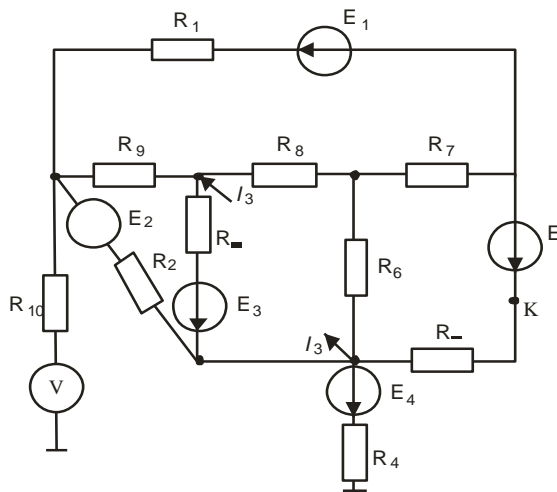


Б.С.Колупаєв

Фізика

основ електротехніки



Рівне 2007

ББК 22.33
К 61
УДК 537:621.3

**Колупасєв Б.С. Фізика основ електротехніки: Монографія:
В 2 т. – Рівне: РДГУ, 2007. – 163 с.**

Монографія є першою частиною запланованого двотомного видання фізики основ електротехніки та радіоелектроніки, в якій дається поглиблене викладання вибраних розділів курсу фізики, знання яких необхідне для розуміння фізичних явищ та процесів, покладених в основу функціонування електрорадіотехніки. Розгляд питань фізики електричних явищ, усвідомлення принципу роботи електротехнічних пристроїв, запропонований математичний апарат дозволяє провести розрахунки конкретних електротехнічних схем, які широко використовуються в науці та техніці.

Для викладачів, інженерів, студентів фізичних спеціальностей, осіб, які вивчають основи електротехніки.

Рекомендовано до друку кафедрою фізики РДГУ (протокол № 3 від 14.11.2006 р.)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою РДГУ (протокол № 3 від 17.05.2007 р.)

© Рівненський державний гуманітарний університет, 2007.

© Колупасєв Б.С., 2007.

Передмова

Дана книга написана на основі конспекту лекцій по розділах „Електричний струм, основні характеристики та закони”, „Нестационарні та квазістационарні струми”, „Закони електромагнітної індукції Фарадея”, „Перехідні процеси в електричних колах”, „Теорія електричних кіл” та „Методи розрахунку електротехнічних кіл” курсу фізики і основ електротехніки для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

У відповідності з навчальним курсом „Електротехніка та радіотехніка” (рекомендовано комісією з фізичних наук НМР МОН України) у книзі об'єднані такі різнірідні розділи як електричне поле у провіднику зі струмом, електромагнітна індукція, встановлені режими кола змінного струму, методи розрахунку електричних кіл, резонансні явища. Лекції по цих розділах читаються на протязі одного семестру, що дає можливість, використовуючи цілісний підхід, зрозуміти фізику процесів, які лежать в основі функціонування та розвитку електротехніки.

Перших два розділи охоплюють значну частину фізичних процесів, знання яких необхідне для з'ясування роботи відповідних пристроїв електротехніки.

Третій розділ „Теорія електричних кіл змінного струму” містить у собі інформацію про будову найпростішого генератора, режими його роботи на різнірідні види навантаження, розрахунок електричних кіл. Книга складається з чотирьох розділів, написаних таким чином, що кожен з них може бути засвоєний незалежно один від одного. Питання інженерного плану у книзі розглядаються лише частково. Однак в ній приведені приклади реалізації розрахункових елементів та логічних схем, у вигляді розрахунково-графічних завдань, які представлені у четвертому розділі, та широко використовуються в науці і техніці.

Книга може бути використана також як навчальний посібник із загальної фізики розділу „Електрика і магнетизм” ПП.05.03 Програми педагогічних університетів МОН України, Київ – 2005.

Розділ 1. Електричний струм

1.1. Електричний струм. Основні означення

Основні поняття електричного струму

Проведемо в середовищі, де існують вільні заряди обох знаків, деяку уявну поверхню. Нехай за проміжок часу dt зліва-направо крізь неї пройде позитивний заряд dq_1^+ та негативний dq_1^- , тоді як справа-наліво перемістяться заряди dq_2^+ та dq_2^- . Якщо різниця величин зарядів, що переходять зліва-направо й навпаки, тобто

$$dq = (dq_1^+ + dq_1^-) - (dq_2^+ + dq_2^-) \quad (1.1.1)$$

не дорівнює нулю, то кажуть, що крізь поверхню проходить електричний струм. Отже, *електричним струмом називається направлений рух електричних зарядів*. За напрямок струму домовились вважати напрямок руху позитивних зарядів. Якщо струм утворюється переміщенням від'ємного заряду, то він має напрямок, протилежний до напрямку руху цих зарядів.

Основна характеристика струму - *сила струму*. *Сила струму дорівнює відношенню величини заряду dq , який пройшов крізь поверхню за малий проміжок часу dt , до величини цього проміжку:*

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1.1.2)$$

В металах електричний струм має лише одну компоненту - упорядкований рух електронів. В електролітах струм утворюється зустрічним рухом в електричному полі позитивних та негативних іонів. В однорідних напівпровідниках струм теж має дві компоненти, зумовлені упорядкованим рухом електронів (n) та позитивних фіктивних зарядів-дірок (p) у протилежних напрямках. Для розуміння електричних процесів у p - n - переході необхідно враховувати всі чотири компоненти струму згідно з (1.1.1).

Електричний опір

Проходження електричного струму супроводжується характерними для нього явищами. Якщо провідником є електроліт, тобто носіями вільних зарядів є іони, то при проходженні струму відбувається *електроліз* - виділення на електродах речовин, що

входять у склад електроліту. В металах вільними носіями зарядів є лише електрони, тому проходження струму в них не супроводжується хімічними реакціями. Явище взаємодії провідника, в якому протікає електричний струм, із магнітним полем використовується в електродвигунах для перетворення енергії електричного струму в механічну енергію. Нарешті, універсальним проявом струму є виділення тепла у провідниках. У даному розділі ми будемо враховувати лише цю останню дію електричного струму.

Якщо у провіднику створити направлений рух електричних зарядів, тобто електричний струм, але не підтримувати його яким-небудь способом, то за досить малий проміжок часу струм припиниться. Цьому причиною є розсіяння носіїв струму на структурних елементах провідника, тобто зміна їхнього напрямку та величини імпульсів, внаслідок чого носії заряду частково чи навіть повністю виводяться зі струму. Про явище розсіяння зарядів, переміщення яких створює електричний струм, говорять як про наявність *електричного опору провідника*.

Закономірність, за якою згасає з часом струм вільних електричних зарядів, можна встановити із загальних міркувань, навіть не аналізуючи конкретні механізми розсіяння. Нехай у момент часу $t=0$ в однорідному провіднику створено струм силою I_0 . Якщо $I(t)$ - сила струму в момент часу t , а $I(t+dt)$ - в момент часу, $t + dt$, то зміна його за малий проміжок часу dt : $dI = I(t + dt) - I(t)$, очевидно, пропорційна як до величини цього проміжку часу, так і до сили струму, тобто

$$dI = -\frac{1}{\tau} I(t) dt.$$

Коефіцієнт пропорційності τ має мірність часу й містить у собі можливі залежності сили струму від температури, матеріалу провідника, його форми та ін. Розв'язок цього рівняння має вигляд,

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (1.1.3)$$

характерний і для інших релаксаційних процесів. Тут τ - *характеристичний час* згасання струму означає проміжок часу, за який сила струму зменшується в e раз. В залежності від матеріалу провідника τ може змінюватися в широких межах; у металах він складає малі частки секунди.

Електричне поле у провіднику зі струмом

Внаслідок розсіювання носіїв заряду отримати незатухаючий струм можна лише, якщо постійно поновлювати яким-небудь способом їхні імпульси. Якщо підтримувати у провіднику градієнт концентрації n вільних носіїв заряду ($\nabla n \neq 0$), то струм матиме *дифузійну природу*. Можна уявити досить екзотичні способи отримання струму, наприклад, зарядивши обід колеса з діелектрика та, обертаючи його навколо осі. Такий направлений рух макроскопічного заряду називається *конвекційним струмом*.

Проте найчастіше електричний струм у провіднику створюється електричним полем. Якщо при рівновазі зарядів в однорідному провіднику електричне поле відсутнє, то *при протіканні незатухаючого електричного струму поле всередині провідника відмінне від нуля*. Воно завжди має компоненту, напрямлену вздовж струму. Це поле необхідне для поновлення імпульсу носіїв заряду вздовж напрямку струму, який вони втрачають внаслідок розсіювання. Зовні провідника зі струмом лінії поля вже не перпендикулярні до його поверхні, як це було в статичній задачі, а нахилені у напрямку струму, рис. 1.1.1.

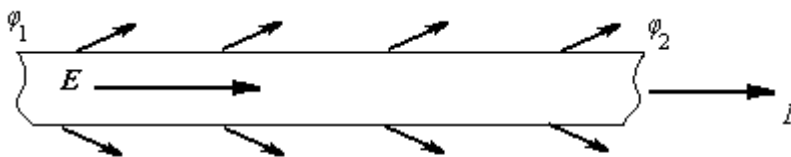


Рис. 1.1.1. Лінії поля для провідника зі струмом

Приєднаємо до полюсів джерела постійного струму довгий, прямий, незмінного перерізу та однорідний за хімічним складом провідник. В такому провіднику процеси розсіювання повинні проходити однаково в усіх його точках, тобто електричне поле у провіднику повинно бути однорідним. З електростатики відомо, що між постійним електричним полем і електричними зарядами існує взаємно однозначний зв'язок. Також відомо, що при однорідному розподілі електричного заряду по поверхні тіла циліндричної форми поле всередині тіла відсутнє. Отже, поле (тут однорідне) у провіднику із струмом буде існувати лише при неоднорідному розподілі заряду вздовж провідника. Внаслідок взаємного відштовхування надлишкові заряди локалізуються на його поверхні. Лінійна густина

цього заряду повинна зменшуватися в напрямку від позитивного полюса джерела струму, на середині провідника знак заряду змінюється на протилежний і далі густина заряду знову зростає до кінця провідника. Якщо один із кінців провідника заземлити, то лінійна густина заряду плавно спадатиме до нуля в напрямку до його заземленого кінця.

Напруга

Явище розсіяння носіїв струму, тобто електричний опір провідника кількісно описується параметром R , який теж називається опором провідника. Він входить як коефіцієнт пропорційності в закон, експериментальне встановлений Георгом Омом у 1826 р. У випадку стаціонарного струму закон Ома для ділянки кола, яка не містить джерела струму, має вигляд:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad (1.1.4)$$

де φ_1 та φ_2 - значення потенціалу на кінцях провідника, взяті у напрямку струму, рис. 1.1.1.

Величина

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi_{12} \quad (1.1.5)$$

називається напругою між цими точками. Напруга має обернений знак відносно різниці потенціалів. Взагалі, приріст функції (тут різниця потенціалів) прийнято визначати як кінцеве значення функції мінус початкове її значення. Природно вибрати напрямок цієї зміни вздовж напрямку струму, тобто й поля. В результаті різниця потенціалів матиме від'ємне значення, оскільки струм тече у напрямку спаду потенціалу. Це створює певні незручності, що й зумовило введення нової величини - напруги, яка використовується у техніці струмів.

Для нестаціонарних струмів (див. § 1.5) поняття різниці потенціалів як величини, що не залежить від форми траєкторії, не є коректним внаслідок вихрового характеру електричного поля. Універсальною формулою, яка описує напругу, є лінійний інтеграл

$$U = \int_1^2 E dl \quad (1.1.6)$$

причому інтегрування у випадку нестаціонарних струмів необхідно проводити вздовж силової лінії.

1.2. Диференціальна форма закону Ома та Джоуля-Ленца. Густина струму

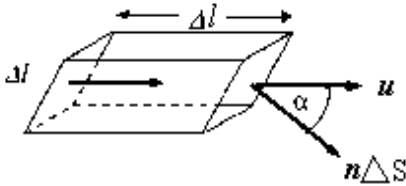


Рис. 1.2.1. Електричний заряд у елементарному об'ємі

Сила струму повністю характеризує електричний струм лише в однорідному провіднику. Якщо провідник неоднорідний, наприклад, має змінний переріз, або різну хімічну чи іншу природу, то струми, що проходять через однакові поперечні перерізи, вибрані у різних місцях провідника в загальному

випадку відрізнятимуться як за величиною, так і за напрямком. У таких випадках електричний струм необхідно описувати локально, тобто як функцію макроскопічної точки. Такою, локальною характеристикою струму є його густина.

На рис. 1.2.1 зображено ділянку провідника настільки малу, що поле та властивості провідника в її межах можна вважати практично незмінними. Струм $\Delta I = dQ/dt$ через елементарну поверхню ΔS тече вздовж бічної поверхні; нормаль до основи складає довільний кут α із напрямком струму. Нехай q - заряд одного рухомого носія; заряди рухаються з деякою середньою швидкістю u , а їхня концентрація дорівнює n . Виберемо проміжок часу dt такої тривалості, щоб через переріз елемента довжиною Δl пройшов заряд dQ , який міститься у виділеному елементі. Тоді $dQ = nq dV$, де $dV = \Delta S \Delta l \cos \alpha$ - об'єм елемента і

$$\Delta I = nqu \Delta S \cos \alpha \quad (1.2.1)$$

Увівши позначення

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S \cos \alpha} \quad (1.2.2)$$

отримуємо шукану локальну характеристику - густину струму. *Густина струму визначається як відношення сили струму до площі перерізу, через який проходить струм.* Густина струму є векторною величиною, яка згідно з (1.2.1) та (1.2.2), виражається через параметри носіїв заряду як

$$j = nqu. \quad (1.2.3)$$

Остання формула справедлива, якщо струм утворюється лише одним типом носіїв заряду, наприклад, електронами в металі. В загальному випадку струм може створюватися носіями, заряди яких різняться за величиною та за знаком, а також концентраціями та масами цих носіїв. Крім того, внаслідок хаотичного характеру процесів розсіяння навіть однакові носії заряду в кожний момент часу матимуть різні швидкості напрямленого руху. В цьому загальному випадку густина струму запишеться як

$$j = \sum_{i=1}^n q_i u_i , \quad (1.2.4)$$

де q_i , u_i - величина та швидкість i -го заряду, а n - загальна концентрація вільних зарядів.

Силу струму, що протікає крізь довільну макроскопічну поверхню S , отримаємо з (1.2.1), врахувавши (1.2.2),

$$I = \int j dS , \quad (1.2.5)$$

тобто *сила струму - це потік вектора густини струму.*

Питокий опір

Електричний опір провідника залежать від багатьох чинників. Сюди відносяться геометричні параметри провідника, тобто його довжина та поперечний переріз, хімічний склад, температура. Електричний опір провідника може змінюватися при його навічуванні (так званий, фотоопір), при наявності зовнішнього магнітного поля (магнетоопір) чи внаслідок прикладання механічного зусилля (п'єзоопір). Усі ці та інші залежності представляють безсумнівний, але специфічний інтерес. Тут ми зосередимо нашу увагу лише на залежності опору від геометричних параметрів провідника.

Нехай в однорідному провіднику довжиною l та площею поперечного перерізу S тече струм I . Згідно із законом Ома, $I = U/R$, де U - напруга на провіднику, а R - його опір. Приєднаємо послідовно з ним ще один такий самий провідник. Щоб струм залишився незмінним, необхідно до удвічі довшого провідника прикласти удвоє більшу напругу. Таким чином, експеримент переконує, що *опір однорідного провідника пропорційний до його довжини.*

Якщо тепер з'єднати початки й кінці однакових провідників, тобто паралельно, та приєднати до джерела струму, то при попередній напрузі через кожний провідник протікає струм силою I , тобто загальний струм дорівнює $2I$. В цьому випадку загальний опір стає удвічі меншим, тобто *залежить обернено пропорційно від площі поперечного перерізу однорідного провідника*.

Якщо провідник неоднорідний, то сказане вище можна віднести лише до невеличкого його елемента, зображеного на рис. 1.2.1. Тобто маємо

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S \cos \alpha}. \quad (1.2.6)$$

Тут $\Delta S \cos \alpha$ визначає площу поперечного перерізу елемента провідника, а ρ - коефіцієнт пропорційності, в якому «заховані» залежності опору від інших, за винятком, геометричних параметрів. Ця величина називається *питомим опором* провідника і є основною електричною характеристикою матеріалу, із якого він виготовлений. Як видно з (1.2.6), питомий опір у СІ має розмірність Ом·м. Іноді використовується обернена до нього величина - *питома електропровідність* $\lambda = 1/\rho$.

Питомий опір металів має величину порядку одиниць на 10^{-8} Ом·м. наприклад, у міді $\rho = 1.8 \times 10^{-8}$ Ом·м. Питомий опір сплавів дещо більший, наприклад, у ніхромі $\rho = 49 \times 10^{-8}$ Ом·м. 10%-й водний розчин NaCl має питомий опір 0.09 Ом·м, а чиста, багатократно дистильована вода є, по суті, діелектриком: $\rho = 10^6$ Ом·м.

Локальна форма закону Ома

Згідно з (1.1.4), напруга на елементі провідника зі струмом, зображеного на рис. 1.2.1, є $\Delta U = -\Delta \phi = E \Delta l$. Закон Ома для цього елемента має вигляд $\Delta l = E \Delta l / (\Delta R)$. Використавши формули (1.2.2) та (1.2.6), отримуємо закон Ома в локальній (диференціальній) формі

$$j(r) = \frac{E(r)}{\rho(r)} = \lambda(r) E(r). \quad (1.2.7)$$

В отриманій формулі всі параметри, що туди входять, належать одній і тій же точці провідника.

Закон Джоуля-Ленца

Якщо провідники зі струмом при наявності зовнішнього магнітного поля залишаються нерухомими, то єдиною дією струму залишається нагрівання провідника.

Нехай U - напруга на кінцях однорідного провідника. При перенесенні заряду dq через його переріз електричне поле виконає роботу $dA = -\delta\phi \cdot q = Udq$. Якщо заряд dq переноситься струмом I за час dt , то, врахувавши, що $dq = Idt$, одержимо для теплової потужності, яка виділяється у провіднику:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU . \quad (1.2.8)$$

Використавши закон Ома, одержуємо також

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (1.2.9)$$

Формули (1.2.8) та (1.2.9) описують інтегральний закон Джоуля-Ленца, в якому пов'язуються параметри електричного струму з теплом, що виділяється в однорідному провіднику (джоульове тепло).

Теплову дію неоднорідного струму необхідно описувати локально. Для цього визначимо теплову енергію, що виділяється в елементарному об'ємі провідника, що на рис. 1.1.1, для якого можна знехтувати зміною поля та питомого опору. Це дає нам можливість застосувати формулу (1.2.8), яка отримана якраз при вказаних обмеженнях. Маємо.

$$dP = dI \cdot dU = j \cdot dS \cdot E \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$

Врахувавши, що $dS \cdot dl \cdot \cos\alpha = dV$ - об'єм виділеного елемента та, увівши поняття *питомої теплової потужності* як

$$p = dP(dV),$$

отримаємо

$$p(r) = j(r)E(r) \quad (1.2.10)$$

Застосувавши закон Ома (1.2.7), отримуємо також

$$p = \lambda E^2 = \rho j^2. \quad (1.2.11)$$

Формули (1.2.10) та (1.2.11) виражають закон Джоуля-Ленца в локальній формі.

Рухливість носіїв заряду

Якщо в середовищі виконується закон Ома $j = \lambda E$, то, врахувавши формулу $j = qni$, приходимо до висновку, що середня

швидкість руху зарядів пропорційна до напруженості поля. Коефіцієнт пропорційності

$$\mu = \frac{u}{E} = \frac{\lambda}{nq} \quad (1.2.12)$$

є сталою величиною для даного провідника при сталих умовах, тобто при $\rho = \text{const}$ і називається *рухливістю* носіїв заряду. Підставивши у формулу (1.2.7) значення u із (1.2.12), можна подати закон Ома у вигляді

$$j = qn\mu E, \quad (1.2.13)$$

де питома електропровідність

$$\lambda = qn\mu. \quad (1.2.14)$$

1.3. Електрорушійна сила джерела струму. Закон Ома для повного кола

Сторонні електрорушійні сили

Якщо сили, що діють на вільні заряди, мають електростатичну природу, то під їхнім впливом усі позитивні заряди рухаються у напрямку спаду потенціалу. тоді як негативні - у протилежному напрямку. Тому величина заряду, який утворює потенціальне електричне поле, із часом буде лише зменшуватись. Це призводить до поступового вирівнювання потенціалів і, зрештою, до припинення струму. Оскільки для існування незатухаючого струму необхідно, згідно із законом Ома, забезпечити відповідну різницю потенціалів на кінцях провідника, то, крім сил електростатичних за походженням, необхідно додати ще деякі сили іншої, неелектростатичної природи. Такі сили називаються *сторонніми електрорушійними силами*. Для створення незатухаючого струму сторонні електрорушійні сили повинні переміщувати електричні заряди у напрямку, протилежному до напрямку дії на них сил електричного поля. Основну властивість сторонніх сил установимо, обчисливши роботу при перенесенні довільного заряду q вздовж замкнутого електричного кола:

$$A = \oint (F_{\text{стор}} + qE) dl.$$

Для потенціального поля маємо $\oint E dl = 0$. Оскільки для існування незатухаючого струму в замкнутому контурі робота повинна бути відмінною од нуля, то це значить, що

$$\oint E_{стор} dl \neq 0, \quad (1.3.1)$$

тобто сторонні сили повинні бути непотенціальними.

Внутрішній опір та ЕРС джерела струму

Джерело струму - це технічний пристрій, який забезпечує виконання роботи сторонніми електрорушійними силами по розділенню електричних зарядів протилежних знаків на його полюсах. Природа сторонніх сил може бути різноманітною. Наприклад, у хімічних джерелах струму (аккумулятори, гальванічні елементи) використовується енергія хімічних реакцій, в термоелементах – теплова енергія, в сонячних батареях – енергія сонячного світла. В електромашинних генераторах механічна енергія обертання ротора у магнітному полі перетворюється в електричну енергію розділених на полюсах генератора зарядів; тут сторонні сили виникають внаслідок явища електромагнітної індукції.

Незважаючи на неоднакову природу сторонніх сил, існує два спільних для всіх джерел струму параметри: *внутрішній опір та електрорушійна сила (ЕРС).* Всередині джерела струму заряди переносяться сторонніми силами проти сил електричного поля, яке створюється зарядами, що відкладаються на полюсах джерела. Тобто позитивні заряди переміщуються до позитивного полюса, а негативні - до негативного. Зовні джерела заряди рухаються під дією сили електричного поля, утвореного нерівномірним розподілом зарядів уздовж поверхні провідників.

Зрозуміло, що всередині джерела струму заряди теж зазнають розсіяння на атомах чи іонах середовища між електродами, тобто затрачується певна енергія, кінцевим результатом якої є виділення теплоти Джоуля. *Параметр, який характеризує розсіяння носіїв струму всередині джерела, називається внутрішнім опором джерела струму.*

Робота сторонніх сил виявляється пропорційною до величини заряду, що переноситься струмом, тому відношення цієї роботи до величини заряду не залежить від його величини. Величина, яка описує це відношення, є внутрішньою енергетичною характеристикою джерела - його електрорушійною силою (ЕРС). *ЕРС джерела струму визначається відношенням роботи сторонніх сил по переміщенню заряду вздовж замкнутого провідного контуру до величини цього заряду*

$$\varepsilon = \frac{\oint F_{стор} dl}{q}. \quad (1.3.2)$$

Закон Ома для повного кола

На рис. 1.3.1 опір навантаження R приєднано до джерела струму із внутрішнім опором r_i , та електрорушійною силою E . Якщо єдиною дією струму є виділення тепла, то робота сторонніх сил по переміщенню заряду q за деякий проміжок часу t дорівнює

$$A = I^2 R t + I^2 r_i t.$$

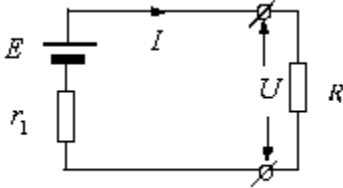


Рис.1.3.1.

Враховуючи, що для постійного

струму $It = q$, із (1.3.2) отримуємо:

$$\varepsilon = I(R + r_i),$$

тобто сила струму в колі

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r_i}. \quad (1.3.3)$$

Ця формула називається законом Ома для повного кола: *сила струму в колі дорівнює відношенню величини ЕРС джерела до повного опору кола*

Величина

$$U = IR = \frac{\varepsilon}{R + r_i} R = \varepsilon - Ir_i (< \varepsilon) \quad (1.3.4)$$

визначає напругу на зовнішній ділянці кола. Добуток Ir_i , визначає напругу на внутрішньому опорі джерела. Потужність, яка виділяється на зовнішній ділянці,

$$P = \frac{\varepsilon^2}{(R + r_i)^2} R. \quad (1.3.5)$$

Якщо сторонні сили не зосереджуються на малій ділянці кола, як у розглянутому вище прикладі, а розподілені по значній його частині, то в цьому випадку зручно ввести поняття напруженості сторонніх сил

$$E_{\text{стоп}} = \frac{F_{\text{стоп}}}{q}, \quad (1.3.6)$$

і закон Ома в локальній формі можна записати як

$$j = \lambda(E + E_{\text{стоп}}). \quad (1.3.7)$$

Режим короткого замикання.

Якщо полюси джерела замикаються провідником, опір якого набагато менший від внутрішнього опору:

$$R \ll r_i, \quad (1.3.8)$$

то виникає коротке замикання. Струм короткого замикання обмежується лише внутрішнім опором джерела:

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\varepsilon}{r_i}. \quad (1.3.9)$$

Потужність, яка виділяється на внутрішньому опорі для цього режиму,

$$P_{\text{к.з.}} = \frac{\varepsilon^2}{r_i}.$$

При малому внутрішньому опорі потужність, виділена на ньому, може досягти неприпустимо великого значення, тому режим короткого замикання є аварійним для джерела ЕРС.

Режим холостого ходу

Цей ще один граничний режим має місце при розмиканні полюсів джерела, тобто при

$$R \rightarrow \infty. \quad (1.3.10)$$

Струм у колі при цьому відсутній, тому згідно з (1.3.4) маємо

$$\varepsilon = U_{\text{х.х.}} \quad (1.3.11)$$

З цієї формули впливає спосіб вимірювання величини ЕРС: *ЕРС джерела дорівнює напрузі на його полюсах у режимі холостого ходу.*

Режим максимальної корисної потужності

Корисна потужність, тобто потужність, яка виділяється на зовнішньому навантаженні, як видно з (1.3.5), залежить од відношення внутрішнього та зовнішнього опору. Дослідивши (1.3.5) на екстремум, тобто розв'язавши рівняння: $dP(dR=0)$, знаходимо, що у зовнішньому колі виділяється максимальна потужність, якщо

$$R=r_i. \quad (1.3.12)$$

Правда, при цьому коефіцієнт корисної дії складає лише 50%.

1.4. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа

У випадку розгалуженого електричного кола застосування закону Ома в його первісній формі (1.3.3) може призвести до складних викладок. Густав Кірхгоф запропонував для таких випадків систему рівнянь, які й називають правилами Кірхгофа. На рис. 1.4.1 наведено ділянку деякого розгалуженого кола. Електричне сполучення трьох і більше провідників у одній точці називається *вузлом*. Ділянка кола між двома вузлами за умови, що між ними відсутні інші вузли, називається *віткою*. Струм у межах вітки має однакове значення.

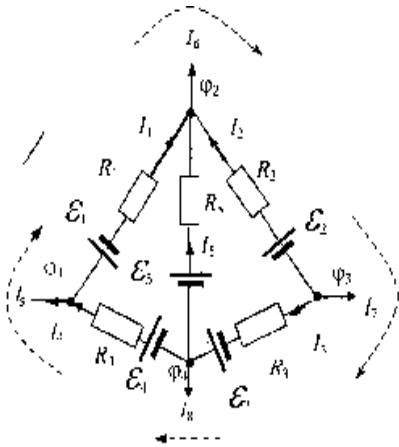


Рис.1.4.1 Приклад розгалуженої ділянки кола

Контуром називається довільна замкнена частина кола.

Правило для вузлів

У випадку стаціонарного струму електричне поле не змінюється з часом, тобто й заряди вузлів залишаються незмінними. Якщо з вузла виходить деякий заряд, то такий самий заряд за цей же час входить у вузол по інших провідниках. Цей висновок є наслідком закону збереження заряду. Вважаючи струми, які виходять із вузла, наприклад, додатними, а струми, що

входять у вузол, - від'ємними, можна записати правило для вузлів у вигляді алгебраїчної суми струмів:

$$\sum I_k = 0. \quad (1.4.1)$$

Обгорнувши вузол деякою замкненою поверхнею, маємо

$$\oint j dS = 0 \quad (1.4.2)$$

Оскільки $\oint j dS = \int \nabla j dV$, то

$$\nabla j = 0 \quad (1.4.3)$$

Зауважимо, що у випадку *нестационарних струмів* (див. наступний параграф), формули (1.4.1) - (1.4.3) несправедливі.

Правило для контурів

Виділимо на схемі рис. 1.4.1 деякий контур, наприклад, зовнішній і запишемо напруги на кожній його вітці відповідно до вибраного напрямку обходу контуру за годинниковою стрілкою. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \varepsilon_1 + I_1 R_1; \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= -I_2 R_2 + \varepsilon_2; \\ \varphi_3 - \varphi_4 &= I_3 R_3 - \varepsilon_3; \\ \varphi_4 - \varphi_1 &= -\varepsilon_4 + I_4 R_4. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Поле стаціонарного струму потенціальне, тому сума напруг уздовж контуру дорівнює нулеві, що дає після додавання цих рівнянь:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \quad (1.4.5)$$

Напруги на опорах та ЕРС джерел у (3.4.4), (3.4.5) мають протилежні знаки відповідно до протилежних напрямків струмів крізь опори та неоднакових напрямків приєднання джерел ЕРС відносно прийнятого напрямку обходу контуру. В такому вигляді це рівняння описує лише вибраний нами контур. Його можна узагальнити, якщо значення напруг та ЕРС розглядати як алгебраїчні величини, тобто як величини зі знаком. Домовимося вважати напругу на опорі додатною, якщо струм через нього співпадає з вибраним наперед напрямком обходу контуру і від'ємною - у протилежному випадку. ЕРС у (1.4.5) домовимося брати зі знаком "+", якщо струм усередині джерела прямує од негативного до позитивного полюса і, відповідно, із знаком "-" у протилежному випадку. В результаті отримуємо рівняння, справедливе для довільного контуру:

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i = \sum_{k=1}^n I_k R_k \quad (1.4.6)$$

Тут m - число джерел ЕРС, а n - число опорів у контурі. З розглянутого видно, що рівняння для контурів є узагальненням закону Ома для повного кола.

При розв'язуванні задач із застосуванням правил Кірхгофа необхідно дотримуватися таких правил:

1. Цілком довільно вибирають напрямки струмів у вітках. Якщо числове значення струму виявиться додатним, то його напрямок угадано правильно. Якщо ж це число від'ємне, то вибраний спочатку напрямок струму необхідно замінити на протилежний.
2. Записуються рівняння (1.4.1) для вузлів. Із закону збереження заряду випливає, що сума струмів у всіх вітках кола повинна дорівнювати нулю. Ця додаткова умова зменшує на одиницю число незалежних рівнянь для вузлів, тому кількість цих рівнянь буде на одиницю менша від числа вузлів. Правило знаків для струмів необхідно дотримувати лише в межах одного вузла. Не буде помилкою, якщо для іншого вузла це правило змінити на протилежне. Однак, для уникнення непорозумінь надійніше буде дотримуватися єдиного правила для всіх вузлів. Подібне застереження має місце і при складанні рівнянь для контурів.
3. Рівняння для вузлів доповнюють рівняннями для контурів, узявши таку їх кількість, щоб загальне число рівнянь дорівнювало числу віток, тобто числу невідомих струмів. Необхідно вибирати такі контури, щоб у систему рівнянь входили *всі* присутні у колі джерела ЕРС.

1.5. Нестационарні струми. Рівняння неперервності Нестационарні та квазістационарні струми

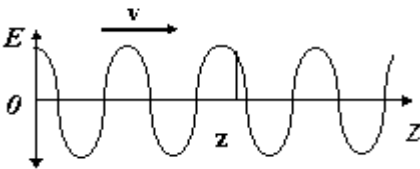


Рис.1.5.1.

Якщо струм стаціонарний, тобто не змінюється з часом, то в довільній точці кола електричне поле, а отже й заряд, теж не змінюються з часом. У випадку змінного, наприклад, синусоїдального струму, враховуючи скінченну

швидкість поширення електромагнітного поля $c = 3 \times 10^{10}$ см/с, приходимо до висновку, що в різних ділянках кола поле буде досягати якогось певного, наприклад, максимального значення в різні моменти часу. Розглянемо детальніше це питання для простої моделі.

Нехай у точці 0 початку координат існує джерело змінного електричного поля $E(t,0) = E_0 \cos \omega t$, рис.1.5.1. Поле поширюється вздовж осі OZ , із швидкістю v . У довільній точці x у момент часу t існуватиме такий стан коливання, який був у точці 0 у попередній

момент часу $t-\tau$, де $\tau=z/v$ - час поширення коливань од початку координат до шуканої точки. Тобто маємо

$$E(t,z)=E_0\cos(\omega t-2\pi z/\lambda) \quad (1.5.1)$$

де враховано, що $\omega t = 2\pi z/vT$, а $vT = \lambda$ - довжина хвилі. Параметр

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.5.2)$$

називається *хвильовим числом*, а лінійна комбінація аргументів t, z .

$$\Phi = \omega t - kz \quad (1.5.3)$$

називається *фазою коливань*.

Нестационарним вважається струм у колі, довжина якого L має один порядок величини або більша за довжину хвилі електричного поля, тобто

$$L > \lambda.$$

Це еквівалентно умові, що час поширення хвилі вздовж кола t_L є сумірним із періодом коливань чи більший од нього:

$$t_L \geq T. \quad (1.5.4)$$

Якщо коло змінного струму коротке, тобто виконується нерівність

$$L \ll \lambda$$

і, відповідно,

$$t_L \ll T, \quad (1.5.5)$$

то струм у колі вважається *квазістационарним*.

З означень зрозуміло, що для нестационарного струму фаза в окремих ділянках кола фаза має неоднакові значення, тоді як для квазістационарного струму зміною фази вздовж кола можна знехтувати. Наприклад, довжина хвилі, яка відповідає частоті 50 Гц, складає $\lambda = 300000$ (50 = 6000 км). Ця величина значно перевищує довжину кола, яке може використовуватись в лабораторних умовах,

тобто таке коло в лабораторних умовах можна вважати квазістационарним. Проте, якщо йдеться про лінії електропередачі, довжина яких може складати тисячі кілометрів, то в цьому випадку коло є нестационарним.

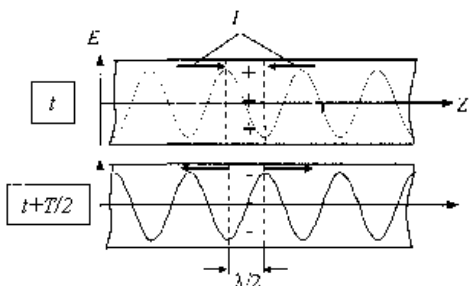


Рис. 1.5.2. Процеси у нестационарному колі

Рівняння неперервності

На рис. 1.5.2 зображено розподіл електричного поля на деякій ділянці *нестационарного* кола. Штриховими лініями виділено ділянку, на якій вкладається половина довжини хвилі $L = \lambda/2$. Якщо в деякий момент часу на лівому краю поле досягло амплітудного значення і спрямоване праворуч, то на протилежному кінці ділянки поле в цей же момент часу теж досягло амплітудного значення, але має протилежний напрямок. Тобто струми крізь обидві поверхні, які відділяють ділянку від решти кола, спрямовані назустріч, і тому заряджають її позитивно. Через половину періоду напрямок поля зміниться на протилежний, тобто струм буде витікати з вузла з обох боків і заряд ділянки стає негативним. Отже, для нестационарного процесу довільна ділянка кола виявляється зарядженою, причому величина та знак цього заряду з часом періодично змінюється.

Якщо за малий проміжок часу dt із даної ділянки вийде заряд dq' то згідно із законом збереження заряду в ній залишиться рівний за модулем, але протилежний за знаком заряд $dq = -dq'$. Повний струм, що виходить із вузла, є

$$I = \oint j dS = \frac{dq'}{dt} = -\frac{dq}{dt} \quad (1.5.6)$$

Заряд вузла можна виразити через його об'ємну густину $q = \int \rho dV$, де інтегрування ведеться в об'ємі виділеної ділянки кола, тобто маємо

$$\oint j dS = -\frac{d}{dt} \int \rho dV.$$

Використавши математичну теорему Остроградського-Гауса, отримуємо

$$\oint j dS \int \nabla j dV = -\frac{d}{dt} \int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.5.7)$$

Частинна похідна $\partial \rho / \partial t$ в останньому виразі описує той факт, що об'ємна густина заряду залежить не тільки од часу, а й від координат, годі як визначений інтеграл по об'єму є функцією лише часу. Прирівнявши підінтегральні вирази в (1.5.7) та (1.5.8). отримуємо рівняння неперервності в диференціальному вигляді :

$$\operatorname{div} j = \nabla j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.5.8)$$

Таким чином, формула (1.5.8), як і (1.5.6), виражає закон збереження заряду в умовах, коли поверхня, яка оточує об'єм, є "прозорою" для електричних зарядів. Формула (1.5.6), як і (1.5.8), називається рівнянням неперервності.

1.6. Перехідні процеси у колі з конденсатором

Хоча в колі з конденсатором постійний електричний струм не може існувати, проте, приєднавши послідовно до нього джерело постійної

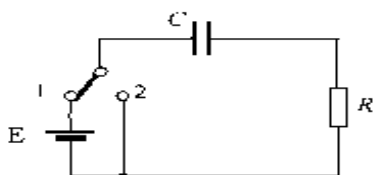


Рис. 1.6.1. Перехідні процеси в RC-колі

напруги та резистор. рис. 1.6.1, ми спостерігаємо в колі затухаючий струм заряджання конденсатора. Перекинувши ключ у положення 2, ми спостерігатимемо затухаючий струм розряджання конденсатора, який протікає тепер у протилежному напрямку.

Процеси, при яких система прямує від одного положення рівноваги до іншого, називаються *перехідними* або *релаксаційними*. Будемо вважати, що тривалість перехідного процесу набагато більша за час, необхідний для поширення електричного поля по колу. Це значить, що процес квазістаціонарний і можна застосовувати закони постійного струму.

В момент часу $t = 0$ замикаємо коло, перекинувши ключ у положення 1. Із закону Ома для Повного кола маємо, що в момент часу t напруга U на конденсаторі дорівнює

$$U = \varepsilon - IR \quad (1.6.1)$$

і зв'язана з накопиченим зарядом q співвідношенням $q = CU$, тому струм у колі

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad (1.6.2)$$

В результаті отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння

$$RC \frac{dU}{dt} = \varepsilon - U \quad (1.6.3)$$

Увівши нову змінну: $U' = U - E$, маємо вже однорідне рівняння:

$$RC \frac{dU'}{dt} = -U'$$

Розв'язок його за початкової умови $t = 0, U = 0$ має вигляд:

$$U = \varepsilon \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right) \quad (1.6.4)$$

Залежність напруги на конденсаторі од часу заряджання наведено на рис. 1.6.2, а.

При замиканні конденсатора, зарядженого до напруги $U = \varepsilon$, резистором з опором R процес його розряджання описується рівнянням

$$U + IR = 0 \quad (1.6.5)$$

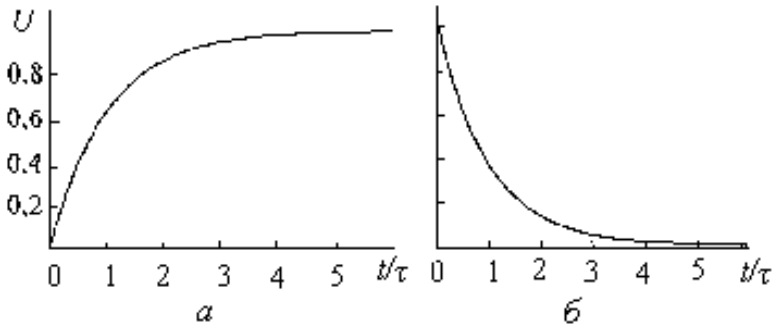


Рис. 1.6.2. Перехідні процеси у колі з конденсатором

Розв'язком його за початкової умови $t = 0, U = \varepsilon$

$$U = \varepsilon \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (1.6.6)$$

Відповідну залежність $U(t)$ наведено нарис. 1.6.2, б. Сила струму для обох процесів, згідно з (1.6.2),

$$U = \pm \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (1.6.7)$$

де нижній знак „-” визначає протилежний напрямок струму при розряджанні конденсатора.

Добуток

$$\tau = RC \quad (1.6.8)$$

має розмірність часу і, власне, є характеристичним часом релаксації системи. Наприклад, при розряджанні конденсатора τ означає

проміжок часу, за який напруга на конденсаторі спаде в e раз, де $e = 2.718$ - основа натуральних логарифмів.

1.7. Дифузійні та теплові струми

Досі вивчався струм, викликаний лише електричним полем. Тут ми розглянемо деякі інші механізми підтримування струму.

Дифузійні струми

При наявності градієнту концентрації вільних частинок у речовині ($\nabla n \neq 0$) виникає їх дифузія, тобто направлений рух у бік, протилежний до градієнта концентрації. Зміна концентрації частинок за проміжок часу dt описується першим законом Фіка

$$dn = -\chi \nabla n dt, \quad (1.7.1)$$

де χ - коефіцієнт дифузії. Якщо частинки несуть електричний заряд, то виникає напрямлений рух електричних зарядів - *дифузійний струм*. Для простоти будемо вважати, що концентрація змінюється лише в одному напрямку (одновимірна дифузія), тобто $\nabla n = dn/dx$. Якщо заряд однієї частинки q , то густина об'ємного струму

$$j_{\text{диф}} = q \frac{dn}{dt} = -q\chi \frac{dn}{dx} = -\chi \frac{d\rho}{dx} \quad (1.7.2)$$

Тут $\rho = qn$ - густина рухомого заряду. Знак "-" вказує на те, що дифузійний струм утворюється за рахунок існування градієнта концентрації позитивних носіїв заряду і тече в напрямку, протилежному до градієнта концентрації. Якщо заряди негативні, наприклад, електрони, то

$$j_{\text{диф}} = -e \frac{dn}{dt} = \chi \frac{d\rho}{dx} \quad (1.7.3)$$

Дифузійний струм виникає внаслідок неоднорідного розподілу зарядів ($\nabla n \neq 0$). Ця неоднорідність спричиняє виникнення макроскопічного поля E_i . Крім того, речовина може перебувати у деякому зовнішньому полі E_0 . Результуюче поле

$$E = E_i + E_0 \quad (1.7.4)$$

визначається об'ємною густиною зарядів: $\nabla D = \rho$ (СІ). У свою чергу, воно є джерелом дрейфового струму $j_{\text{др}} = \lambda E$. Тобто загальний струм визначається як дифузійною, так і дрейфовою компонентою:

$$j = j_{\text{диф}} + j_{\text{др}} = -\chi \frac{d\rho}{dx} + \lambda E. \quad (1.7.5)$$

Якщо струм утворюється рухом негативних зарядів, наприклад, електронами металу, то знаки перед членами у правій частині (3.7.4) необхідно поміняти на протилежні.

Теплові струми

Тепловий рух характеризується найбільшою ентропією, тобто - це повністю безладний рух, у якому відсутній будь-який виділений напрямок. Тому усереднений за часом тепловий рух електричних зарядів не викликає електричного струму. Однак, в окремих малих ділянках речовини постійно виникають флуктуації густини вільних зарядів або флуктуації імпульсу сукупності зарядів. Ці короткочасні відхилення від середніх значень призводять до того, що через досить малий поперечний переріз протягом малого відрізка часу в одному напрямку проходить відчутно більше число носіїв заряду, ніж у протилежному напрямку. Згідно з означенням такий процес трактується як електричний струм. Отже, особливістю теплового струму є його флуктуаційний характер.

Напрямок та величина теплового струму хаотично змінюється, тобто середнє за досить тривалий час значення теплового струму дорівнює нулю. У зв'язку з цим величину теплового струму описують середнім значенням *квадрата* густини сили струму $\langle j^2 \rangle$. Часто тепловий струм описують еквівалентною ЕРС, тобто такою сталою ЕРС, яка викликає появу дрейфового струму $\sqrt{\langle j^2 \rangle}$ через провідник з опором R :

$$\sqrt{\langle j^2 \rangle} = \frac{\sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle}}{R}. \quad (1.7.6)$$

Еквівалентна ЕРС теплового струму описується *формулою Найквіста*

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = 4kTR\Delta f, \quad (1.7.7)$$

де k - стала Больцмана, T - абсолютна температура, R - величина електричного опору провідника, Δf - інтервал частот, в якому прилад вимірює струм. Теплові струми, як правило, є небажаним явищем, оскільки вони підвищують поріг чутливості різноманітних датчиків сигналів, електронних підсилювачів тощо. З формули (3.7.6) видно, що для зменшення теплового струму необхідно проводити

вимірювання при низьких температурах, намагатися не використовувати навантаження зі значним опором та проводити реєстрацію сигналу у вузькому інтервалі частот.

Поляризаційні струми

При відсутності в діелектрику вільних зарядів стале електричне поле викликає лише короткочасне переміщення зв'язаних зарядів під час установаження поляризаційного стану. Змінне в часі поле викликає відповідну змінну поляризацію. Тобто крізь заданий переріз буде періодично проходити змінний *поляризаційний струм*.

Виразимо поляризаційний струм через основний параметр поляризації - вектор поляризації P . Згідно з формулою (1.2.3)

$$j = nqu = nq \frac{dr}{dt}. \quad (1.7.8)$$

dr тут визначає зміщення зв'язаного заряду вздовж поля, тому $qdr = dp$ дорівнює величині індукованого елементарного дипольного моменту, а $ndp = dP$ визначає зміну дипольного моменту в одиниці об'єму на проміжку часу dt . Таким чином, для густини поляризаційного струму маємо:

$$j_{\text{пол}} = \frac{dP}{dt}. \quad (1.7.9)$$

Розділ 2. Електромагнітна індукція

2.1. Закон електромагнітної індукції Фарадея

Формулювання закону електромагнітної індукції

Закон електромагнітної індукції експериментально відкрив Майкл Фарадей, який опублікував свої дослідження в 1831 р. Відкриття Ерстеда, роботи Ампера та інших учених указували на існування глибокого зв'язку електричних та магнітних явищ. Однак, цей зв'язок спочатку виглядав одностороннім. За висловом Фарадея явище, відкрите Ерстедом, означало перетворення „електрики в магнетизм”. Будучи переконаним в існуванні взаємозв'язку явищ у природі. Фарадей цілком свідомо розпочав пошуки існування зворотного явища - впливу магнітного поля на електричний струм. Довший час йому не вдавалося підтвердити свою гіпотезу, оскільки він експериментував лише з постійними магнітними полями та магнітними потоками. Перші свої дослідження Фарадей проводив із двома котушками, намотаними одна поверх другої на круглий дерев'яний стержень. До першої котушки приєднувалась батарея гальванічних елементів, а до другої - гальванометр, який складався з магнітної стрілки та двох, розміщених обабіч котушок, по яких мав проходити струм, індукований магнітним полем, Фарадей з розчаруванням виявив, що сталий струм у першій котушці не призводив до відхилення магнітної стрілки. Проте в одному з експериментів він зауважив ледь помітне відхилення стрілки при вимиканні батареї та її відхилення у протилежному напрямку при вмиканні батареї. Врахувавши це. Фарадей вдосконалив свою установку. Він сконструював більш чутливий та малоінерційний гальванометр, а обидва провідники розмістив на окремих дошках у вигляді багатократно повтореної букви. До одного провідника, як і раніше, приєднувалась батарея гальванічних елементів, до іншого - гальванометр. При наближенні провідників стрілка гальванометра стійко відхилялася, показуючи наявність струму в другому провіднику, причому протилежного до струму в першому провіднику, тоді як при віддаленні провідників обидва струми мали однаковий напрямок. З цього та інших експериментів Фарадей зробив висновок, що сила струму в контурі пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку.

Трохи згодом вияснилося, що сила індукованого струму залежить ще й від опору провідника, а от електрорушійна сила визначається виключно швидкістю зміни магнітного потоку. З використанням сучасної математичної символіки закон електромагнітної індукції Фарадея записується так:

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d \int B dS}{dt}, \text{ (СГС)} \quad (2.1.1)$$

$$\varepsilon = -\frac{d \int B dS}{dt}, \text{ (СІ)} \quad (2.1.1')$$

Правило Ленца

З'ясуємо причину існування знаку "-" у правій частині формули (2.1.1). На рис. 2.1.1 зображено довільний провідний контур, на який натягнута уявна поверхня довільної форми. Контур пронизує магнітне поле. Напрямок обходу контуру прийнято узгоджувати з напрямком вектора магнітного поля за правилом правого гвинта. Для розміщення, наведеного на рисунку, $\Phi = \int B dS \cos\theta > 0$.

Нехай магнітне поле зростає в часі, тобто $d\Phi(dt > 0$. Тоді знак "-" у формулі (2.1.1) вказує на те, що індукована ЕРС від'ємна, тобто вона викликає струм у напрямку, протилежному до напрямку обходу контуру, рис. 2.1.1. Якщо $d\Phi(dt < 0$, то $\varepsilon > 0$, тобто напрямок індукованого струму співпадає з напрямком обходу контуру.

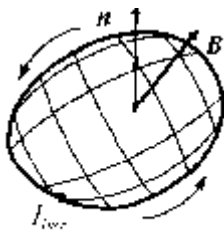


Рис. 2.1.1.

Знак "-" у (2.1.1) є математичним еквівалентом правила Ленца, яке стверджує, що індукований струм має такий напрямок, аби власним магнітним полем компенсувати причину, яка його викликала. Правило Ленца є наслідком із закону збереження енергії. Дійсно, якщо припустити, що індукований струм має напрямок, протилежний до того, що

встановлюється цим правилом, то магнітне поле індукованого струму посилить магнітний потік крізь контур, тобто збільшиться швидкість зростання магнітного потоку. Це, в свою чергу, спричинить збільшення індукованого струму, тобто ще більше зростання магнітного потоку. В результаті матимемо лавиноподібне

зростання магнітного поля та, відповідно, сили індукованого струму, що явно суперечить закону збереження енергії.

З (2.1.1) видно, що існують три елементарних причини залежності магнітного потоку від часу: зміна площі контуру, зміни кута між вектором B і нормаллю до поверхні та випадок, коли нерухомий контур знаходиться у змінному магнітному полі. Загальний випадок може включати різні комбінації цих елементарних причин. Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

1) $\varphi, B = \text{const}, S = S(t)$

Цей випадок реалізовано на рис. 2.1.2. Дві паралельні металеві рейки, розміщені на відстані l , знаходяться в однорідному магнітному полі B , перпендикулярному до площини рисунка. Орієнтація B задає напрямок обходу контуру проти годинникової стрілки. Уздовж рейок із швидкістю v переміщують металевий провідник. На кожний електрон провідника діє магнітна сила $F_M = -e/cv \times B$, тобто вільні електрони зміщуються уверх. Тобто на верхній рейці відкладається негативний заряд, тоді як на нижній - позитивний. Внаслідок такого розділення зарядів виникає макроскопічне електричне поле, тому на електрони, крім магнітної,

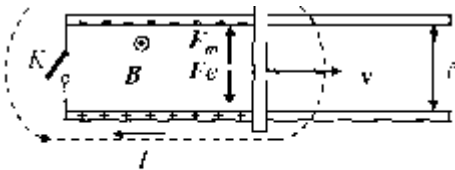


Рис. 2.1.2. Електромагнітна індукція як результат зміни площі контуру

діє ще електрична сила $F_E = -eE$, причому у протилежному напрямку. Процес розділення зарядів триватиме доти, поки не зрівноважаться електрична та магнітна сили. Отже, для рівноважного процесу отримуємо умову

$$E = \frac{v}{c} B. \quad (\text{СГС}) \quad (2.1.3)$$

При замиканні ключа K у колі протікатиме струм, напрямком якого, як видно з рисунка, протилежний до напрямку обходу контуру.

З розглянутого видно, що схема на рис. 2.1.2 має всі ознаки джерела електричного струму. Функцію сторонньої сили тут виконує магнітна сила Лоренца. ЕРС джерела знайдемо, обчисливши різницю потенціалів U_{xx} , тобто для розімкненого кола:

$$\varepsilon = U_{xx} = \int_0^l E dl = - \int_0^l E dl.$$

Врахувавши формулу (2.1.3), отримуємо

$$\varepsilon = - \frac{Bvl}{c} = - \frac{Bldx}{cdt} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

що співпадає з (2.1.1), тобто з формулою, яка описує закон електромагнітної індукції в СГС.

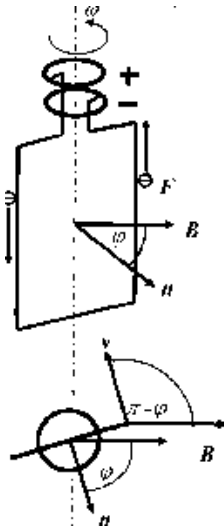


Рис. 2.1.3. ЕРС індукції в рамці, що обертається в магнітному полі

2) $B, S - const; \varphi(t)$

Схему досліду подано на рис. 2.1.3. Прямокутну рамку із провідника, вміщену в однорідне магнітне поле, обертають навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω . Довжина вертикальної та горизонтальної сторін рамки дорівнює a та b , відповідно. Магнітна сила зміщує електрони вздовж вертикальних сторін рамки:

$$F = \frac{evB \sin \varphi}{c} = \frac{e\omega b \sin(\omega t + \varphi_0)}{2c},$$

де кут φ_0 визначає початкове положення рамки, а $v = \omega b$ — лінійна швидкість для вертикальних сторін. На кільцях, до яких приєднані виводи рамки, відкладаються заряди протилежних знаків. Знак та величина кожного з них залежать од положення рамки відносно магнітного

поля.

Електрорушійну силу знайдемо, обчисливши інтеграл

$$\varepsilon = \oint F dl / e = 2 \int_0^a F dz / e.$$

Множник 2 враховує внесок обох вертикальних сторін рамки. Маємо

$$\varepsilon = \frac{Bab\omega \sin(\omega t + \varphi_0)}{c} = - \frac{BS}{c} \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi_0) = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{CUC})$$

Таким чином, в цьому випадку ЕРС індукції теж описується формулою (2.1.1).

3) *B(t). Вихрове електричне поле*

На рис. 2.1.4, а котушка із приєднаним до її кінців гальванометром рухається в неоднорідному магнітному полі, створеному котушкою, по якій тече постійний струм. Як видно з рисунка, виникнення індукційної ЕРС тут теж пояснюється впливом магнітної сили на електрони *рухомої* котушки.

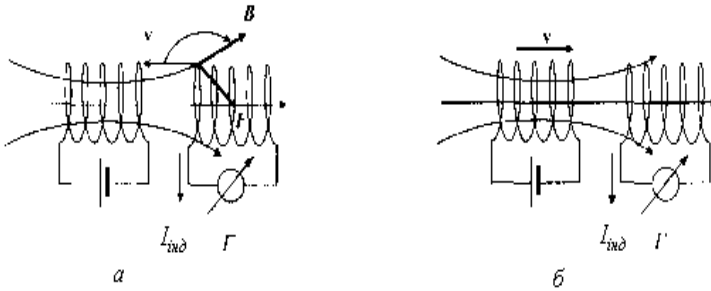


Рис. 2.1.4. Дослідження ЕРС індукції з допомогою котушки

Необхідною умовою виникнення ЕРС у даному випадку є неоднорідність магнітного поля, яка забезпечує змінний в часі магнітний потік крізь рухому котушку. Однорідне магнітне поле, навіть коли воно спрямовано під кутом до площини витка, відмінним від 0° чи 180° , створює лише симетричний розподіл зарядів у витку, див. рис. 2.1.5.

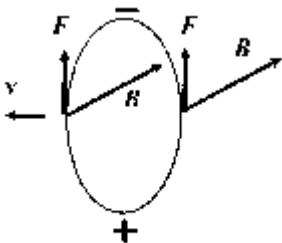


Рис. 2.1.5

Схема на рис. 2.1.4. б відрізняється від попередньої тим, що тепер рухається котушка - джерело магнітного поля, тоді як реєструюча котушка нерухома. В цьому випадку на електрони вже не діє магнітна сила ($v = 0$), однак, експеримент засвідчує виникнення електрорушійної сили, величина якої описується формулою (2.1.1). Більше того, електричний струм індукується навіть, коли обидві котушки

нерухомі, а зміна з часом магнітного потоку досягається тим, що крізь першу котушку пропускають змінний струм.

З проведених досліджень випливає висновок, що при зміні в часі магнітного потоку крізь контур завжди виникає ЕРС індукції, яка описується відношенням (2.1.1), незалежно від способу, яким досягнута ