З таким випадком ми зустрічаємось тоді, коли еліпсоїд інерції є еліпсоїдом обертання.

Доведемо тепер, що двом різним кореням рівняння (9.21) відпові-

дають два взаємно ортогональні напрями головних осей. Скористаємось співвідношеннями (9.20).

Позначимо координати точки головної осі, яка відповідає кореню I_i рівняння (9.21), через x_i, y_i, z_i . Похідні функції Φ , що відповідають кореню I_i , позначимо відповідними індексами. Тепер складемо два рівняння

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_i x_j + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_i y_j + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_i z_j = 2I_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j),$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_j x_i + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_j y_i + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_j z_i = 2I_j(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j).$$

Ліві частини цих рівностей тотожні, що легко перевірити безпосередньо. Тому

$$(I_i - I_j)(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = 0.$$

Якщо $I_i \neq I_j$, то другий множник останнього виразу рівний нулю. Однак цей множник є скалярним добутком радіус-векторів точок перетину двох головних осей з еліпсоїдом інерції. Таким чином, напрями цих головних осей ортогональні.

9.5. Момент імпульсу твердого тіла.

Динамічне рівняння обертання твердого тіла

Рух твердого тіла завжди можна розкласти на поступальний і обертальний. При цьому обертання доцільно розглядати в системі, центр якої співпадає з центром мас, а осі залишаються паралельними самим собі, тобто система рухається поступально. В загальному випадку просторова система сил, прикладених до твердого тіла, зводиться не до однієї рівнодійної, а до рівнодійної сили, рівної головному вектору системи \vec{F} , і до рівнодійної пари, рівної головному моменту системи \vec{M} . Для визначення характеру руху твердого тіла і для його розкладу на обертальний і поступальний слід вибрати за точку прикладання рівнодійної сили центр мас тіла. Можливі наступні часткові випадки:

1) $\vec{F} \neq 0$, $\vec{M} = 0$; тіло рухається поступально, якщо в початковий момент часу воно не мало обертання навколо осі, яка проходить через центр мас. (Якщо тіло володіло в початковий момент часу кутовою швидкістю, то вона зберігається).

2) $\vec{F} = 0$, $\vec{M} \neq 0$; тіло обертається з кутовим прискоренням навколо миттєвої осі, яка проходить через центр мас, а центр мас залишається в стані спокою або рухається з постійною швидкістю.

3) $\vec{F} \neq 0$, $\vec{M} \neq 0$; центр мас рухається прискорено і тіло обертається з кутовим прискоренням навколо центру мас.

Таким чином, при вказаному виборі системи залишається вивчити обертання тіла в ній. Для розв'язання цієї задачі скористаємось поняттям моменту імпульсу твердого тіла:

$$\vec{K} = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{v}] dm.$$

Нехай точкою прикладання моменту є довільна точка тіла O . За теоремою додавання швидкостей швидкість руху будь-якої точки тіла рівна: $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}']$, де \vec{v}_0 – швидкість полюса O , $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла, \vec{r}' – радіус-вектор точки, що розглядається. Підставляючи цю швидкість у вираз кінетичного моменту тіла відносно полюса O , отримаємо

$$\vec{K} = \int_{(V)} [\vec{r}', \vec{v}_0] dm + \int_{(V)} [\vec{r}', [\vec{\omega}, \vec{r}']] dm,$$

або (після розкриття подвійного векторного добутку і введення радіус-вектора центру мас тіла)

$$\vec{K} = m[\vec{r}'_C, \vec{v}_0] + \vec{\omega} \int_{(V)} r'^2 dm - \int_{(V)} \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') dm.$$

Очевидно, що перша складова пов'язана з поступальним рухом тіла, а решта – з обертальним.

Останній вираз для кінетичного моменту спрощується, якщо перша складова перетворюється в нуль. Це можливо в двох випадках: коли полюсом O служить нерухома точка тіла ($\vec{v}_0 = 0$) і коли полюс O співпадає з центром мас тіла ($\vec{r}'_C = 0$). Звідси слідує важлива вказівка про вибір початку координат рухомої системи: якщо у твердого тіла є нерухома точка, то початок координат потрібно сумістити з нею, в протилежному випадку початок координат слід помістити в центр мас тіла. Припустимо, що вибір точки прикладання моменту зроблено саме так. Спроектуємо \vec{K} на осі рухомої системи. Маємо:

$$\begin{aligned} K_{x'} &= \omega_{x'} \int_{(V)} (r')^2 dm - \int_{(V)} x'(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') dm = \\ &= \omega_{x'} \int_{(V)} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) dm - \int_{(V)} x'(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') dm. \end{aligned}$$

Після зведення подібних доданків отримуємо

$$K_{x'} = \omega_{x'} \int_V ((y')^2 + (z')^2) dm - \omega_{y'} \int_V x'y' dm - \omega_{z'} \int_V x'z' dm.$$

Аналогічно знаходяться і проекції $K_{y'}$ та $K_{z'}$. З урахуванням виразів (9.5) і (9.11) остаточний результат проектування запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{x'} &= I_{x'}\omega_{x'} - I_{x'y'}\omega_{y'} - I_{x'z'}\omega_{z'}, \\ K_{y'} &= -I_{y'x'}\omega_{x'} + I_{y'}\omega_{y'} - I_{y'z'}\omega_{z'}, \\ K_{z'} &= -I_{z'x'}\omega_{x'} - I_{z'y'}\omega_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Якщо застосувати тензор інерції (9.13) і врахувати правило множення тензора на вектор-стовпчик $\vec{\omega}$, то (9.23) можна виразити формулою

$$\vec{K} = I\vec{\omega}. \quad (9.24)$$

Подальше спрощення виразів для проекцій моменту імпульсу на рухомі осі, зв'язані з твердим тілом, досягається шляхом суміщення рухомих осей з головними осями інерції тіла. В цьому випадку добутки інерції перетворяться в нулі і ми отримаємо найпростіші вирази для проекцій кінетичного моменту:

$$K_{x'} = I_{x'}\omega_{x'}, \quad K_{y'} = I_{y'}\omega_{y'}, \quad K_{z'} = I_{z'}\omega_{z'}. \quad (9.25)$$

Відмітимо, що в загальному випадку вектор кінетичного моменту не напрямлений по миттєвій осі обертання. Співпадання має місце лише для випадку, коли віссю обертання служить головна вісь інерції. З формул (9.24) при $\omega_{x'} = \omega$, $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$, наприклад, слідує: $K_{x'} = I_{x'}\omega$, $K_{y'} = K_{z'} = 0$, тому справедлива векторна рівність $\vec{K} = I_{x'}\vec{\omega}$, яка не виконується в загальному випадку.

Для знаходження динамічного рівняння обертання твердого тіла використаємо теорему про зміну моменту імпульсу:

$$\dot{\vec{K}} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}). \quad (9.26)$$

Якщо виразити останнє рівняння в проекціях на рухомі осі координат, скріплені з тілом, що обертається, то моменти інерції, які ввійдуть в отримані співвідношення, не залежатимуть від часу.

На основі формули Бура абсолютну похідну кінетичного моменту запишемо як

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d'\vec{K}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}], \quad (9.27)$$

так як рухома система координат має таку ж кутову швидкість, що й тіло, з яким скріплені ці осі.

Другий доданок у формулі (9.27) представимо у вигляді

$$[\vec{\omega}, \vec{K}] = \vec{i}'(\omega_{y'}K_{z'} - \omega_{z'}K_{y'}) + \vec{j}'(\omega_{z'}K_{x'} - \omega_{x'}K_{z'}) + \vec{k}'(\omega_{x'}K_{y'} - \omega_{y'}K_{x'}). \quad (9.28)$$

Спільне використання співвідношень (9.26)–(9.28) у проекціях на рухомі осі координат приводить до наступних виразів:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{x'} + \omega_{y'}K_{z'} - \omega_{z'}K_{y'} &= M_{x'}^{(e)}, \\ \dot{K}_{y'} + \omega_{z'}K_{x'} - \omega_{x'}K_{z'} &= M_{y'}^{(e)}, \\ \dot{K}_{z'} + \omega_{x'}K_{y'} - \omega_{y'}K_{x'} &= M_{z'}^{(e)}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Ці співвідношення після підстановки в них значень проекцій моменту імпульсу з (9.23) приведуть до *узагальнених динамічних рівнянь Ейлера*.

Якщо вибрати рухомими осями координат головні осі інерції тіла, то в цьому випадку $K_{x'}$, $K_{y'}$, $K_{z'}$ будуть визначатись формулами (9.25), і тоді *динамічні рівняння Ейлера* набудуть вигляду

$$\begin{aligned} I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'}^{(e)}, \\ I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} &= M_{y'}^{(e)}, \\ I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}^{(e)}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

де $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ – головні центральні моменти інерції тіла. До розв'язку цих рівнянь і зводиться задача про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.

Література

- [1] – Гл. VI, §§ 31–39
- [6] – Гл. XXIII, §§ 113–116; Гл. XXV, XXVI
- [8] – Гл. 5, §§ 21–29
- [9] – Гл. VIII, §§ 8.1–8.4
- [10] – Р. III, Гл. 3, §§ 1–9; Гл. 4, §§ 3–4
- [20] – Ч. II, Гл. V, §§ 1–2, Гл. VII, §§ 1–4

Лекція 10

Загальні принципи механіки

10.1. Зв'язки та їх класифікація. Дійсні, можливі та віртуальні переміщення

Багато задач механіки зводяться до розв'язування рівнянь руху

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(t; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де сили вважаються відомими функціями положень і швидкостей точок. Якщо система є невільною, то необхідно враховувати реакції зв'язків, накладених на систему.

Приведемо аналітичне визначення і коротку класифікацію різних типів зв'язків.

Зв'язок називається *кінематичним*, або *диференціальним*, якщо в декартовій системі координат він визначається рівнянням

$$f(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0. \quad (10.1)$$

Тут $x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ – координати і-тої точки системи і проекції її швидкості на координатні осі, n – кількість точок, що належать системі.

З виразу (10.1) видно, що кінематичний зв'язок накладає явні обмеження на координати точок системи та їх швидкості і, в неявній формі, на прискорення та їх похідні по часу. Якщо рівняння зв'язку не містить проекції швидкостей точок системи, то зв'язок називається *геометричним*:

$$f(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (10.2)$$

З геометричних зв'язків шляхом диференціювання отримують зв'язки кінематичні. З кінематичних зв'язків геометричні можна отримати не завжди, оскільки диференціальні рівняння (10.1) не завжди можуть бути проінтегровані.

Всі геометричні а також кінематичні зв'язки, які можуть бути проінтегровані, називаються *інтегровними* або *голономними*. У протилежному випадку зв'язки називаються *неголономними* або *неінтегровними*. Зв'язки називаються *стаціонарними* (*склерономними*), якщо час не входить явно до їх рівнянь. У протилежному випадку зв'язки називаються *нестационарними* (*реономними*). Зв'язки, аналітично визначені рівняннями, називаються *утримуючими*, або *двосторонніми*. Прикладом системи з двостороннім зв'язком є дві матеріальні точки, сполучені абсолютно твердим стержнем.

Односторонні, або *неутримуючі* зв'язки, обмежуючи рухи точок си-

стеми в деякому напрямі, не обмежують їх рухів у протилежному напрямі. Так, наприклад, поверхні твердих тіл можуть обмежувати рух системи матеріальних точок лише в напрямках внутрішніх нормалей і в напрямках, дотичних до поверхні (останні обмеження пов'язані з наявністю сил тертя). Односторонні зв'язки аналітично визначаються нерівностями. Зокрема, кінематичний неутримуючий зв'язок визначається умовою

$$f(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \geq 0. \quad (10.3)$$

Якщо виконується строга нерівність (10.3), то кажуть, що точка системи не знаходиться на зв'язку.

Розглянемо нескінченно малі переміщення точок системи, сумісні з накладеними на них зв'язками.

Дійсними називаються такі переміщення точок системи, які відбуваються за даний нескінченно малий проміжок часу в їх дійсному русі під дією заданих сил. Нескінченно малі переміщення точок системи, що допускаються зв'язками, називаються можливими. Віртуальними називаються такі нескінченно малі переміщення точок системи, що допускаються зв'язками, зафіксованими в даний момент часу.

Таке розділення елементарних переміщень на можливі та віртуальні суттєве лише у випадку нестационарних зв'язків. Якщо зв'язки стаціонарні, то віртуальні переміщення співпадають з можливими. У цьому випадку дійсні переміщення утворюють одну із систем віртуальних переміщень.

Віртуальне переміщення $\delta \vec{r}$, як і дійсне $\Delta \vec{r}$, є вектором. Віртуальне переміщення вважають ізохронною варіацією радіус-вектора, тобто його повним диференціалом, але при фіксованому часі, коли змінюються (варіюються) лише координати точки. Тому на відміну від повного диференціалу функції

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (10.4)$$

для запису її варіації будемо користуватись формулою

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \dots \quad (10.5)$$

Чим більшою є кількість умов, накладених на нескінченно малі переміщення системи, тим менше існує довільності у визначенні віртуальних переміщень. Цю обставину, як відомо, характеризують число ступенів вільності системи, яке визначається як число незалежних віртуальних переміщень. Тільки у випадку систем, що підкоряються голономним зв'яз-

кам, число ступенів вільності співпадає з кількістю незалежних узагальнених координат. Так, наприклад, якщо система з n точок підкоряється k голономним зв'язкам, то число ступенів вільності такої системи

$$s = 3n - k. \quad (10.6)$$

В тих випадках, коли положення системи визначається r узагальненими координатами q_i ($i = 1, 2, \dots, r$), які не є, взагалі кажучи, незалежними, а підкоряються k голономним зв'язкам, число ступенів вільності $s = r - k$, тобто знову рівне числу незалежних узагальнених координат системи.

Нехай положення системи n точок задається їх декартовими координатами x_i, y_i, z_i , а голономні зв'язки – сукупністю k співвідношень

$$f_\alpha(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k). \quad (10.7)$$

Тоді $3n$ проекцій переміщень (dx_i, dy_i, dz_i) повинні підкорятись обмеженням у формі диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) = 0. \quad (10.8)$$

Віртуальні переміщення $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ будуть задовольняти сукупності співвідношень

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k). \quad (10.9)$$

Якщо голономні зв'язки нестационарні, тобто час не входить явно в рівняння (10.7), то співвідношення (10.8) набудуть вигляду

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k).$$

Порівнюючи два останні вирази, бачимо, що дійсно, як вже раніше відмічалось, у випадку стаціонарних голономних зв'язків віртуальні переміщення співпадають із загальною сукупністю нескінченно малих переміщень системи, сумісних з зв'язками.

10.2. Віртуальна робота. Ідеальні зв'язки

Елементарну роботу сили на віртуальному переміщенні її точки прикладання (віртуальну роботу) обчислюють як

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}, \quad (10.10, a)$$

або

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z. \quad (10.10, б)$$

У випадку механічної системи n точок

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i. \quad (10.11)$$

Елементарна робота при цьому залежить від вибору віртуального переміщення системи.

Прикладаючи до точок системи поряд з рівнодійною \vec{F}_i заданих сил рівнодійну реакцій зв'язків \vec{R}_i , складемо рівняння руху системи:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.12)$$

У випадку ідеально гладкої поверхні реакція повністю зводиться до сили, нормальної до поверхні. Тоді елементарна робота реакції на будь-якому віртуальному переміщенні точки рівна нулю, так як сила напрямлена перпендикулярно переміщенню. Підкреслимо, що за визначенням віртуальних переміщень сказане справедливе як у випадку стаціонарних, так і нестаціонарних зв'язків. Якщо ж поверхні або криві не ідеально гладкі, то робота реакції на віртуальному переміщенні не буде рівною нулю. В дійсності не існує ні абсолютно гладких, ні абсолютно твердих тіл, так що робота реакції на будь-якому віртуальному переміщенні відмінна від нуля. Але, з іншого боку, в багатьох практичних випадках робота сил тертя виявляється настільки малою у порівнянні з роботою інших прикладених сил, що в першому наближенні можна знехтувати роботою сил тертя і говорити про “практично” гладкі поверхні.

Якщо точки M_1 і M_2 (рис. 10.1) з'єднані жорстким стержнем, то віртуальні переміщення $\delta \vec{r}_1$ і $\delta \vec{r}_2$ точок прикладання реакцій \vec{R}_1 і \vec{R}_2 не рівні нулю і не перпендикулярні до напрямку реакцій. При цьому роботи окремих реакцій на віртуальних переміщеннях точок прикладання не рівні нулю, але сума робіт цих реакцій на будь-якому

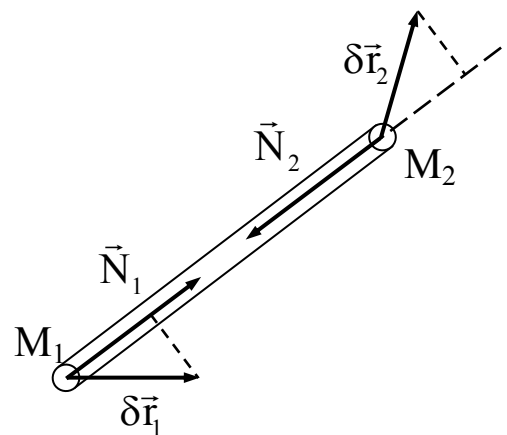


Рис. 10.1

віртуальному переміщенні стержня все ж рівна нулю, так як реакції однакові за величиною і протилежні за напрямом, а проекції віртуальних переміщень на напрям стержня рівні між собою.

Той факт, що на практиці постійно доводиться зустрічатись зі зв'язками, сума робіт яких на довільному віртуальному переміщенні системи може бути в допустимому наближенні прийнята рівною нулю, привів до встановлення важливої механічної абстракції *ідеальних зв'язків*.

Ідеальними зв'язками називають такі зв'язки, сума елементарних робіт реакцій яких на будь-якому віртуальному переміщенні рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (10.13)$$

Умова (10.13) є визначенням ідеальних зв'язків.

10.3. Принцип віртуальних переміщень. Принцип Даламбера. Загальне рівняння механіки

Принципом механіки називають таке загальне математично сформульоване твердження, з якого механіка як фізична теорія може бути виведена дедуктивно – від загального положення до часткового, тобто можуть бути отримані рівняння руху для механічних систем загального типу або для систем деякого обмеженого класу.

Перейдемо до вивчення найбільш загальних методів розв'язку задач механіки, які ґрунтуються на загальному принципі – *принципі віртуальних переміщень*, або *принципі Лагранжа*. Він формулює умови існування узагальненого стану рівноваги деяких систем, яка в свою чергу знаходиться як розв'язок задачі на екстремум деякої функції.

Таким чином, принцип віртуальних переміщень є основою статички складних невільних систем, які складаються з великого числа точок, що підкоряються голономним зв'язкам. Для таких систем метод розв'язку задач статички, який ґрунтується на рівності нулю сум проекцій прикладених до тіла сил на осі координат і сум моментів цих сил відносно тих же осей, є непридатним.

Згідно принципу віртуальних переміщень необхідною і достатньою умовою рівноваги системи, на яку накладені ідеальні стаціонарні зв'язки, є рівність нулю суми елементарних робіт заданих сил на будь-якому віртуальному переміщенні системи з даного положення рівноваги:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (10.14)$$

Доведення.

Для доведення необхідності припустимо, що невільна система знаходиться в рівновазі. Потрібно показати, що в цьому випадку виконується умова (10.14).

При рівновазі системи кожна її точка перебуває в рівновазі і тому

рівнодійна заданих сил \vec{F}_i і реакцій зв'язків \vec{R}_i , прикладені до будь-якої точки M_i , в сумі повинні дорівнювати нулю:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0.$$

Помноживши цю рівність на віртуальне переміщення точки $\delta\vec{r}_i$ і сумуючи по всіх точках системи, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0.$$

Але друга сума за умовою ідеальності зв'язків рівна нулю. Отже,

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0.$$

Необхідність принципу доведена.

Достатність доведемо методом від супротивного. Припустимо, що умова (10.14) виконується, а система не знаходиться у рівновазі. Тоді система під дією заданих сил і реакцій зв'язків прийде в рух і за малий проміжок часу зробить деяке дійсне переміщення, яке у випадку стаціонарних зв'язків увійде до числа віртуальних переміщень. Оскільки переміщення окремих точок із стану спокою напрямлені по рівнодійних сил \vec{F}_i і \vec{R}_i , то при цьому буде виконана додатня робота

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \delta\vec{r}_i > 0,$$

або за умови ідеальності зв'язків

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i > 0,$$

що суперечить прийнятому припущенню (10.14). Достатність доведена.

Для поширення принципу віртуальних переміщень на випадок руху системи матеріальних точок використовують принцип Даламбера.

Запишемо рівняння руху невіЛЬНОї механічної системи з n точок у векторній формі:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad \text{або} \quad \vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Введемо до розгляду сили інерції точок системи, визначаючи їх рівностями

$$\vec{S}_i = -m_i \vec{a}_i. \quad (10.15)$$

В результаті диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок приймають вид умови рівноваги сил, прикладених до точок системи:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{S}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.16)$$

Останнє співвідношення складає зміст *принципу Даламбера*: **якщо до заданих сил і реакцій зв'язків додати сили інерції, то отримана система буде знаходитись у рівновазі.**

В дійсності механічна система не знаходиться у рівновазі. Однак, якби до точок системи були прикладені активні сили, рівні силам інерції, то рівновага існувала б насправді.

Застосування принципу Даламбера в приведеному формулюванні служить основою для переходу від задач динаміки до задач статички з подальшим застосуванням принципу віртуальних переміщень.

Розглянемо невільну систему з ідеальними зв'язками. У відповідності з принципом Даламбера для будь-якої механічної системи виконуються співвідношення (10.16). Домножаючи скалярно кожен з цих виразів на віртуальне переміщення $\delta \vec{r}_i$ і сумуючи по всіх точках системи, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{S}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (10.17)$$

Отриманий вираз називають *загальним рівнянням динаміки*. Його словесне формулювання виражає *об'єднаний принцип Даламбера-Лагранжа*: **в будь-який момент часу руху механічної системи з ідеальними зв'язками сума віртуальних робіт заданих сил і сил інерції рівна нулю на довільних віртуальних переміщеннях системи, які допускаються зв'язками.**

Якщо зв'язки неідеальні, то загальне рівняння динаміки матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{S}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (10.18)$$

Далі буде показано, що із загального рівняння динаміки витікають основні рівняння руху системи. Основні теореми динаміки також можна отримати з рівняння (10.18). Тому Ж.Лагранж поклав загальне рівняння динаміки в основу *аналітичної механіки*.

10.4. Поняття про узагальнені координати, узагальнені швидкості та узагальнені сили. Узагальнені сили для систем в потенціальних силових полях

При розв'язуванні більшості задач механіки не можна досягти успіху без спеціального вибору системи координат. З огляду своєї прос-

тоти декартова система використовується найчастіше, однак вона не завжди є найбільш зручною.

Припустимо, що невільна система складається з n точок. Тоді її положення у просторі в кожний момент часу визначатиметься $3n$ координатами точок системи, наприклад декартовими x_i, y_i, z_i . Нехай на систему накладено k голономних зв'язків. Тоді кількість незалежних координат, що визначають положення механічної системи, рівне $m = 3n - k$.

Замість m незалежних декартових координат можна вибрати інші незалежні параметри q_1, \dots, q_m , які залежать від усіх або частини декартових координат точок системи. Загалом

$$q_j = q_j(x_i, y_i, z_i) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (10.19)$$

Ці незалежні параметри q_j , які визначають положення точок матеріальної системи у просторі, називаються *узагальненими координатами*.

Якщо q_j визначають положення точок механічної системи, то радіус-вектори цих точок є функціями узагальнених координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t; q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.20)$$

Векторним рівнянням (10.20) відповідають скалярні:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t; q_1, q_2, \dots, q_m), \\ y_i &= y_i(t; q_1, q_2, \dots, q_m), \\ z_i &= z_i(t; q_1, q_2, \dots, q_m). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Вияснимо фізичний зміст цих рівнянь. Якщо $m = 3n$, то рівності (10.21) є формулами точкового перетворення координат. При цьому приймається, що час не входить явно у функціональні залежності між декартовими і узагальненими координатами. При $m < 3n$ рівняння (10.21) можна розглядати як рівняння геометричних зв'язків у параметричній формі. Дійсно, виключаючи з (10.21) параметри q_j , знайдемо $3n - m$ співвідношень між координатами точок системи і часом t , який може входити до цих співвідношень явно. Такі співвідношення, як відомо, є рівняннями геометричних зв'язків. Якщо час не входить явно до формул (10.21), то він не входить явно і до рівнянь зв'язків, знайдених після виключення параметрів q_j . Отже, достатньою умовою стаціонарності всіх зв'язків, що визначаються рівняннями (10.21), є відсутність у них явної функціональної залежності між координатами x_i, y_i, z_i і часом.

Вектор віртуального переміщення точки у відповідності з рівностями (10.21)

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (10.22)$$

Звідси слідує, що для голономних систем число незалежних віртуальних переміщень співпадає з кількістю незалежних узагальнених координат. Отже, *число ступенів вільності голономної системи рівне числу незалежних узагальнених координат цієї системи, тобто $m = 3N - k$.*

Складемо вирази векторів швидкостей точок системи. На основі формул (10.21) отримаємо:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (10.23)$$

Похідні по часу від узагальнених координат (\dot{q}_j) називаються *узагальненими швидкостями*. Формули (10.23) показують, що швидкість \vec{v}_i довільної точки лінійно виражається через узагальнені швидкості, оскільки за (10.20) $\partial \vec{r}_i / \partial t$ і $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$ залежать тільки від узагальнених координат і часу, але не від узагальнених швидкостей. Тому

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (10.24)$$

Для знаходження узагальнених сил, розглянемо роботу активних сил, виконану на віртуальному переміщенні. Як відомо, елементарна робота – абсолютний скаляр і не залежить від вибору системи координат. Маємо

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i,$$

або, враховуючи вираз (10.22),

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j, \quad (10.25)$$

де

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (10.26)$$

Функції Q_j узагальнених координат і часу називаються *узагальненими силами*. Взагалі, виходячи з виразу (10.25), під узагальненою силою

розуміють *скалярну величину, рівну відношенню елементарної роботи діючих сил на переміщенні механічної системи, викликаному елементарним приростом узагальненої координати, до величини цього приросту.*

Використовуючи вираз для скалярного добутку двох векторів, узагальнені сили можна також представити у вигляді

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (10.27)$$

Крім формули (10.27), узагальнені сили можна визначати як коефіцієнти при відповідних варіаціях узагальнених координат у виразі для елементарної роботи (10.25):

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m. \quad (10.28)$$

Якщо механічна система перебуває в полі потенціальних сил, то за їх визначенням

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i},$$

де $\Pi(x_i, y_i, z_i) = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_m)$. З урахуванням останніх виразів, для узагальнених сил отримуємо співвідношення

$$Q_j = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (10.29)$$

Таким чином, *узагальнена сила рівна взятій з від'ємним знаком частинній похідній від потенціальної енергії по відповідній узагальненій координаті.*

Література

[6] – Гл. XXVII, §§ 142–146; Гл. XXVIII

[7] – Гл. VI, §§ 19, 20

[8] – Ч. 1, Р. 1, Гл. 4, §§ 15, 16

[9] – Гл. V, §§ 5.1, 5.2

[11] – Ч. II, Гл. I, §§ 41–48

[20] – Гл. XVII, §§ 112–116, Гл. XVIII, §§ 117–124

Лекція 11

Рівняння Лагранжа

11.1. Загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах. Рівняння Лагранжа другого роду

Розглянемо систему з m ступенями вільності, яка підкоряється ідеальним зв'язкам. Продиференціюємо вираз (10.23) по довільній узагальненій координаті q_α :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_j} \dot{q}_j.$$

З іншого боку

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_\alpha} \dot{q}_j.$$

Порівнюючи останні два вирази, бачимо, що при будь-яких $\alpha = 1, \dots, m$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (11.1)$$

Запишемо загальне рівняння динаміки у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \delta \vec{r}_i = 0, \quad (11.2)$$

причому $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j$. Другу суму у виразі (11.2), яка є виразом елементарної роботи сил інерції на віртуальному переміщенні системи, перетворимо наступним чином:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \left(m_i \dot{\vec{v}}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Для виразу в дужках під знаком суми застосуємо наступне перетворення:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

або, згідно формул (10.24) і (11.1)

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right).$$

Якщо використати вираз для кінетичної енергії системи $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$, то рівність (11.2) в результаті запишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0,$$

або остаточно

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (11.3)$$

Отриманий вираз є загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах.

Розглянемо тепер *голономну систему*. У цьому випадку величини δq_j незалежні і число узагальнених координат рівне числу ступенів вільності системи. В силу незалежності величин δq_j рівняння (11.3) може виконуватись лише тоді, коли всі вирази в дужках рівні нулю. Таким чином, у випадку голономної системи співвідношення (11.3) еквівалентне наступній системі рівнянь:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (11.4)$$

Рівняння (11.4) називають *рівняннями Лагранжа другого роду*. Вони утворюють систему m рівнянь другого порядку відносно функцій $q_j(t)$. Порядок цієї системи рівний $2m$.

Для отримання рівнянь Лагранжа необхідно виразити кінетичну енергію T системи через узагальнені координати і швидкості, знайти узагальнені сили і провести вказані в (11.4) диференціювання функції $T(q_j, \dot{q}_j, t)$. Відмітимо, що форма рівнянь Лагранжа не залежить від вибору узагальнених координат. При іншому їх виборі змінилися б тільки функції T і Q_j , а сама форма рівнянь (11.3) залишилася б тією ж. У зв'язку з цим кажуть, що рівняння Лагранжа другого роду володіють властивістю *коваріантності*.

До рівнянь Лагранжа не входять реакції ідеальних зв'язків. Для їх знаходження потрібно після інтегрування рівнянь Лагранжа підставити функції $q_j(t)$ у вирази (10.20)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t; q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i=1, \dots, n),$$

і тоді рівнодійна \vec{R}_i реакцій зв'язків, прикладених до i -тої точки системи, визначиться з (10.16):

$$\vec{R}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

11.2. Кінетична енергія системи як квадратична функція узагальнених швидкостей

У відповідності з вище сказаним, розглянемо вираз для кінетичної енергії системи, записаної через узагальнені координати і швидкості.

Як відомо, кінетична енергія системи визначається формулою

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2}.$$

Оскільки згідно (10.23)

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

то повна кінетична енергія механічної системи буде рівною

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (11.5)$$

Як бачимо, кінетична енергія системи є сумою трьох складових:

T_0 – функції нульового степеня відносно узагальнених швидкостей:

$$T_0 = T_0(q_1, \dots, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}; \quad (11.6)$$

T_1 – лінійної функції узагальнених швидкостей:

$$T_1 = \sum_{j=1}^m B_j \dot{q}_j, \quad B_j = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \quad (11.7)$$

T_2 – функції другого степеня узагальнених швидкостей:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad A_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (11.8)$$

З (11.8) видно, що коефіцієнти A_{jk} симетричні відносно індексів j і k : $A_{jk} = A_{kj}$.

Таким чином,

$$T = T_0 + T_1 + T_2. \quad (11.9)$$

Співвідношення (11.9) в сукупності з формулами (11.6)–(11.8) узагальнює всі знайдені раніше вирази кінетичної енергії системи.

Якщо зв'язки стаціонарні, то \vec{f}_i явно від часу не залежать. У цьому випадку

$$\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial t} = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 0$$

і вираз кінетичної енергії зводиться до однорідної квадратичної функції узагальнених швидкостей, коефіцієнти якої залежать тільки від узагальнених координат:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (11.10)$$

У зв'язку з цим нагадаємо, що *однорідною функцією* степені λ називається така числова функція $f(x_1, \dots, x_n)$, що для всіх точок (x_1, \dots, x_n) області її визначення і всіх дійсних $t > 0$ виконується рівність

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

Згідно теореми Ейлера, якщо область визначення функції f – відкрита множина і функція f неперервно диференційована на області визначення, то вона є однорідною функцією степені λ тоді і тільки тоді, коли при всіх $(x_1, \dots, x_n) \in E$ виконується рівність

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

Останнє співвідношення у застосуванні до кінетичної енергії системи (11.9) запишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = T_1 + 2T_2, \quad (11.11)$$

а в частковому випадку стаціонарних зв'язків:

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T. \quad (11.12)$$

Тепер, якщо взяти до уваги форму залежності кінетичної енергії від узагальнених швидкостей, стає очевидним, що *рівняння Лагранжа другого роду утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат.*

11.3. Рух системи в консервативному силовому полі. Функція Лагранжа та інтеграли руху

Припустимо, що активні сили, прикладені до точок механічної си-

стеми, утворюють потенціальне силове поле. Тоді узагальнені сили

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

і рівняння Лагранжа другого роду запишуться у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Оскільки потенціальна енергія системи не залежить від узагальнених швидкостей, то останній вираз можна представити як

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Різниця кінетичної і потенціальної енергій називається *функцією Лагранжа* L , або *кінетичним потенціалом*:

$$L(t; q_1, q_2, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m) = T - \Pi. \quad (11.13)$$

Таким чином, рівняння Лагранжа другого роду для голономних систем у потенціальних силових полях набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (11.14)$$

Якщо крім консервативних сил на точки системи діють сили, які не визначаються потенціальною енергією (наприклад, сили опору різної фізичної природи), то рівняння Лагранжа можна представити в наступній формі:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (11.15)$$

де Q_j^* – узагальнені непотенціальні сили.

Припустимо, що час не входить явно до виразу функції Лагранжа. Тоді

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Користуючись рівнянням (11.14), проведемо заміну

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

після чого отримаємо

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^m \left(\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

або

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = 0.$$

Звідси слідує існування першого інтегралу рівнянь Лагранжа

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = h = \text{const.} \quad (11.16)$$

Рівність (11.16) виражає узагальнений інтеграл енергії. Тут потрібно підкреслити, що ліва частина рівності (11.16) взагалі кажучи не є повною механічною енергією системи. Тому термін “узагальнений інтеграл енергії” має лише умовний зміст. Дійсно, в загальному випадку, згідно (11.11)

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L = T_1 + 2T_2 - L = T_2 - T_0 + \Pi \neq T + \Pi.$$

Лише в тому разі, коли зв'язки системи стаціонарні, тобто виконується співвідношення (11.12), має місце рівність

$$h = 2T - L = T + \Pi,$$

яка і виражає закон збереження механічної енергії.

Стала h називається *постійною енергії* і визначається з початкових умов.

Серед узагальнених координат, що описують просторове розміщення системи, важливе місце займають *циклічні координати*. Циклічними називають такі координати, які не входять явно до виразу функції Лагранжа.

Приклад 11.1. *Якщо точка рухається під дією сили тяжіння (вісь OZ напрямлена вертикально вгору), то за відсутності опору середовища*

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = mgz, \quad L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

У цьому випадку координати x та y – циклічні.

Припустимо, що серед m узагальнених координат виявилась деяка кількість $\nu < m$ циклічних:

$$q_1, \dots, q_\nu.$$

Тоді за визначенням циклічних координат

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, \nu), \quad (11.17)$$

з урахуванням чого з рівнянь Лагранжа отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, \dots, \nu),$$

або

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j \quad (j=1, \dots, \nu). \quad (11.18)$$

Отримані рівності, що пов'язують узагальнені координати, швидкості, час і сталі інтегрування, є першими інтегралами рівнянь Лагранжа і називаються *циклічними інтегралами*.

Література

[1] – Гл. I, §§ 4, 5

[6] – Гл. XXIX, §§ 159–163

[8] – Гл. 4, §§ 17, 18

[9] – Гл. V, §§ 5.3–5.7

[11] – Ч. II, Гл. I, §§ 49–56

Лекція 12 Рівняння Гамільтона

12.1. Канонічні змінні. Функція Гамільтона

В рівняннях Лагранжа другого роду, які описують рух голономної системи в потенціальному полі сил, функція L залежить від змінних q_j , \dot{q}_j , t . Ці змінні, що задають положення і швидкість механічної системи в довільний момент часу, називаються *змінними Лагранжа*.

Але стан системи можна задавати й за допомогою інших параметрів. За такі параметри можна взяти величини q_j , p_j , t , де p_j – узагальнені імпульси системи.

Узагальненими імпульсами називаються похідні від функції Лагранжа (або кінетичної енергії) по узагальнених швидкостях:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \quad (12.1)$$

В декартових координатах узагальнені імпульси співпадають з компонентами вектора $\vec{q} = m\vec{v}$. В загальному випадку величини p_j є

лінійними однорідними функціями узагальнених швидкостей. Дійсно, як слідує з формул (11.6)–(11.9),

$$p_j = B_j + \sum_{k=1}^m A_{jk} \dot{q}_k. \quad (12.2)$$

Рівності (12.2) дозволяють виразити узагальнені швидкості через узагальнені імпульси, оскільки визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12.2) відносно узагальнених швидкостей для динамічних систем завжди відмінний від нуля.

Таким чином, між узагальненими швидкостями та узагальненими імпульсами існує взаємно однозначна відповідність. Тому можна виключити із всіх величин, що характеризують динамічні властивості системи, узагальнені швидкості, виразивши останні через узагальнені імпульси, координати і час.

Змінні q_j , p_j , t називають *канонічними змінними*, або *змінними Гамільтона*, оскільки саме їх введення лежить в основі гамільтонової механіки.

Запишемо повний диференціал кінетичного потенціалу L як функції узагальнених координат, швидкостей і часу:

$$dL = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

На основі рівняння Лагранжа маємо

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{dp_j}{dt} = \dot{p}_j. \quad (12.3)$$

Тоді

$$dL = \sum_{j=1}^m \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^m p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.4)$$

Використовуючи перетворення Лежандра, запишемо другу суму в рівності (12.4) у вигляді

$$\sum_{j=1}^m p_j d\dot{q}_j = d\left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^m \dot{q}_j dp_j,$$

звідки

$$dL = \sum_{j=1}^m \dot{p}_j dq_j + d\left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^m \dot{q}_j dp_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

або

$$d\left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L\right) = -\sum_{j=1}^m \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^m \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.5)$$

Вираз під диференціалом у лівій частині останньої рівності є функцією, в якій величини \dot{q}_j виражені через q_j, p_j, t за допомогою рівнянь (12.1), і називається *функцією Гамільтона*:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (12.6)$$

Функція Гамільтона H , як і лагранжیان L , має розмірність енергії. Для уточнення її фізичного змісту, представимо вираз (12.6) у вигляді

$$H = \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + \Pi.$$

Застосувавши до останнього виразу формули (11.9) та (11.11), отримаємо

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Якщо зв'язки стаціонарні, то T_0 і T_1 рівні нулю, а T_2 співпадає з повною кінетичною енергією системи. Тоді

$$H = T + \Pi, \quad (12.7)$$

тобто у випадку стаціонарних зв'язків функція Гамільтона рівна повній механічній енергії системи.

12.2. Канонічні рівняння Гамільтона

Розглянемо тепер диференціальні рівняння руху системи в канонічних змінних. Для їх знаходження запишемо повний диференціал функції Гамільтона. Згідно визначення

$$dH = \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (12.8)$$

З іншого боку, у відповідності з рівністю (12.5)

$$dH = -\sum_{j=1}^m \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^m \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.9)$$

Оскільки при переході до нових змінних значення повного диференціалу не змінюється, то праві частини виразів (12.7) і (12.8) рівні. Звідси слідує, що

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (j=1, \dots, m). \quad (12.10)$$

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями Гамільтона*. Вони є системою $2m$ диференціальних рівнянь першого порядку для $2m$ неві-

домих функцій $q(t)$ і $p(t)$, які замінюють m рівнянь другого порядку методу Лагранжа.

Відмітимо, що з порівняння виразів (12.8) і (12.9) слідує ще одне співвідношення:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (12.11)$$

яке ми неявно використовували, розглядаючи повний диференціал (12.5). З (12.11) слідує, що коли функція Лагранжа не залежить явно від часу, то й функція Гамільтона також не залежить від часу, і навпаки.

Підсумовуючи сказане, відмітимо наступний алгоритм складання рівнянь Гамільтона:

- 1) побудувати функцію Лагранжа системи;
- 2) знайти „нові змінні” – узагальнені імпульси згідно формул (12.1);
- 3) за формулою (12.6) побудувати функцію Гамільтона системи $H(q_j, p_j, t)$;
- 4) підставити функцію Гамільтона в рівняння (12.10).

12.3. Поняття про фазовий простір. Теорема Ліувілля

Опису стану системи за допомогою узагальнених координат і узагальнених імпульсів можна дати наступну геометричну інтерпретацію. Узагальнені координати характеризують просторове положення системи. Ті числові значення, яких набувають координати в даний момент часу, називають *конфігураційною точкою*. Сукупність усіх цих точок, тобто тих числових значень, яких можуть набувати узагальнені координати системи, називається *конфігураційним простором*. Для системи, що володіє m ступенями вільності, конфігураційний простір m -вимірний.

Аналогічно сукупність значень імпульсів, яких може набувати система, називається *імпульсним простором*, який також m -вимірний. Простір, у якому точки характеризуються числами, що їх набувають координати та імпульси, називається *фазовим простором*, а точки цього простору, які задаються $2m$ числами, – *фазовими точками*. Кожній точці фазового простору відповідає певний стан механічної системи. Послідовність фазових точок, через які проходить система при своєму русі, називається *фазовою траєкторією*.

Приклади трьох фазових траєкторій показані на рис. 12.1, де фазо-

вий простір представлено у двох вимірах, так що абсциса характеризує m координат q , а ордината – m імпульсів p .

Елементом фазового об'єму називають величину

$$dG = dq_1 dq_2 \dots dq_m dp_1 dp_2 \dots dp_m.$$

Розглянемо три найважливіші властивості фазового простору.

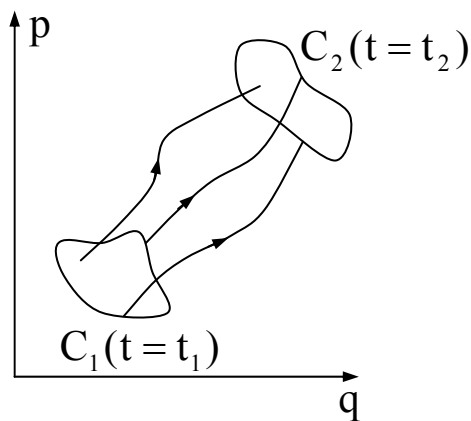


Рис. 12.1.

1. У будь-який момент часу траєкторії у фазовому просторі не перетинаються. Це очевидно з того факту, що початкові умови системи однозначно визначають наступний її рух. Тому, якби дві фазові траєкторії співпали, тобто в якийсь момент часу їх значення p і q виявилися б однаковими, то й подальший їх рух був би однаковим. Якщо гамільтоніан не залежить від часу, то траєкторії у фазовому просторі також не залежать від часу і, від-

повідно, взагалі не можуть перетинатись.

2. Будь-яка границя C_1 у фазовому просторі, яка охоплює деяку множину початкових умов у момент часу t_1 , трансформується до моменту часу t_2 в границю C_2 , що охоплює траєкторії тієї ж множини. Ця властивість впливає безпосередньо з попередньої, оскільки будь-яка траєкторія в момент перетину границі співпадає з однією з граничних траєкторій, а значить, і рухається разом з нею. Звідси можна отримати обмеження на рух великої групи траєкторій, визначаючи рух набагато вужчого класу траєкторій, що належать границі.

3. Величина фазового об'єму, точки якого переміщуються з часом у відповідності з законами механіки, залишається сталою:

$$G(t) = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_m dp_1 dp_2 \dots dp_m = \text{const}. \quad (12.12)$$

Це твердження відоме як *теорема Ліувілля*, яка є потужним засобом аналізу гамільтонової динаміки.

Для доведення припустимо, що в момент часу t фазовий об'єм дорівнював

$$G(t) = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_m dp_1 dp_2 \dots dp_m. \quad (12.13)$$

Точки q_j, p_j фазового об'єму через час dt займуть нові положення

$$q'_j = q_j(t + dt), \quad p'_j = p_j(t + dt)$$

у фазовому просторі і будуть зв'язані між собою співвідношеннями

$$q'_j = q_j + \dot{q}_j dt = q_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dt, \quad p'_j = p_j + \dot{p}_j dt = p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} dt. \quad (12.14)$$

У момент часу $t + dt$ фазовий об'єм системи буде рівним

$$G(t + dt) = \int \dots \int dq'_1 dq'_2 \dots dq'_m dp'_1 dp'_2 \dots dp'_m. \quad (12.15)$$

Як відомо, між інтегралами (12.13) і (12.14) існує зв'язок

$$G(t + dt) = \int \dots \int dG' = \int \dots \int D dG,$$

де D – модуль якобіана переходу від змінних q'_j, p'_j до змінних q_j, p_j :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial q'_1}{\partial q_m} & \frac{\partial q'_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial q'_1}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q'_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial q'_m}{\partial q_m} & \frac{\partial q'_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial q'_m}{\partial p_m} \\ \frac{\partial p'_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p'_1}{\partial q_m} & \frac{\partial p'_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial p'_1}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p'_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p'_m}{\partial q_m} & \frac{\partial p'_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial p'_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}. \quad (12.16)$$

Скориставшись формулами (12.14), запишемо цей якобіан у вигляді

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_m} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_m} dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial q_1} dt & \dots & 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial q_m} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial p_1} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_m^2} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} dt & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_m} dt & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} dt & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_m} dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_m \partial q_1} dt & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_m^2} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_m \partial p_1} dt & \dots & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_m \partial p_m} dt \end{vmatrix}. \quad (12.17)$$

Розкладаючи визначник (12.17) за елементами першого рядка, бачимо, що члени, здобуті при множенні елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення, всі, крім першого, будуть членами порядку dt^2 . Тому якобіан можна записати наступним чином:

$$D = \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} dt \right) \dots \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial q_m} dt \right) \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} dt \right) \dots \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial q_m} dt \right) + \Theta(dt^2),$$

де символом $\Theta(dt^2)$ позначено доданки порядку dt^2 і вище. Цими до-

данками можна знехтувати, оскільки формули (12.14) записані з точністю до членів порядку dt . Тоді остаточно вираз для якобіану переходу можна записати у вигляді

$$D = \prod_{j=1}^m \left[1 - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial q_m} dt \right)^2 \right] + \Theta(dt^2). \quad (12.18)$$

Як бачимо, якобіан не містить членів порядку dt . Знайдемо похідну

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{G(t+dt) - G(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \Theta(dt) = 0.$$

Отже, фазовий об'єм, точки якого рухаються відповідно до законів механіки, є сталою величиною.

12.4. Дужки Пуассона

Нехай u і v – двічі неперервно диференційовані функції узагальнених координат, імпульсів і часу. Вираз

$$[u, v] = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \quad (12.19)$$

називають *дужками Пуассона* функцій u і v .

Відмітимо основні властивості дужок Пуассона.

1. Антиккомутативність:

$$[u, v] = -[v, u]. \quad (20.20)$$

2. Якщо одна з функцій стала (наприклад, $v = C$), то

$$[u, C] = 0. \quad (20.21)$$

3. $[u + v, w] = [u, w] + [v, w].$ (20.22)

4. $[u \cdot v, w] = u[v, w] + v[u, w].$ (20.23)

5. $\frac{\partial}{\partial t} [u, v] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right].$ (20.24)

Ці властивості безпосередньо випливають з означення (12.19) дужок Пуассона.

Якщо одна з функцій u або v співпадає з одним з імпульсів або координатою, то дужки Пуассона зводяться до частинної похідної:

$$[u, q_\alpha] = -\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}, \quad (12.25)$$

$$[u, p_\alpha] = \frac{\partial u}{\partial q_\alpha}. \quad (12.26)$$

Дійсно, якщо, наприклад, $v = q_\alpha$, то

$$[u, q_\alpha] = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_j} \right).$$

При цьому $\partial q_\alpha / \partial p_j = 0$, а $\partial q_\alpha / \partial q_j = \delta_{j\alpha}$ ($\delta_{j\alpha} = 0$, якщо $j \neq \alpha$ і 1 , якщо $j = \alpha$). В результаті приходимо до виразу (12.25). Аналогічно доводиться і співвідношення (12.26).

Дужки Пуассона, взяті для самих канонічних змінних (тобто $u = q_\alpha$, $v = p_\alpha$) називаються *фундаментальними дужками Пуассона*:

$$[q_j, q_\alpha] = 0, \quad [p_j, p_\alpha] = 0, \quad [q_j, p_\alpha] = \delta_{j\alpha}. \quad (12.27)$$

Для дужок Пуассона, складених з трьох функцій, справедлива *тожність Якобі*:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0. \quad (12.28)$$

Розглянемо деяку функцію координат, імпульсів і часу $f(q_j, p_j, t)$.

Її повна похідна по часу рівна

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right),$$

або, використавши рівняння Гамільтона,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right). \quad (12.29)$$

Згідно визначення (12.19), друга складова у правій частині формули (12.29) є дужками Пуассона для функцій f і H . З урахуванням цього співвідношення (12.29) запишеться у вигляді

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]. \quad (12.30)$$

Якщо функція $f(q_j, p_j, t)$ є інтегралом руху, то її повна похідна по часу рівна нулю. У цьому випадку

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (12.31)$$

Вираз (12.31) є необхідною і достатньою умовою того, що функція f – перший інтеграл.

Має місце наступне твердження, відоме як *теорема Пуассона-Якобі*: **якщо функції f і g є інтегралами руху, то складені з них дужки Пуассона також є інтегралами руху.**

Доведення.

Запишемо повну похідну функції $[f, g]$ по часу:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], H].$$

Використовуючи співвідношення (12.24) і (12.28), останній вираз перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [[g, H], f] - [[H, f], g],$$

або, врахувавши формули (12.20) і (12.22),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f, g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [[f, H], g] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right]. \end{aligned}$$

Оскільки функції f і g є інтегралами руху, то, згідно (12.31)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = 0.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right] = 0,$$

тобто функція $[f, g]$ – інтеграл руху.

Ця теорема дає можливість в деяких випадках отримувати нові інтеграли руху.

Повна похідна по часу довільної функції $f(q_j(t), p_j(t))$ канонічних змінних, яка не залежить від часу явно, згідно (12.30) визначається рівністю

$$\frac{df}{dt} = [f, H]. \quad (12.32)$$

Характерно, що значення $f(q_j(t), p_j(t))$ в момент часу t виражається через значення $f(q_j(0), p_j(0))$ в момент часу $t = 0$ наступною формулою:

$$\begin{aligned} f(q(t), p(t)) &= f(0) + \frac{t}{1!} [f, H] \Big|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} [[f, H], H] \Big|_{t=0} + \dots \\ &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[[\dots [f, H], H] \dots] H]}_n \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (12.33)$$

де $q(t)$, $p(t)$ задовольняють канонічним рівнянням, що описують еволюцію механічної системи, гамільтоніан якої явно від часу не залежить; $f(0) = f(q(0), p(0))$. Ряд у правій частині (12.33) за припущенням збіжний.

Доведення проводиться безпосередньо підстановкою розв'язку (12.33) в (12.32).

Приведена формула цікава тим, що на основі її аналогу будується теорія збурень у квантовій механіці. В задачах класичної механіки використання цієї формули не завжди дає найпростіший шлях розв'язку, однак вона ефективна для знаходження наближеного розв'язку в задачах, де можна виділити малий параметр.

Як приклад розглянемо просту задачу, яка допускає точний розв'язок. Знайдемо $q(t)$, $p(t)$ в задачі гармонічного осцилятора. Гамільтоніан системи

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Покладемо $f(q(t), p(t)) = q(t)$ і обчислимо дужки Пуассона:

$$[q, H]_{t=0} = \frac{p}{m} [[q, H], H]_{t=0} = -\omega^2 q, \quad [[q, H], H]_{t=0} = -\frac{\omega^2 p}{m} \dots$$

Тоді права частина формули (12.33) для функції $q(t)$:

$$\begin{aligned} q(t) &= q + \frac{p}{m} t - \frac{q\omega^2}{2} t^2 - \frac{p}{m} \omega^2 \frac{t^3}{3!} + \dots = q \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \dots \right) + \frac{p}{m\omega} \left(\omega t - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Функції $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ ми встановили за першими двома членами їх розкладу.

Аналогічно, покладаючи $f(q(t), p(t)) = p(t)$ і обчислюючи дужки Пуассона

$$\begin{aligned} [p, H]_{t=0} &= -\omega^2 m q, & [[p, H], H]_{t=0} &= -\omega^2 p, \\ [[[p, H], H], H]_{t=0} &= \omega^4 m q, & [[[[p, H], H], H], H]_{t=0} &= \omega^4 p, \end{aligned}$$

для $p(t)$ отримаємо

$$\begin{aligned} p(t) &= p - \frac{m\omega^2 q}{1!} t - \frac{\omega^2 p}{2!} t^2 + \frac{m\omega^4 q}{3!} t^3 + \frac{\omega^4 p}{4!} t^4 + \dots = \\ &= p \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \dots \right) - m\omega \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right) = p \cos \omega t - m\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

Отримані формули для $q(t)$ і $p(t)$ визначають стан системи в момент часу t , тобто є розв'язками канонічних рівнянь для гармонічного осцилятора.

Література

- [1] – Гл. VII, §§ 40, 42, 46
- [7] – Ч. 1, Гл. VI, §§ 22, 23
- [8] – Гл. 4, §§ 19, 20; Гл. 8, §§ 51, 52
- [9] – Ч. 1, Гл. IX, §§ 9.1, 9.3
- [11] – Ч. II, Гл. I, §§ 57–59
- [20] – Гл. XX, §§ 131–139

Лекція 13

Варіаційні принципи механіки

13.1. Вступні зауваження. Класифікація принципів

Найбільш загальні властивості рухів механічних систем виражаються *варіаційними принципами*. Така назва відображає основний метод знаходження закономірностей механічних рухів, що складає зміст згаданих принципів.

Варіаційне числення займається відшукуванням екстремумів функцій, область визначення яких – нескінченно вимірний простір: простір кривих. Такі функції називаються *функціоналами*.

Щоб знайти найбільш загальні властивості рухів систем матеріальних точок, порівнюються *дійсні* рухи таких систем з уявними кінематично можливими рухами, – рухами, що допускаються зв'язками, накладеними на точки системи. Вони називаються *рухами порівняння*. Рухи порівняння, в загальному випадку, не сумісні з дією активних сил, прикладених до точок механічної системи, і тому не можуть здійснюватись в конкретних умовах механічної задачі.

Побудувати уявний рух для порівняння з ним дійсного руху можна, змінюючи форму функціональної залежності координати q_j від часу в кінематичних рівняннях дійсного руху:

$$q_j = q_j(t). \quad (13.1)$$

Для цього достатньо скласти кінематичні рівняння руху порівняння у вигляді суми

$$q'_j = q_j + \varepsilon \eta_j(t), \quad (13.2)$$

де ε – достатньо мала за абсолютним значенням величина, а $\eta_j(t)$ – функція часу, неперервна, диференційована і обмежена за модулем для всіх значень аргументу t . Величини $\varepsilon \eta_j(t)$ називаються варіаціями функцій q_j і позначають δq_j . Якщо координати q_j незалежні, то функції $\eta_j(t)$ довільні, за винятком обмежень, обумовлених вище. Але в тих випадках, коли на систему накладені неголономні зв'язки, координати задовольняють диференціальним рівнянням зв'язків, і це накладає додаткові обмеження на функції $\eta_j(t)$.

Перехід від функцій $q_j(t)$ до $q'_j(t)$ можна розглядати як результат деякої операції, проведеної над функцією $q_j(t)$. Ця операція називається *варіюванням* функції $q_j(t)$. Дії варіювання функції $q_j(t)$ відповідає перехід від кривої АВ, визначеної рівністю (13.1), до кривої А'В', визначеної рівністю (13.2) (рис. 13.1).

При введенні операції варіювання приймалося, що час t не варіюється. Відповідні варіації функцій часу називаються *ізохронними*. Розглянемо деякі властивості ізохронних варіацій. З виразу (13.2), у випадку незалежних координат $q_j(t)$, безпосередньо впливає

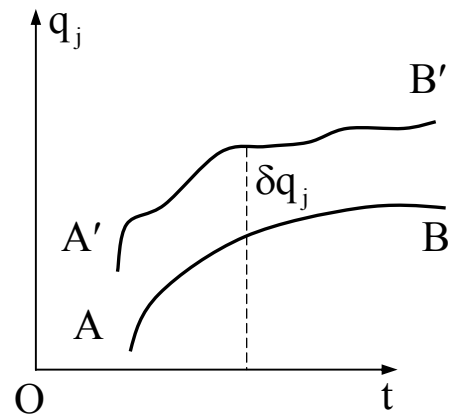


Рис. 13.1

властивість *комутативності операцій варіювання функції і диференціювання її по часу*:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j. \quad (13.3)$$

Дійсно, для незалежних координат $q_j(t)$ операції диференціювання по часу і варіювання незалежні. Тому (13.3) отримується в результаті безпосереднього диференціювання виразу (13.2).

Розглянемо інтеграл

$$J = \int_{t_1}^{t_2} q_j(t) dt. \quad (13.4)$$

Варіюючи підінтегральну функцію і позначаючи відповідну зміну ін-

теграла через δJ , знайдемо

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} q_j(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \eta_j(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j(t) dt. \quad (13.5)$$

Звідси слідує, що операції варіювання та інтегрування по незалежній змінній t також комутативні.

Іноді доводиться відмовлятися від припущення, що час не змінюється при варіюванні. Варіації функцій часу, знайдені при варіюванні також і часу, називаються *неізохронними*, або *повними варіаціями*. При неізохронних варіаціях зміна функції $q_j(t)$ відбувається як внаслідок зміни її форми, так і в результаті зміни її аргументу. Для неізохронних варіацій операції диференціювання по t і варіювання не комутативні.

Все вище сказане стосовно варіацій можна застосовувати і до векторних функцій часу, зокрема, радіус-вектора $\vec{r}(t)$. При цьому ізохронні варіації $\delta \vec{r}$ за кінематичним змістом еквівалентні віртуальним переміщенням точок системи, а неізохронні варіації $\Delta \vec{r}$ – дійсним переміщенням.

Слід підкреслити, що варіаційні принципи мають ширший зміст, ніж загальні теореми динаміки, розглянуті раніше. З деяких варіаційних принципів можна знайти, як наслідки, основні теореми динаміки системи. Однак варіаційні принципи не дозволяють безпосередньо знаходити інтеграли систем диференціальних рівнянь руху, що впливають з теорем динаміки. Разом з тим, застосовуючи ці принципи, можна побудувати “прямі” методи наближеного визначення закону руху матеріальної системи.

Розрізняють *диференціальні та інтегральні* варіаційні принципи. Диференціальні принципи відображають властивості механічних рухів, що відповідають деякому моменту або досить малому проміжку часу. Так розглянутий раніше принцип Даламбера-Лагранжа, на якому ґрунтується загальне рівняння динаміки, часто відносять до диференціальних варіаційних принципів механіки. Інтегральні принципи відображають властивості механічних рухів, які відповідають скінченному інтервалу зміни часу. Їх, як і диференціальні, можна знайти з загального рівняння динаміки.

Зупинимося докладніше на інтегральних варіаційних принципах.

13.2. Принцип Гамільтона-Остроградського

Найбільш загальне формулювання закону руху механічних систем дається так званим *принципом Гамільтона-Остроградського* (або *принципом екстремальної дії*).

Розглянемо загальне рівняння динаміки

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \dot{\vec{v}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

звівши його до вигляду

$$\delta A = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i.$$

Припустимо, що варіації $\delta \vec{r}_i$ ізохронні. Тоді, враховуючи властивості комутативності операцій варіювання і диференціювання, знайдемо

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{v}_i = \delta T,$$

де T – кінетична енергія системи. В результаті загальне рівняння динаміки запишеться у вигляді

$$\delta A + \delta T - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (13.6)$$

Розглянемо рух *зображуючої точки* на відрізку її дійсної траєкторії $M_1 M M_2$ (рис. 13.2). Нехай положенням точок M_1 і M_2 відповідають моменти часу t_1 і t_2 , а відрізок траєкторії порівняння $M_1 M' M_2$ має спільні кінці M_1 і M_2 з відрізком дійсної траєкторії. Оскільки варіації ізохронні, то зображуюча точка, рухаючись по траєкторії порівняння, досягає точки M_2 одночасно з точкою, яка рухається по дійсній траєкторії, якщо вони почнуть одночасний рух з точки M_1 . Отже, на кінцях відрізка $M_1 M M_2$ дійсної траєкторії варіації радіус-векторів точок системи $\delta \vec{r}_i$ рівні нулю:

$$(\delta \vec{r}_i)_{M_1} = (\delta \vec{r}_i)_{t_1} = 0, \quad (\delta \vec{r}_i)_{M_2} = (\delta \vec{r}_i)_{t_2} = 0. \quad (13.7,a)$$

Аналогічним умовам задовольняють варіації узагальнених координат:

$$(\delta q_j)_{M_1} = (\delta q_j)_{t_1} = 0, \quad (\delta q_j)_{M_2} = (\delta q_j)_{t_2} = 0. \quad (13.7,b)$$

Помножимо рівність (13.6) на диференціал часу і проінтегруємо його від t_1 до t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Другий член в лівій частині останньої рівності рівний нулю на основі

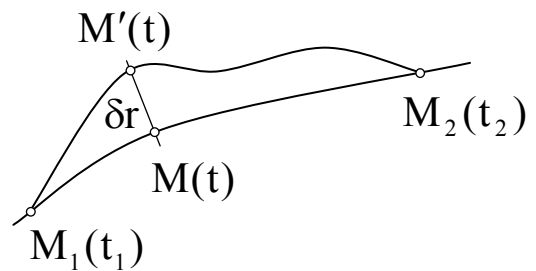


Рис. 13.2.

умов (13.7,a). Це означає, що

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt = 0. \quad (13.8)$$

Рівність (13.8) визначає в загальній формі, справедливій для консервативних і неконсервативних систем, принцип Остроградського: *дійсний рух матеріальної системи з голономними зв'язками відрізняється від інших кінематично можливих рухів тим, що для дійсного руху інтеграл від суми $\delta A + \delta T$, взятий між двома довільними моментами часу, рівний нулю.*

Розглянемо рух системи в консервативному силовому полі. У цьому випадку

$$\delta A = -\delta \Pi, \quad \delta A + \delta T = \delta(T - \Pi),$$

в результаті чого рівність (13.8) набуває вигляду $\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt = 0$.

На основі ізохронності варіацій знайдемо

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (13.9)$$

де $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ – функція Лагранжа.

Інтеграл виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (13.10)$$

називається *дією за Гамільтоном*. Тут t_1 і t_2 – моменти часу, в які система займає певні положення, що характеризуються двома наборами значень координат $q_j^{(1)}$ і $q_j^{(2)}$. Таким чином, на основі виразів (13.9) і (13.10) отримуємо рівність

$$\delta S = 0, \quad (13.11)$$

яка виражає принцип Гамільтона-Остроградського: *дійсний рух системи з голономними зв'язками у консервативному полі відрізняється від інших кінематично можливих рухів тим, що для цього варіація дії, визначеної для довільного проміжку часу, рівна нулю.*

Рівність (13.9) показує, що виконується необхідна умова існування екстремуму функціоналу $\int_{t_1}^{t_2} L dt$. По цій причині принцип Гамільтона-Остроградського ще називають принципом екстремальної дії.

13.3. Принцип Мопертюї-Лагранжа

Розглянемо голономну консервативну систему. Її функція Гамільтона не залежить від часу, що визначає існування узагальненого інтегралу енергії

$$E = H = \text{const}. \quad (13.12)$$

Рух системи будемо представляти в m -вимірному координатному просторі. Нехай M_1 і M_2 – точки цього простору, які задаються координатами $q_j^{(1)}$ і $q_j^{(2)}$. Припустимо, що в початковий момент часу t_1 система займає положення, яке відповідає точці M_1 , і узагальнені швидкості \dot{q}_j (а відповідно й узагальнені імпульси p_j) можуть бути вибрані так, що при $t = t_2$ система займе положення, яке відповідає точці M_2 . Крива, що проходить через точки M_1 і M_2 і вздовж якої задовольняються диференціальні рівняння руху, є дійсним шляхом системи. На дійсному шляху функція Гамільтона постійна і її величина визначається початковими умовами.

Поряд з дійсним шляхом розглянемо інші кінематично можливі шляхи, нескінченно близькі до дійсного. Їх будемо називати шляхами порівняння, якщо вони: 1) проходять через одні й ті ж початкові й кінцеві положення M_1 і M_2 ; 2) вздовж кожного шляху порівняння функція Гамільтона постійна і рівна величині H , яка відповідає дійсному шляху. При такому *ізоенергетичному варіюванні* час $t_2 - t_1$ переходу системи з початкового положення системи в кінцеве не обов'язково однаковий для дійсного шляху і шляхів порівняння.

Варіаційний принцип, що розглядається нижче, дає критерій, який дозволяє виділити дійсний шлях серед усіх шляхів порівняння, що задовольняють вказаним властивостям 1 і 2.

В силу зв'язку функції Лагранжа з гамільтоніаном системи дію (13.10) можна виразити як

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H \right) dt = \int_{q_j^{(1)}}^{q_j^{(2)}} \sum_{j=1}^m p_j dq_j - \int_{t_1}^{t_2} H dt, \quad (13.13)$$

де $q_j^{(1)}$, $q_j^{(2)}$ – положення точок системи, що відповідають моментам часу t_1 і t_2 .

Розглянемо лише ті варіації, які відповідають закону збереження (13.12). Тоді другий інтеграл останнього виразу рівний нулю і тому можна варіювати лише функціонал

$$S_0 = \int_{q_j^{(1)}}^{q_j^{(2)}} \sum_{j=1}^m p_j dq_j, \quad (13.14)$$

який називається *дією за Лагранжем*. Далі врахуємо, що

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^m A_{jk} \dot{q}_k.$$

Крім того, у відповідності до закону збереження енергії

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{jk} \frac{dq_j dq_k}{dt^2} + \Pi.$$

Остання рівність дає можливість виразити dt як

$$dt = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} dq_j dq_k} / (E - \Pi).$$

Тоді

$$p_j = \sum_k A_{jk} \frac{dq_k}{dt} = \sum_k A_{jk} dq_k \sqrt{2(E - \Pi) / \sum_j \sum_k A_{jk} dq_j dq_k},$$

а дія Лагранжа

$$S_0 = \int_{q_j^{(1)}}^{q_j^{(2)}} \sum_j \sum_k A_{jk} dq_j dq_k \sqrt{\frac{2(E - \Pi)}{\sum_j \sum_k A_{jk} dq_j dq_k}} = \int_{q_j^{(1)}}^{q_j^{(2)}} \sqrt{2(E - \Pi) \sum_j \sum_k A_{jk} dq_j dq_k}. \quad (13.15)$$

Отже, у відповідності з принципом екстремальної дії *рух системи з повною енергією E і потенціальною енергією Π відбувається по траєкторії у фазовому просторі, яка забезпечує екстремум функціоналу (13.15)*

$$\delta S_0 = 0. \quad (13.16)$$

Це твердження в механіці має назву *принципу Мопертюї–Лагранжа*. Відмітимо, що в інтегралі (13.15) повністю виключено час і принцип (13.16) містить лише геометричні елементи.

Для консервативної механічної системи, як відомо,

$$\sum_{j=1}^m p_j dq_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j dt = 2T dt.$$

Тому дію Лагранжа можна представити у вигляді

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt. \quad (13.17)$$

При цьому слід пам'ятати, що час t_2 не фіксується, а може змінюватись при переході від дійсного шляху до шляху порівняння і від одного шляху порівняння до іншого. Крім того, повна енергія системи одна й та ж на всіх шляхах порівняння.

13.4. Два методи побудови класичної механіки

Як уже відмічалось, при побудові курсу механіки в основу можуть бути покладені закони Ньютона, які є результатом широкого узагальнення дослідних фактів. Ці закони, являючись з логічної сторони аксіомами, дають можливість отримувати основні теореми і висновки механіки. Відмінною рисою такої схеми побудови класичної механіки є підхід до сили як причини зміни механічного стану.

В основі другого методу, який у фізичному плані є більш формальним, але разом з тим і більш загальним, лежить інтегральний варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського. Вихідними поняттями тут виступають дія та функція Лагранжа. Можливість побудови класичної механіки на принципі екстремальної дії ґрунтується на тому, що його використання дає можливість отримувати рівняння руху механічних систем. Проілюструємо це на прикладі рівнянь Лагранжа і Гамільтона.

Нехай дійсний рух системи описується функціями $q_j(t)$. Функціонал S для такого руху

$$S(q_1, \dots, q_m) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) dt.$$

Проваріюємо цей інтеграл:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 + \delta q_1, \dots, q_m + \delta q_m, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m + \delta \dot{q}_m, t) dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) dt. \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) - \right. \\ &\quad \left. - L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) \right] dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Оскільки $\delta \dot{q}_j = \frac{d(\delta q_j)}{dt}$, то вираз (13.18) можна записати у вигляді

$$\delta S = \sum_{j=1}^m \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\delta q_j}{dt} dt \right).$$

Другий інтеграл беремо частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\delta q_j}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d(\delta q_j) = \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad du = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} dt \\ dv = d(\delta q_j); \quad v = \delta q_j \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} dt.$$

В силу умови (13.7,б) перша складова перетворюється в нуль. У результаті отримуємо

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0. \quad (13.19)$$

Рівність (13.19) повинна виконуватись при довільних відмінних від нуля значеннях δq_j , і тому має місце необхідна й достатня умова екстремуму дії у вигляді рівнянь, що виконуються для підінтегральних виразів:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Ми прийшли до рівнянь Лагранжа другого роду для систем, що рухаються у потенціальних силових полях.

Отримаємо тепер канонічні рівняння з рівності (13.13), провівши операцію варіювання:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0. \quad (13.20)$$

Варіюючи підінтегральний вираз, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \delta p_j + \sum_{j=1}^m p_j \delta \dot{q}_j - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] dt = 0. \quad (13.21)$$

Інтегруючи за частинами, знайдемо

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt = p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q_j dt.$$

На основі умов (13.7,б) отримаємо

$$p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Тоді інтеграл (13.21) запишеться у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0.$$

Як і раніше приходимо до висновку, що підінтегральний вираз рівний нулю:

$$\sum_{j=1}^m \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] = 0. \quad (13.22)$$

Вираз (13.22) може бути рівним нулю при довільних незалежних δp_j і δq_j лише за умови

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, m),$$

тобто отримуємо систему канонічних рівнянь Гамільтона.

Принцип екстремальної дії охоплює не тільки механічні явища, знаходячи своє використання в інших розділах теоретичної фізики. Таке широке застосування принципу тісно пов'язане з методом узагальнених координат. Рівняння Лагранжа не обмежені евклідовим простором. Тільки для вільної точки вони є рівняннями руху в координатах тривимірного простору. У випадку системи з зв'язками автоматичне урахування дії сил реакцій зв'язків здійснюється вже самим вибором узагальнених координат, а їх число визначає вимірність простору конфігурацій. Перехід до нескінченно вимірного простору дозволяє застосувати принцип екстремальної дії до систем з нескінченним числом ступенів вільності – фізичних полів.

Слід також підкреслити, що коли механіка базується на законах Ньютона, то при теоретичному знаходженні кінематичних рівнянь руху повинні бути задані сили. Якщо ж мова йде про другу схему, лагранжів чи гамільтонів формалізм, то повинні бути задані функція Лагранжа або Гамільтона. Конкретні формули як для сил, так і для зазначених функцій у рамках механіки не виводяться, а задаються.

13.5. Канонічні перетворення

Рівняння Лагранжа, як і рівняння Гамільтона, мають однакову форму незалежно від конкретного змісту узагальнених координат. Це означає, що при переході до нових координат вказані рівняння зберігають свій вигляд, хоча геометричний зміст координат та імпульсів (а також вигляд функцій L і H) буде іншим.

Іноді доцільно користуватись перетворенням типу

$$P_j = P_j(\{q\}, \{p\}, t), \quad Q_j = Q_j(\{q\}, \{p\}, t), \quad (13.23)$$

коли нові координати залежать не тільки від старих координат, але й від імпульсів. При цьому рівняння руху, взагалі кажучи, втрачають вигляд рівнянь Гамільтона. Однак можна знайти такий клас перетворень, при яких вид рівнянь Гамільтона зберігатиметься. Такі перетворення називаються *канонічними*.

До формул для канонічних перетворень можна прийти наступним шляхом. Як було показано вище, рівняння Гамільтона можуть бути отримані з принципу екстремальної дії. Для того, щоб нові змінні Q_j, P_j також задовольняли рівнянням Гамільтона, для них також повинен справджуватись принцип екстремальної дії

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^m P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt = 0, \quad (13.24)$$

де H' – функція Гамільтона в нових канонічних змінних. Таким чином, шукане перетворення (13.23) повинно переводити варіаційну рівність (13.20) в рівність (13.24) і навпаки. Це можливо лише за умови, що їх підінтегральні вирази відрізняються тільки на повний диференціал довільної функції Φ_1 часу, старих і нових узагальнених координат:

$$\Phi_1 = \Phi_1(q_1, \dots, q_m, Q_1, \dots, Q_m, t). \quad (13.25)$$

Отже,

$$\left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - H \right) dt = \left(\sum_{j=1}^m P_j \dot{Q}_j - H' \right) dt + d\Phi_1. \quad (13.26)$$

Будь-яке канонічне перетворення характеризується своєю функцією Φ , яку називають *твірною функцією перетворення*.

Виходячи з рівності (13.25), знайдемо

$$d\Phi_1 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt.$$

Підставляючи цей вираз у (13.26), отримаємо

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} - p_j \right) dq_j + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} + P_j \right) dQ_j + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + H - H' \right) dt = 0. \quad (13.27)$$

Розглядаючи час t , координати q_j і Q_j як незалежні змінні, на основі рівності (13.27) отримуємо

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + H - H' = 0 \quad (13.28)$$

При заданій функції Φ_1 формули (13.28) встановлюють зв'язок між старими і новими змінними і дають вираз для нової функції Гамільтона.

Іноді зручніше виражати твірну функцію не через змінні q_j і Q_j , а через старі координати q_j і нові імпульси P_j . Для виведення формул канонічних перетворень у цьому випадку потрібно провести у співвідношенні (13.26) відповідне перетворення Лежандра:

$$d\left(\Phi_1 + \sum_j P_j Q_j\right) = \sum_j p_j dq_j + \sum_j Q_j dP_j - (H - H')dt.$$

Вираз, який стоїть під знаком диференціалу в лівій частині останньої рівності, виражений через змінні q_j і P_j , і є новою твірною функцією Φ_2 :

$$\Phi_2(q_j, P_j, t) = \Phi_1(q_j, Q_j, t) + \sum_j P_j Q_j. \quad (13.29)$$

Провівши відносно цієї функції операції, аналогічні попереднім, отримаємо

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial P_j} = Q_j, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + H - H' = 0. \quad (13.30)$$

Аналогічно можна перейти до формул канонічних перетворень, виражених через твірні функції, що залежать від змінних p_j , Q_j і p_j , P_j .

Зв'язок між новою та старою функціями Гамільтона завжди виражається однаково: їх різниця визначається частинною похідною по часу від твірної функції. Зокрема, якщо остання не залежить від часу, то $H' = H$. Іншими словами, у цьому випадку для отримання нової функції Гамільтона достатньо підставити в H величини q_j , p_j , виражені через нові змінні Q_j , P_j .

Література

[1] – Гл. I, §1; Гл. VII, §§ 43–45

[8] – Гл. 8, §§ 44–48

[11] – Ч. II, Гл. III, §§ 73–83

[19] – Ч. II, Гл. XII, §§ 1–2

[20] – Гл. XXI, §§ 143–149

Лекція 14

Рівняння Гамільтона–Якобі

14.1. Рівняння Гамільтона-Якобі. Теорема Якобі

Розглянемо один з методів інтегрування канонічних рівнянь руху, який ґрунтується на рівнянні Гамільтона-Якобі.

З виразу (13.13) безпосередньо слідує, що

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j. \quad (14.1)$$

З іншого боку, виходячи з визначення дії, її повна похідна по часу рівна

$$\dot{S} = L. \quad (14.2)$$

Розглядаючи S як функцію координат і часу, можемо записати

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j. \quad (14.3)$$

Порівнюючи два останні вирази, приходимо до висновку, що

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j = -H,$$

або остаточно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_j, p_j, t) = 0.$$

Замінивши у відповідності з формулами (14.1) імпульси, що входять до функції Гамільтона, частинними похідними $\partial S/\partial q_j$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_m}, t\right) = 0, \quad (14.4)$$

якому повинна задовольняти функція $S(q_j, t)$. Це рівняння в частинних похідних першого порядку називається *рівнянням Гамільтона-Якобі*. Нагадаємо, що будь-яке диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку має розв'язок, який залежить від довільної функції. Такий розв'язок називається *загальним інтегралом рівняння*. В механіці, однак, основну роль відіграє не загальний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі, а так званий *повний інтеграл* – розв'язок, який містить стільки незалежних сталих інтегрування, скільки є незалежних змінних, від яких залежить шукана функція. У рівнянні Гамільтона-Якобі незалежними

змінними є час і координати. Тому для системи з m ступенями вільності повний інтеграл цього рівняння повинен містити $(m + 1)$ довільну сталу. Оскільки функція S входить до рівняння тільки через свої похідні, то одна з довільних сталих входить до повного інтегралу адитивно. Отже, повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд

$$S = \Phi(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m; t) + \alpha_{m+1}, \quad (14.5)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} = C$ – довільні сталі. Практично це означає, що коли функція S є розв'язком рівняння, то й $S + C$ також буде розв'язком.

Стала C не має ніякого значення, оскільки при знаходженні координат і швидкостей кожного разу потрібно диференціювати функцію S . Тому вважатимемо, що $C = 0$, а S залежить лише від m параметрів. Отже, повний розв'язок рівняння (14.4) буде залежати від $2m + 1$ величини: m змінних q_j , часу t і m параметрів α_j , які виберемо за нові імпульси. Нові координати позначимо як β_j . Таким чином,

$$P_j = \alpha_j, \quad Q_j = \beta_j.$$

При цьому функцію $\Phi(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m; t)$ виберемо твірною. Оскільки твірна функція залежить від старих координат і нових імпульсів, то згідно співвідношень (13.30)

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j}, \quad Q_j = \beta_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Але оскільки твірна задовольняє рівняння Гамільтона-Якобі, то нова функція Гамільтона тотожно перетворюється в нуль:

$$H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Тому канонічні рівняння руху для нових змінних матимуть вигляд $\dot{\alpha}_j = 0$, $\dot{\beta}_j = 0$, звідки

$$\alpha_j = \text{const}, \quad \beta_j = \text{const}.$$

З іншого боку, m рівнянь $\partial \Phi / \partial \alpha_j = \beta_j$ дають можливість виразити m координат q_j через час і $2m$ сталих α_j і β_j . Тим самим ми знайдемо загальний інтеграл рівнянь руху.

Таким чином, розв'язок задачі про рух механічної системи методом Гамільтона-Якобі зводиться до наступної послідовності операцій. За функцією Гамільтона складається рівняння Гамільтона-Якобі і знаходиться повний інтеграл (14.5) цього рівняння. Диференціюючи його по

довільних сталих α_j і прирівнюючи до нових сталих β_j , отримуємо систему m алгебраїчних рівнянь $\partial S / \partial \alpha_j = \beta_j$, розв'язуючи яку, знаходимо координати q_j як функції часу і $2m$ довільних сталих. Залежність імпульсів від часу можна знайти за рівняннями $p_j = \partial S / \partial q_j$.

Теорема Якобі.

Функції $q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$, $p_j = p_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$, **отримані зі співвідношень**

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

є розв'язками канонічних рівнянь, де S – повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі.

Доведемо цю теорему. Продиференціюємо за часом $\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (14.6)$$

Підставимо розв'язок $S(t, q_1(t), \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ у рівняння Гамільтона-Якобі та продиференціюємо його по α_j :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (14.7)$$

Ми врахували, що похідні $\frac{\partial S}{\partial q_k}$, які містять сталі α_j , стоять в гамільтоніані H на місцях імпульсів p_k .

Рівняння (14.6) утворюють систему m алгебраїчних неоднорідних рівнянь, з яких можна знайти \dot{q}_k . Визначник цієї системи дорівнює

функціональному визначникові $\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \right|$, який не рівний нулю в силу

незалежності α_j у повному інтегралі $S(t, q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Аналогічну систему з тими ж коефіцієнтами утворять рівняння (14.7) відносно

$\frac{\partial H}{\partial p_k}$. Звідси слідує

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k=1, 2, \dots, m,$$

тобто ми приходимо до першої групи канонічних рівнянь.

Щоб одержати другу групу канонічних рівнянь, продиференціюємо співвідношення $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ ($j=1, 2, \dots, m$) по t :

$$\dot{p}_j = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k. \quad (14.8)$$

Далі продиференціюємо вираз $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\{q_j\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_j}\right\}, t\right) = 0$ по q_j :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0. \quad (14.9)$$

Порівнюючи (14.8) і (14.9), отримуємо

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Теорема Якобі доведена.

Справедлива також обернена теорема: *з розв'язків системи канонічних рівнянь*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

можна скласти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі

$$S(t, q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Розглянемо найбільш типові випадки використання методу Гамільтона-Якобі.

14.1.1. Консервативна система

Розглянемо консервативну механічну систему. В цьому випадку $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, тому рівняння Гамільтона-Якобі явно часу не містить і залежність дії S від часу, очевидно, зводиться до доданка $-H_0 t$:

$$S = S_0(q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - H_0 t, \quad (14.10)$$

де функція S_0 , що залежить тільки від координат, є укороченою дією.

Підставляючи (14.10) у (14.4), одержимо рівняння Гамільтона-Якобі для укороченої дії:

$$H\left(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}\right) = H_0. \quad (14.11)$$

14.1.2. Метод розділення змінних

Нехай координата q_k і відповідна похідна $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ входять у рівняння

Гамільтона-Якобі тільки у вигляді деякої комбінації $g\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)$, яка не містить ніяких інших координат, похідних $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ ($j \neq k$) і часу, тобто при-

пустимо, що рівняння в частинних похідних має наступну структуру:

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial t}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (14.12)$$

Шукаємо розв'язок (14.12) у вигляді суми

$$S = \tilde{S}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t) + S_k(q_k). \quad (14.13)$$

Підставивши цей вираз в (14.12), отримаємо

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_m, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k, \frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (14.14)$$

Але оскільки (14.13) є розв'язком (14.12), то рівняння (14.14) розпадається на два рівняння:

$$g\left(q_k, \frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right) = \alpha_k, \quad (14.15)$$

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \alpha_k\right) = 0, \quad (14.16)$$

де α_k – довільна стала.

Рівняння (14.15) є звичайним диференціальним рівнянням, з якого функцію $S_k(q_k)$ можна знайти простим інтегруванням. Після такого розділення ми одержимо рівняння в частинних похідних (14.16) з меншим (на одну) числом незалежних змінних.

У ряді випадків змінні можна розділити повністю. Якщо це можливо і механічна система консервативна, то знаходження повного інтеграла рівняння Гамільтона-Якобі повністю зводиться до квадратур. Для консервативної системи з m ступенями вільності шуканий повний інтеграл має вигляд

$$S = \sum_{j=1}^m S_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m)t, \quad (14.17)$$

де кожна з функції S_j залежить лише від однієї координати q_j , а H_0 як функція довільних сталих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ отримується в результаті підстановки $S_0 = \sum_{j=1}^m S_j$ в рівняння (14.11). Відмітимо, що H_0 можна вибрати також як одну зі сталих α . Метод розділення змінних містить у собі, зокрема, випадок циклічної координати.

Нехай, наприклад, q_1 – циклічна координата. Тоді рівняння (14.15) набуває вигляду

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1 \quad (14.18)$$

і його розв'язок знаходиться простим інтегруванням $S_1 = \alpha_1 q_1$. Легко бачити, що стала α_1 має зміст збереженого узагальненого імпульсу, спряженого координаті q_1 . Відзначимо, що відділення часу фактично відповідає методів розділення змінних, коли роль циклічної змінної відіграє t .

Приклад 14.1. Частинка маси m в однорідному постійному гравітаційному полі напруженості $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

Гамільтоніан системи запишемо в декартовій системі координат

$$H = \frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{2m} + mgz.$$

Рівняння Гамільтона - Якобі

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + mgz = 0. \quad (14.19)$$

Розв'язок (14.19) шукаємо у вигляді

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 y + S_3(z) - \alpha_3 t. \quad (14.20)$$

Тут ми поклали $H_0 = \alpha_3$. Підставляючи (14.20) в (14.10), одержимо

$$\left(\frac{dS_3}{dz} \right)^2 = 2m \left(\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right), \quad (14.21)$$

звідки

$$S_3(z) = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz; \quad (14.22)$$

$$S = -\alpha_3 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz. \quad (14.23)$$

Вираз (14.23) є повним інтегралом рівняння (14.19). Похідні S по α_i прирівнюємо до нових сталих:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (14.24)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y - \frac{\alpha_2}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (14.25)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}. \quad (14.25)$$

Обчислимо невизначений інтеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}$$

і результат підставимо в (14.24)–(14.25):

$$\beta_1 = x + \frac{2^{1/2} \alpha_1}{m^{3/2} g} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}, \quad (14.26)$$

$$\beta_2 = y + \frac{2^{1/2} \alpha_2}{m^{3/2} g} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}, \quad (14.27)$$

$$\beta_3 = -t - \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \sqrt{\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}\right) - mgz}. \quad (14.28)$$

З (14.26) і (14.27) випливає, що траєкторією частинки є парабола; рівнянням (14.28) визначається закон руху $z(t)$. Компоненти імпульсу q_x , q_y , що зберігаються, знайдемо зі співвідношень

$$q_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1, \quad q_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2.$$

Компоненту імпульсу q_z можна знайти як функцію z зі співвідношення

$$q_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \sqrt{2m(\alpha_3 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

14.1.3. Змінні “дія-кут”

Розглянемо консервативну механічну систему і припустимо, що іс-

нує хоча б один набір канонічних змінних, у якому всі змінні розділяються. Це потрібно розуміти так: можна відшукати канонічні змінні, в яких розв'язок рівняння Гамільтона-Якобі набуває вигляду (14.17). Далі припустимо, що досліджувані нами механічні системи можуть робити рухи, близькі до періодичного: ми розглядаємо такі рухи, у яких або кожна зі змінних $q_j(t)$, $p_j(t)$ є періодичною функцією часу з однаковим періодом, або кожен імпульс p_j є періодичною функцією координати q_j , у той час як сама координата не є періодичною функцією часу. У першому випадку рух називають лібрацією, у другому – обертанням. Слід також підкреслити, що тут q_j , p_j і є тим самим набором канонічних змінних, в якому змінні в рівнянні Гамільтона-Якобі повністю розділяються.

Відмітимо, що механічні системи, у яких реалізуються вищезгадані рухи, зустрічаються досить часто. Є системи, у яких можлива реалізація обох рухів – лібрація і обертання – в залежності від того, яка область значень параметрів і початкових значень реалізується. Для таких систем рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд

$$H\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right), \dots, g_m\left(q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}\right)\right) = H_0, \quad (14.29)$$

причому

$$g_j\left(q_j, \frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (14.30)$$

$$S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{j=1}^m S_{0j}(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (14.31)$$

$$H_0 = H(\alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (14.32)$$

Канонічні імпульси p_j , що визначаються співвідношенням

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}, \quad (14.33)$$

залежать тільки від q_j і є періодичними функціями цієї ж координати. Досить плідною є ідея переходу до таких “нових” канонічних змінних, у яких “нові” імпульси були б сталими руху J_j , що залежать від постійних $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$P_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (14.34)$$

а всі “нові” координати були б циклічними, тобто “новий” гамільтоніан залежав би тільки від імпульсів:

$$H = H(J_1, \dots, J_m). \quad (14.35)$$

З (14.33) видно, що в якості J_j можна вибрати

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (14.36)$$

де інтеграли беруться по повних періодах зміни імпульсів p_j як функцій відповідних координат.

“Нові” змінні J_j є незалежними функціями α_j , що випливає з (14.34):

$$J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (14.37)$$

Їх називають *змінними дії*. Розв’язуючи останні співвідношення відносно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, отримаємо

$$\alpha_j = \alpha_j(J_1, \dots, J_m), \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (14.38)$$

Підставляючи (14.38) у (14.32), знаходимо

$$H = H(J_1, \dots, J_m). \quad (14.39)$$

Укорочена дія $S_0(\{q_j\}, \{\alpha_j\})$ після підстановки в неї α_j з (14.38) набуває вигляду

$$S_0(q_1, \dots, q_m, J_1, \dots, J_m).$$

Але за встановленим вище змістом S_0 можна розглядати як твірну функцію канонічного перетворення до змінних, у яких $\{J_j\}$ відіграють роль імпульсів. “Нові” координати при такому перетворенні можна одержати зі співвідношень

$$Q_j \equiv \varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}. \quad (14.40)$$

“Нові” координати ми позначили φ_j ; вони називаються *кутовими змінними*.

Канонічні змінні J, φ називаються *змінними “дія-кут”*. Рівняння Гамільтона в цих змінних мають дуже простий вигляд:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H_0}{\partial J_j}, \quad (14.41)$$

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi_j} = 0. \quad (14.42)$$

Із (14.41) з урахуванням (14.39) отримуємо

$$\varphi_j = \frac{\partial H_0}{\partial J_j} t + \varphi_{j0} . \quad (14.43)$$

Кожна з кутових змінних, як бачимо, є лінійною функцією часу.

Покажемо, що величина $\omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial J_j}$ є частотою зміни імпульсу p_j .

Для цього знайдемо збільшення $\Delta\varphi_j$ за повний період зміни $p_j(q_j)$ за умови сталості всіх інших (крім q_j) координат:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_j &= \oint \frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k} dq_k = \oint \frac{\partial^2 S_0}{\partial J_j \partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint p_k dq_k = \\ &= 2\pi \frac{\partial J_k}{\partial J_j} = 2\pi \delta_{kj} , \end{aligned} \quad (14.44)$$

де δ_{kj} – символ Кронекера зі значеннями $\delta_{kj} = 1, k = j, \delta_{kj} = 0, k \neq j$. З іншого боку,

$$\Delta\varphi_j = \frac{\partial H_0}{\partial J_j} T_j , \quad (14.45)$$

де T_j – повний період зміни імпульсу p_j . Порівнюючи (14.44) з (14.45), отримуємо

$$2\pi = \frac{\partial H_0}{\partial J_j} T_j = \omega_j T_j , \quad (14.46)$$

звідки слідує, що величини

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T_j} \quad (14.47)$$

є частотами зміни імпульсів.

Фактично ми показали, що для знаходження частот ω_j немає необхідності розв'язувати динамічну задачу, тобто шукати $q_j(t)$. Для визначення ω_j потрібно:

- 1) визначити функції $p_j = p_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$;
- 2) знайти змінні дії як функції $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m : J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$;
- 3) визначити гамільтоніан H_0 як функцію J_1, J_2, \dots, J_m :

$$H_0(J_1, \dots, J_m);$$

4) знайти частинні похідні $\frac{\partial H_0}{\partial J_j} = \omega_j$.

Підкреслимо, що це твердження відноситься лише до систем, які можуть здійснювати рухи, близькі до періодичних в зазначеному на початку п. 14.1.3 розумінні. Рух довільної механічної системи з багатьма ступенями вільності в загальному випадку не є періодичним ні в цілому, ні по кожній з її координат окремо, незважаючи на те, що задача про рух цієї системи допускає повне розділення змінних у методі Гамільтона-Якобі. Можна показати, однак, що будь-яка однозначна функція механічного стану системи $f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$, виражена через змінні “дія-кут”, є періодичною функцією φ_j з періодом 2π . Тому її можна представити у вигляді розкладу в кратний ряд Фур’є виду

$$f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_m=-\infty}^{\infty} c_{j_1, j_2, \dots, j_m} e^{it(j_1\omega_1 + \dots + j_m\omega_m)}.$$

Кожний із членів цього ряду є періодичною функцією часу з частотою

$$j_1\omega_1 + \dots + j_m\omega_m.$$

Весь ряд, однак, не буде в цілому строго періодичною функцією, якщо всі частоти $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ не кратні який-небудь одній з них. Покладаючи $f = q_j$ або $f = p_j$, бачимо, що останнє зауваження відноситься і до q_j та p_j .

Приклад 14.2. Визначити частоти тривимірного анізотропного осцилятора.

Гамільтоніан системи

$$H = \frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{2m} + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2}.$$

Рівняння Гамільтона-Якобі для укороченої дії

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2} \quad (14.48)$$

зводиться до трьох звичайних диференціальних рівнянь:

$$g_1 \left(x \frac{\partial S_0}{\partial x} \right) = \left(\frac{dS_{01}}{dx} \right)^2 + (m\omega_1 x)^2 = q_x^2 + (m\omega_1 x)^2 = \alpha_1, \quad (14.49)$$

$$g_2 \left(y \frac{\partial S_0}{\partial y} \right) = \left(\frac{dS_{02}}{dy} \right)^2 + (m\omega_2 y)^2 = q_y^2 + (m\omega_2 y)^2 = \alpha_2, \quad (14.50)$$

$$g_3\left(z \frac{\partial S_0}{\partial z}\right) = \left(\frac{dS_{03}}{dz}\right)^2 + (m\omega_3 z)^2 = q_z^2 + (m\omega_3 z)^2 = \alpha_3. \quad (14.51)$$

При цьому

$$H_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2m},$$

а змінні дія - “нові імпульси” –

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint q_x dx, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint q_y dy, \quad J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint q_z dz. \quad (14.52)$$

Таким чином, у відповідних площинах фазові траєкторії являють собою еліпси з півосями $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_1}/m\omega_1$ у площині $q_x x$, $\sqrt{\alpha_2}$, $\sqrt{\alpha_2}/m\omega_2$ у площині $q_y y$ і $\sqrt{\alpha_3}$, $\sqrt{\alpha_3}/m\omega_3$ у площині $q_z z$ відповідно. Величини J_1 , J_2 , J_3 є площами цих еліпсів, поділеними на 2π . Тому

$$J_1 = \alpha_1/2m\omega_1, \quad J_2 = \alpha_2/2m\omega_2, \quad J_3 = \alpha_3/2m\omega_3$$

і

$$H_0(J_1, J_2, J_3) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 J_3.$$

Отже, частоти зміни імпульсів q_x , q_y , q_z рівні

$$\omega_x = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} = \omega_1, \quad \omega_y = \frac{\partial H_0}{\partial J_2} = \omega_2, \quad \omega_z = \frac{\partial H_0}{\partial J_3} = \omega_3.$$

14.2. Адіабатичні інваріанти

Важливою властивістю змінних дії є властивість *адіабатичної інваріантності*, яка полягає в тому, що ці змінні зберігають свої сталі значення й у тих випадках, коли гамільтоніан системи залежить від часу через деякі параметри $\lambda_j(t)$, які, як говорять, адіабатично змінюються з часом, тобто дуже повільно. Під повільними розуміють такі зміни, при яких $\lambda_j(t)$ мало змінюються за відрізки часу, рівні за порядком величини періодам T_j , тобто

$$\left| \frac{d\lambda_j}{dt} \right| T_j \ll \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (14.53)$$

Зрозуміло, що такі механічні системи не є строго ізольованими. Покажемо, що змінні дії в таких системах є адіабатичними інваріантами.

Розглянемо систему, що збігається в кожен момент часу з вивче-

ною вище консервативною системою, яка допускає повне розділення змінних. Припустимо також, що рух системи фінітний. Гамільтоніан такої системи явно залежить від параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, які задовольняють умовам (14.53); його можна представити у вигляді

$$H = H\{g_1(q_1, p_1, \lambda_1), \dots, g_m(q_m, p_m, \lambda_m)\}. \quad (14.54)$$

При постійних λ_j p_j є періодичними функціями відповідних координат q_j ; q_j у даному випадку є періодичними функціями часу.

Якщо параметри λ_j змінюються з часом повільно, то, незважаючи на те що система, яка описується гамільтоніаном (14.54), не консервативна, розв'язок рівняння Гамільтона-Якобі можна шукати у вигляді, близькому до (14.17):

$$S = -H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m)t + S_0(q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad (14.55)$$

де, однак, параметри λ_j , а значить і величини α_k та H_0 повільно змінюються з часом. Підставляючи (14.55) у рівняння Гамільтона-Якобі і нехтуючи в ньому членами, пропорційними $\dot{\lambda}_j$, одержимо рівняння “нульового наближення”

$$H\left\{g_1\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \lambda_1\right), \dots, g_s\left(q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \lambda_m\right)\right\} = H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (14.56)$$

В силу (14.53) це рівняння можна розв'язати, покладаючи всі λ_j постійними, і лише в побудованих розв'язках вважати їх заданими функціями часу. Тому всі формули, отримані вище для консервативної системи, залишаються справедливими, але в усі співвідношення тепер увійдуть залежні від часу параметри λ_j .

Твірна функція канонічного перетворення від змінних $(q), (p)$ до змінних $(\varphi), (J)$ визначається функцією S_0 , яка тепер буде залежати і від λ_j :

$$S_0 = S_0(q_1, \dots, q_m, J_1, \dots, J_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m). \quad (14.57)$$

Відмітимо, що J_j також залежать від λ_j .

Запишемо формули канонічного перетворення, генерованого функцією (14.57):

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}, \quad (14.58)$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (14.59)$$

$$\begin{aligned} H' = H + \frac{\partial S_0}{\partial t} = H(J_1, \dots, J_m; \lambda_1, \dots, \lambda_m) + \\ + \sum_{j=1}^m \frac{\partial S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j. \end{aligned} \quad (14.60)$$

Нові рівняння руху мають вигляд

$$\dot{\varphi}_k = \frac{\partial H'}{\partial J_k} = \frac{\partial H}{\partial J_k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial J_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (14.61)$$

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_k} = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (14.62)$$

В усіх формулах диференціювання по λ_j повинно виконуватися при постійних (q) і (J) ; після диференціювання у формулах (14.61), (14.62) виконується підстановка (14.59) і похідні $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ виражаються через $J_1, \dots, J_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Для доведення властивості адіабатичної інваріантності змінних J_k усереднимо рівняння (14.62) по інтервалу часу, малому в порівнянні з часом помітної зміни параметрів λ_j і досить великому в порівнянні з періодами системи. При такому виборі інтервалу часу величини λ_j (в силу їх повільної зміни) можна виносити з-під знака середнього. Отже,

$$\bar{\dot{J}}_k = -\sum_{j=1}^m \overline{\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j}} \dot{\lambda}_j, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (14.63)$$

Покажемо тепер, що похідні $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ є однозначними періодичними

функціями φ . Якщо це так, то їх тоді можна буде розкласти в ряди Фур'є, коефіцієнти яких залежатимуть від (J) та (λ) . У свою чергу ряди Фур'є для похідних $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)$ не будуть містити постійних членів, і тому

при усередненні по досить великому інтервалі часу всі похідні $\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j}$

перетворяться в нуль і адіабатична інваріантність усіх J_k буде доведена.

Слід відмітити, що S_0 – неоднозначна функція координат q_j , тому що згідно (14.58) її можна представити у вигляді

$$S_0 = \sum_{j=1}^m \int p_j dq_j . \quad (14.64)$$

За повний період зміни координати q_j (при інших фіксованих) S_0 набуває приросту

$$\Delta S_0 = \oint p_j dq_j = 2\pi J_j . \quad (14.65)$$

Функції $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ – однозначні функції координат, оскільки при диференціюванні по λ_j прирости, кратні $2\pi J_j$, які призводять до неоднозначності S_0 , зникнуть. В силу однозначності $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ є періодичними функціями кутових змінних φ_j ; ці функції не будуть змінювати свої значення при зміні φ_j на 2π (при заданих значеннях J_j). Іншими словами, будь-яка однозначна функція $F((q), (p))$, виражена через канонічні змінні φ, J , є періодичною функцією кожної φ_j з періодом, рівним 2π . Отже, усі $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$ є однозначними періодичними функціями (φ). Вище було показано, що в цьому випадку всі $\bar{J}_k = 0$ і, відповідно, всі

$$J_k = J_{k0} , \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Властивість адіабатичної інваріантності всіх змінних дії доведено.

Приклад 14.3. Як зміниться енергія зарядженої частинки е маси т у центральному полі $\Pi(r)$ при повільному включенні слабкого однорідного магнітного поля напруженості Н?

Запишемо функцію Гамільтона заряду в сферичній системі координат (вісь Oz декартової системи координат паралельна Н):

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r) - eHr_\varphi / 2mc - e^2 H^2 r^2 \sin^2 \theta / 8mc^2 .$$

Тут с – швидкість світла. За умовою задачі магнітне поле слабке, тому останнім членом (квадратичним по Н) нехтуємо.

Рівняння Гамільтона-Якобі з урахуванням цього набуває вигляду

$$E_0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \Pi(r) - \Omega/2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right), \quad (14.66)$$

де E_0 – енергія частинки, $\Omega = eH/mc$ – циклотронна частота.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$S_0 = S_{0r}(r, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + S_{0\theta}(\theta, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + p_{\varphi 0} \varphi.$$

Тут за постійну α_3 ми вибрали $p_{\varphi 0}$. Підставляючи S_0 в (14.66), отримуємо

$$\frac{r^2}{2m} \left(\frac{\partial S_{0r}}{\partial r} \right)^2 - (E_0 - \Pi(r) - \Omega p_{\varphi 0}/2) r^2 = -\alpha_1, \quad (14.67)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{0\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{p_{\varphi 0}^2}{2m \sin^2 \theta} = \alpha_1. \quad (14.68)$$

Вираз (14.67) визначає функцію $p_r(\alpha_1, E_0, p_{\varphi 0}, r)$, яка потрібна для обчислення змінної дії J_r :

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{2m(E_0 - \Pi(r) - p_{\varphi 0} \Omega(H)/2 - \alpha_1/r^2)}.$$

Очевидно, J_r буде збігатися з \tilde{J}_r , обчисленим для випадку $H = 0$, якщо в останньому виразі замість E_0 підставити комбінацію $E_0 - \Omega p_{\varphi 0}/2$. Отже, величина $E_0 - \Omega p_{\varphi 0}/2$ залишається постійною при повільному ввімкненні однорідного магнітного поля. Крім неї постійною буде величина $p_{\varphi 0}$ – компонента узагальненого імпульсу заряду. За фізичним змістом $p_{\varphi 0}$ – проекція моменту імпульсу заряду на вектор H .

Література

- [1] – Гл. VII, §§ 47–52
- [8] – Гл. 8, §§ 49
- [19] – Ч. 2, Гл. XI, § 5
- [20] – Гл. XX, § 140–142

Лекція 15

Вибрані задачі класичної механіки

15.1. Динаміка відносного руху

Якщо система $O'X'Y'Z'$ є абсолютною системою координат, то в ній рух матеріальної точки, згідно другому закону Ньютона, визначатиметься рівнянням

$$m\vec{a}_a = \vec{F}, \quad (15.1)$$

де \vec{a}_a – прискорення точки відносно абсолютної системи координат, а \vec{F} – рівнодійна сил, прикладених до цієї точки в її абсолютному русі по відношенню до системи $O'X'Y'Z'$.

Нехай $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ і \vec{a}_o – відповідно вектори кутової швидкості, кутового прискорення і прискорення початку O відносної системи координат $OXYZ$, що розглядається як тверде тіло, яке рухається довільно по відношенню до абсолютної системи. Тоді, згідно теореми додавання прискорень

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (15.2)$$

причому

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]], \quad \vec{a}_c = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]. \quad (15.2,a)$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (15.1), перепишемо його у формі

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c, \quad (15.3)$$

або, ввівши позначення,

$$\vec{S}_e = -m\vec{a}_e, \quad \vec{S}_c = -m\vec{a}_c, \quad (15.4)$$

і опускаючи індекс “r” в елементах відносного руху, приведемо рівність (15.3) до вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{S}_e + \vec{S}_c. \quad (15.5)$$

Вектори \vec{S}_e , \vec{S}_c називаються, відповідно, *переносною* та *королісовою силами інерції*. Формула (15.5) приводить до висновку, що *диференціальні рівняння динаміки відносно неінерціальної системи відліку складаються так само, як і в абсолютній системі, тільки до прикладених сил додаються сили інерції – переносна і коріолісова*.

Сили інерції для спостерігача, пов’язаного з неінерціальною системою відліку, є цілком реальними; вони разом з іншими прикладеними силами впливають на зміну руху по відношенню до цієї неінерціальної

системи. Відмітимо деякі особливі їх властивості.

Сили інерції, пропорційні, за визначенням, масам рухомих в неінерціальних системах відліку точок, в деякій мірі аналогічні силам тяжіння. Як показується в загальній теорії відносності, ця аналогія має глибокий фізичний зміст. Другою особливістю сил інерції є видима відсутність тих матеріальних тіл, які, згідно третього закону Ньютона, могли б розглядатися як джерела виникнення сил інерції. Ця обставина викликає уявлення про “фіктивність” сил інерції, що зовсім не виправдано, оскільки третій закон Ньютона сформульований тільки для абсолютної або інерціальних систем відліку і справедливість його в неінерціальній системі потребує підтвердження.

Третьою властивістю сил інерції є залежність їх від неінерціального руху системи відліку, в якій вони визначені.

Користуючись формулами (15.2,а), виразимо сили інерції у явному вигляді:

$$\begin{aligned}\vec{S}_e &= -m\vec{a}_o - m[\vec{\varepsilon}, \vec{r}] - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]], \\ \vec{S}_c &= -m2[\vec{\omega}, \vec{v}_r].\end{aligned}\quad (15.6)$$

У випадку плоского руху відносної системи вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до \vec{r} і

$$\vec{S}_e = -m\vec{a}_o - m[\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + m\omega^2\vec{r};$$

при рівномірному обертанні ($\vec{\varepsilon} = 0$) відносної системи навколо нерухомої або рівномірно і поступально рухомої по відношенню до абсолютної системи осі ($\vec{a}_o = 0$) отримаємо

$$\vec{S}_e = m\omega^2\vec{r}.$$

Це – відцентрова сила.

Коріолісова сила не буде входити у формули відносного руху, якщо відносна система рухається поступально ($\vec{\omega} = 0$) або якщо в силу характеру зв'язків точка вимушена рухатися паралельно осі обертання.

З рівняння відносного руху легко отримати рівняння відносної рівноваги. Для цього достатньо у формулах (15.5) покласти $\vec{a} = 0$ і $\vec{v} = 0$. Тоді $\vec{S}_e = 0$ і рівняння відносної рівноваги буде

$$\vec{F} + \vec{S}_e = 0. \quad (15.7)$$

Все, що до цих пір говорилось по відношенню до точки, може бути перенесене на випадок довільної системи точок. Прикладаючи сили інерції, ми можемо звести розгляд руху у відносній системі координат

до тих же рівнянь, що й в абсолютній.

Як уже відмічалось, загальні теореми динаміки витікали з диференціального рівняння руху (15.1). Це означає, що вказані теореми будуть справедливими і в неінерціальних системах відліку, якщо до сил, прикладених до точки (системи), додати переносні та коріолісові сили інерції. При цьому сили інерції формально слід відносити до зовнішніх сил. Так, наприклад, теорема про зміну імпульсу механічної системи в неінерціальній системі відліку має вигляд:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{S}_e + \vec{S}_c,$$

а теорема про зміну кінетичного моменту записується як

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)} + \vec{M}_O(\vec{S}_e) + \vec{M}_O(\vec{S}_c).$$

Тут $\vec{M}_O(\vec{S}_e)$ і $\vec{M}_O(\vec{S}_c)$ – головні моменти переносних і коріолісових сил інерції відносно центру O.

Теорема про зміну кінетичної енергії системи, яка відповідає її руху в неінерціальній системі координат описується загальним виразом

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} + \delta A_{S_e},$$

де останній доданок є роботою переносних сил інерції на тих самих переміщеннях, що й елементарні роботи внутрішніх та зовнішніх сил. Як бачимо, в цьому співвідношенні відсутня робота коріолісових сил інерції: ця робота рівна нулю, оскільки сила Коріоліса для кожної точки перпендикулярна її відносному переміщенню.

При виконанні деяких додаткових умов питання спрощується. Наприклад, теорему про зміну моменту імпульсу по відношенню до центру мас у відносній системі, що рухається поступально і має початок в центрі мас системи, можна застосовувати, не беручи до уваги сил інерції. Це пояснюється тим, що прискорення в переносному поступальному русі всіх точок системи однакові і, відповідно, головний момент переносних сил інерції рівний нулю, так як центр мас прийнятий за початок координат відносної системи. Головний момент коріолісових сил інерції також рівний нулю, оскільки вони при поступальному русі відносної системи рівні нулю.

Поряд з викладеним методом більше практичне значення при складанні рівнянь відносного руху має також метод рівнянь Лагранжа. Оскільки рух відносної системи по відношенню до абсолютної заданий, то

абсолютні координати (декартові або узагальнені) рухомої системи точок можуть бути виражені як функції відносних координат і часу. Приймаючи останні за незалежні узагальнені координати системи, складають рівняння Лагранжа, розв'язуючи які, знаходять відносні координати як функції часу, тобто рівняння відносного руху.

15.2. Неінерціальність системи відліку, пов'язаної з Землею

Система відліку пов'язана з Землею, є неінерціальною в силу, по крайній мірі, двох причин: її обертання навколо своєї осі і обертання навколо Сонця. Тому вважати її наближено інерціальною можна не в кожній задачі. Разом з тим, знаходячись на Землі і розглядаючи рух і рівновагу тіл відносно неї, зручніше врахувати неінерціальність Землі, ніж користуватись інерціальною геліоцентричною системою відліку, в якій Земля рухається досить складно.

Розглянемо деякі задачі, пов'язані з впливом неінерціальності системи відліку, пов'язаної з Землею, на параметри руху тіл.

15.2.1. Відносна рівновага точки поблизу поверхні Землі

Знайдемо умови відносної рівноваги вантажу на нитці, беручи до уваги обертання Землі. Притягання \vec{F} (рис. 15.1) вантажу Землею спотворюється дією відцентрової сили інерції \vec{S}_e , так що вага тіла, рівна натягу нитки \vec{N} , не буде рівною \vec{F} . Крім того, напрям підвісу DM не співпадає з напрямом радіуса MO Землі в даному пункті. Позначимо геоцентричну широту, тобто кут радіуса Землі з площиною земного екватора через λ , а географічну широту, тобто кут підвісної лінії з тією ж площиною, через φ . Тоді з умови рівноваги, проектуючи сили на уявну горизонталь HN , отримаємо

$$S_e \sin \varphi = F \sin(\varphi - \lambda).$$

Замінімо тут S_e і F за формулами

$$S_e = m\omega^2 R \cos \lambda,$$

$$F = mg_0,$$

де m – маса вантажу, R – середній радіус Землі, g_0 – прискорення, викли-

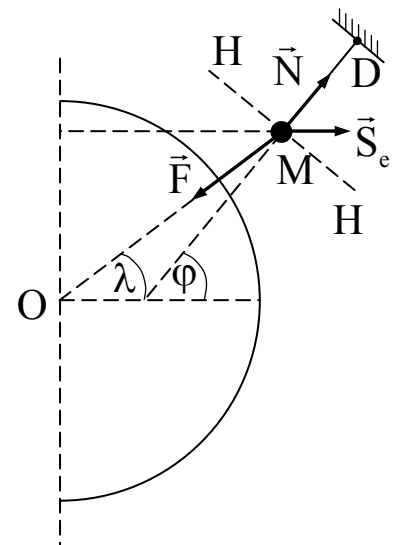


Рис. 15.1

кане притяганням Землі (це прискорення не слід ототожнювати з прискоренням g , зміненим відцентровою силою). Після заміни отримаємо

$$\sin(\varphi - \lambda) = \frac{\omega^2 R}{g_0} \sin \varphi \cos \lambda.$$

Враховуючи, що кутова швидкість Землі $\omega \approx 1/13700$ (с^{-1}), радіус Землі $R \approx 6350000$ (м) і прискорення $g_0 \approx 9,82$ ($\text{м}/\text{с}^2$), отримаємо

$$\omega^2 R / g_0 \approx 1/290,$$

так що різниця $(\varphi - \lambda)$ дуже мала і можна наближено вважати

$$\varphi - \lambda \approx \frac{\omega^2 R}{2g_0} \sin 2\lambda.$$

Максимальне значення цієї різниці при $\lambda = 45^\circ$ буде

$$\max(\varphi - \lambda) \approx 1/580,$$

що відповідає приблизно $11'$.

Проектуючи сили на напрям підвісу DM, знайдемо

$$N = mg = F \cos(\varphi - \lambda) - S_c \cos \varphi,$$

або, покладаючи $\cos \lambda \approx \cos \varphi$ (внаслідок малості кута $\varphi - \lambda$),

$$mg = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Звідси легко знайти відносну різницю між g і g_0 : $\frac{g_0 - g}{g_0} = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi$.

Максимальне значення це відношення має на екваторі ($\varphi = 0$):

$$\max(g_0 - g)/g_0 \approx 1/290.$$

Вага тіла на екваторі буде рівною $P = mg = mg_0(1 - \omega^2 R/g_0)$.

Якби Земля оберталася приблизно в 17 разів швидше, то тіла на екваторі не мали б ваги. Відцентрова сила зрівноважила б силу тяжіння. Область поблизу екватора в цьому випадку була б областю невагомості.

15.2.2. Вплив обертання Землі на вільне падіння тіл

Виберемо наступні осі координат (рис. 15.2): вісь $O'Z$ спрямуємо по лінії підвісу вниз, вісь $O'X$ – у площині меридіану на північ, вісь $O'Y$ – по паралелі на схід.

Включимо відцентрову силу до ваги тіла $P = mg$; тоді для складання рівнянь руху потрібно буде врахувати тільки коріолісову силу. Рівняння руху у векторній формі матиме вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}], \quad (15.8)$$

звідки, проектуючи на осі $O'X$, $O'Y$ і $O'Z$, отримаємо

$$m\ddot{x} = -2m(\omega_y v_z - \omega_z v_y),$$

$$m\ddot{y} = -2m(\omega_z v_x - \omega_x v_z),$$

$$m\ddot{z} = mg - 2m(\omega_x v_y - \omega_y v_x).$$

Як видно з рисунку (при використанні правої системи координат вектор кутової швидкості напрямлений на північ),

$$\omega_x = \omega \cos \varphi, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\omega \sin \varphi,$$

де φ – географічна широта місцевості.

Крім того,

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

і рівняння руху після скорочення на m набудуть вигляду

$$\ddot{x} = -2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = 2\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{z} = g - 2\omega \dot{y} \cos \varphi.$$

Будемо інтегрувати цю систему шляхом розкладу в ряди по степенях малої безрозмірної величини ωt . Якщо взяти, наприклад, висоту падіння $h = 180$ м, то час падіння $t \approx \sqrt{2h/g} \approx 6$ с і $\omega t < 0,0005$. Нехай початкові умови будуть: при $t = 0$ $x = y = z = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Покладемо

$$x = a_2 \omega^2 t^2 + a_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

$$y = b_2 \omega^2 t^2 + b_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

$$z = c_2 \omega^2 t^2 + c_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

(15.9)

і підставимо ці значення в приведену вище систему диференціальних рівнянь. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в лівих і правих частинах рівнянь, отримаємо систему рівностей для визначення сталих:

$$2a_2 \omega^2 = 0, \quad 6a_3 \omega^3 = -2\omega \sin \varphi \cdot 2b_2 \omega^2,$$

$$2b_2 \omega^2 = 0, \quad 6b_3 \omega^3 = 2\omega(\sin \varphi \cdot 2a_2 \omega^2 + \cos \varphi \cdot 2c_2 \omega^2),$$

$$2c_2 \omega^2 = g, \quad 6c_3 \omega^3 = -2\omega \cos \varphi \cdot 2b_2 \omega^2.$$

Звідси знаходимо

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = \frac{g}{2\omega^2},$$

$$a_3 = 0, \quad b_3 = \frac{g}{3\omega^2} \cos \varphi, \quad c_3 = 0.$$

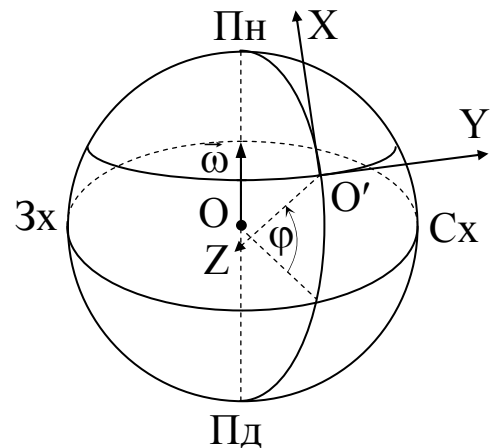


Рис. 15.2.

Повертаючись до рядів (15.9) і обмежуючись членами з $\omega^3 t^3$ в розкладах, отримаємо

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} g \omega \cos \varphi \cdot t^3, \quad z = \frac{gt^2}{2}.$$

Отриманий розв'язок показує, що внаслідок обертання Землі падаюче тіло отримує відхилення на схід ($y > 0$). При падінні тіла з висоти h відхилення його до сходу буде рівне

$$\Delta = \frac{1}{3} g \omega \cos \varphi \cdot \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}.$$

Взявши наступні члени в приведених вище рядах, ми знайшли б поправки до отриманих формул і, зокрема, відхилення до півдня. Такі поправки дуже малі, а невраховані фактори (зміна сили тяжіння з висотою, зміна широти місцевості, притягання точки Місяцем) можуть дати ефект того ж порядку, що й вказані поправки. Цим, мабуть, пояснюється негативний результат дослідів по визначенню відхилення на південь.

15.2.3. Вплив обертання Землі на рух тіла по горизонтальній площині

Враховуючи вплив відцентрової сили на величину і напрям сили тяжіння, проведемо горизонтальну площину перпендикулярно підвісу. Будемо мати наступні рівняння руху тіла по цій площині:

$$m\dot{\vec{v}} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}] + m\vec{g} + \vec{N}, \quad (15.10)$$

де \vec{N} – нормальна реакція площини. Так як вектори $[\vec{\omega}, \vec{v}]$, $m\vec{g}$, \vec{N} перпендикулярні до \vec{v} , скалярним множенням обох частин рівності (15.10) на вектор \vec{v} отримаємо

$$m\vec{v}\dot{\vec{v}} = 0,$$

або

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0.$$

З цієї рівності слідує, що швидкість руху постійна за величиною:

$$v = v_0.$$

Для визначення виду траєкторії спроектуємо рівняння руху на головну нормаль до траєкторії, тобто складемо друге природне рівняння руху. Позначаючи через \vec{n} одиничний вектор головної нормалі, отримаємо

$$m a_n = m\vec{a} \cdot \vec{n} = -2m\vec{n} \cdot [\vec{\omega}, \vec{v}],$$

так як скалярні добутки взаємно перпендикулярних векторів \vec{n}, \vec{g} і \vec{n}, \vec{N} перетворюються в нуль. Таким чином

$$a_n = \frac{v_o^2}{\rho}, \quad \vec{n} \cdot [\vec{\omega}, \vec{v}] = \vec{\omega} \cdot [\vec{v}, \vec{n}] = v_o \vec{\omega} \cdot [\vec{\tau}, \vec{n}] = v_o \vec{\omega} \cdot \vec{b},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до траєкторії, який домовимося напрямляти в ту ж сторону, що й \vec{v} , \vec{b} – одиничний вектор бінормалі. Тоді

$$\frac{v_o}{\rho} = -2\vec{\omega} \cdot \vec{b}. \quad (15.11)$$

У лівій частині цієї рівності стоїть додатня величина, тому в північній півкулі вектор \vec{b} повинен бути напрямлений по лінії підвісу вниз, тобто по додатному напрямі осі Z (рис. 15.2), і рівняння (15.11) набуде вигляду

$$\frac{v_o}{\rho} = 2\omega \sin \varphi. \quad (15.12)$$

Таким чином, траєкторією є коло радіуса

$$\rho = \frac{v_o}{2\omega \sin \varphi}. \quad (15.13)$$

Спостерігач, який в північній півкулі стоїть на горизонтальній площині і дивиться вздовж напрямку руху, побачить центр кривизни цього кола справа (рис. 15.3). Дійсно, осі природної системи координат утворюють праву систему, так що, направляючи вісь \vec{b} зверху вниз і дивлячись вздовж $\vec{\tau}$, ми побачимо \vec{n} напрямленим вправо.

У південній півкулі у відповідності з умовою (15.11) вектор бінормалі повинен бути напрямленим вздовж підвісу вгору, і, відповідно, якщо дивитись вздовж вектора швидкості (або $\vec{\tau}$), то вектор \vec{n} буде напрямлений вліво. Це означає, що траєкторія відхиляється від напрямку руху вліво.

Радіус кола, як слідує з рівності (15.13), дуже великий. Тому, вважаючи постійною широту місцевості φ , потрібно обмежитися розглядом невеликої дуги цього кола.

Позначаючи через δ відхилення, що відповідає пройденій тілом

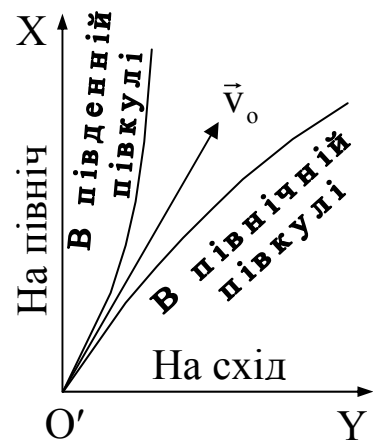


Рис. 15.3.

дузі S , матимемо наступну залежність між δ і S :

$$\delta = \rho(1 - \cos(S/\rho)),$$

або внаслідок малості кута S/ρ

$$\delta \approx S^2/2\rho.$$

Підставляючи сюди значення радіуса, отримаємо

$$\delta \approx \frac{\omega S^2 \sin \varphi}{v_0}.$$

Наприклад, артилерійський снаряд, що вилетів з швидкістю 500 м/с на широті 60° , дасть відхилення $\delta = 12,6 \cdot 10^{-8} S^2$, так що на відстані $S = 10^4$ м буде $\delta = 12,6$ м. Це відхилення отримано в припущенні горизонтальності польоту снаряду і збереженні ним незмінної швидкості, рівної початковій.

15.3. Принцип еквівалентності. Невагомість

Сили інерції, як уже відмічалось, за своїми проявами не відрізняються від фундаментальної сили, що діє в гравітаційному полі. Ця їх властивість обумовлена пропорційністю, а при відповідному виборі одиниць вимірювань – рівністю гравітаційної та інертної мас тіла. Розглянемо гравітаційну та інертну маси. В законі всесвітнього тяжіння

$$\vec{F} = -G \frac{m'_1 m'_2}{r^3} \vec{r}$$

і в другому законі Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ мова йде по суті про різні маси: m' – це гравітаційна маса, яка викликає силу тяжіння, а m – інертна маса, яка визначає прискорення при дії на тіло заданої сили. Пропорційність і рівність m' і m для всіх тіл не впливають з яких-небудь положень механіки, а є самостійними твердженнями – узагальненням експериментальних фактів.

Найважливішим наслідком рівності гравітаційної та інертної мас є рівність прискорень для всіх тіл в даній точці гравітаційного поля. Справді, знаходячи прискорення тіла масою m_1 з приведених вище формул, маємо:

$$\vec{g} = -G \frac{m'_2}{r^3} \vec{r},$$

куди маса розглянутого тіла не входить. Так само не залежать від маси і прискорення тіл, викликані силами інерції. Тому пропорційність граві-

таційної та інертної мас приводить до твердження про нерозрізнимість (в невеликій частині простору за малі проміжки часу) сил інерції і сил тяжіння. Це твердження носить назву *принципу еквівалентності*. Згідно цьому принципу поле тяжіння у невеликій області простору і часу за своєю дією тотожне дії сил інерції в прискореній системі відліку.

Принцип еквівалентності відіграв фундаментальну евристичну роль при створенні загальної теорії відносності, де рівноправними вважаються всі системи відліку, а не тільки інерціальні.

Прискорення сили тяжіння залежить від широти місцевості на Землі. Так як *вагою тіла називають чисельну величину (модуль) сили тяжіння, що діє на тіло, яке знаходиться поблизу земної поверхні*, то вага тіла також залежить від широти місцевості на Землі.

Можливий своєрідний стан тіла в прискореній системі, за якого відсутні сили реакції; він називається *невагомістю*. Розглянемо матеріальну точку в неінерціальній системі, пов'язаній зі штучним супутником Землі як тілом відліку. Рівняння руху матеріальної точки в системі супутника з урахуванням того, що супутник не має кутового прискорення, матиме вигляд:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a}_0 - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'].$$

Прискорення руху супутника \vec{a}_0 в (інерціальній) системі Землі знаходимо, застосовуючи другий закон Ньютона до супутника, на який діє сила притягання Землі:

$$m\vec{a}_0 = \vec{F}.$$

Але в такому випадку

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = 0$$

і остаточно отримаємо:

$$m\vec{a}' = \vec{R} - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'].$$

Вільна від зв'язків матеріальна точка рухається в системі супутника під дією відцентрової і коріолісовою сил, тоді як сила притягання до Землі виявляється виключеною з рівняння. Якщо кутова швидкість супутника мала, або рівна нулю, то тіла всередині нього рухаються з дуже малими прискореннями. При зіткненні нерухомого в супутнику тіла зі стінкою умова рівноваги тіла набуває вигляду

$$\vec{R} = m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}']],$$

або при $\vec{\omega} = 0$ $\vec{R} = 0$, тобто сили реакції відсутні. Такий стан і називається

вають невагомістю.

Неінерціальна система відліку, пов'язана з супутником у невеликій області простору навколо нього в розглянутому випадку руху супутника поводить себе як інерціальна система без сили тяжіння (такі системи в загальній теорії відносності називають локально інерціальними). На закінчення відмітимо, що супутник як тіло відліку не відрізняється від будь-якого тіла, що рухається в полі сили тяжіння, тому вищесказане про неінерціальну систему супутника справедливе для планет. Зокрема, в неінерціальній системі, пов'язаній з Землею, сила притягання до Сонця не фігурує.

15.4. Рух тіл змінної маси

15.4.1. Поняття про тіло змінної маси. Рівняння Мещерського

У класичній механіці Ньютона маса рухомого тіла розглядається тільки як постійна величина. Однак часто доводиться мати справу з випадками, коли маса тіл (механічних систем) за час руху змінюється.

Творцями основ механіки тіла змінної маси стали російські вчені *І.В. Мещерський* (1859 – 1935) та *К.Е. Ціолковський* (1857–1935).

У роботах «Динаміка точки змінної маси» (1897) та «Рівняння руху матеріальної точки змінної маси в загальному випадку» (1904) Мещерський вперше вивів рівняння руху точки змінної маси.

Роботи Ціолковського присвячені питанням руху ракет. Отриманим ним результати заклали основу сучасної науки про рух реактивних апаратів.

Тілом змінної маси називають тіло, маса якого змінюється з часом.

Якщо розмірами цього тіла в порівнянні з пройденими ним відстанями можна знехтувати, то його можна розглядати як точку змінної маси.

Точка змінної маси визначається математично як точка з масою, що є функцією часу $m(t)$. Якщо прийняти, що маса точки змінюється в результаті безперервного відкидання або приєднання матеріальних частинок, маси яких досить малі, одержимо можливість вважати функцію $m(t)$ неперервною і диференційованою.

При відкиданні елементарної матеріальної частинки виникає елементарна реактивна сила, що діє як на основну, так і на відокремлювану точки. Ці дві сили, що являють собою дію та протидію, рівні між собою

за модулем і спрямовані в протилежні сторони.

Якщо основна і відокремлювана точки розглядаються як єдина система, то сили взаємодії між ними є для цієї системи внутрішніми силами і маса такої системи не змінюється, залишаючись при русі постійною.

Звідси слідує, що до такої системи можна застосовувати теореми динаміки системи постійної маси. Припустимо, що в деякий момент часу t одна точка скінченої маси $m(t)$ рухається з абсолютною швидкістю \vec{v} , а інша, елементарної маси $dm(t)$, рухається з абсолютною швидкістю \vec{u} . У момент часу $t + dt$ ці точки утворять одну точку масою $m + dm$, абсолютна швидкість якої дорівнює $\vec{v} + d\vec{v}$. При цьому $dm > 0$ у випадку приєднання елементарної маси і $dm < 0$ при відділенні її від маси основної точки. Імпульс системи:

$$\begin{aligned} \text{у момент } t: & m\vec{v} + \vec{u}dm, \\ \text{у момент } t + dt: & (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}). \end{aligned}$$

Зміна імпульсу системи за час dt становить

$$d\vec{Q} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \vec{u}dm) = md\vec{v} + dm(\vec{v} - \vec{u}) + dmd\vec{v}. \quad (15.14)$$

За теоремою про зміну імпульсу механічної системи в диференціальній формі

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{F}^{(e)},$$

де $\vec{F}^{(e)}$ – рівнодійна зовнішніх сил, прикладених до точки скінченої маси.

З останнього рівняння, враховуючи вираз (15.14) і нехтуючи членом $dm \cdot d\vec{v}$ другого порядку малості, отримуємо:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \quad (15.15)$$

Тут $\vec{u} - \vec{v}$ – відносна швидкість приєднаної маси. Введемо відносну швидкість \vec{u}_r :

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}^{(e)} + \vec{u}_r \cdot \frac{dm}{dt}. \quad (15.16)$$

Позначимо

$$\vec{u}_r \cdot \frac{dm}{dt} = \vec{F}_r, \quad (15.17)$$

де \vec{F}_r – реактивна сила, рівна добуткові відносної швидкості маси, що приєднується, на секундне збільшення маси основної точки.

Тоді

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}^{(e)} + \vec{F}_r. \quad (15.18)$$

Рівняння (15.18) є основним рівнянням динаміки точки змінної маси і називається рівнянням Мещерського. З нього слідує, що рівняння руху точки змінної маси має вигляд основного рівняння динаміки точки постійної маси, що знаходиться під дією прикладених до неї сил і реактивної сили.

У тому випадку, коли абсолютна швидкість маси, що приєднується, дорівнює нулю, рівняння (15.18) набуває вигляду

$$m\dot{\vec{v}} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \vec{F}^{(e)},$$

або

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \quad (15.19)$$

Якщо ж дорівнює нулю відносна швидкість маси, що приєднується, то згідно (15.17) $\vec{F}_r = 0$ і рівняння (15.18) набуває вигляду основного рівняння динаміки точки постійної маси:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{(e)}.$$

15.4.2. Задачі Ціолковського

Розглянемо вільний рух ракети без урахування сил притягання до Землі й опору повітря. Ця задача відома як *перша задача Ціолковського*. У цьому випадку $\vec{F}^{(e)} = 0$.

Припустимо (рис. 15.4), що незмінна маса корпусу ракети дорівнює m_k , змінна маса палива – m_n , а

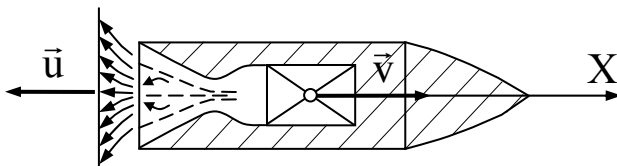


Рис. 15.4.

а маса газів, що проходять через вихлопний отвір сопла за 1 с, дорівнює $\frac{dm_n}{dt}$. Швидкість руху ракети

позначимо \vec{v} , а відносну швидкість

витікання продуктів горіння – \vec{u}_r .

Визначимо рух ракети рівнянням (15.16) при $\vec{F}^{(e)} = 0$ у проекціях на вісь X, спрямовану по осі ракети в бік її руху:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_{rx},$$

або

$$(m_k + m_n) \frac{dv_x}{dt} = u_{rx} \frac{dm_n}{dt}.$$

Підставляємо в отримане рівняння проекції швидкостей $v_x = v$;
 $u_{rx} = -u_r$:

$$(m_k + m_n) \frac{dv}{dt} = -u_r \frac{dm_n}{dt}.$$

Помноживши отримане рівняння на dt і розділивши змінні, проінтегруємо його в межах, що відповідають початковому моменту руху ракети $t_0 = 0$ і деякому моменту t при її русі:

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_{m_{n0}}^{m_n} u_r,$$

звідки

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{m_k + m_{n0}}{m_k + m_n}. \quad (15.20)$$

Коли весь запас палива згоряє, ракета має найбільшу швидкість.
 При $m_n = 0$

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{m_{n0}}{m_k} \right). \quad (15.21)$$

Це співвідношення називається *формулою Циолковського*. Вона показує, що максимальна швидкість ракети залежить від її початкової швидкості v_0 , відносної швидкості витікання продуктів згоряння u_r і відносного запасу палива m_{n0}/m_k . З (15.21) слідує, що гранична швидкість ракети не залежить від часу повного згоряння палива.

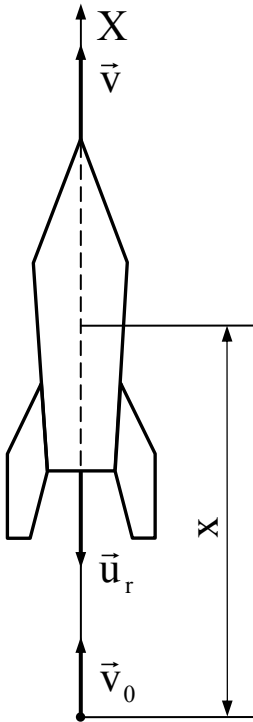
За допомогою формули (15.21) Циолковський склав таблицю максимальних швидкостей ракети в залежності від запасу палива і відносної швидкості продуктів згоряння.

З цієї таблиці випливає, що для досягнення першої космічної швидкості, рівної 7,9 км/с, за якої ракета стає супутником Землі, при відношенні маси палива до маси ракети $m_{n0}/m_k = 4$ швидкість продуктів згоряння повинна бути рівною 6 км/с.

Одержання настільки значних швидкостей витікання палива важко здійснити. Тому в даний час збільшення швидкості ракети досягається застосуванням багатоступінчатої ракети. Частини (ступені) такої ракети

після витрати палива, що в них міститься, автоматично відокремлюються від ракети. При кожному такому відділенні ракета набуває додаткової швидкості. Таким чином, остання ступінь ракети досягає швидкості, що забезпечує її рух як супутника Землі або політ у космічний простір.

У другій задачі Ціолковського розглядається рух ракети (точки змінної маси) по вертикалі поблизу поверхні Землі в однорідному полі



сили земного тяжіння ($g = \text{const}$) без урахування опору повітря. В цьому випадку на основі рівняння (15.18) в проекції на вертикальну вісь координат (рис. 15.5) отримуємо:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - u_r \frac{dm}{dt},$$

або, розділивши змінні,

$$dv = -gdt - u_r \frac{dm}{m}.$$

Після інтегрування знаходимо залежність швидкості ракети:

$$v = v_0 - gt + u_r \ln \frac{m_k + m_{n0}}{m_k + m_n}. \quad (15.22)$$

Рис. 15.5.

Залежність координати x ракети від часу у відповідності до формули (15.22) в цьому випадку дається рівністю

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} + u_r \int_0^t \ln \frac{m_k + m_{n0}}{m_k + m_n} dt. \quad (15.23)$$

Література

- [6] – Гл. XXX, §§ 164–169
- [8] – Гл. I, §§ 3, 4; Гл. 6, §§ 30–31
- [9] – Ч. I, Гл. IV, §§ 4.5, 4.6
- [10] – Р. III, Гл. 2, §§ 1–4
- [11] – Ч. III, Гл. 3, §§ 164–167

Лекція 16

Рух в центральньо-симетричному полі

16.1. Закони руху і рівняння траєкторії частинки в центральньо-симетричному полі

Важливе місце в механіці займає випадок руху тіл під дією центральної сили. *Центральною називають силу, лінія дії якої протягом всього часу руху проходить через одну і ту саму нерухому точку – центр сили.* У цьому випадку сила \vec{F}_r

$$\vec{F}_r = F_r \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (16.1)$$

де F_r – проекція сили на напрям радіус-вектора \vec{r} . Зауважимо, що F_r вважається додатньою у випадку відштовхування і від'ємною для сили притягання до силового центру.

Виберемо силовий центр (т. О) за початок координат. Момент сили \vec{F}_r відносно точки О:

$$\vec{M}_O = [\vec{r}, \vec{F}_r] = \left[\vec{r}, F_r \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0.$$

З іншого боку, за теоремою про зміну кількості руху

$$\dot{\vec{k}}_0 = \vec{M}_O.$$

Порівнюючи два останні вирази, приходимо до висновку, що *момент імпульсу точки, яка рухається під дією центральної сили, постійний:*

$$\vec{k}_0 = \overrightarrow{\text{const}} = \vec{C}_0. \quad (16.2)$$

Проектуючи вираз (16.2) на осі координат, з урахуванням визначення моменту імпульсу $\vec{k} = [\vec{r}, m\vec{v}]$, отримуємо три перші інтеграли руху:

$$\begin{aligned} k_{0x} &= m(yv_z - zv_y) = C_1, \\ k_{0y} &= m(zv_x - xv_z) = C_2, \\ k_{0z} &= m(xv_y - yv_x) = C_3, \end{aligned} \quad (16.3)$$

де C_1, C_2, C_3 – сталі величини. Однак із цих інтегралів лише два є незалежними. Дійсно, якщо помножити скалярно момент імпульсу на радіус-вектор \vec{r} , то отримаємо

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = m[\vec{r}, \vec{v}] \cdot \vec{r} = 0,$$

або, з урахуванням рівностей (16.3),

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

Це означає, що координати рухомої точки задовольняють рівнянню площини, яка проходить через початок координат.

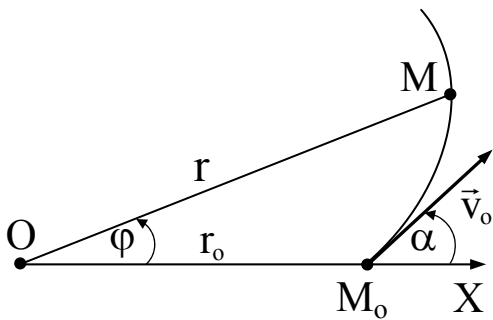


Рис. 16.1.

Звідси слідує, що під дією центральної сили точка завжди рухається по плоскій траєкторії. Остання обставина дає можливість скласти рівняння руху точки в полярних координатах. Полярну вісь проведемо через силовий центр O і початкове положення точки M_0 (рис. 16.1). Як відомо, сектор-

на швидкість точки

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}] = \frac{\vec{k}_0}{2m}. \quad (16.4)$$

З іншого боку, модуль секторної швидкості може бути представлений в полярних координатах:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}. \quad (16.5)$$

Порівнюючи останні два вирази і враховуючи співвідношення (16.2), маємо:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C_0}{2m} = C \quad (16.6)$$

і

$$\dot{\phi} = \frac{k_0}{mr^2} = \frac{C_0}{mr^2} = \frac{2C}{r^2}. \quad (16.7)$$

З формули (16.6) безпосередньо слідує співвідношення

$$S = S_0 + Ct, \quad (16.8)$$

яке виражає перший інтеграл рівнянь руху точки в полі центральної сили і називається *інтегралом площі*. Даний вираз свідчить про те, що **радіус-вектор точки, яка рухається під дією центральної сили за рівні проміжки часу описує однакові площі**.

Виведемо диференціальне рівняння траєкторії руху матеріальної точки у площині під дією центральної сили. Згідно другого закону Ньютона для радіальної і трансверсальної складових прискорення маємо:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r; \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0. \quad (16.9)$$

З другого рівняння безпосередньо слідує вираз, еквівалентний (16.8):

$$r^2 \dot{\phi} = \text{const}.$$

Виключимо час із системи (16.9), використовуючи формулу (16.8).

Маємо

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{2C}{r^2} = -2C \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\phi} \cdot \dot{\phi} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Підставляючи отримані вирази в першу рівність системи (16.4), отримуємо

$$m \left(-\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \frac{4C^2}{r^4} \right) = F_r,$$

звідки

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{F_r \cdot r^2}{4mC^2}. \quad (16.11)$$

Отримали *рівняння Біне*, яке і є шуканим диференціальним рівнянням траєкторії.

Вектор прискорення, а значить і сила, завжди напрямлені в бік угнутості траєкторії. Виходячи з рівняння Біне, можна зробити висновок, що у випадку притягання ($F_r < 0$) траєкторія повернута вгнутістю до полюса (центру притягання), а у випадку відштовхування ($F_r > 0$) – випуклістю до полюса (центру відштовхування). Траєкторія при центральному русі може мати точку перегину лише в тій точці простору, де сила перетворюється в нуль.

До визначення закону руху точки під дією центральної сили можна підійти, використовуючи закон збереження енергії.

Повна енергія точки

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} + \Pi(r),$$

або, виражаючи швидкість у полярних координатах,

$$E_0 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \Pi(r).$$

Тут і надалі потенціальна енергія $\Pi(r)$ вважається заданою. Врахувавши співвідношення (16.7), перепишемо останній вираз у вигляді

$$E_0 = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{k_0^2}{2mr^2} + \Pi(r). \quad (16.12)$$

Співвідношення (16.12) показує, що радіальну частину руху можна розглядати як одномірний рух у полі з потенціальною енергією

$$\Pi_{\text{eff}} = \Pi(r) + \frac{k_0^2}{2mr^2}, \quad (16.13)$$

яку називають *ефективним потенціалом*. Тоді

$$E_0 = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \Pi_{\text{eff}},$$

звідки

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - \Pi_{\text{eff}})}. \quad (16.14)$$

Останнє рівняння допускає розділення змінних r і t , виконавши яке, отримаємо:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - \Pi_{\text{eff}})}} + \text{const}. \quad (16.15)$$

Підставляючи рівняння (16.15) у співвідношення (16.7), знаходимо

$$\varphi = \pm \int \frac{k_0}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - \Pi_{\text{eff}})}} + \text{const},$$

або

$$\varphi = \pm k_0 \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{2m(E_0 - \Pi_{\text{eff}})}} + \text{const}. \quad (16.16)$$

Співвідношення (16.15) і (16.16) визначають закон руху точки в параметричній формі.

Вибір знаку в інтегралах (16.15) і (16.16) диктується початковими умовами; наприклад, знак перед інтегралом (16.15) визначається знаком похідної \dot{r} , взятої в початковий момент часу. Відмітимо також, що кут φ змінюється з часом завжди монотонно, оскільки $\dot{\varphi}$, як слідує з (16.7), ніколи не змінює знаку.

Область допустимих значень r визначається нерівністю $E_0 \geq \Pi_{\text{eff}}$. При $E_0 = \Pi_{\text{eff}}$ радіальна швидкість $\dot{r} = 0$. Це не означає зупинки частинки, як при одномірному русі, оскільки кутова швидкість $\dot{\varphi}$ не перетворюється

в нуль. Рівність $\dot{r} = 0$ визначає *точку повороту* траєкторії, в якій функція $r(t)$ переходить від зростання до спадання, або навпаки.

Якщо область допустимої зміни r обмежена лише однією умовою:

$$r \geq r_{\min} = \frac{k_0}{\sqrt{2mE_0}},$$

то рух частинки називається *інфінитним*, тобто відбувається в необмеженій області простору. Якщо область зміни r має дві границі

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max},$$

то рух є *фінитним*, і траєкторія точки повністю лежить всередині кільця, обмеженого колами з радіусами r_{\min} і r_{\max} .

Отриманий загальний розв'язок справедливий для будь-якої центральної сили. Рух точки в полі таких сил володіє загальними властивостями, а саме: *рух відбувається в нерухомій площині, яка проходить через силовий центр; радіус-вектор точки описує рівні площі за однакові проміжки часу; кут φ змінюється з часом монотонно; траєкторія точки симетрична відносно апсид – прямих, що проходять через центр сили і точки повороту.*

16.2. Рух частинки в полі кулонівського потенціалу. Закони Кеплера

Розглянемо тепер важливий частковий випадок – рух частинки маси m в полі кулонівського потенціалу, тобто центрально-симетричному полі виду

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (16.17)$$

Це, зокрема, може бути рух під дією притягання до центрального тіла, маса якого m_0 зосереджена в центрі O . У цьому випадку $\alpha = \gamma m m_0$, а сила

$$F_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} = -\gamma \frac{m m_0}{r^2},$$

де γ – гравітаційна стала.

Графік ефективного потенціалу

$$\Pi_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{k_0^2}{2mr^2}$$

має вигляд, зображений на рисунку 16.2,а. Якщо $r \rightarrow 0$, то $\Pi_{\text{eff}} \rightarrow +\infty$, а

при $r \rightarrow \infty \Pi_{\text{eff}} \rightarrow 0$ з боку від'ємних значень. В точці $r = \frac{k_0^2}{\alpha m}$ ефективний потенціал має мінімум, рівний

$$(\Pi_{\text{eff}})_{\text{min}} = -\frac{\alpha^2 m}{2k_0^2}.$$

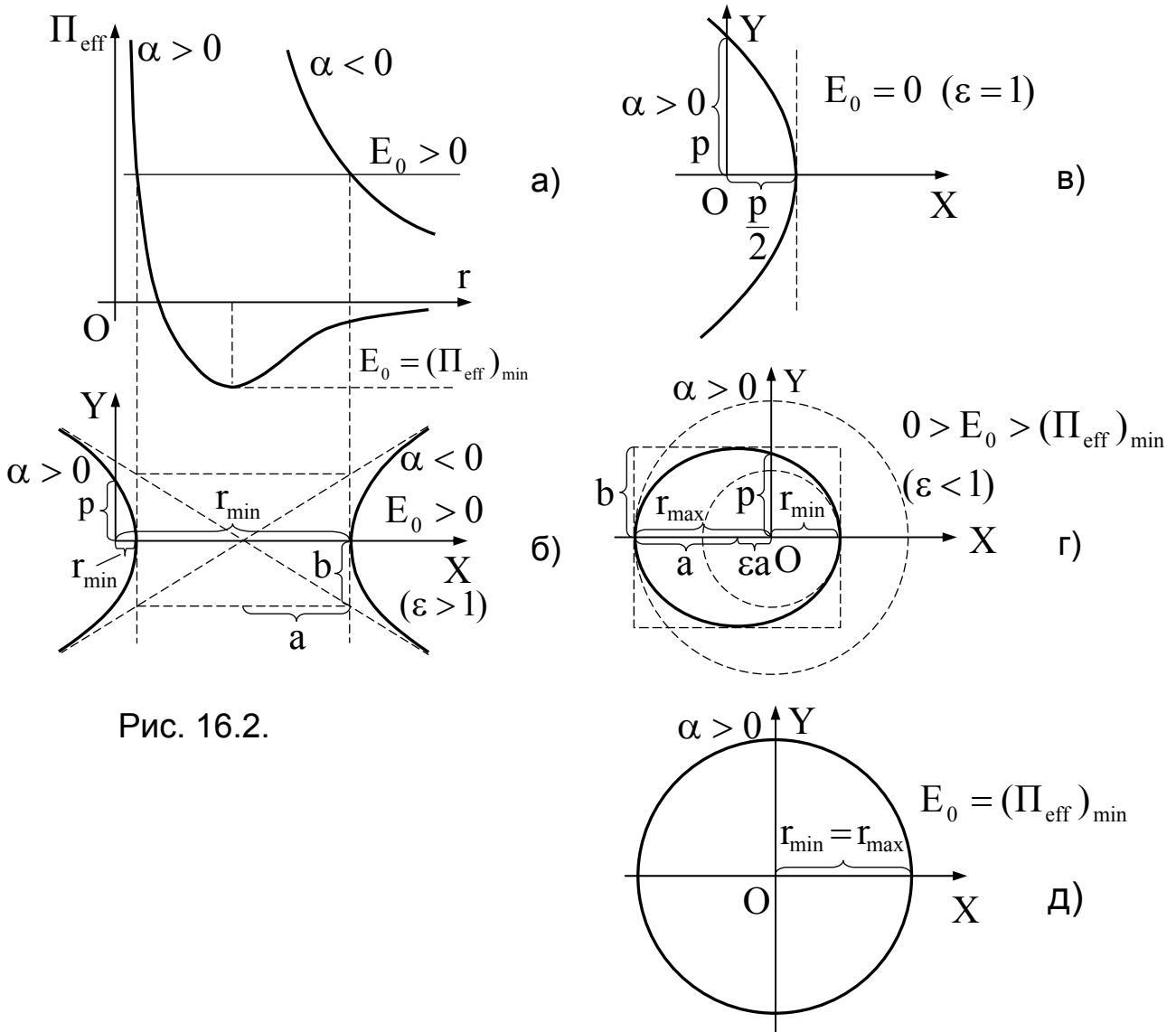


Рис. 16.2.

Аналізуючи графік Π_{eff} і беручи до уваги нерівність $E_0 \geq \Pi_{\text{eff}}$, переконуємось, що у випадку притягання ($\alpha > 0$) і невід'ємної повної енергії ($E_0 \geq 0$) рух точки відбуватиметься в необмеженій області, тобто буде інфінітним. У випадку $\alpha > 0$ і від'ємної енергії точка здійснюватиме фінітний рух. Зокрема, якщо $E_0 = (\Pi_{\text{eff}})_{\text{min}}$, то частинка рухається по колу. Нарешті, у випадку відштовхування ($\alpha < 0$) завжди $r \geq r_{\text{min}}$, а повна енергія додатня.

Форму траєкторії можна визначити на основі загального рівняння (16.16). Підставляючи туди вираз (16.17), отримуємо

$$\varphi = \pm k_0 \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{2m \left(E_0 - \frac{k_0^2}{2mr^2} \pm \frac{|\alpha|}{r} \right)}} + c;$$

$$\mp (\varphi - c) = \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2mE_0}{k_0^2} - \frac{1}{r^2} \pm \frac{2m|\alpha|}{k_0^2 r}}}.$$

Ввівши замість постійних E_0 і k_0 додатні сталі

$$p = \frac{k_0^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 k_0^2}{m\alpha^2}}, \quad (16.18)$$

запишемо останній інтеграл у вигляді

$$\mp (\varphi - c) = \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} - \frac{1}{r} \pm \frac{2}{pr}}} = - \int \frac{d(1/r)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p} \right)^2}}.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\varphi - c = \pm \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} \mp 1 \right).$$

Опускаючи знак “-” з огляду на парність косинуса, знаходимо рівняння траєкторії

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - c)}, \quad (16.19)$$

де знак “+” відповідає випадку притягання ($\alpha > 0$), а знак “-” – випадку відштовхування ($\alpha < 0$). Рівняння (16.19) є рівнянням кривої другого порядку, у фокусі якої знаходиться початок координат. Величина p називається *параметром орбіти*, стала ε – її *ексцентриситетом*, кут $(\varphi - c)$ – *істинною аномалією*. Якщо полярну вісь спрямувати на найближчу до центру сили точку траєкторії, то $c = 0$.

Як відомо, траєкторії виду (16.19) являють собою гіперболу (при $\varepsilon > 1$), параболу (при $\varepsilon = 1$), еліпс (при $\varepsilon < 1$) або коло ($\varepsilon = 0$) (рис. 16.2, б–д). З урахуванням (16.18), бачимо, що в заданому потенціальному полі $\Pi = -\alpha/r$ у випадку притягання траєкторією точки буде

гіпербола, якщо $E_0 > 0$;	парабола, якщо $E_0 = 0$;
еліпс, якщо $0 > E_0 > (\Pi_{\text{eff}})_{\text{min}}$;	коло, якщо $E_0 = (\Pi_{\text{eff}})_{\text{min}}$.

У випадку відштовхування точка може рухатися тільки по гіперболі.

Розглянемо конкретніше фінітний рух частинки по еліптичній орбіті (рис. 16.2,г). Як відомо, велика a й мала b півосі еліпса можуть бути визначені як

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (16.20)$$

Використовуючи формули (16.18), величини a і b можна виразити через сталі E_0 і k_0 :

$$a = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{k_0}{\sqrt{2m|E_0|}}. \quad (16.21)$$

Звідси бачимо, що велика піввісь еліптичної орбіти залежить від повної енергії частинки і не залежить від значення її кінетичного моменту.

Точка еліптичної орбіти, яка знаходиться на найменшій віддалі від притягуючого центру, називається *перигелієм*, а найбільш віддалена від центру – *афелієм*. Як слідує з рівняння (16.19),

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon), \quad (16.22)$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon). \quad (16.23)$$

Знайдемо період руху частинки по еліптичній орбіті, використовуючи інтеграл площ

$$dS = \frac{k_0}{2m} dt.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\int_0^S dS = \frac{k_0}{2m} \int_0^T dt,$$

$$S = \frac{k_0}{2m} T.$$

Врахувавши, що площа еліпса $S = \pi ab$, і використовуючи формули (16.21), знаходимо:

$$T = \frac{2\pi abm}{k_0} = \frac{2\pi am}{\sqrt{2m|E_0|}}, \quad (16.24)$$

або

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3 m}{\alpha}}. \quad (16.25)$$

Таким чином, період обертання по еліптичній орбіті залежить тільки від повної енергії (або від величини великої півосі) і не залежить від моменту імпульсу (і від величини малої півосі).

З виразу (16.25) слідує,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}.$$

Зокрема, якщо $\alpha = \gamma m m_0$, то

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_0} = \text{const.} \quad (16.26)$$

Рівняння орбіти (16.19), інтеграл площ (16.8) і співвідношення між періодом та великою піввіссю (16.26) є математичним вираженням *трьох законів Кеплера*, встановлених ним емпірично в результаті обробки спостережень над рухом планет. В цих законах стверджується, що

1) *кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце* (перший закон);

2) *при русі планети навколо Сонця її радіус-вектор планет за рівні проміжки часу описує однакові площі* (другий закон);

3) *відношення квадратів періодів обертання планет до кубів великих півосей їх орбіт постійне і для всіх планет однакове* (третій закон).

Закони Кеплера справедливі також для руху як природних, так і штучних супутників планет. Однак, варто пам'ятати, що ці закони виконуються лише в тих умовах, у яких вони отримані. Слід відмітити, що другий закон Кеплера справедливий для будь-якої центральної сили, тоді як перший і третій виконуються лише для випадку центрально-симетричного поля виду (16.17).

16.3. Задача двох тіл

Під *задачею двох тіл* розуміють задачу про рух двох взаємодіючих точок за відсутності зовнішніх сил. Особлива важливість цієї задачі полягає в тому, що вона допускає повний розв'язок у вигляді відомих функцій. В подальшому цей розв'язок можна приймати за нульове наближення при вивченні складніших механічних систем.

Розглянемо рух точок з масами m_1 і m_2 (рис. 16.3), якщо потенціальна енергія їх взаємодії залежить тільки від відстані між точками:

$$\Pi = \Pi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|), \quad (16.27)$$

а зовнішні сили відсутні.

Рівняння руху точок відносно інерціальної системи відліку S з початком у точці O мають вигляд

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{21}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|). \end{aligned} \quad (16.28)$$

Характерно, що в розглянутій системі відліку змінні \vec{r}_1 і \vec{r}_2 не розділяються. Для усунення цього недоліку перейдемо до нових змінних

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (16.29)$$

Тоді

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m} \vec{r},$$

де $m = m_1 + m_2$.

Відносно довільної іншої інерціальної системи з початком у деякій точці O'

$$\vec{r}'_1 = \vec{R}' - \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \vec{R}' + \frac{m_1}{m} \vec{r},$$

причому $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$.

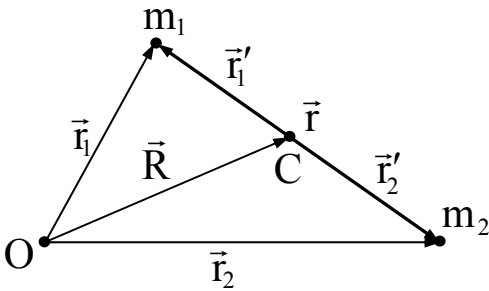


Рис. 16.3.

Найбільш зручним є перехід до системи відліку S_m , початок якої співпадає з центром мас C точок (рис. 16.3). У цьому випадку $\vec{R}' = 0$ і

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m} \vec{r}. \quad (16.30)$$

Тоді прискорення точок у системі центру мас будуть рівними:

$$\ddot{\vec{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m} \ddot{\vec{r}}, \quad \ddot{\vec{r}}'_2 = \frac{m_1}{m} \ddot{\vec{r}}. \quad (16.31)$$

Як відомо, диференціальні рівняння руху інваріантні відносно інерціальної системи відліку. Тому співвідношення (16.28) набудуть вигляду

$$m_1 \ddot{\vec{r}}'_1 = \vec{F}_{21}(|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|), \quad m_2 \ddot{\vec{r}}'_2 = \vec{F}_{12}(|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|).$$

З урахуванням формул (16.30) і (16.31) останні рівняння запишуться:

$$m_1 \cdot \left(-\frac{m_2}{m} \right) \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \left(\left| -\frac{m}{m_2} \vec{r}'_1 \right| \right), \quad m_2 \cdot \frac{m_1}{m} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} \left(\left| \frac{m}{m_1} \vec{r}'_1 \right| \right),$$

або

$$-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(|\vec{r}|), \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(|\vec{r}|).$$

Оскільки $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то бачимо, що отримані рівняння еквівалентні.

Таким чином, обидва рівняння зводяться до одного:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(|\vec{r}|), \quad (16.32)$$

де $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – *зведена маса системи*.

Вираз (16.32) є рівнянням руху однієї точки в заданому полі з центром сили, поміщеним в центр мас системи двох точок. Іншими словами, задача двох тіл зводиться до еквівалентної задачі про рух фіктивної точки з масою μ в центрально-симетричному полі з нерухомим центром.

Проінтегрувавши рівняння (16.32) і знайшовши його розв'язок $\vec{r}(t)$, на основі співвідношень (16.30) можна визначити закони руху точок відносно системи S у вигляді

$$\vec{r}_1'(t) = -\frac{m_2}{m} \vec{r}(t), \quad \vec{r}_2'(t) = \frac{m_1}{m} \vec{r}(t).$$

Таким чином, відносно системи центру мас обидві взаємодіючі точки рухаються у площині, яка проходить через центр мас і зберігає свою орієнтацію відносно інерціальної системи відліку. Траєкторії обох точок подібні, а центр подібності знаходиться в центрі мас, причому відношення подібності рівне відношенню мас точок.

Оскільки на μ -точку “діє” центральна стаціонарна потенціальна сила, то мають місце закони збереження моменту імпульсу та енергії відносно системи відліку, пов'язаної з центром мас:

$$\mu[\vec{r}, \vec{v}] = \vec{k}_0, \quad \frac{\mu v^2}{2} + \Pi(|\vec{r}|) = E_0. \quad (16.33)$$

16.4. Розсіювання частинок на силовому центрі

16.4.1. Пружне розсіювання частинок

В теоретичній механіці в рамках задачі двох тіл розв'язують в основному дві задачі: задачу визначення значень енергії системи, траєкторій частинок, що рухаються в обмеженій області простору, і *задачу розсіювання* частинок, яка включає в себе дослідження пружного розсіюван-

ня. Розсіювання двох частинок називають пружним, якщо цей процес не супроводжується зміною внутрішнього стану взаємодіючих частинок.

Постановка задачі розсіювання полягає в наступному. Перш за все зручно вважати початковим моментом часу $t_0 = -\infty$. При цьому передбачається, що при $t = -\infty$ частинки не взаємодіють між собою (є вільними), оскільки вони нескінченно віддалені одна від одної і внаслідок цього енергія їх взаємодії, є спадною функцією відстані між ними, рівна нулю. В подальшому частинки взаємодіють між собою, однак при $t \rightarrow \infty$ вони розходяться на велику відстань і їх енергія взаємодії знову перетворюється в нуль.

Задача полягає в тому, щоб визначити механічний стан системи частинок при $t = \infty$, задавши їх стан при $t = -\infty$. У квантовій механіці стан частинок при $t = -\infty$ називають In-станами, а при $t = \infty$ – Out-станами. Тому доцільно дотримуватися цієї термінології і в теоретичній механіці. Легко бачити, що механічний стан системи, яка складається з двох частинок, при $t = -\infty$ і $t = \infty$ визначається їх швидкостями (або імпульсами), тому вектори $\vec{v}_1^- = \vec{v}_1(-\infty)$, $\vec{v}_2^- = \vec{v}_2(-\infty)$ характеризують In-стани, а вектори $\vec{v}_1^+ = \vec{v}_1(\infty)$, $\vec{v}_2^+ = \vec{v}_2(\infty)$ – Out-стани системи. Крім того потрібно також задати маси частинок m_1 , m_2 , енергію їх взаємодії $\Pi(r)$ і деякий параметр ρ , який називається *прицільною відстанню*.

Швидкості частинок задаються відносно деякої інерціальної системи відліку, яку в теорії розсіювання зазвичай називають лабораторною системою або l -системою. Якщо розглядається задача розсіювання двох пучків частинок (припускається, що в одному з пучків усі частинки мають однакові маси, скажімо m_1 , і швидкості \vec{v}_1^- , а в другому m_2 і \vec{v}_2^-) то, як буде показано далі, потрібно також задати кут ψ , що визначає орієнтацію площини руху кожної з пар відносно системи відліку, пов'язаної з центром мас довільної пари (цю систему називають μ -системою).

Задачу розсіювання двох частинок можна розв'язати в загальному вигляді, використовуючи отриманий вище розв'язок задачі двох тіл. Дійсно, задачу двох тіл зведемо до задачі про рух μ -точки і потім, враховуючи збереження швидкості центру мас системи, що розглядається, в процесі розсіювання (внаслідок того, що система ізольована), знаходимо

$$\vec{v}_1^+ = \vec{V} - \frac{m_2}{m} \vec{v}^+, \quad \vec{v}_2^+ = \vec{V} + \frac{m_1}{m} \vec{v}^+, \quad m = m_1 + m_2, \quad (16.34)$$

де $\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1^- + m_2 \vec{v}_2^-}{m}$ – швидкість центру мас, а $\vec{v}^+ = \vec{v}_2^+ - \vec{v}_1^+$ швидкість μ -точки після розсіювання. Величину v^+ знайдемо з закону збереження енергії для μ -точки (закон збереження енергії в задачі двох тіл відносно ψ -системи):

$$\frac{\mu(v^+)^2}{2} + \Pi|_{t=\infty} = \frac{\mu(v^-)^2}{2} + \Pi|_{t=-\infty}. \quad (16.35)$$

Але так як $\Pi|_{t=\infty} = \Pi|_{t=-\infty} = 0$, то $v^+ = v^-$. Тому $\vec{v}^+ = v^- \vec{n}_\theta$, де $v^- = |\vec{v}_2^- - \vec{v}_1^-|$, а одиничний вектор \vec{n}_θ напрямлений по \vec{v}^+ або \vec{v}_2^+ .

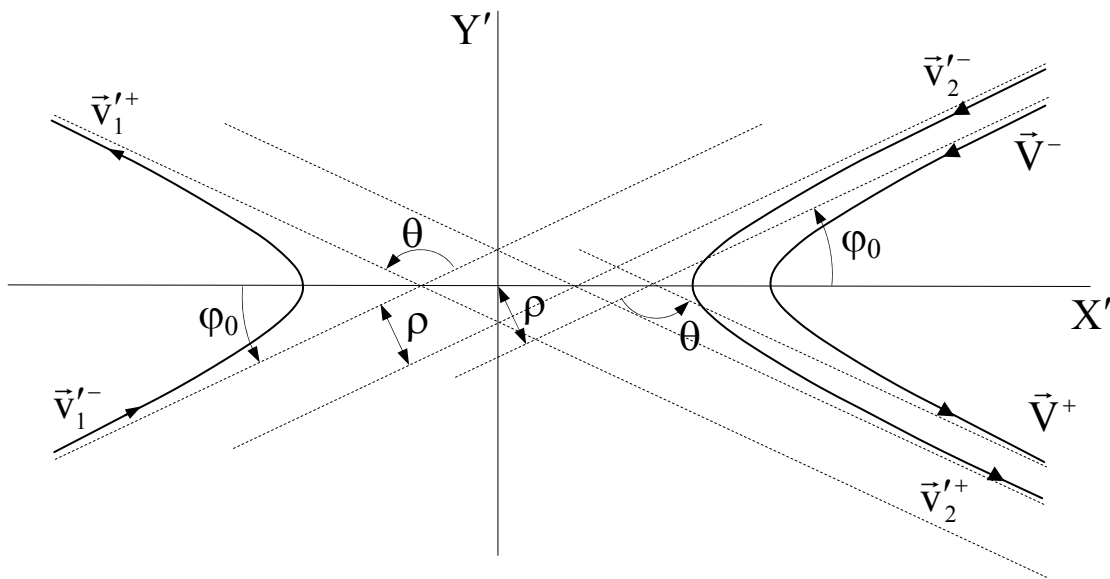


Рис. 16.4.

Процес розсіювання в ψ -системі можна зобразити графічно (рис. 16.4) на площині $X'OY'$, яка є площиною руху взаємодіючих частинок.

Нагадаємо, що при $m_1 = m_2$ (як на рис. 16.4) згідно (16.30)

$$\vec{r}'_1 = -\vec{r}/2, \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}/2,$$

де \vec{r} – радіус-вектор μ -точки.

Оскільки в ψ -системі в будь-який момент часу $\vec{q}'_1 + \vec{q}'_2 = 0$ (і, значить, $\vec{q}'_1^+ + \vec{q}'_2^+ = 0$ і $\vec{q}'_1^- + \vec{q}'_2^- = 0$), то кут між \vec{v}'_1^+ і \vec{v}'_2^+ рівний куту між \vec{v}'_1^- та \vec{v}'_2^- . Тому швидкості частинок в будь-який момент t напрямлені протилежно. Таким чином, результат пружного розсіювання частинок зводиться в ψ -системі до повороту швидкостей обох частинок, які залишаються взаємно протилежними і незмінними за величиною. Але оскільки вектор \vec{v}'_2^+ паралельний \vec{v}^+ , цей кут рівний куту відхилення μ -точки.

Позначимо кут відхилення як θ . Врахуємо, що полярний кут φ_0 виражається через визначений інтеграл:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{k'_0}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E_0 - \Pi(r) - k'_0{}^2/2\mu r^2)}}, \quad (16.36)$$

де точка повороту r_{\min} є коренем рівняння

$$E_0 - \Pi(r) - k'_0{}^2/2\mu r^2 = 0.$$

В підінтегральний вираз (16.36) входять параметри, які характеризують μ -точку. Очевидно, що

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (16.37)$$

Тут була використана загальна властивість симетричності траєкторії по відношенню до прямої, проведеної до найближчої до центру поля точки орбіти. Тому обидві асимптоти орбіти μ -точки, перетинають вказану пряму під однаковими кутами. Кут θ називають *кутом розсіювання* в системі центру мас; він рівний куту між двома асимптотами до траєкторії μ -точки, а φ_0 – кут між асимптотою траєкторії і апсидальним вектором.

Прицільна відстань – це відстань між асимптотами траєкторій частинок в μ -системі, по яких частинки рухаються до розсіювання. Її також можна визначити як мінімальну відстань, на якій частинки пролетіли б одна від одної за відсутності взаємодії між ними.

В задачі розсіювання збережні величини E_0 і k'_0 прийнято записувати через швидкість v^- і прицільну відстань ρ :

$$E_0 = \frac{\mu(v^-)^2}{2}, \quad k'_0 = \mu r v^- \sin(\vec{r} \cdot \vec{v}^-) = \mu \rho v^-,$$

оскільки $\rho = r \sin(\vec{r} \wedge \vec{v}^-)$. Звідси видно, що ρ рівна довжині перпендикуляра, опущеного з центру поля на асимптоту траєкторії μ -точки. Іншими словами це мінімальна відстань, на якій μ -точка пройшла б від центру, якби взаємодія між нею та полем була взагалі відсутня.

Формулами (16.34) і (16.37) дається розв'язок задачі пружного розсіювання двох частинок. Ця задача є лише частковим випадком задачі двох тіл, коли потрібно знати тільки швидкості частинок після розсіювання при $t \rightarrow \infty$. Кут розсіювання θ залежить лише від ρ , v^- , а також типу взаємодії частинок та параметрів, які її характеризують, тобто ви-

гляду функції $\Pi(\vec{r})$:

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2\Pi(r)/(\mu v^-)^2 - \rho^2/r^2}}. \quad (16.38)$$

16.4.2. Діаграми швидкостей та імпульсів

Загальним результатом, отриманим вище на основі законів збереження енергії та імпульсу, можна дати геометричну інтерпретацію, зображуючи на графіку імпульси частинок в l -системі. Для цього помножимо формули (16.34) на m_1 і m_2 відповідно:

$$\vec{q}_1^+ = \frac{m_1}{m} (\vec{q}_1^- + \vec{q}_2^-) - \mu v^- \vec{n}_\theta, \quad (16.39)$$

$$\vec{q}_2^+ = \frac{m_2}{m} (\vec{q}_1^- + \vec{q}_2^-) + \mu v^- \vec{n}_\theta. \quad (16.40)$$

Побудуємо коло радіуса μv^- і вектори (16.39), (16.40) (рис. 16.5).

При заданих \vec{q}_1^- і \vec{q}_2^- радіус кола і положення точок А і В незмінні, а точка

С може мати будь-яке положення на колі. Розглянемо випадок, коли одна з частинок (для визначеності маси m_1) при $t = -\infty$ нерухома, тобто $\vec{v}_1^- = 0$. В

цьому випадку $\vec{v}^- = \vec{v}_2^-$, $\vec{AO} = \frac{m_2}{m} \vec{q}_2^-$,

$\vec{AB} = \vec{q}_2^-$, $\vec{OB} = \frac{m_1}{m} \vec{q}_2^- = \mu \vec{v}^-$ і в за-

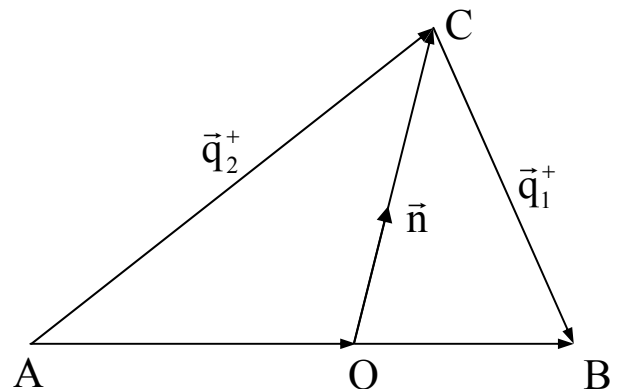


Рис. 16.5.

лежності від співвідношення мас m_1 та

m_2 отримаємо діаграми, зображені на рис. 16.6. Вказані тут кути θ_1 і θ_2 є

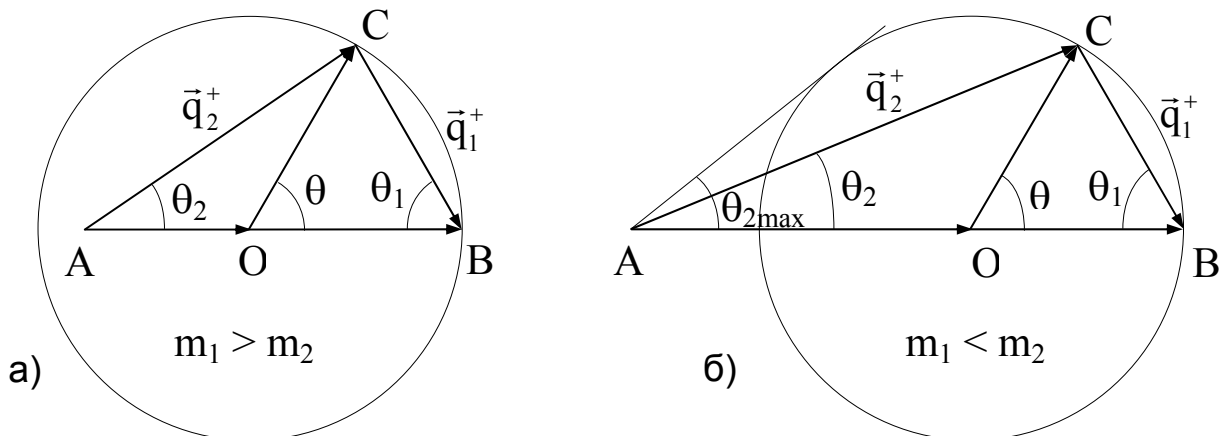


Рис. 16.6

кутами відхилення (розсіювання) частинок після зіткнення по відношенню до напрямку руху налітаючої частинки імпульсу \vec{q}_2^- (напрямок удару).

Кутом θ задається напрям вектора \vec{p}_θ , тому цей кут є кутом повороту частинки масою m_2 в системі центру мас. З геометричних міркувань знаходимо:

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \text{tg } \theta_2 = \frac{m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1 \cos \theta}. \quad (16.41)$$

Абсолютні значення швидкостей обох частинок як функції θ можна знайти з формул

$$v_1^+ = 2 \frac{m_2}{m} v^- \sin \frac{\theta}{2}, \quad (16.42)$$

$$v_2^+ = \frac{v^-}{m} \sqrt{m_2^2 + m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}. \quad (16.43)$$

Сумарний кут

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{arctg} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta + (m_2 - m_1)/m_1}$$

є кутом розходження частинок після зіткнення. Бачимо, що $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$

при $m_1 > m_2$ і $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ при $m_2 > m_1$.

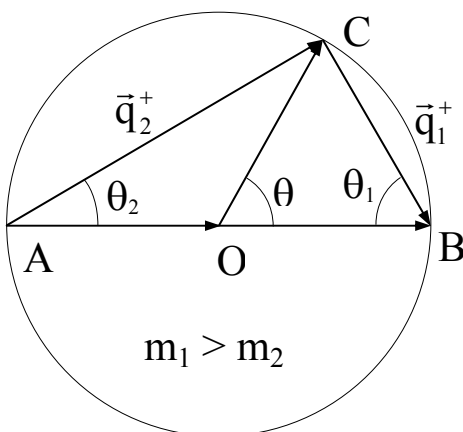


Рис. 16.7.

При $m_1 > m_2$ швидкість частинки, яка спочатку рухалася, після зіткнення може мати довільний напрям, але якщо $m_2 > m_1$, то її кут відхилення обмежений значенням, що відповідає такому положенню точки С, при якому пряма АС дотикається кола. При цьому

$$\sin \theta_{2\text{max}} = \frac{OC}{AO} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Якщо $m_1 = m_2$ і, крім того, $\vec{v}_1^- = 0$ то діаграма імпульсів зовсім спрощується (рис. 16.7).

Те ж саме стосується і формул, які виражають зв'язок $\theta_1, \theta_2, \vec{v}_1^+, \vec{v}_2^+$ з кутом θ :

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\theta}{2},$$

$$v_1^+ = v^- \sin \frac{\theta}{2}, \quad v_2^+ = v^- \cos \frac{\theta}{2}.$$

Очевидно, в цьому випадку кут розльоту $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо тепер випадок так званого лобового удару, коли обидві частинки після зіткнення рухаються вздовж однієї прямої: $\theta = \pi$, \vec{q}_1^+ , \vec{q}_2^+ , або взаємно протилежні (якщо $m_1 > m_2$), або напрямлені в одну сторону (якщо $m_2 > m_1$). Швидкості частинок після зіткнення отримаємо з (16.34) у вигляді

$$\vec{v}_1^+ = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2^-, \quad \vec{v}_2^+ = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2^-. \quad (16.44)$$

З (16.44) видно, що при лобовому ударі частинка, яка спочатку перебувала в спокої, набуває після зіткнення максимально можливої енергії:

$$E_1^+ = \frac{m_1 (v_1^+)^2}{2} = 4 \frac{m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} E_2^-,$$

де $E_2^- = \frac{m_1 (v_1^-)^2}{2}$ – енергія рухомої до зіткнення частинки.

16.4.3. Ефективний поперечний переріз розсіювання

Фізична задача розсіювання полягає у визначенні характеристик пучка частинок маси m_1 , які до розсіювання мали однакові швидкості \vec{v}_1^- , на пучку частинок маси m_2 , швидкості яких до розсіювання також однакові і рівні \vec{v}_2^- . При цьому вважається, що обидва пучки однорідні за своїми перерізами і що кожен з пучків розріджений настільки, що взаємодію між частинками всередині самого пучка можна не враховувати. Оскільки обидва пучки розріджені, процес розсіювання кожної частинки одного пучка на частинці другого можна вважати одинарним.

Основні характеристики процесу розсіювання отримаємо в μ -системі для μ -точки. Різні пари частинок, тобто різні μ -точки, володіють різними прицільними відстанями і відповідно до них розсіюються під різними кутами (рис. 16.8).

Очевидно, що центри мас усіх μ -точок нерухомі відносно один одного, тому кут θ для кожної даної пари взаємодіючих частинок буде одним і тим же відносно системи відліку з початком в центрі мас

довільної пари. Можна вибрати одну з таких систем відліку, назвавши її умовно ζ -системою. Саме відносно такої системи відліку розглядається процес розсіювання.

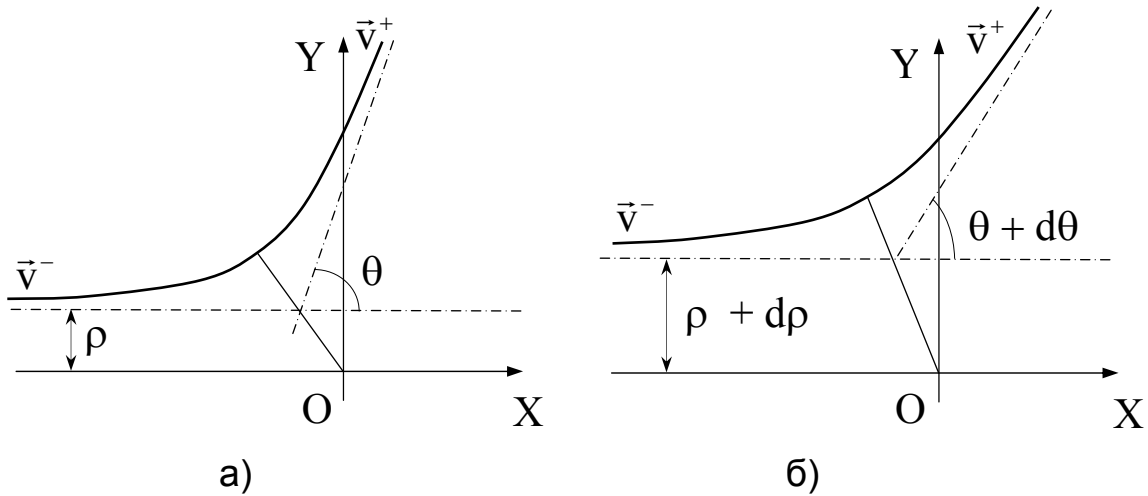


Рис. 16.8

Точка, яка має прицільну відстань ρ , відхиляється на кут θ в ζ -системі, а точка (маються на увазі μ -точки) з прицільною відстанню $\rho + d\rho$ розсіюється на кут $\theta + d\theta$ (рис. 16.8). Відповідно μ -точки, прицільні відстані яких лежать всередині інтервалу $\rho, \rho + d\rho$, розсіюються на кути від θ до $\theta + d\theta$.

Позначимо через dN число частинок, що розсіюються за одиницю часу на кути, які лежать між θ і $\theta + d\theta$. Це число буде залежати від густини падаючого пучка частинок n , і тому воно незручне для характеристики процесу розсіювання. Введемо величину

$$d\sigma = dN/n, \quad (16.45)$$

де n – число частинок, які проходять за одиницю часу через одиницю площі поперечного перерізу пучка, тобто густина потоку частинок. Тоді $d\sigma$ буде мати розмірність площі. Це відношення називають *ефективним (диференціальним) перерізом розсіювання*. Як бачимо, воно визначається винятково видом поля розсіювання (тобто видом взаємодії).

Якщо зв'язок між θ і ρ взаємно однозначний (що буде у випадку, коли кут розсіювання є монотонно спадною функцією прицільної відстані), то в заданий інтервал кутів між θ і $\theta + d\theta$ будуть розсіюватися лише ті частинки, які пролітають всередині кільця між колами радіусів $\rho(\theta)$ і $\rho(\theta) + d\rho(\theta)$. Тоді $dN = n2\pi\rho(\theta)d\rho$, а ефективний переріз розсіювання

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)d\rho(\theta). \quad (16.46)$$

Залежність ефективного перерізу розсіювання від кута розсіювання дається цією ж формулою, яку потрібно переписати у вигляді

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)|d\rho/d\theta|d\theta. \quad (16.47)$$

В (16.46) входить модуль похідної $|d\rho/d\theta|$, оскільки вона в більшості випадків від'ємна.

Ефективний переріз $d\sigma$ можна віднести до елементу тілесного кута $d\Omega$. Тілесний кут між конусами с кутами розхилу θ і $\theta + d\theta$ становить $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Тому

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin(\theta)} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (16.48)$$

Відмітимо, що значення кута ψ , який фіксує площину розсіювання довільної μ -точки, змінюється в межах від 0 до 2π .

Для знаходження ефективних перерізів в залежності від кутів θ_1 і θ_2 в l -системі потрібно виразити у формулі (16.48) θ через θ_1 і θ_2 згідно формул (16.41). Якщо $\rho(\theta)$ – багатозначна функція кута θ , то потрібно взяти суму по всіх вітках цієї функції. При цьому отримуються формули як для перерізу розсіювання падаючого пучка частинок $d\sigma(\theta_1)$, так і для частинок, які спочатку знаходилися в стані спокою, $d\sigma(\theta_2)$.

16.4.4. Ефективний переріз розсіювання частинок з електростатичною взаємодією. Формула Резерфорда

Застосуємо отримані формули до одного з найважливіших фізичних прикладів – розсіювання електрично заряджених частинок. Враховуючи, що в цьому випадку потенціальна енергія $\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r}$, з (16.36) і (16.37) знаходимо

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha x}{(\mu v^-)^2 \rho} - x^2}}, \quad x = \frac{\rho}{r}.$$

Тут μ – зведена маса, $v^- = |\vec{v}_2^- - \vec{v}_1^-|$ – відносна швидкість частинок до розсіювання, а x_{\max} – додатній корінь рівняння

$$x^2 - \frac{2\alpha x}{\mu v^{-2} \rho} - 1 = 0, \quad x_{\max} = \frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho}\right)^2 + 1}.$$

Обчислюючи інтеграл, для кута розсіювання в ζ -системі отримуємо

$$\theta = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu(v^-)^2 \rho}. \quad (16.49)$$

У випадку сил притягання ($\alpha > 0$) кут розсіювання від'ємний, а якщо взаємодія носить характер відштовхування ($\alpha < 0$), то $\theta > 0$. З (16.49) маємо

$$\rho = -\frac{\alpha}{\mu(v^-)^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (16.50)$$

Диференціюючи цей вираз по θ і підставляючи результат в (16.48), знаходимо

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu(v^-)^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

або

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu(v^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (16.51)$$

Отриманий вираз називається *формулою Резерфорда*. Бачимо, що ефективний переріз розсіювання не залежить від знаку α , так що формулою Резерфорда описується як випадок притягання, так і відштовхування.

В ряді задач теорії розсіювання можна ввести поняття повного ефективного перерізу розсіювання як величини, рівної відношенню числа частинок, що розсіюються за одиницю часу під всіма кутами θ , до густини потоку падаючих частинок:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_{(\Omega)} d\sigma(\Omega). \quad (16.52)$$

З цієї формули слідує, що коли радіус дії сил обмежений (потенціальна енергія взаємодії має вигляд $\Pi(r)$ при $r < R$, $\Pi(r) = 0$ при $r > R$), то величина σ_{tot} буде рівною площі круга радіуса R :

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2. \quad (16.53)$$

Якщо ввести повний переріз для процесу розсіювання заряджених частинок, то легко показати, що він перетворюється на нескінченість. В цьому випадку кажуть, що повний переріз розбіжний. Ця розбіжність пов'язана з існуванням взаємодії між частинками при як завгодно вели-

ких прицільних відстанях, тобто фактично вона виникає через нескінченно великий “радіус дії” кулонівських сил. Справа в тому, що при обчисленні σ_{tot} ми враховуємо внесок усіх розсіяних частинок, включаючи частинки з прицільною відстанню $\rho \rightarrow \infty$ і відповідно $\theta \rightarrow 0$. Легко помітити, що при $\theta \rightarrow 0$ розходиться і $d\sigma$, оскільки

$$d\sigma|_{\theta \rightarrow 0} \cong 8\pi \left(\frac{\alpha}{2\mu(v^-)^2} \right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3} \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Слід відмітити, що ця розбіжність присутня і в формулах $d\sigma^{\text{KB}}|_{\theta \rightarrow 0}$, отриманих методами квантової теорії. Її причина також пов’язана з далекодіючим характером кулонівських сил.

16.4.5. Захоплення частинок. Повний переріз захоплення

Розглянемо графіки ефективних потенціалів, представлені на рис. 16.9. На рис. 16.9,а зображено випадок, коли для всіх (будь-яких) In-станів існують Out-стани, в то час як у випадку рис. 16.9,б деякі In-стани не

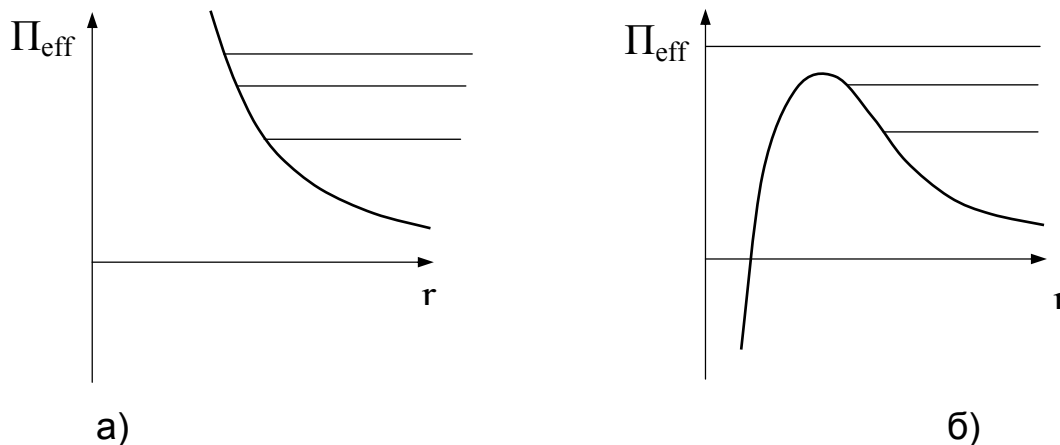


Рис. 16.9

мають Out-станів. Легко помітити, що частинки, які знаходяться при $t \rightarrow -\infty$ в In-станах з енергіями $E > P_{\text{max}}$, будуть падати на центр поля.

Подібно до того як це було зроблено для задачі розсіювання, тут також можна ввести деяку фізичну величину, зручну для характеристики процесу. Якщо мова йде про взаємодію пучків частинок, то відсутність Out-станів у такій задачі, очевидно, означає, що обидві частинки при $t = \infty$ здійснюють фінітний рух. В такому випадку говорять про захоплення частинок. Процес характеризують повним перерізом захоплення, що визначається як відношення числа частинок даного пучка, захопленого за одиницю часу, до густини потоку цього пучка до розсіювання. Як і раніше,

задача захоплення двох частинок зводиться до задачі про рух μ -точки.

Умови падіння на центр поля μ -точки запишемо, використовуючи параметри задачі розсіювання \vec{v}^- і ρ :

$$\frac{\mu(v^-)^2}{2} \geq \Pi(r) + \frac{\mu(v^-)^2 \rho^2}{2 r^2} \quad (16.54)$$

і далі

$$0 \geq r^2 \Pi(r) \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{\mu(v^-)^2 \rho^2}{2}. \quad (16.55)$$

Цією формулою і визначаються умови падіння на центр поля.

Очевидно, якщо $\Pi(r) > 0$, тобто взаємодія носить характер відштовхування, нерівність (16.55) не виконується при жодних значеннях ρ . У випадку ж притягання, по крайній мірі, якщо сили притягання швидко спадають при $r \rightarrow 0$, падіння стає можливим хоча б для деяких ρ : $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$. Отже, в цьому випадку при $\rho < \rho_{\max}$ відбувається захоплення частинок. Повний переріз захоплення, згідно даного вище визначення, обчислюється за формулою

$$\tilde{\sigma}_{\text{tot}} = \pi \rho_{\max}^2. \quad (16.56)$$

Література

- [1] – Гл. IV, §§ 16–20
- [6] – Гл. XX, §§ 92–94
- [8] – Гл. 3, §§ 11–14
- [9] – Ч. I, Гл. III, §§ 3.1–3.3

Лекція 17

Малі коливання механічних систем

17.1. Ознаки стійкості положення рівноваги

Малі коливання належать до найпоширеніших видів рухів механічних систем. Вони відбуваються в околі т.зв. *положення стійкої рівноваги*, що потребує чіткого визначення останнього і встановлення ознак, які характеризують це положення.

Загальне уявлення про положення стійкої рівноваги можна створи-

ти, розглянувши малі відхилення точок системи від рівноважних положень при наданні їм малих початкових швидкостей. Якщо після такого виведення з рівноваги у процесі подальшого руху системи відстані точок до їх рівноважних положень весь час залишатимуться малими, то розглянуте положення рівноваги буде стійким.

Строге математичне визначення поняття стійкого положення рівноваги належить відомому математику та механіку О.М. Ляпунову.

Нехай положення системи в довільний момент часу t визначається узагальненими координатами q_j ($j=1, \dots, n$). Початкові значення координат і швидкостей (в момент часу t_0), які відповідають положенню рівноваги, позначимо, відповідно, через q_j^0 і \dot{q}_j^0 ($j=1, \dots, n$).

Положення рівноваги називається стійким, якщо для будь-яких наперед вибраних малих додатніх чисел ε_1 і ε_2 можна вказати два інші малі числа $\mu_1 > 0$ і $\mu_2 > 0$, такі, що при $\mu_1 > |q_j^0|$ і $\mu_2 > |\dot{q}_j^0|$ усі біжучі значення узагальнених координат q_j і узагальнених швидкостей \dot{q}_j в довільний момент часу задовольняють умовам

$$|q_j| < \varepsilon_1, \quad |\dot{q}_j| < \varepsilon_2.$$

В положенні рівноваги механічної системи всі узагальнені сили Q_j рівні нулю. У випадку потенціального силового поля

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, n).$$

Таким чином, у положенні рівноваги потенціальна енергія системи задовольняє необхідні умови екстремальності

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n). \quad (17.1)$$

Достатні умови стійкості положення рівноваги сформульовані в теоремі Лагранжа-Діріхле: **для того, щоб положення рівноваги системи з голономними зв'язками в консервативному силовому полі було стійким, достатньо, щоб потенціальна енергія системи в цьому положенні мала мінімум.**

Для доведення теореми припустимо, що потенціальна енергія системи в рівноважному положенні має мінімум, значення якого в силу визначеності функції Π з точністю до адитивної сталої покладемо рівним нулю:

$$\Pi_{\min} = \Pi(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) = 0.$$

Крім того, не порушуючи загальності, вважатимемо, що координати системи в положенні рівноваги також рівні нулю. Тоді, в околі положення рівноваги – точки мінімуму – можна вказати таку область значень координат (т.зв. *область мінімуму функції*)

$$|q_j| \leq \varepsilon,$$

в якій значення потенціальної енергії будуть додатними. Припустимо, що найбільше значення потенціальної енергії в області мінімуму рівне A .

Якщо потенціальна енергія довільної точки $M(q_1, q_2, \dots, q_n)$, достатньо близької до положення рівноваги, задовольняє умові

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) < A,$$

то ця точка лежить в області мінімуму.

Виведемо систему з досліджуваного положення рівноваги. Нехай Π_0 – початкове значення потенціальної енергії. За заданим ε можна так визначити число $\mu(\varepsilon)$, щоб при всіх $|q_j^0| \leq \mu(\varepsilon)$ мала місце нерівність

$$\Pi_0 < A.$$

Для цього досить вибрати початкове положення системи в області мінімуму функції Π .

Якщо система підкоряється ідеальним стаціонарним зв'язкам, то існує інтеграл енергії і

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

В силу того, що кінетична енергія системи завжди невід'ємна, то

$$\Pi \leq T_0 + \Pi_0.$$

При цьому початкові швидкості завжди можна підібрати так, щоб сума $T_0 + \Pi_0$ була меншою A . Дійсно, для цього достатньо, щоб T_0 була меншою різниці $A - \Pi_0 > 0$. Звідси слідує, що початкові швидкості точок системи можна визначити так, щоб виконувалась нерівність $\Pi < A$, причому в довільний момент часу. Це означає, що система залишається в області мінімуму і рухається з обмеженими швидкостями, тобто, що досліджуване положення рівноваги є стійким.

На основі теореми Лагранжа-Діріхле не можна стверджувати, що відсутність мінімуму потенціальної енергії в положенні рівноваги системи означає нестійкість стану рівноваги. Так само залишається відкритим питання, чи завжди положенню стійкої рівноваги відповідає міні-

мум потенціальної енергії. У багатьох випадках встановити нестійкість положення рівноваги можна на основі теорем Ляпунова.

1. Рівновага системи є нестійкою, якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія не має мінімуму і його відсутність визначається членом другого порядку в розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат.

2. Рівновага системи є нестійкою, якщо її потенціальна енергія в положенні рівноваги має максимум, наявність якого може бути встановлена з розгляду членів найменш високого порядку в розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат.

17.2. Коливання систем з багатьма степенями вільності

17.2.1. Інтегрування рівнянь малих коливань

Розглянемо невільну механічну систему з ідеальними стаціонарними голономними зв'язками, яка володіє s степенями вільності. Припустимо, що задані сили, які діють на точки системи, потенціальні й стаціонарні, а в системи існує хоча б одне положення стійкої рівноваги. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що початок координат співпадає з положенням стійкої рівноваги системи.

В силу стаціонарності зв'язків кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (17.2)$$

де коефіцієнти цієї квадратичної форми $A_{jk} = A_{kj}$ є функціями координат точок системи і не залежать явно від часу. Розкладемо коефіцієнти A_{jk} в ряд Маклорена по зростаючих степенях координат:

$$A_{jk} = (A_{jk})_0 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^m \left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

У цій формулі $(A_{jk})_0$, $\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_j} \right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0$, ... – значення відповідних кое-

фіцієнтів розкладу в початку координат, тобто в положенні рівноваги системи. Розглядатимемо лише настільки малі відхилення точок системи від положення рівноваги і рухи з такими малими за абсолютним значенням узагальненими швидкостями, що у виразі кінетичної енергії

можна залишити тільки члени другого порядку малості. Тоді (17.3) наближено запишеться у вигляді

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m (A_{jk})_0 \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (17.4)$$

Таким чином, кінетична енергія буде додатньо визначеною квадратичною формою узагальнених швидкостей з постійними коефіцієнтами.

Припускаючи, що в положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія володіє ізольованими мінімумом і розкладаючи її в тому ж положенні в ряд за степенями координат, отримуємо

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^m \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l}^m \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} \right)_0 q_j q_k q_l + \dots$$

Як і раніше вважатимемо, що $\Pi_0 = 0$. Крім того, на основі умови рівноваги (17.1) зникають члени, лінійні відносно узагальнених координат. Таким чином, при вивченні малих відхилень системи від положення рівноваги, з малими за абсолютним значенням узагальненими швидкостями, будемо застосовувати наступний наближений вираз потенціальної енергії:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k}^m (B_{jk})_0 q_j q_k, \quad (17.5)$$

де коефіцієнти $(B_{jk})_0 = (B_{kj})_0 = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0$. Надалі індекс "0" біля коефі-

цієнтів A_{jk} і B_{jk} , що вказує на їх визначення у положенні рівноваги, будемо опускати.

Отже, рух матеріальної системи в консервативному силовому полі в малому околі положення стійкої рівноваги визначається властивостями двох додатньо визначених квадратичних форм, коефіцієнти яких є сталими.

Підставляючи співвідношення (17.4) і (17.5) в рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \ddot{q}_k + B_{jk} q_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (17.6)$$

Отже, закон руху системи описується лінійними однорідними рівняннями з постійними, дійсними і симетричними коефіцієнтами. Розв'язок цих рівнянь має вигляд показникової функції

$$q_k = C_k e^{\lambda t} \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (17.7)$$

Підставляючи вирази (17.7) в диференціальні рівняння (17.6), отримає-

мо систему лінійних алгебраїчних однорідних відносно C_k рівнянь

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \lambda^2 + B_{jk}) C_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m), \tag{17.8}$$

яка має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник рівний нулю:

$$\Delta = \det(A_{jk} \lambda^2 + B_{jk}) = 0. \tag{17.9}$$

Рівняння (17.9) називається *віковим*, або *характеристичним* рівнянням. Воно являє собою алгебраїчне рівняння m -ї степені відносно λ^2 і, відповідно, має $2m$ коренів λ_s , які називаються власними значеннями характеристичного рівняння. Припустимо, що корені λ_s не кратні. Тоді одне з рівнянь системи (17.8) буде наслідком решти. Нехай таким рівнянням є останнє. Кожному кореню λ_s вікового рівняння відповідає наступна система лінійних однорідних відносно $C_k^{(s)}$ алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (A_{11} \lambda_s^2 + B_{11}) C_1^{(s)} + (A_{12} \lambda_s^2 + B_{12}) C_2^{(s)} + \dots + (A_{1m} \lambda_s^2 + B_{1m}) C_m^{(s)} &= 0, \\ (A_{21} \lambda_s^2 + B_{21}) C_1^{(s)} + (A_{22} \lambda_s^2 + B_{22}) C_2^{(s)} + \dots + (A_{2m} \lambda_s^2 + B_{2m}) C_m^{(s)} &= 0, \end{aligned}$$

.....

$$(A_{(m-1)1} \lambda_s^2 + B_{(m-1)1}) C_1^{(s)} + (A_{(m-1)2} \lambda_s^2 + B_{(m-1)2}) C_2^{(s)} + \dots + (A_{(m-1)m} \lambda_s^2 + B_{(m-1)m}) C_m^{(s)} = 0.$$

Поділимо кожне з рівнянь останньої системи почленно на $C_m^{(s)}$. Тоді отримаємо систему $m-1$ рівняння відносно $m-1$ невідомого відношення $C_k^{(s)} / C_m^{(s)}$:

$$\begin{aligned} (A_{11} \lambda_s^2 + B_{11}) \frac{C_1^{(s)}}{C_m^{(s)}} + \dots + (A_{1(m-1)} \lambda_s^2 + B_{1(m-1)}) \frac{C_{m-1}^{(s)}}{C_m^{(s)}} + (A_{1m} \lambda_s^2 + B_{1m}) &= 0, \\ (A_{21} \lambda_s^2 + B_{21}) \frac{C_1^{(s)}}{C_m^{(s)}} + \dots + (A_{2(m-1)} \lambda_s^2 + B_{2(m-1)}) \frac{C_{m-1}^{(s)}}{C_m^{(s)}} + (A_{2m} \lambda_s^2 + B_{2m}) &= 0, \end{aligned} \tag{17.10}$$

.....

$$\begin{aligned} (A_{(m-1)1} \lambda_s^2 + B_{(m-1)1}) \frac{C_1^{(s)}}{C_m^{(s)}} + \dots + (A_{(m-1)(m-1)} \lambda_s^2 + B_{(m-1)(m-1)}) \frac{C_{m-1}^{(s)}}{C_m^{(s)}} + \\ + (A_{(m-1)m} \lambda_s^2 + B_{(m-1)m}) &= 0. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему Крамера, знаходимо розв'язки системи:

$$\frac{C_1^{(s)}}{C_m^{(s)}} = \frac{\Delta_1(\lambda_s)}{\Delta_m(\lambda_s)}, \quad \frac{C_2^{(s)}}{C_m^{(s)}} = \frac{\Delta_2(\lambda_s)}{\Delta_m(\lambda_s)}, \quad \dots, \quad \frac{C_{m-1}^{(s)}}{C_m^{(s)}} = \frac{\Delta_{m-1}(\lambda_s)}{\Delta_m(\lambda_s)}, \tag{17.11}$$

де $\Delta_k(\lambda_s)$ – алгебраїчні доповнення елемента $(A_{mk} \lambda_s^2 + B_{mk})$ визначника

(17.9). Позначимо

$$C_s = \frac{C_m^{(s)}}{\Delta_m(\lambda_s)}.$$

Тоді рівності (17.11) можна записати в більш симетричній формі:

$$\frac{C_1^{(s)}}{\Delta_1(\lambda_s)} = \frac{C_2^{(s)}}{\Delta_2(\lambda_s)} = \dots = \frac{C_m^{(s)}}{\Delta_m(\lambda_s)} = C_s,$$

або в загальному вигляді

$$C_k^{(s)} = C_s \Delta_k(\lambda_s) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (17.12)$$

При цьому стала C_s може набувати довільних значень.

Якщо на систему діють тільки потенціальні стаціонарні сили, то всі власні значення λ_s будуть уявними:

$$\lambda_s = \pm i\omega_s \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (17.13)$$

де ω_s – дійсні величини, які називаються власними частотами системи. В останньому виразі власні значення λ_s перенумеровані не від 1 до $2m$, а від 1 до m , оскільки кожному номеру відповідає одна пара комплексно спряжених значень кореня.

На основі формули (17.12) кожному кореню характеристичного рівняння можна поставити у відповідність систему часткових розв'язків диференціальних рівнянь (17.6). Загальний розв'язок системи (17.6) можна записати у вигляді дійсної (чи уявної) частини суми частинних розв'язків:

$$q_k = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{2m} C_s \Delta_k(\lambda_s) e^{\lambda_s t},$$

або, враховуючи (17.40),

$$q_k = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^m \left[C_s^+ \Delta_k(i\omega_s) e^{i\omega_s t} + C_s^- \Delta_k(-i\omega_s) e^{-i\omega_s t} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (17.14)$$

З огляду на потенціальність заданих сил вікове рівняння (17.9) і всі доповнення визначника характеристичного детермінанту містять лише степені квадрату λ . Тому в розглянутому випадку доповнення будуть дійсними величинами, які задовольняють співвідношенням

$$\Delta_k(i\omega_s) = \Delta_k(-i\omega_s) \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ s = 1, 2, \dots, m \end{cases}. \quad (17.15)$$

Використовуючи ці співвідношення і враховуючи, що

$$\operatorname{Re} \left[C_s^+ e^{i\omega_s t} + C_s^- e^{-i\omega_s t} \right] = A_s \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

де A_s і α_s – довільні дійсні сталі, знайдемо загальний розв'язок системи

диференціальних рівнянь (17.6) у вигляді

$$q_k = \sum_{s=1}^m \Delta_k(i\omega_s) A_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) = \sum_{s=1}^m \Delta_k(i\omega_s) \theta_s \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (17.16)$$

Відмітимо три властивості лінійних коливань механічних систем.

1. Загальний розв'язок, що описується координатою q_k являє собою накладання гармонічних коливань з власними частотами системи.

2. Власні частоти системи не залежать від початкових умов і визначаються тільки механічними властивостями системи. У цьому полягає властивість ізохронності коливань.

3. Загальний розв'язок q_k не містить функцій виду $\cos(p\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$, де $p > 1$ – ціле число, тобто не містить гармонік, кратних власним частотам системи. Ця властивість, як і перша, є наслідком лінійності диференціальних рівнянь.

17.2.2. Нормальні координати

Функції θ_s є строго періодичними функціями часу, а q_k в загальному випадку не є такими. З останнього виразу слідує, що θ_s можна розглядати як нові узагальнені координати, оскільки загальний розв'язок (17.43) визначає лінійне перетворення від координат θ до координат q_k . Функції θ_s називають *нормальними координатами*. Відповідно гармонічні коливання з власними частотами системи називаються *нормальними коливаннями*.

Нормальні координати володіють тією важливою властивістю, що виражені через них кінетична і потенціальна енергія (а отже, і функція Лагранжа) набувають вигляду суми квадратів координат і швидкостей. Для доведення підставимо вираз (17.16) в (17.4) і (17.5):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s,p} \left(\sum_{j,k=1}^m A_{jk} \Delta_j(i\omega_s) \Delta_k(i\omega_p) \right) \theta_s \theta_p, \quad (17.17)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s,p} \left(\sum_{j,k} B_{jk} \Delta_j(i\omega_s) \Delta_k(i\omega_p) \right) \theta_s \theta_p. \quad (17.18)$$

Отримані форми залежать лише від квадратів θ , оскільки коефіцієнти при добутках $\theta_s \theta_p$ ($s \neq p$) рівні нулю:

$$\sum_{j,k} A_{jk} \Delta_j^{(s)} \Delta_k^{(p)} = 0, \quad \sum_{j,k} B_{jk} \Delta_j^{(s)} \Delta_k^{(p)} = 0.$$

Дійсно, підставляючи (17.12) в систему (17.8) і скорочуючи на спільний

множник C_s , отримуємо

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \lambda_s^2 + B_{jk}) \Delta_k(\lambda_s) = 0, \quad (17.19)$$

і аналогічно для λ_p

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \lambda_p^2 + B_{jk}) \Delta_k(\lambda_p) = 0. \quad (17.20)$$

Помноживши систему рівнянь (17.19) на $\Delta_j(\lambda_p)$, знайдемо

$$\lambda_s^2 \sum_{j,k}^m A_{jk} \Delta_j(\lambda_p) \Delta_k(\lambda_s) + \sum_{j,k}^m B_{jk} \Delta_j(\lambda_p) \Delta_k(\lambda_s) = 0. \quad (17.21)$$

Аналогічно, помноживши систему (17.20) на $\Delta_j(\lambda_s)$, дістанемо

$$\lambda_p^2 \sum_{j,k}^m A_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_p) + \sum_{j,k}^m B_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_p) = 0. \quad (17.22)$$

Враховуючи, що $A_{jk} = A_{kj}$, $B_{jk} = B_{kj}$, і змінюючи в (17.22) індекси сум, маємо

$$\lambda_p^2 \sum_{j,k}^m A_{jk} \Delta_k(\lambda_s) \Delta_j(\lambda_p) + \sum_{j,k}^m B_{jk} \Delta_k(\lambda_s) \Delta_j(\lambda_p) = 0. \quad (17.23)$$

Віднімаючи (17.21) від (17.23), знаходимо

$$(\lambda_s^2 - \lambda_p^2) \sum_{j,k}^m A_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_p) = 0,$$

звідки слідує

$$\sum_{j,k}^m A_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_p) = 0, \quad (17.24)$$

оскільки при $s \neq p$ $\lambda_s \neq \lambda_p$.

З урахуванням (17.24) з рівності (17.23) слідує також, що

$$\sum_{j,k}^m B_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_p) = 0. \quad (17.25)$$

Враховуючи співвідношення (17.24) і (17.25), знайдемо кінетичну і потенціальну енергії системи в нормальних координатах

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m A_s \dot{\theta}_s^2, \quad (17.26)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m B_s \theta_s^2, \quad (17.27)$$

де

$$A_s = \sum_{j,k} A_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_s), \quad B_s = \sum_{j,k} B_{jk} \Delta_j(\lambda_s) \Delta_k(\lambda_s).$$

За допомогою виразів (17.26) і (17.27) легко записати рівняння нормальних коливань. Оскільки функція Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m (A_s \dot{\theta}_s^2 - B_s \theta_s^2),$$

то рівняння Лагранжа в нормальних координатах матимуть вигляд

$$\ddot{\theta}_s + \omega_s^2 \theta_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m). \quad (17.28)$$

Це означає, що нормальні коливання системи повністю незалежні.

Все викладене вище мало змінюється у випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння існують кратні корені. Загальний вигляд (17.16) залишається таким самим з тією лише різницею, що відповідні кратним частотам коефіцієнти $\Delta_k(i\omega_s)$ вже не будуть мінорами визначника, які, як відомо, дорівнюють у цьому випадку нулю.

Кожній кратній (або *виродженій*) частоті відповідає стільки різних нормальних координат, якою є степінь кратності, але вибір цих нормальних координат не однозначний. Оскільки до виразів кінетичної і потенціальної енергій нормальні координати входять у вигляді однотипних сум $\sum \dot{\theta}_s^2$ і $\sum \theta_s^2$, то до них можна застосувати довільне лінійне перетворення, яке залишає інваріантною суму квадратів.

17.2.3. Затухаючі коливання. Дисипативна функція

Для систем з багатьма ступенями вільності узагальнені сили тертя, що відповідають координатам q_j , є лінійними функціями швидкостей:

$$f_j = - \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \dot{q}_k. \quad (17.29)$$

Методи статистичної фізики дають можливість показати, що коефіцієнти α_{jk} постійні і симетричні відносно індексів j та k :

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj}.$$

Тому вирази (17.29) можуть бути записані як похідні $f_j = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$ від ква-

дратичної форми

$$R = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \alpha_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (17.30)$$

яка називається *дисипативною функцією*.

Таким чином, рівняння Лагранжа другого роду за наявності сил опору можна представити у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (17.31)$$

Розглянемо фізичний зміст дисипативної функції. З цією метою знайдемо похідну по часу від механічної енергії системи:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = - \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}.$$

Оскільки R – квадратична функція швидкостей, то в силу теореми Ейлера про однорідні функції сума в правій частині виразу дорівнює $2R$. Таким чином,

$$\frac{dE}{dt} = -2R, \quad (17.32)$$

тобто *швидкість зменшення механічної енергії системи рівна подвоєній дисипативній функції*. По цій причині можна стверджувати, що коливання, які відбуваються за наявності сил опору, завжди будуть згасаючими.

Підставляючи в рівняння (17.31) функцію Лагранжа і дисипативну функцію, отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \ddot{q}_k + \alpha_{jk} \dot{q}_k + B_{jk} q_k) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (17.33)$$

Будемо шукати часткові розв'язки цієї системи у вигляді

$$q_k = C_k e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (17.34)$$

де C_k і λ – сталі. Підставляючи (17.34) в (17.33), отримаємо після скорочення на $e^{\lambda t}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь для постійних C_k

$$\sum_{k=1}^m (A_{jk} \lambda^2 + \alpha_{jk} \lambda + B_{jk}) C_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (17.35)$$

Прирівнюючи до нуля визначник цієї системи, отримуємо характеристичне рівняння для знаходження значення λ :

$$\det(A_{jk} \lambda^2 + \alpha_{jk} \lambda + B_{jk}) = 0. \quad (17.36)$$

Співвідношення (17.36) є рівнянням степені $2m$ відносно λ . Оскільки всі його коефіцієнти дійсні, то його корені або дійсні, або попарно комплексно спряжені. При цьому дійсні корені обов'язково від'ємні,

а комплексні мають від'ємну дійсну частину. В протилежному випадку координати і швидкості, а з ними й енергія системи експоненційно зростають з часом, тоді як наявність дисипативних сил повинна призводити до зменшення енергії.

Література

[1] – Гл. V, §§ 21–26

[6] – Гл. XXXII–XXXIV

[10] – Р. 3, Гл. VII, §§ 1–4

[11] – Гл. IV, §§ 84–103

[19] – Ч. 2, Гл. XIII, §§ 1, 2

[20] – Ч. 2, Гл. XIII, §§ 1, 2

Лекція 18

Нелінійні коливання

18.1. Метод Крилова-Боголюбова

Розглянемо систему з одним ступенем вільності, на яку накладені голономні стаціонарні зв'язки і діють задані стаціонарні сили. При цьому вважатимемо, що система володіє положенням стійкої рівноваги. Розклад кінетичної, потенціальної і дисипативної функцій в околі цього положення з точністю до членів другого порядку малості включно приводить до лінійного рівняння. Однак в багатьох практично важливих задачах виникає необхідність дослідження коливань з достатньо великими амплітудами і швидкостями. В таких випадках лінійне наближення виявляється недостатнім і доводиться враховувати наступні члени розкладу, які приводять до нелінійних рівнянь.

Розглянемо слабо-нелінійні власні одномірні коливань виду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon f(q, \dot{q}), \quad (18.1)$$

де ε – деякий параметр, що вказує на малість функції εf у порівняння з лінійним членом. Одним з методів розв'язку цього рівняння є метод Крилова-Боголюбова.

Враховуючи малість нелінійного члена, можна припустити, що розв'язок, який описує нелінійне коливання, за формою близький до розв'язку

лінійного. Тому розв'язок рівняння (18.1) будемо шукати у вигляді ряду

$$q = a \cos \psi + \varepsilon q_1(a, \psi) + \varepsilon^2 q_2(a, \psi) + \dots, \quad (18.2)$$

де $\varepsilon q_1, \varepsilon^2 q_2$ – невідомі функції амплітуди a і періодичні функції фази ψ . В свою чергу, амплітуда і фаза є невідомими функціями часу, які підкоряються власним диференціальним рівнянням

$$\dot{a} = \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a) + \dots; \quad \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \quad (18.3)$$

Праві частини цих рівнянь можуть бути знайдені, оскільки ряд (18.2), в якому амплітуда і фаза визначаються рівняннями виду (18.3), повинен задовольняти вихідному рівнянню (18.1). Довільність визначення невідомих функцій $\varepsilon q_1, \varepsilon^2 q_2, \dots, \varepsilon g_1, \varepsilon^2 g_2, \dots, \varepsilon \omega_1, \varepsilon^2 \omega_2, \dots$ можна виключити, ввівши вимогу, щоб a була повною амплітудою основної гармоніки. Тоді функції $\varepsilon q_1, \varepsilon^2 q_2, \dots$ не будуть містити членів, пропорційних $\cos \psi$ і $\sin \psi$ і задовольнятимуть умовам

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n q_n(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^n q_n(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (18.4)$$

Знайдемо розв'язок вихідного рівняння в першому наближенні. З цією метою отримаємо величини q, \dot{q} як функції амплітуди і фази з точністю до ε включно. Диференціюючи перші два члени ряду (18.2) по часу, знаходимо:

$$\dot{q} = \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left(\frac{\partial q_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial q_1}{\partial \psi} \dot{\psi} \right). \quad (18.5)$$

Підставляючи сюди рівняння (18.3), з тією ж точністю отримуємо

$$\dot{q} = -\omega_0 a \sin \psi + \varepsilon \left(g_1 \cos \psi - \omega_1 a \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial q_1}{\partial \psi} \right). \quad (18.6)$$

Диференціюючи (18.6) по часу, маємо

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & -\omega_0 \dot{a} \sin \psi - \omega_0 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left(\frac{dg_1}{da} \dot{a} \cos \psi - g_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi} - \frac{d\omega_1}{da} a \dot{a} \sin \psi - \right. \\ & \left. - \omega_1 \dot{a} \sin \psi - \omega_1 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \omega_0 \frac{\partial^2 q_1}{\partial a \partial \psi} \dot{a} + \omega_0 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \psi^2} \dot{\psi} \right), \end{aligned} \quad (18.7)$$

звідки після підстановки (18.3) отримуємо

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 a \cos \psi + \varepsilon \left(-2\omega_0 a \omega_1 \cos \psi - 2\omega_0 g_1 \sin \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \psi^2} \right). \quad (18.8)$$

Формули (18.8) і (18.2) дають можливість визначити ліву частину вихідного рівняння як функцію a та ψ .

Для знаходження з точністю до ε правої частини рівняння (18.1) як функції амплітуди і фази потрібно розкласти $\varepsilon f(q, \dot{q})$ в “точці” $(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi)$:

$$\varepsilon f(q, \dot{q}) = \varepsilon f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi). \quad (18.9)$$

Підставляючи (18.2), (18.8) і (18.9) у вихідне рівняння, з вказаною точністю отримаємо

$$\omega_0^2 \left(\varepsilon q_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial \psi^2} \right) = 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon g_1 \sin \psi + \varepsilon f_0(a, \psi), \quad (18.10)$$

де $\varepsilon f_0(a, \psi) = \varepsilon f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi)$.

Співвідношення (18.10) дає можливість визначити невідомі функції εq_1 , εg_1 і $\varepsilon \omega_1$ по заданій функції εf_0 . Дійсно, представимо задану функцію εf_0 і невідому функцію εq_1 (за припущенням вона є періодичною функцією ψ) у вигляді рядів Фур'є

$$\varepsilon f_0(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon \beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon \alpha_n(a) \sin n\psi), \quad (18.11)$$

де $\varepsilon \beta_n(a)$ і $\varepsilon \alpha_n(a)$ – відомі коефіцієнти Фур'є, і

$$\varepsilon q_1(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon \nu_n(a) \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n(a) \sin n\psi), \quad (18.12)$$

де $\varepsilon \nu_n(a)$ і $\varepsilon \gamma_n(a)$ ($n = 0, 2, 3, \dots$) – коефіцієнти Фур'є, що підлягають визначенню, а коефіцієнти $\varepsilon \nu_1$ і $\varepsilon \gamma_1$, згідно (18.4), рівні нулю:

$$\varepsilon \nu_1 = \varepsilon \gamma_1 = 0. \quad (18.13)$$

Підставляючи (18.11) і (18.12) в (18.10) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових гармоніках, знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial \psi^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} (-n^2) (\varepsilon \nu_n \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n \sin n\psi), \\ \omega_0^2 \left(\varepsilon \nu_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) (\varepsilon \nu_n \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n \sin n\psi) \right) &= 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + \\ + 2\omega_0 \varepsilon g_1 \sin \psi + \varepsilon \beta_0 + \varepsilon \beta_1 \cos \psi + \varepsilon \alpha_1 \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} (\varepsilon \beta_n \cos n\psi + \varepsilon \alpha_n \sin n\psi), \end{aligned}$$

звідки

$$\varepsilon g_1 = -\frac{\varepsilon \alpha_1}{2\omega_0}, \quad \varepsilon \omega_1 = -\frac{\varepsilon \beta_1}{2\omega_0 a}; \quad (18.14)$$

$$\varepsilon \nu_0 = \frac{\varepsilon \beta_0}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon \nu_n = \frac{\varepsilon \beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \quad \varepsilon \gamma_n = \frac{\varepsilon \alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \quad (18.15)$$

при $n = 2, 3, \dots$

Використовуючи (18.17), з (18.3) отримуємо диференціальні рівняння для амплітуди і фази:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2a\omega_0}. \quad (18.16)$$

Таким чином, в першому наближенні *похідна амплітуди по часу і частота визначаються коефіцієнтами Фур'є заданої функції $\varepsilon f_0(a, \psi)$, тобто коефіцієнтами Фур'є правої частини вихідного рівняння, взятої з точністю до ε . Похідна амплітуди визначається коефіцієнтом Фур'є при $\sin \psi$, а похідна фази – коефіцієнтом при $\cos \psi$.*

Підстановка (18.15) в (18.12) приводить до визначення функції

$$\varepsilon q_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} (\varepsilon\beta_n(a)\cos\psi + \varepsilon\alpha_n(a)\sin\psi). \quad (18.17)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (18.16), отримують амплітуду і фазу коливань як функції часу і початкових значень a_0, ψ_0 . Використовуючи ці функції, за допомогою формул (18.2) і (18.17) знаходять розв'язок вихідного рівняння

$$q = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon x_1(a(t), \psi(t)).$$

Проводячи аналогічні обчислення з точністю до ε^2 , можна отримати розв'язок у другому наближенні.

18.2. Резонанс у нелінійних коливних системах

Урахування нелінійних членів при вимушених коливаннях механічної системи приводить до появи суттєво нових особливостей в резонансних явищах. Проаналізуємо фізичні особливості вимушених нелінійних коливань на прикладі системи з одним ступенем вільності, на яку діє мала нестационарна сила $\varepsilon f_0 \cos \omega_e t$, що гармонічно змінюється з часом. Середня потужність цієї сили на деякому інтервалі часу Δt визначається як

$$\bar{N} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varepsilon f_0 \cos \omega_e t \cdot \dot{q} dt. \quad (18.18)$$

Поставимо умову, щоб інтервал Δt був, з одного боку, достатньо великим у порівнянні з періодом $2\pi/\omega_0$ власних лінійних коливань, а з іншого – достатньо обмеженим, щоб форма коливань не встигала помітно

змінитися (такий вибір Δt можливий в силу малості зовнішньої сили і нелінійних членів). Враховуючи, що на інтервалі Δt нелінійне коливання близьке до лінійного, тобто

$$q \approx a \cos \psi, \quad \dot{q} \approx -a\omega_0 \sin \psi,$$

де $\psi = \omega_0 t + \theta(t)$, і приймаючи до уваги, що зміни функцій $a(t)$ і $\theta(t)$ на інтервалі Δt малі, для середньої потужності отримаємо вираз

$$\bar{N} = \frac{\varepsilon f_0 \omega_0 a(t)}{\Delta t} \left(\frac{\cos[(\omega_e + \omega_0)t + \theta(t)]}{\omega_e + \omega_0} - \frac{\cos[(\omega_e - \omega_0)t - \theta(t)]}{\omega_e - \omega_0} \right) \Bigg|_{t_0}^{t_0 + \Delta t}. \quad (18.19)$$

Звідси видно, що в нерезонансному випадку, коли ω_e достатньо відрізняється від ω_0 , потужність зовнішньої сили дуже мала, оскільки $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$. Коли ж має місце резонанс ($\omega_e \approx \omega_0$), то потужність стає порядку ε . Дійсно, підставляючи в (18.19) $\omega_e = \omega_0 + \Delta\omega$ і спрямовуючи $\Delta\omega$ до нуля, за рахунок другої складової в дужках для середньої потужності отримаємо

$$\bar{N} = -\varepsilon f_0 \omega_0 a(t) \sin \theta(t). \quad (18.20)$$

Таким чином, у випадку резонансу середня потужність є функцією як амплітуди a , так і відхилення фази θ .

Виходячи з вище сказаного, можна припустити, що в резонансному випадку як зміна амплітуди, так і частота залежать від значень амплітуди і відхилення фази. Що стосується нерезонансного випадку, то зміна амплітуди і частота залежать тільки від амплітуди (як і у випадку власних коливань).

Друга особливість вимушених нелінійних коливань полягає в появі резонансу на комбінаційних частотах. Це можна бачити хоча б з того, що до розв'язку рівняння вимушених нелінійних коливань завдяки наявності нелінійних членів увійдуть вищі гармоніки з частотами, приблизно рівними $n\omega_0$. Розглядаючи середню потужність, що вноситься до системи "за допомогою" цих гармоніками, тобто підставляючи в інтеграл (18.18) не $\sin(\omega_0 t + \theta)$, а $\sin(n\omega_0 t + \theta_n)$, приходимо до висновку про можливість резонансу на частоті, близькій до $n\omega_0$. В загальному випадку, коли права частина рівняння (18.1) складніше залежить від аргументу $\omega_e t$, можлива поява резонансу на комбінаційних частотах виду $n\omega_0 + m\omega_e$, де n і m – цілі числа. Дійсно, розклад функції εf у ряд Фур'є приводить до появи гармонік з вказаними частотами. Таким чином, в загальному випадку мо-

жливий резонанс вимушених коливань на частотах

$$\omega_e \approx (q/p)\omega_0, \quad (18.21)$$

де q і p – цілі взаємно прості числа (якщо $q = p$, то резонанс називається *головним*).

Розглянемо рівняння

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon f(q, \dot{q}, \omega_e t), \quad (18.22)$$

де εf – періодична функція відносно $\omega_e t$ з періодом 2π .

В нерезонансному випадку розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді ряду

$$q = a \cos \psi + \varepsilon q_1(a, \psi, \omega_e t) + \dots, \quad (18.23)$$

де a і ψ підкоряються рівнянням (18.3). Підставляючи (18.23) в (18.22) і враховуючи (18.3), знайдемо співвідношення, яке визначає перше наближення:

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial \psi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \varepsilon q_1 = \quad (18.24)$$

$$= \varepsilon f_0(a, \psi, \omega_e t) + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon g_1 \sin \psi,$$

де $\varepsilon f_0(a, \psi, \omega_e t) = \varepsilon f(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi, \omega_e t)$.

Розкладаючи відому функцію εf_0 в подвійний ряд Фур'є за величинами ψ і $\omega_e t$:

$$\varepsilon f_0(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm}(a) \exp[i(n\omega_e t + m\psi)] \quad (18.25)$$

і представляючи рядом Фур'є невідому функцію

$$\varepsilon x_1(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n,m} \varepsilon \gamma_{nm}(a) \exp[i(n\omega_e t + m\psi)], \quad (18.26)$$

з (18.24) отримаємо

$$\sum_{n,m} [\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2] \varepsilon \gamma_{nm} \exp[i(n\omega_e t + m\psi)] = \quad (18.27)$$

$$= \sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm} \exp[i(n\omega_e t + m\psi)] + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon g_1 \sin \psi.$$

З цього співвідношення видно, що в розв'язку можуть з'явитись коефіцієнти $\varepsilon \gamma_{nm}$, які перетворюються в нескінченність. Щоб виключити появу таких членів, поставимо вимогу, аналогічну умовам (18.4):

$$\sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm} \exp[i(n\omega_e t + m\psi)] + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon g_1 \sin \psi = 0, \quad (18.28)$$

якщо $\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$.

Умова (18.28) дозволяє визначити функції $\varepsilon\omega_1$ і εf_1 . Дійсно, оскільки розглядається нерезонансний випадок, умова $\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$ буде виконуватись, якщо

$$n = 0, \quad m = \pm 1. \quad (18.29)$$

Тому сума по n і m в (18.28) зводиться до суми двох членів з коефіцієнтами $\alpha_{0,1}$ і $\alpha_{0,-1}$. Таким чином, використовуючи (18.29) і загальний вираз для коефіцієнтів Фур'є

$$\varepsilon\alpha_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f_0(a, \psi, \omega_e t) \exp[-i(n\omega_e t + m\psi)] d(\omega_e t) d\psi, \quad (18.30)$$

з умови (18.28) знайдемо

$$\varepsilon g_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \omega_e t) \sin \psi d\psi d(\omega_e t), \quad (18.31)$$

$$\varepsilon\omega_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \omega_e t) \cos \psi d\psi d(\omega_e t). \quad (18.32)$$

В резонансному випадку частота змушуючої сили або рівна резонансній частоті, або близька до неї. Отже, можна покласти, що

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q} \omega_e \right)^2 + \varepsilon\Delta, \quad (18.33)$$

де $\varepsilon\Delta$ – мала задана величина. Використовуючи останній вираз, запишемо вихідне рівняння (18.22) у формі

$$\ddot{q} + \left(\frac{p}{q} \omega_e \right)^2 q = \varepsilon(f(q, \dot{q}, \omega_e t) - q\Delta). \quad (18.34)$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді ряду (18.23), де a і ψ підкоряються власним рівнянням, які мають більш загальний вигляд у порівнянні з (18.3), оскільки в резонансному випадку зміни амплітуди і фази залежать не тільки від значення амплітуди, але й відхилення фази:

$$\dot{a} = \varepsilon g_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\psi} = \frac{p}{q} \omega_e + \varepsilon\omega_1(a, \theta) + \dots, \quad (18.35)$$

де ψ і θ пов'язані співвідношенням

$$\psi = \frac{p}{q} \omega_e t + \theta(t). \quad (18.36)$$

Крім того, поставимо вимогу, щоб у розв'язку були відсутні члени,

які перетворюються в нескінченність.

Підставляючи (18.36) в (18.23) і (18.35), знайдемо, що

$$q = a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + \varepsilon q_1(a, \theta, \omega_e t) + \dots, \quad (18.37)$$

а рівняння, яким підкоряються змінні a і θ , мають вигляд

$$\dot{a} = \varepsilon g_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \dots \quad (18.38)$$

За допомогою (18.37) і (18.38) з (18.34) отримаємо співвідношення, яке визначає функції εq_1 , εf_1 , $\varepsilon \omega_1$ в резонансному випадку (проміжні обчислення аналогічні (18.5) – (18.10)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon q_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial t^2} = \varepsilon f_0\left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t\right) + \\ + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta\right) a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + 2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon g_1 \sin\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right); \end{aligned} \quad (18.39)$$

тут

$$\varepsilon f_0\left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t\right) = \varepsilon f\left(a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right), -\frac{p}{q} \omega_e a \sin\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right), \omega_e t\right).$$

Розкладаючи εq_1 в ряд Фур'є, отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon q_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon q_1}{\partial t^2} = \\ = \sum_{n,m} \left\{ \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 \right\} \omega_e^2 \varepsilon \gamma_{nm} \exp\left[i\left(n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (18.40)$$

Беручи до уваги розклад функції εf_0 в ряд Фур'є (18.25) і вимагаючи, щоб коефіцієнти $\varepsilon \gamma_{nm}$ були скінченими, з (18.39) знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm} \exp\left[i\left(n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right)\right)\right] + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta\right) a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + \\ + 2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon g_1 \sin\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) = 0, \end{aligned} \quad (18.41)$$

де сумування проводиться по будь-яких цілих n і m , для яких

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 = 0, \quad (18.42)$$

причому ця умова еквівалентна простішій:

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (18.43)$$

Прирівнюючи в (18.41) коефіцієнти при $\cos \psi$ і $\sin \psi$ відповідно, можна знайти функції εg_1 і $\varepsilon \omega_1$. З цією метою, використовуючи (18.43), запишемо показники експонент з (18.41) у вигляді

$$n\omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) = \mp \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) - \frac{nq}{p} \theta. \quad (18.44)$$

Тоді подвійну суму в (18.41) можна представити як суму тільки по n :

$$\begin{aligned} & \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}+1} e^{-in\frac{q}{p}\theta} \right] e^{i\psi} + \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}-1} e^{-in\frac{q}{p}\theta} \right] e^{-i\psi} = \\ & = \left[\sum_n \left(\varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}+1} + \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}-1} \right) e^{-in\frac{q}{p}\theta} \right] \cos \psi + \left[\sum_n i \left(\varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}+1} - \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}-1} \right) e^{-in\frac{q}{p}\theta} \right] \sin \psi, \end{aligned} \quad (18.45)$$

де суми і різниці коефіцієнтів Фур'є рівні (див. (18.30))

$$\varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}+1} + \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}-1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f_0 e^{in\frac{q}{p}\theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (18.46, a)$$

$$i \left(\varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}+1} - \varepsilon \alpha_{n, -n\frac{q}{p}-1} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f_0 e^{in\frac{q}{p}\theta} \sin \psi d(\omega_e t) d\psi. \quad (18.46, б)$$

Використовуючи (18.45) і (18.46) і прирівнюючи відповідні коефіцієнти при $\sin \psi$ і $\cos \psi$, з (18.41) отримаємо

$$\varepsilon g_1 = -\frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e} \sum_n e^{-in\frac{q}{p}\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f_0(a, \psi, \dots \omega_e t) e^{in\frac{q}{p}\theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (18.47)$$

$$\varepsilon \omega_1 = \frac{\varepsilon \Delta}{2 \frac{p}{q} \omega_e} - \frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e a} \sum_n e^{-in\frac{q}{p}\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f_0(a, \psi, \dots \omega_e t) e^{in\frac{q}{p}\theta} \sin \psi d(\omega_e t) d\psi. \quad (18.48)$$

Ці співвідношення дозволяють отримати розв'язок задачі про резонанс вимушених нелінійних коливань у першому наближенні.

Література

- [1] – Гл. V, §§ 28, 29
- [8] – Гл. 7, §§ 39–43
- [9] – Гл. VII, §§ 7.1–7.3
- [11] – Гл. IV, §§ 104–114

Лекція 19

Релятивістська кінематика

19.1. Простір і час у спеціальній теорії відносності

19.1.1. Передумови спеціальної теорії відносності та її експериментальне обґрунтування. Постулати Ейнштейна

Ньютонівська система механіки зазвичай приймається як наближення, застосовне лише в тому випадку, коли швидкості матеріальних точок системи малі в порівнянні з швидкістю поширення світла. Більш загальне дослідження проводиться в спеціальній теорії відносності (СТВ).

Перш ніж розглянути основні положення СТВ, узагальнимо спочатку ті уявлення про простір і час, які лежать в основі ньютонівської механіки.

1. Простір, що має три виміри, підкоряється евклідовій геометрії.

2. Поряд з тривимірним простором існує незалежний від нього час (незалежний в тому розумінні, в якому три виміри простору не залежать один від одного). Але разом з тим час пов'язаний з простором законами руху.

3. Масштаби і проміжки часу між заданими подіями однакові в різних системах відліку. Це відповідає ньютонівській концепції абсолютності простору й часу, згідно якої їх властивості вважаються незалежними від системи відліку – простір і час однакові для всіх систем.

4. Признається справедливність закону інерції Галілея-Ньютона, згідно якого тіло за відсутності дій з боку інших тіл рухається рівномірно й прямолінійно. Цей закон стверджує існування інерціальних систем відліку, в яких виконуються закони Ньютона а також принцип відносності Галілея.

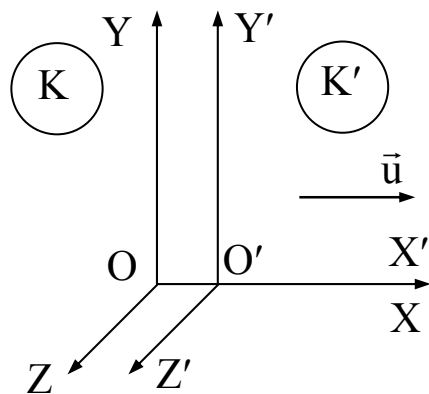


Рис. 19.1

5. З цих уявлень слідує перетворення Галілея, що виражають просторово-часовий зв'язок будь-якої події в різних інерціальних системах відліку. Якщо система відліку K' рухається відносно системи K з швидкістю \vec{u} (рис. 19.1) і початок відліку часу відповідає моменту, коли початки координат O' та O обох систем співпадали, то

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Звідси слідує, що координати будь-якої події відносні, тобто мають різні значення в різних системах відліку; моменти ж часу, коли подія відбулася, однакові в різних системах. З останніх рівностей безпосередньо випливає закон додавання швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u},$$

де \vec{v}' і \vec{v} – швидкості точки (частинки) в системах відліку K' і K .

6. Виконується принцип відносності Галілея: всі інерціальні системи відліку еквівалентні між собою в механічному відношенні, тобто всі закони механіки інваріантні відносно перетворень Галілея.

7. Дотримується принцип дії на відстані: взаємодії тіл поширюються миттєво, тобто з нескінченно великою швидкістю.

Ці уявлення ньютонівської механіки достатньо відповідали сукупності експериментальних даних, відомих на той час

Першого випробування зазнав принцип відносності Галілея, який, як відомо, стосувався лише механіки – єдиного розділу фізики, що досяг на той час достатнього розвитку. По мірі розвитку інших розділів фізики, зокрема оптики та електродинаміки, виникло природне запитання: чи поширюється принцип відносності на інші явища? Якщо ні, то за допомогою цих немеханічних явищ можна в принципі розрізнити інерціальні системи відліку і в свою чергу поставити питання про існування головної, або абсолютної, системи.

Одне з таких явищ, яке, як очікували, по різному протікає в різних системах відліку, – це поширення світла. Згідно пануючої на той час хвильової теорії, світлові хвилі повинні поширюватися з певною швидкістю по відношенню до деякого гіпотетичного середовища – “світлоносного ефіру”, стосовно природи якого, щоправда, не було єдиної думки. Однак, якою б не була природа цього середовища, воно не могло бути нерухомим в усіх інерціальних системах відліку. Тим самим виділялася одна з інерціальних систем – абсолютна – та, що була нерухомою відносно ефіру. Покладалося, що тільки в цій системі швидкість поширення світла c однакова в усіх напрямках. Якщо деяка інерціальна система рухається відносно ефіру з швидкістю u , то в цій системі швидкість поширення світла c' повинна підкорятися звичайному закону додавання швидкостей: $c' = c - u$. Це припущення було перевірено на досліді, проведеному А. Майкельсо-

ном у 1881 р. і повтореному у більш досконалому вигляді спільно з Е.Морлі у 1887 р. Виявилось, що абсолютий рух Землі, тобто її рух відносно нерухомого ефіру, встановити оптичними засобами неможливо.

На користь того, що швидкість світла не залежить від швидкості джерела, говорили й деякі астрономічні спостереження (наприклад, над подвійними зірками), а також інші досліді, поставлені пізніше спеціально з метою перевірки цього факту.

До початку ХХ ст. в теоретичній та експериментальній фізиці створилась своєрідна ситуація. З одного боку, теоретично були передбачені різні ефекти, які виділяли із множини інерціальних систем відліку головну (абсолютну). З іншого – постійні спроби виявити ці ефекти на досліді були безуспішними. Було зроблено багато спроб пояснення негативного результату досліді Майкельсона-Морлі та аналогічних йому в рамках ньютонівської механіки. Однак всі вони виявилися марними.

Щоб привести негативний результат експерименту Майкельсона-Морлі у відповідність з теорією, Лоренц і Фітцджеральд висунули гіпотезу про те, що плита інтерферометра, який використовувався в досліді, разом з усіма змонтованими на ній приладами зазнає скорочення в напрямі руху.

Продовжуючи розглядати поширення світлових хвиль в нерухомому ефірі, Лоренц в 1895 р. розробив теорію електродинаміки рухомих середовищ, яка, однак, передбачала відмову від принципу відносності, тобто вводила нерівноправність різних інерціальних систем відліку.

В 1904 р. вийшла основоположна робота Лоренца “Електромагнітні явища в системах, які рухаються з довільною швидкістю, меншою швидкості світла”, де були остаточно сформульовані перетворення координат і часу для переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. У тому ж році А.Пуанкаре сформулював принцип відносності, згідно якого “закони фізичних явищ будуть однаковими як для нерухомого спостерігача, так і для спостерігача, що знаходиться в стані рівномірного прямолінійного руху”. Найбільш важливою подією стала поява в 1905 р. фундаментальної роботи А.Ейнштейна “До електродинаміки рухомих тіл”, з якою власне й пов’язують народження спеціальної теорії відносності. Тут положення теорії Лоренца були приведені у відповідність з принципом відносності завдяки принципово новому підходу до фундаментальних понять просто-

ру й часу. Суттєво, що при цьому довелося взагалі відмовитися від поняття ефіру.

А.Ейнштейн узагальнив відомі факти у вигляді двох принципів, які лежать в основі спеціальної теорії відносності.

1. Перший принцип – *принцип відносності*, стверджує, що *всі закони природи однакові в усіх системах координат, що рухаються одна відносно одної рівномірно й прямолінійно*. Це означає, що коли в одній інерціальній системі відліку фізичний закон виражається математичною формулою, то її вигляд повинен бути таким самим в усіх інших інерціальних системах.

2. Принцип сталості швидкості поширення світла: *швидкість світла у вакуумі однакова в усіх інерціальних системах відліку*. Звідси слідує, що рух джерела в інерціальній системі не впливає на швидкість світла, що ним випромінюється.

Із *постулатів Ейнштейна* також слідує, що швидкість поширення світла у вакуумі є граничною: жоден сигнал чи дія одного тіла на інше не можуть поширюватися з швидкістю, більшою c .

Весь зміст СТВ впливає з двох її постулатів. На даний час обидва постулати Ейнштейна, як і всі наслідки з них, переконливо підтверджуються всією сукупністю накопиченого експериментального матеріалу.

19.1.2. Перетворення Лоренца та їх кінематичні наслідки.

Перетворення швидкостей

Покажемо, як з принципів Ейнштейна впливають формули перетворень Лоренца, знайдені на основі рівнянь електродинаміки та припущення Фітцджеральда.

Розглянемо дві інерціальні системи координат $OXYZ$ та $O'X'Y'Z'$, які рухаються з відносною швидкістю u , тобто початок координат O' має швидкість \vec{u} в системі $OXYZ$. Припустимо, що в точках O та O' знаходяться точкові джерела світла. Фронт світлової хвилі, який поширюється з швидкістю c в системі $OXYZ$ описується рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (19.1)$$

Згідно загального принципу відносності цей фронт повинен описуватися таким же рівнянням і в системі $O'X'Y'Z'$, початок O' якої в момент часу $t' = 0$ співпадає з O :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (19.2)$$

Шукане перетворення повинно задовольняти умові інваріантності

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

звідки

$$(x - ct)(x + ct) + y^2 + z^2 = (x' - ct')(x' + ct') + y'^2 + z'^2. \quad (19.3)$$

При цьому зауважимо, що перетворення повинно бути лінійним, оскільки в протилежному випадку порушиться однорідність простору і часу: їх властивості залежали б від вибору початку відліку.

Нехай осі OX та $O'X'$ обох систем співпадають, а осі $O'Y'$ та $O'Z'$ паралельні, відповідно, осям OY та OZ і перпендикулярні напрямку відносної швидкості \vec{u} руху систем. Тоді найбільш загальним лінійним зв'язком між координатами Y та Y' і Z та Z' з урахуванням ізотропності простору буде

$$y' = ky, \quad z' = kz.$$

В силу рівноправності обох систем обернені перетворення матимуть такий же вигляд:

$$y = ky', \quad z = kz'.$$

Порівнюючи останні вирази, приходимо до висновку, що $k = \pm 1$, причому випадок $k = -1$ відповідає протилежному напрямкові штрихованих осей і є несуттєвим. Таким чином, для розглянутих координат перетворення є тотожним:

$$y = y', \quad z = z'.$$

Тому рівняння (19.3) запишеться у вигляді

$$(x - ct)(x + ct) = (x' - ct')(x' + ct').$$

Отримана рівність буде виконуватись у тому випадку, коли

$$x' - ct' = \lambda(x - ct), \quad x' + ct' = \frac{1}{\lambda}(x + ct).$$

Звідси знаходимо, що

$$x' = \frac{1}{2} \left[x \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - ct \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \right], \quad (19.4)$$

$$t' = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{c} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) + t \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right) \right], \quad (19.5)$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{c(\lambda^2 + 1)\frac{dx}{dt} - c^2(\lambda^2 - 1)}{\frac{dx}{dt}(1 - \lambda^2) + c(1 + \lambda^2)}. \quad (19.6)$$

Проаналізуємо останній вираз. Якщо світло поширюється в системі OXYZ з швидкістю c вздовж осі OX, то

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{c^2(\lambda^2 + 1) - c^2(\lambda^2 - 1)}{c(1 - \lambda^2) + c(1 + \lambda^2)} = c,$$

значить i в системі O'X'Y'Z' швидкість поширення світла дорівнюватиме c , що підтверджує еквівалентність рівності (19.3) принципу сталості швидкості світла у вакуумі.

Якщо система O'X'Y'Z' рухається відносно OXYZ рівномірно й прямолінійно з швидкістю u , то для початку O' цієї системи $dx/dt = u$, $dx'/dt' = 0$. Тоді (19.6) набуває вигляду

$$uc(\lambda^2 + 1) - c^2(\lambda^2 - 1) = 0,$$

звідки

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad (19.7)$$

де $\beta = u/c$. З урахуванням отриманих виразів співвідношення (19.4) і (19.5) запишуться:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Таким чином, *перетворення Лоренца* мають вигляд

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (19.8)$$

Формули оберненого перетворення отримують, змінюючи знак біля швидкості u :

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (19.9)$$

Легко бачити, що при $u \ll c$ формули перетворень Лоренца пере-

ходять в перетворення Галілея.

Розглянемо деякі кінематичні наслідки перетворень Лоренца.

Нехай в системі $O'X'Y'Z'$ знаходиться в стані спокою стержень, паралельний осі $O'X'$. Його довжина, виміряна в цій системі у фіксований момент часу, рівна $l_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1, x'_2 – координати початку й кінця стержня. Довжина стержня в системі $OXYZ$: $l = x_2 - x_1$. Тоді на основі першої рівності (19.8) при фіксованому t маємо

$$l_0 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

звідки

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (19.10)$$

Отже, довжина стержня в системі, що рухається відносно нього з швидкістю u , скорочується пропорційно множнику $\sqrt{1 - \beta^2}$. Це означає, що просторові відстані не є інваріантами перетворень Лоренца, а змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Оскільки за вказаних вище умов поперечні розміри тіла не змінюються, то об'єм тіла в рухомій відносно нього системі визначається співвідношенням

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (19.11)$$

Розглянемо тепер, як будуть сприйматися проміжки часу між двома подіями з точки зору різних інерціальних систем відліку. Визначимо в системі $OXYZ$ проміжок часу між двома подіями, що відбуваються в одній і тій же точці x' системи $O'X'Y'Z'$. Оскільки

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

то

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (19.12)$$

Таким чином, проміжки часу також мають відносний характер: *рухомий годинник йде повільніше, ніж нерухомий*. Сповільнення ходу годинника відбувається пропорційно множнику $1/\sqrt{1 - \beta^2}$. При цьому слід зауважити, що тривалість процесу, або проміжок часу між двома подіями

ми, найменший в тій системі, де події відбуваються в одній і тій же точці простору. Цей проміжок часу називається *власним часом* $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (19.13)$$

Знайдемо співвідношення, які пов'язують швидкість тіла в одній системі відліку з швидкістю того ж тіла в іншій системі.

Нехай система $O'X'Y'Z'$ рухається відносно $OXYZ$ з швидкістю u вздовж осі OX . При цьому $v_x = dx/dt$ і $v'_x = dx'/dt'$ є компонентами швидкості тіла в системах $OXYZ$ та $O'X'Y'Z'$, відповідно. З (19.8) маємо:

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

Поділивши перші три рівності на четверту, знаходимо:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}}. \quad (19.14)$$

Ці формули і визначають перетворення швидкостей. Вони являють собою закон додавання швидкостей в спеціальній теорії відносності. В граничному випадку $v \ll c$ вони переходять в формули класичної механіки

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z.$$

Три формули (19.14) можна записати у вигляді однієї векторної рівності

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} - \frac{1}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{v}') \vec{v}'. \quad (19.15)$$

При цьому слід звернути увагу, що в релятивістський закон додавання швидкостей дві складові \vec{v}' та \vec{u} входять несиметрично (якщо тільки обидві вони не напрямлені вздовж осі X). Ця обставина закономірно пов'язана з некомутативністю перетворень Лоренца.¹²

Виберемо осі координат так, щоб швидкість частинки в даний момент лежала в площині XY . Тоді швидкість частинки в системі $OXYZ$ має проекції

¹² Перетворення Лоренца, на відміну від перетворень Галілея, володіють властивістю некомутативності, оскільки результат двох послідовних перетворень з різними швидкостями \vec{u}_1 та \vec{u}_2 , взагалі кажучи, залежить від їх послідовності. Винятком є лише перетворення з паралельними векторами \vec{u}_1 і \vec{u}_2 .

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha,$$

а в системі $O'X'Y'Z'$ –

$$v'_x = v' \cos \alpha', \quad v'_y = v' \sin \alpha',$$

де α і α' – кути, утворені швидкістю з осями X та X' відповідно. На основі формул (19.14) знаходимо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v' \sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha'}{v' \cos \alpha' + u}. \quad (19.15)$$

Співвідношення (19.15) визначає зміну напрямку швидкості при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Приклад 19.1. Частинка рухається у площині $z = 0$ по колу радіуса R згідно закону

$$x = R \sin \omega t, \quad y = R(1 - \cos \omega t).$$

В момент часу $t = 0$ швидкість частинки $\vec{v} = (\omega R, 0, 0)$. Знайти рівняння траєкторії в системі K' , яка рухається з швидкістю \vec{v} .

На основі перетворень Лоренца (19.8) отримуємо:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{R(\sin \omega t - \omega t)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y = R(1 - \cos \omega t), \\ \omega t' &= \frac{\omega t - \omega \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\omega t - \frac{v^2}{c^2} \sin \omega t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Для частинок, які рухаються з швидкістю $v \sim c$, величина

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \gg 1.$$

Тому в інтервалі часу t , який задовольняє умові $\gamma \omega t \sim 1$, маємо

$$\begin{aligned} t' &\cong \frac{t}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma^2 \omega^2 t^2}{6} \right), \\ x' &\cong -\frac{R}{6\gamma^2} (\gamma \omega t)^3, \quad y' \cong \frac{R}{2\gamma^2} (\gamma \omega t)^2. \end{aligned}$$

Рівняння траєкторії

$$y' = \frac{R}{2\gamma^2} \left(\frac{6\gamma^2 |x'|}{R} \right)^{2/3}.$$

19.2. Простір Мінковського

19.2.1. Поняття про чотиривимірний простір Мінковського

Як уже відмічалось, проміжки часу та відстані не є інваріантами перетворень Лоренца. Замість цих двох величин найважливішим інваріантом в теорії відносності є величина, яка називається *інтервалом*.

Подія, що відбувається з будь-якою частинкою, характеризується місцем, де вона відбулася, і часом, коли вона відбулася. Нехай перша подія полягає в тому, що з точки, яка має координати x_1, y_1, z_1 в системі K в момент часу t_1 відправляється сигнал, що поширюється з швидкістю світла. Другою подією вважатимемо надходження сигналу в точку з координатами x_2, y_2, z_2 в момент часу t_2 . Тоді

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (19.16)$$

Інтервалом між двома подіями називають величину S_{12} , яка визначається рівністю

$$S_{12} = \sqrt{-c^2 t^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (19.17)$$

Для двох нескінченно близьких подій інтервал визначається виразом

$$dS = \sqrt{-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (19.18)$$

Внаслідок сталості швидкості поширення світла рівність (19.16) повинна виконуватись у будь-якій інерціальній системі відліку. Таким чином, якщо інтервал рівний нулю в системі K , то він буде рівним нулю і в довільній іншій системі K' . Звідси слідує, що інтервали між подіями в системах K і K' повинні бути пов'язані співвідношенням

$$dS = a dS',$$

причому коефіцієнт a може залежати тільки від абсолютної величини відносної швидкості обох інерціальних систем відліку. В силу повної рівноправності систем K і K' на тих же підставах можна записати, що

$$dS' = a dS.$$

Перемноживши дві останні рівності, знаходимо, що $a^2 = 1$, звідки $a = \pm 1$. Природно припустити, що знак інтервалу в усіх системах відліку повинен бути однаковим. Таким чином, приходимо до висновку, що інтервал між двома подіями є інваріантом:

$$dS = dS', \quad (19.19)$$

причому з рівності нескінченно малих інтервалів слідує і рівність скінченних інтервалів.

Для координат двох подій в деякій системі K введемо позначення

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L_{12}^2.$$

Тоді квадрат інтервалу між цими подіями запишеться у вигляді

$$S_{12}^2 = -c^2 t_{12}^2 + L_{12}^2.$$

В будь-якій іншій інерціальній системі K' для тих же подій

$$S_{12}'^2 = -c^2 t_{12}'^2 + L_{12}'^2,$$

причому в силу інваріантності

$$-c^2 t_{12}^2 + L_{12}^2 = -c^2 t_{12}'^2 + L_{12}'^2. \quad (19.20)$$

Припустимо, що $S_{12}^2 > 0$, тобто інтервал дійсний. Тоді можна знайти таку систему відліку K' , в якій $t_{12}' = 0$, тобто події відбуваються одночасно. Відстань між точками, в яких відбулися події в системі K' , згідно (19.20) рівна

$$L_{12}' = \sqrt{-c^2 t_{12}'^2 + L_{12}'^2} = S_{12}. \quad (19.21)$$

Дійсні інтервали називаються *просторовоподібними*.

Нехай тепер $S_{12}^2 < 0$, тобто інтервал уявний. Тоді можна знайти таку систему K' , в якій $L_{12}' = 0$, тобто події, розділені інтервалом S_{12} відбудуться в одній точці. Проміжок часу між подіями в системі K' рівний

$$t_{12}' = \frac{\sqrt{c^2 t_{12}^2 - L_{12}^2}}{c} = \frac{iS_{12}}{c}. \quad (19.22)$$

Уявні інтервали називаються *часоподібними*.

Події, що відбуваються з однією й тією ж частинкою, можуть бути розділені тільки часоподібним інтервалом. Дійсно, оскільки частинка не може рухатися з швидкістю, більшою c , то пройдена нею за час t_{12} відстань L_{12} не може перевищити ct_{12} , тобто

$$ct_{12} \geq L_{12}, \quad \text{звідки } S_{12}^2 \leq 0.$$

Просторово подібним інтервалом можуть бути розділені лише причинно не зв'язані події. Дійсно, якщо $S_{12}^2 > 0$, то $L_{12} > ct_{12}$. Це означає, що жоден сигнал, який вийшов з одної точки простору, не може досягти за час t_{12} другої точки і вплинути на подію, що відбувається в цій точці.

Все вище сказане справедливе і для нескінченно малих інтервалів. При цьому з інваріантності просторово-часового інтервалу слідує інваріантність власного часу (19.13). Дійсно, оскільки

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}},$$

то, враховуючи співвідношення (19.18), отримаємо

$$d\tau = \frac{ds}{c}. \quad (19.23)$$

Розділення інтервалів на часоподібні та просторовоподібні в силу їх інваріантності є абсолютним, тобто не залежить від системи відліку. Введемо позначення

$$x_0 = ict, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Сукупність величин x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) зручно трактувати як декартові компоненти деякого вектора в чотиривимірному просторі-часі, який називається *простором Мінковського*.

Візьмемо деяку подію O за початок відліку часу і просторових координат. Для наочності розглядатимемо тільки часову і одну просторову координати, відкладаючи їх на двох осях. Прямолінійний рівномірний рух частинки, яка проходить через точку $x_1 = 0$ при $t = 0$, зобразиться прямою, що проходить через O і нахилена до осі часу від куту, тангенс якого рівний швидкості частинки. Оскільки найбільша можлива швидкість рівна c , то існує найбільший кут, який може утворювати ця пряма з віссю часу. На рис. 19.2 зображені дві прямі, які відповідають поширенню двох сигналів (з швидкістю світла) у протилежних напрямках, що проходять через подію O . Всі лінії, які зображають рухи частинок, можуть лежати тільки всередині областей aOc і dOb . На прямих ab і cd $x_1 = \pm ct$. Розглянемо спочатку події, світові точки яких лежать всередині області aOc . В усіх точках цієї області $x_1^2 - c^2 t^2 < 0$, тоб-

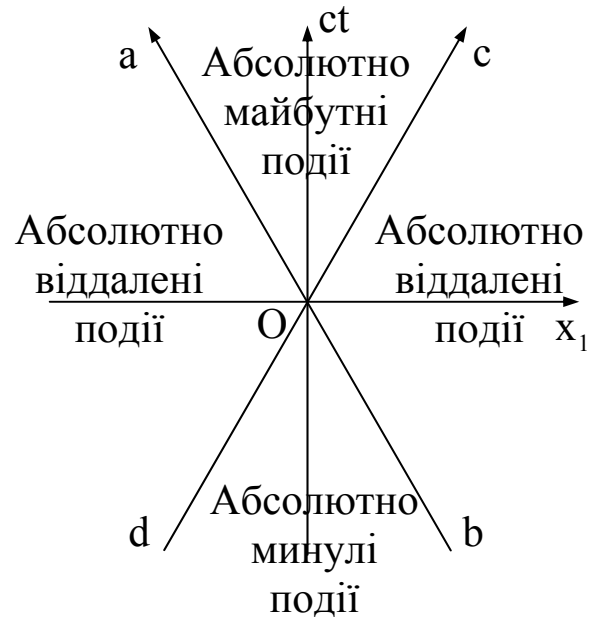


Рис. 19.2.

то інтервали між будь-якою подією в цій області та подією O – часоподібні. Оскільки при цьому $t > 0$, то всі події в області aOc відбуваються після події O . Але дві події, розділені часоподібним інтервалом, в жодній системі не можуть відбутися одночасно. Значить, не можна вибрати ніякої системи відліку, де яка-небудь з подій області aOc відбулася б до події O . Таким чином, всі події області aOc є *абсолютно майбутніми* по відношенню до O , причому в усіх системах відліку.

Аналогічно, всі події області dOb є *абсолютно минулими* по відношенню до O .

Інтервал між довільною подією областей aOd і bOc та подією O – просторовоподібний. В будь-якій системі відліку ці події відбуваються в різних точках простору. Тому вказані області називаються *абсолютно віддаленими* по відношенню до події O . Однак поняття одночасності для цих подій відносні. Для будь-якої події областей aOd і bOc є такі системи відліку, де вона відбувається раніше чи пізніше події O і, нарешті, існує одна система відліку, де подія відбувається одночасно з O .

Якщо розглядати всі три просторові координати, то замість двох прямих, які перетинаються на рис. 19.2, ми отримали б конус $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = 0$, вісь якого співпадає з віссю часу (його називають “світовим конусом”). Области “абсолютно майбутнього” та “абсолютно минулого” зобразяться тоді відповідно двома внутрішніми порожнинами цього конуса.

19.2.2. Перетворення Лоренца як обертання системи координат у просторі Мінковського

Користуючись поняттям простору Мінковського, перетворенням Лоренца можна дати певну геометричну інтерпретацію.

Інтервал між подіями можна розглядати як відстань між відповідними точками в чотиривимірному просторі (4-просторі). З цієї позиції перетворення Лоренца залишають інваріантними всі довжини в просторі $\{x_\alpha\}$. Але такими перетвореннями можуть бути лише паралельні перенесення і обертання системи координат. З них переноси системи не викликають інтересу. Таким чином, перетворення Лоренца математично виражаються як обертання системи координат в просторі $\{x_\alpha\}$.

Будь-яке обертання в 4-просторі можна розкласти на 6 складових:

обертання в площинах XY , ZY , XZ , ctX , ctY , ctZ . Перші три з них перетворюють тільки просторові координати і відповідають звичайним просторовим поворотам.

Розглянемо поворот у площині ctX (Y і Z при цьому не змінюються). Це перетворення повинно зберігати незмінною різницю $x^2 - c^2t^2$. Зв'язок між старими та новими координатами в цьому перетворенні в найбільш загальному вигляді запишеться як

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi,$$

$$ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi.$$

Дані формули відрізняються від звичайних формул перетворень при повороті осей координат заміною тригонометричних функцій гіперболічними. В цьому проявляється відмінність псевдоевклідової геометрії від евклідової.

Розглянемо рух в системі K початку координат системи K' . В цьому випадку $x' = 0$ і

$$x = ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$

або

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th} \psi.$$

Але $x/t = u$ – швидкість системи K' відносно K . Таким чином,

$$\operatorname{th} \psi = \frac{u}{c}.$$

Звідси

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Тоді

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{ct' \cdot u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{x' + u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + x' \cdot u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким чином, дійсно, перетворення Лоренца можна розглядати як перетворення координат при повороті системи координат в 4-просторі.

19.2.3. Чотиривимірні швидкість та прискорення

Як вже відмічалось, сукупність координат події $\{x_\alpha\} = \{ict, \vec{r}\}$ можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора (4-радіус-вектора) в чотиривимірному просторі.

Взагалі *чотиривимірним вектором (4-вектором)* A_α називається сукупність чотирьох величин A_0, A_1, A_2, A_3 , які при перетворенні чотиривимірної системи координат перетворюються як компоненти 4-радіус-вектора x_α ¹³. Зокрема, при перетвореннях Лоренца

$$A_0 = \frac{A'_0 + \frac{u}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 + \frac{u}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3. \quad (19.24)$$

Квадрат величини довільного 4-вектора визначається як

$$A_\alpha \cdot A_\alpha = A_0 \cdot A_0 + A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_3.$$

Так, наприклад, квадрат 4-радіус-вектора дорівнює:

$$x_\alpha \cdot x_\alpha = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Він не змінюється при будь-яких поворотах чотиривимірної системи координат, якими є, зокрема, перетворення Лоренца.

Аналогічно квадрату 4-вектора складається скалярний добуток двох різних 4-векторів:

$$A_\alpha B_\alpha = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

Добуток $A_\alpha B_\alpha$ є 4-скаляром – він інваріантний по відношенню до поворотів чотиривимірної системи координат.

Компоненту A_0 4-вектора називають часовою, а всі інші – просторовими (за аналогією з 4-радіус-вектором). Квадрат 4-вектора може бути додатнім, від'ємним або рівним нулю. В цих трьох випадках говорять відповідно про просторовоподібні, часоподібні та нульові 4-вектори.

По відношенню до чисто просторових поворотів (тобто перетворень, що не торкаються осі часу) три просторові компоненти 4-вектора A_i утворюють тривимірний вектор \vec{A} . Часова ж компонента 4-вектора є (по відношенню до тих же перетворень) тривимірним скаляром.

Чотиривимірною швидкістю (4-швидкістю) називається вектор

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}, \quad (19.25)$$

де $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ – елемент власного часу. Враховуючи вирази для компонент 4-радіус-вектора, часова і просторові компоненти 4-швидкості

¹³ Надалі грецьким індексом ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) будемо позначати всі компоненти 4-вектора, а латинським індексом ($i = 1, 2, 3$) – лише його просторові компоненти.

відповідно запишуться:

$$u_0 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad u_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_2 = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_3 = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.26)$$

Загальний запис 4-швидкості при цьому має вигляд:

$$u_\alpha = \{u_0, u_i\} = \left\{ \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}, \quad (19.27)$$

де \vec{v} – звичайна тривимірна швидкість частинки.

Відмітимо, що 4-швидкість – величина безрозмірна. Квадрат 4-швидкості є інваріантом:

$$u_\alpha \cdot u_\alpha = \frac{-c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2.$$

Це означає, що компоненти 4-швидкості не є незалежними.

Аналогічно визначенню 4-швидкості, другу похідну

$$a_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = \frac{du_\alpha}{d\tau} \quad (19.28)$$

називають *чотиривимірним прискоренням (4-прискоренням)*.

Продиференціюємо квадрат 4-швидкості по власному часу:

$$u_\alpha \cdot \frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(-c^2) = 0. \quad (19.29)$$

В лівій частині останнього виразу стоїть скалярний добуток 4-швидкості та 4-прискорення, рівність якого нулю означає, що u_α і a_α взаємно перпендикулярні.

Знайдемо компоненти 4-прискорення. На основі співвідношень (19.26) і (19.28) отримуємо:

$$a_0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Остаточно

$$a_0 = \frac{i}{c} \frac{v \cdot \dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (19.30)$$

Аналогічно для просторових компонент 4-прискорення отримуємо вирази

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\
 &= \frac{\dot{v}_i}{1 - v^2/c^2} + \frac{v_i (v \cdot \dot{v}_i)}{c^2 (1 - v^2/c^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{19.31}$$

Література

[2] – Гл. I, §§ 1–7

[7] – Ч. II, Гл. I, §§ 1–3

[8] – Ч. 2, Гл. 4, §§ 22, 23

[11] – Ч. IV, Гл. III, §§ 179–180

Лекція 20

Релятивістська динаміка

20.1. Основне рівняння релятивістської динаміки

20.1.1. Чотиривимірний імпульс частинки

Постулати Ейнштейна і перетворення Лоренца, як уже відмічалось, внесли значні корективи до тлумачення кінематичних понять координат, часу і швидкості руху. Тому цілком очевидно, що й динамічні закони та величини в релятивістській механіці будуть відрізнятися від класичних.

Рівняння Ньютона інваріантні по відношенню до перетворень Галілея, але не інваріантні відносно перетворень Лоренца. Тому для узгодження з принципом відносності Ейнштейна, другий закон Ньютона потрібно замінити більш загальним законом. Зокрема, при $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ шукає не рівняння повинно перетворюватись в звичайні рівняння, що виражають 2-ий закон Ньютона:

$$\frac{d(mv_i)}{dt} = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{20.1}$$

або

$$\frac{d(\mathbf{p}_i)}{dt} = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (20.2)$$

де тривимірний вектор \vec{p} з компонентами mv_1, mv_2, mv_3 є класичним імпульсом.

З точки зору спеціальної теорії відносності класичне визначення імпульсу частинки потребує зміни, оскільки в чотиривимірному просторі час t не є абсолютним скаляром. Природно вважати релятивістським узагальненням імпульсу чотиривимірний вектор

$$p_\alpha = mu_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (20.3)$$

який називатимемо *4-імпульсом*. При цьому як постулат вважається, що з кожною матеріальною точкою пов'язана інваріантна величина m (маса частинки). Підставляючи значення (19.25) для компонент 4-швидкості, отримаємо

$$p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20.4)$$

Отже, 4-імпульс частинки можна представити у вигляді

$$p_\alpha = \left(\frac{imc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (20.5)$$

Як слідує з визначення (20.3), квадрат 4-імпульсу частинки рівний

$$p_\alpha \cdot p_\alpha = m^2 u_\alpha \cdot u_\alpha = -m^2 c^2, \quad (20.6)$$

тобто є інваріантною величиною.

При $v \ll c$ вираз для просторових компонент релятивістського імпульсу переходить у формулу класичної механіки. Це дає підстави прийняти за релятивістський вираз для звичайного тривимірного імпульсу формулу

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (20.7)$$

20.1.2. Чотиривимірна сила. Релятивістськи коваріантне узагальнення другого закону Ньютона

Після введення поняття 4-імпульсу природним чотиривимірним узагальненням рівнянь руху вільної матеріальної точки є співвідношення

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = K_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (20.8)$$

де K_α – релятивістськи узагальнена сила. Вона являє собою чотиривимірний вектор і називається *силою Мінковського*. Величини K_α повинні бути визначені таким чином, щоб при $v \ll c$ просторові компоненти рівнянь (20.8) переходили в рівняння (20.2), подібно до того як у цьому випадку просторові компоненти 4-швидкості переходять у звичайну швидкість \vec{v} .

Для знаходження просторових компонент сили Мінковського продиференціюємо p_i по власному часу:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = K_i.$$

Звідси

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = K_i \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (20.9)$$

Порівняємо останній вираз з формулою (20.1). Якщо визначити просторові компоненти сили Мінковського K_i так, щоб вони були пов'язані з компонентами звичайної тривимірної сили F_i співвідношеннями

$$F_i = K_i \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (20.10)$$

то рівняння (20.9) набудуть вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20.11)$$

Бачимо, що при $v \ll c$ ці співвідношення, як і потрібно, переходять в рівняння (20.1).

Знайдемо тепер часову складову сили Мінковського. З цією метою помножимо скалярно вираз (20.8) на u_α . Тоді, враховуючи що маса частинки постійна, отримаємо:

$$u_\alpha \cdot \frac{d}{d\tau} (mu_\alpha) = K_\alpha \cdot v_\alpha; \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{2} u_\alpha \cdot u_\alpha \right) = K_\alpha \cdot u_\alpha.$$

Оскільки $u_\alpha \cdot u_\alpha = -c^2 = \text{const}$, то ліва частина останнього виразу рівна

нулю, тому

$$\mathbf{K}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0;$$

$$\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad \mathbf{K}_0 = \frac{-\sum_{i=1}^3 \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{u}_i}{u_0}.$$

Остаточно

$$\mathbf{K}_0 = \frac{i}{c} \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}. \quad (20.12)$$

Таким чином, силу Мінковського можна представити у вигляді

$$\mathbf{K}_\alpha = \left(\frac{i}{c} \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, \frac{\vec{\mathbf{F}}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \right). \quad (20.13)$$

Підсумовуючи сказане, відмітимо, що оскільки \mathbf{K}_α і \mathbf{p}_α є 4-векторами, то вигляд рівняння (20.8) при перетвореннях Лоренца залишається незмінним. Іншими словами, співвідношення (20.8) є релятивістськи інваріантним рівнянням динаміки частинки.

20.2. Релятивістська енергія

20.2.1. Фізичний зміст часової компоненти 4-імпульсу.

Релятивістська енергія

Розглянемо детальніше часову компоненту сили Мінковського. Як відомо, скалярний добуток тривимірних векторів сили та швидкості визначає потужність сили, тобто роботу, виконану над частинкою за одиницю часу. Ця робота рівна швидкості зміни енергії частинки dE/dt . У відповідності з цим вираз (20.12) можна представити як

$$\mathbf{K}_0 = \frac{i}{c\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \frac{dE}{dt}.$$

З іншого боку, виділивши з рівності (20.9) часову компоненту, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{imc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \mathbf{K}_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Порівнюючи два останні вирази, маємо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{dE}{dt}. \quad (20.14)$$

Звідси робимо висновок, що *релятивістська енергія частинки* дорівнює

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const}.$$

При цьому потрібно мати на увазі, що E не включає в себе потенціальну енергію частинки у зовнішньому силовому полі.

Поклавши в останньому виразі $\text{const} = 0$, отримаємо

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (20.15)$$

У зв'язку з таким вибором сталої слід зробити наступне зауваження. В ньютонівській механіці повна енергія частинки визначається з точністю до адитивної сталої. Ніяких підстав для вибору деякого певного значення цієї константи в рамках класичної механіки немає, і її просто покладають рівною нулю. У релятивістській механіці такий вибір константи має глибокий фізичний зміст. Дійсно, порівнявши вирази (20.15) і (20.4), бачимо, що часова компонента 4-імпульсу частинки пов'язана з її релятивістською енергією:

$$p_0 = \frac{iE}{c}. \quad (20.16)$$

При цьому вираз 4-імпульсу набуває вигляду

$$p_\alpha = \left(\frac{iE}{c}, \vec{p} \right), \quad (20.17)$$

де \vec{p} – релятивістський тривимірний імпульс, що визначається формулою (20.7).

Таким чином, енергія та звичайний імпульс частинки є компонентами одного чотиривимірного вектора p_α , який по цій причині іноді називають *вектором енергії-імпульсу*. Ця обставина дає можливість застосувати формули (19.24) для знаходження правил перетворення E і \vec{p} при переході від одної інерціальної системи відліку до іншої. Підставивши відповідні значення p_α в (19.24), легко отримати

$$E = \frac{E' + up'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + u(E'/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \quad (20.18)$$

Обернені перетворення відрізняються знаком при u .

Як бачимо, повна енергія частинки E , що визначається формулою (20.15), є відносною величиною: вона різна в різних системах відліку. До цього слід додати, що в релятивістській механіці енергія вільної частинки при $v = 0$ не перетворюється в нуль, а залишається скінченою величиною, рівною

$$E_0 = mc^2. \quad (20.19)$$

Її називають *енергією спокою частинки*. На відміну від повної енергії, енергія спокою – інваріантна величина, пов'язана з масою тіла. Різниця між повною енергією та енергією спокою визначає кінетичну енергію частинки

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) - 1. \quad (20.20)$$

За невеликих швидкостей ($v \ll c$), розклавши енергію (20.15) в ряд, отримуємо:

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (20.21)$$

Таким чином, з точністю до членів порядку v^4/c^4 формула (20.20) переходить в ньютонівський вираз для кінетичної енергії.

Знайдемо квадрат 4-імпульсу частинки, скориставшись формулою (20.17). В результаті матимемо:

$$p_\alpha \cdot p_\alpha = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2.$$

Порівнюючи отримане співвідношення з виразом (20.6), знаходимо залежність між повною енергією частинки та її релятивістським імпульсом:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (20.22)$$

Але, як відомо, енергія, виражена через імпульс, називається функцією Гамільтона. Таким чином, релятивістський вираз функції Гамільтона вільної частинки має вигляд

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (20.23)$$

Якщо ж частинка знаходиться в зовнішньому силовому полі з потенціальною енергією Π , то для неї функція Гамільтона дорівнює

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \Pi. \quad (20.24)$$

20.2.2. Маса та її властивості. Частинки з нульовою масою

До цих пір ми фактично не звертали увагу на величину m , яка фігурує в динамічних співвідношеннях СТВ, розуміючи під нею масу частинки і постулюючи її інваріантність у різних системах відліку. Однак, між поняттями маси в ньютонівській і релятивістській механіці існують суттєві відмінності, що проявилися у зв'язку з розвитком теорії СТВ і переосмисленням просторово-часових уявлень.

Механіка Ньютона розглядає масу як міру інертності тіл, тобто як коефіцієнт пропорційності у формулах $\vec{F} = m\vec{a}$ чи $\vec{p} = m\vec{v}$, які інваріантні відносно перетворень Галілея. Однак для реалізації принципу відносності та сталості швидкості необхідні перетворення Лоренца, а з них слідує, що зв'язок між імпульсом та швидкістю дається формулою (20.7). Те ж саме стосується і основного рівняння релятивістської динаміки (20.11). Фізичний зміст маси був відкритий Ейнштейном, коли в 1905 р. він ввів у фізику поняття енергії спокою. Дійсно, із співвідношення (20.19) слідує, що

$$m = E_0/c^2. \quad (20.25)$$

Отже, маса пропорційна енергії спокою. Саме енергія спокою, “прихована” в масивних тілах, частково звільняється в хімічних і особливо ядерних реакціях.

В загальному випадку, як слідує із співвідношення (20.22),

$$m^2 = E^2/c^4 - \vec{p}^2/c^2. \quad (20.26)$$

Визначена таким чином, маса не змінюється при переході від однієї інерціальної системи до іншої. В цьому легко переконатись, якщо використати для енергії та імпульсу перетворення Лоренца (20.18). Таким чином, на відміну від E і \vec{p} , які є компонентами чотиривимірного вектора, маса m є лоренцевим інваріантом.

Повертаючись до виразу (20.25), слід зазначити, що він фактично встановлює еквівалентність маси та енергії спокою (але не повної енергії частинки). А оскільки енергія зберігається, то й маса – збережна величина.

При цьому слід відмітити, що згадана еквівалентність дещо одностороння: завжди, коли є маса, існує й відповідна їй енергія $E_0 = mc^2$, але не завжди, коли є енергія, є маса. Дійсно, існують частинки, маса яких дорівнює нулю, в той час як їх енергія відмінна від нуля. До числа таких частинок належать фотони і, можливо, нейтрино та гравітони. Визначимо

швидкість безмасових частинок. Як слідує з виразів (20.7) і (20.15), зв'язок між енергією, імпульсом та швидкістю частинки має вигляд

$$\vec{v} = \vec{p}c^2/E. \quad (20.27)$$

Оскільки маса фотона $m = 0$, то, як слідує з рівнянь (20.26) та (20.27), його швидкість

$$v = c,$$

а енергія

$$E = pc.$$

Утворившись, частинки з нульовою масою відразу рухаються з швидкістю c , причому в будь-якій системі відліку. В той же час для частинок з масою, відмінною від нуля, досягнення швидкості світла вимагало б нескінченно великих затрат енергії.

У механіці Ньютона однією з властивостей маси є її адитивність: маса механічної системи дорівнює сумі мас точок, що утворюють цю систему. В релятивістській механіці дана закономірність, взагалі кажучи, не виконується. Покажемо це на прикладі двох частинок. Оскільки енергія та імпульс – адитивні величини, то для двох вільних тіл їх сумарні енергія та імпульс будуть рівними, відповідно

$$E = E_1 + E_2, \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Тоді для системи двох частинок згідно (20.26) отримаємо

$$m^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{c^2} \neq (m_1 + m_2)^2.$$

Сумарна маса виявляється залежною від кута між імпульсами \vec{p}_1 і \vec{p}_2 . Так маса системи двох фотонів (з енергією E у кожного) рівна $2E/c^2$, якщо вони летять у протилежних напрямках, і нулю, якщо вони летять в один бік.

Приклад 20.1. Розпад частинок.

Розглянемо самовільний розпад тіла з масою M на дві частинки з масами m_1 і m_2 . Закон збереження енергії при розпаді, застосований у системі відліку, відносно якої тіло знаходиться у спокої, дає

$$Mc^2 = E_1 + E_2. \quad (20.28)$$

де E_1 і E_2 – енергії частинок, що розлітаються. Оскільки

$$E_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} > m_1 c^2,$$

$$E_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} > m_2 c^2,$$

де v_1 і v_2 – швидкості частинок, яких вони набули після розпаду, то закон збереження енергії може виконуватися лише в тому випадку, коли

$$M > m_1 + m_2,$$

тобто тіло може самовільно розпадатися на частини, сума мас спокою яких менша маси тіла.

Навпаки, якщо

$$M < m_1 + m_2,$$

то тіло стійке відносно даного розпаду і самовільно не розпадається. Для ініціювання розпаду потрібно було б у цьому випадку надати тілу ззовні енергію, рівну, як мінімум, його енергії зв'язку $(m_1 + m_2 - M)c^2$.

Поряд із законом збереження енергії при розпаді повинен виконуватися закон збереження імпульсу, тобто сума імпульсів частинок, що розлітаються, як і початковий імпульс тіла, дорівнює нулю:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

або

$$p_1^2 = p_2^2.$$

Але оскільки в релятивістській механіці зв'язок між енергією та імпульсом описується співвідношенням (20.22), то

$$E_1^2 - m_1^2 c^4 = E_2^2 - m_2^2 c^4.$$

У результаті ми приходимо до системи з двох рівнянь

$$E_1 + E_2 = Mc^2,$$

$$E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)c^4,$$

з яких можна знайти енергії частинок, що розлітаються:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2, \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} c^2.$$

Оскільки кінетична енергія частинки визначається різницею між її повною енергією та енергією спокою, то співвідношення (20.28) запишеться у вигляді

$$Mc^2 = E_1 + E_2 = T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2,$$

або

$$T_1 + T_2 = (M - m_1 - m_2)c^2.$$

Спільне збереження енергії та імпульсу накладає досить серйозні обмеження на ядерні реакції або на акти взаємодії при зіткненнях частинок. Наприклад, фотон високої енергії (γ -квант) може породити електронно-позитронну пару за реакцією

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

за умови, що його енергія перевищує величину

$$E_\gamma > 2m_e c^2 \approx 1\text{MeV}$$

(маси електрона і позитрона рівні).

У вільному просторі, однак, ця реакція не може здійснитися при жодній енергії, тому що не може бути забезпечений закон збереження імпульсу. Розглянемо реакцію в системі відліку, де центр мас системи „позитрон–електрон” знаходиться у спокої. У цій системі сума імпульсів позитрона й електрона дорівнює нулю:

$$\vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = 0.$$

Але в цій системі імпульс фотона, що налітає, не дорівнює нулю, тому що не існує системи відліку, де імпульс фотона міг би зникнути. Таким чином,

$$\vec{p}_\gamma \neq \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+}$$

і реакція не має місця. Але якщо ця реакція неможлива в одній системі відліку, то вона неможлива і в будь-якій іншій системі.

Ця реакція можлива лише поблизу іншої частинки, наприклад, поблизу ядра атома, оскільки тоді ядро може взяти на себе зміну імпульсу. Це відбувається за рахунок відбиття заряджених частинок кулонівським полем ядра:

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_я = \vec{p}'_я + \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+}.$$

При цьому реакція змінює імпульс ядра, але не робить у ньому ніяких інших змін, так що ядро діє як дуже простий каталізатор. Початковий імпульс ядра може бути при цьому рівним нулю. Без участі ядра така реакція можлива лише за наявності двох γ -квантів:

$$2\gamma \leftrightarrow e^- + e^+ .$$

Відповідно можлива і зворотна реакція, при якій електрон і позитрон анігілюють з утворенням двох γ -квантів.

Приклад 20.2. Пружне зіткнення частинок.

Розглянемо зіткнення двох частинок з масами m_1 і m_2 . Вважатимемо, що перша частинка до зіткнення була нерухомою, а друга володіла імпульсом \vec{p} . Оскільки зіткнення пружне, то маси частинок не змінюються. Після зіткнення частинки володітимуть, відповідно, імпульсами \vec{p}_1 і \vec{p}_2 (рис. 20.1). На основі законів збереження маємо:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad m_1 c^2 + E = E_1 + E_2. \quad (20.29)$$

Кінетична енергія початково нерухомої частинки

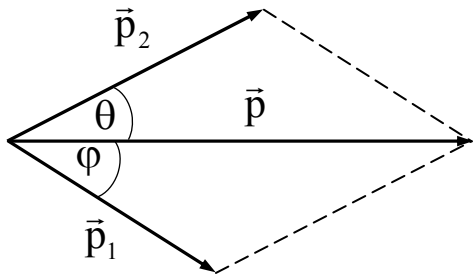


Рис. 20.1.

$$T_1 = E_1 - m_1 c^2, \quad (20.30)$$

з урахуванням чого з виразу (20.29) отримуємо
 $E = T_1 + E_2,$

або

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} = T_1 + \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4}. \quad (20.31)$$

З рис. 20.1. на основі теореми косинусів бачимо, що

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos \varphi. \quad (20.32)$$

З двох останніх виразів, враховуючи вираз (20.22), маємо

$$p_1^2 = \frac{T_1^2 + 2m_1 c^2 T_1}{c^2}. \quad (20.33)$$

Виключаючи із співвідношень (20.30)–(20.33) імпульси p_1 і p_2 , отримуємо вираз для кінетичної енергії:

$$T_1 = \frac{2m_1 p^2 c^4 \cos \varphi}{\left(\sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} + m_1 c^2\right)^2 - p^2 c^2 \cos \varphi}. \quad (20.34)$$

Як слідує з останнього виразу, енергія, що передається при зіткненні, має максимальне значення у випадку прямого удару ($\varphi = 0$).

Нехай $\varphi = 0$ і при цьому $m_1 \gg m_2$. Згідно законів класичної механіки в такому випадку легка частинка могла б передати тяжкій тільки дуже малу частину своєї енергії. В релятивістській теорії ситуація змінюється. Якщо імпульс налітаючої частинки достатньо великий, щоб виконувалася нерівність $pc \gg m_2 c^2$, то, як слідує з формули (20.34),

$$T_1 \approx 2m_1 \frac{p^2 c}{2m_1 p + m_1^2 c}.$$

Якщо ж виконується умова $pc \gg m_1 c^2$, то $T_1 \cong pc \cong E$, тобто можлива практично повна передача енергії.

Література

- [2] – Гл. II, §§ 8–14
- [7] – Ч. II, Гл. II, §§ 1–7
- [6] – Гл. XXXI, §§ 173–175
- [11] – Ч. IV, Гл. III, §§ 181
- [17] – Гл. VII, § 32

Список рекомендованой та використаной літератури

Основна література

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1988.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 2. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 1. Кинематика. Принципы механики. Статика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1952.
4. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1982.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1983.
7. Мултановский В.В. Курс теоретической физики. – М.: Просвещение, 1988.
8. Федорченко А.М. Теоретична фізика: В 2 т. Т.1. Класична механіка і електродинаміка. – К.: Вища школа, 1992.
9. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
10. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1992.
11. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. – М.: Наука, 1977.
12. Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971.
13. Гаральд Іро. Класична механіка /Пер. з нім. Р. Гойди та Ю. Головача/. – Львів, 1999.
14. Савельев И.И. Основы теоретической физики: В 2 т. Т.1. Механика и электродинамика. – М.: Наука, 1991.
15. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. – К.: Наук. думка, 1982.
16. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1989.
17. Павленко Г.М. Лекции по теоретической механике. – М.: Изд-во МГУ, 1991.
18. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – Т. I. – М.: Наука, 1979. – Т. II. – М.: Наука, 1979.
19. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.
20. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. Динамика. – М.: Высшая школа, 1984.

21. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1972.
22. Аппель П. Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика. Т. 2. – М.: ГИФМЛ, 1960.
23. Петкевич В.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981.
24. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984.
25. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975.
26. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика. – К.: Вища школа, 1990.
27. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. – К.: Вища школа, 1989.
28. Татаринов Я.В. Лекции по классической механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
29. Д. тер Хаар. Основы гамильтоновой механики. – М.: Наука, 1974.
30. Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980.

Додаткова література

31. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.
32. Тейлор Э, Уиллер Дж. Физика пространства-времени. – М.: Мир, 1971.
33. Рой А. Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981.
34. Карташов А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1986.
35. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971.
36. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986.
37. Бакай А.С., Степановский Ю.Н. Адиабатические инварианты. – К.: Наук. думка, 1981.
38. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977.
39. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наукова думка, 1978.
40. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной механике. – М.: Мир, 1972.
41. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. – М.: Мир, 1973.
42. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. Т. 2. – К.: Наукова думка, 1970.
43. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975.

Предметний покажчик

Аксіома звільнення від зв'язків	102	Дужки Пуассона	168
Аксоїд нерухомий	70	– – фундаментальні	168
– рухомий	70		
Амплітуда коливань вимушених	99	Експеримент Майкельсона-Морлі	258
– – вільних	95	Ексцентриситет	221
Аномалія істинна	221	Еліпсоїд інерції	137
Апсида	219	– – центральний	137
Арифметизація простору	10	Енергія кінетична точки	120
– часу	11	– – механічної системи	120
Афелій	222	– повна механічна	127
		– потенціальна	126
Біномаль	20	– релятивістська	276
		– спокою частинки	277
Вага тіла	209		
Варіація ізохронна	173	Задача двох тіл	223
– повна	174	– динаміки друга	88
Варіювання ізоенергетичне	177	– – перша	89
Вектор головний зовнішніх сил	103	– кінематики основна	10
– – внутрішніх сил	103	– Коші	90
– енергії-імпульсу	276	– краєва	90
– ковзний	37	– переслідування	78
– кутового прискорення	38	– розсіювання	225
– кутової швидкості	37	– Ціолковського друга	214
– чотиривимірний	270	– – перша	212
Відстань прицільна	228	Закон збереження імпульсу	108
Віріал сили (Клаузіуса)	129	– – моменту імпульсу	113
Вісь інерції головна	137	– – повної механічної енергії	127
– – – центральна	137	– руху тіла	11
– обертання	31	Закони Кеплера	223
– – миттева	69	– Ньютона	83
– кутового прискорення	69	Зв'язки	102
		Зв'язок геометричний	146
Годограф вектора	11	– голономний	146
		– двосторонній	146
Декремент затухання	96	– диференціальний	146
Дія за Гамільтоном	176	– ідеальний	150
– за Лагранжем	178	– інтегровний	146
Добротність	96	– кінематичний	146

– неголономний	146	– нормальні	243
– неінтегровний	146	– полярні	17
– нестационарний	146	– сферичні	27
– односторонній	146	– узагальнені	153
– реономний	146	– центру масс	115
– склерономний	146	– циклічні	161
– стаціонарний	146	– циліндричні	26
Змінні Гамільтона	163	Коефіцієнт затухання	96
– дії	192	Коефіцієнти Ламе	24
– кутові	192	Кут нутації	59
– ”дія-кут”	192	– обертання	33
– канонічні	163	– – власного	59
– Лагранжа	162	– прецесії	59
		– розсіювання	228
Імпульс матеріальної точки	106	Кути Ейлера	59
– механічної системи	106		
– релятивістський	273	Лінія вузлів	59
– узагальнений	162	– дії сили	81
– чотиривимірний	273	– координатна	23
Інваріантність адиабатична	195		
Інертність	82	Маса гравітаційна	82
Інтеграл площ	216	– зведена	225
– руху другий	89	– інертна	82
– – перший	89	Метод Крилова-Боголюбова	247
– рівняння Гамільтона-Якобі	185	Метод розділення змінних	188
– циклічний	162	Міра інертності	82
Інтервал між подіями	265	Множник зв’язку	92
– просторовоподібний	266	Момент імпульсу відносно осі	110
– часоподібний	266	– – відносно точки	110
		– інерції відносно осі	131
Кінематика	9	– – – точки	131
Коваріантність рівнянь Лагранжа	157	– – відцентровий	135
Коливання вимушені	100	– – головний	137
– вільні	94	– – – центральний	137
– затухаючі	95	Момент кінетичний	110
– малі	236	– сили відносно осі	109
– слабо-нелінійні	247	– – відносно точки	109
– нормальні	243		
Координати криволінійні	23	Невагомість	209

Нормаль головна	20	-- Галілея	86
– зовнішня	93	– віртуальних переміщень	150
		– Гамільтона-Остроградського	176
Область мінімуму	238	– Даламбера-Лагранжа	152
Осцилятор анізотропний	194	– еквівалентності	209
		– екстремальної дії	176
Параметр орбіти	221	– Мопертюї-Лагранжа	178
Переміщення віртуальне	147	– Остроградського	176
– дійсне	147	Принципи варіаційні	172
– матеріальної точки	14	– диференціальні	174
– можливе	147	– інтегральні	174
Переріз розсіювання	232	Прискорення доосеве	39
Перетворення Галілея	78	– Коріоліса	76
– канонічні	182	– кутове	34
– Лоренца	261	– нормальне	22
Перигелій	222	– обертове	38
Площина координатна	24	– переносне	76
– кривизни	20	– тангенціальне	22
– Лапласа	114	– точки	16
– нормальна	20	-- абсолютне	75
Поверхня еквіпотенціальна	125	-- відносне	75
– координатна	24	-- радіальне	19
Події абсолютно віддалені	268	-- середнє	15
-- майбутні	268	-- трансверсальне	19
-- минулі	268	– чотиривимірне	271
Поле силове	124	Простір імпульсний	165
-- стаціонарне	124	– конфігураційний	165
-- -- потенціальне	124	– Мінковського	267
Положення рівноваги стійке	237	– фазовий	165
Полюс	40		
Постійна енергії	161	Радіус інерції	131
Постулати Ейнштейна	259	– кривизни	21
Потенціал кінетичний	160	– обертання точки	34
– ефективний	218	Реакція зв'язків	91
Потужність	119	-- динамічна	91
Похідна вектора локальна	73	-- статична	91
-- повна	73	Резонанс	101
Правило Жуковського	77	– головний	252
Принцип відносності	259	– в нелінійних системах	250

Рівняння Біне	217	– активна	103
– вікове	241	– внутрішня	103
– власних значень тензора інерції	141	– зовнішня	103
– Гамільтона	164	– інерції коріолісова	200
– Гамільтона-Якобі	185	– – переносна	200
– динаміки загальне	152	– Мінковського	274
– – – в узагальнених координатах	157	– реактивна	211
– Ейлера динамічні	145	– узагальнена	154
– – кінематичні	66	– центральна	215
– зв'язків	91	Система відліку абсолютна	71
– канонічні	164	– відносна	72
– Лагранжа другого роду	157	– інерціальна	81
– – першого роду	92	– неінерціальна	81
– Мещерського	212	Система голономна	157
– обертання тіла навколо осі	33	– вільна	102
– обертання тіла навколо точки	60	– консервативна	127
– руху точки	11	– координат ортогональна	24
– – – в декартових координатах	12	– механічна	10
– – – векторне	11	– невільна	102
– – – диференціальні	104	Складова швидкості радіальна	18
– – – по траєкторії	13	– трансверсальна	18
– – – у формі Лагранжа	88	Спосіб задання руху векторний	11
– характеристичне	241	– – – координатний	12
Робота віртуальна	149	– – – природний	13
– елементарна	118	Ступені вільності тіла	30
– повна	118	– механічної системи	154
Рух абсолютний	72		
– аперіодичний	97	Тензор інерції	135
– відносний	72	Теорема віріала	129
– інфінітний	210	– додавання прискорень	75
– механічний	9	– – швидкостей	76
– переносний	72	– Ейлера-Даламбера	62
– порівняння	172	– Кеніга	120
– тіла миттєво-поступальний	51	– Лагранжа-Діріхле	237
– – обертальний	31	– Ліувілля	166
– – плоский	31	– Ляпунова про нестійкість друга	239
– фінітний	219	– – – – перша	239
		– про зміну імпульсу	107
Сила	80	– – – кінетичної енергії	122

– – – моменту імпульсу	111	Функція Гамільтона	164
– про рух центру мас	115	– дисипативна	245
– Пуансо	70	– Лагранжа	160
– Пуассона-Якобі	169	– однорідна	159
– Резаля	113	– силова	124
– Штейнера	133	– твірна канонічного	182
– Якобі	186	перетворення	
Теорема динаміки загальні	105	Функціонал	172
Тіло абсолютно тверде	10		
– змінної маси	210	Центр мас системи	114
Тотожність Якобі	169	Центр прискорень миттєвий	55
Точка вільна	80	Центр швидкостей миттєвий	48
– зображуюча	175	Центроїда нерухома	52
– ізольована	80	– рухома	52
– конфігураційна	165		
– матеріальна	10	Час власний	263
– невільна	91	Частинки з нульовою масою	279
– повороту	219	Частота коливань циклічна	95
– фазова	165	– вироджена	245
Траєкторія точки	11	– резонансна	101
– абсолютна	73	– циклотронна	199
– відносна	73	Число ступенів вільності системи	154
Тригранник кривої природний	19		
		Швидкість кутова	33
Умови початкові	90	– – миттєва	65
		– переносна	75
Фаза коливань	95	– узагальнена	154
– – початкова	95	– чотирирівнірна	270
Формула Бура	74	Швидкість точки	14
– Ейлера векторна	37	– абсолютна	75
– Рівальса	68	– алгебраїчна	21
– Резерфорда	234	– відносна	74
– Цюлковського	213	– секторна	29
Формули Ейлера кінематичні	66	– середня	14

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Сідлецький Валентин Олександрович

ЛЕКЦІЇ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник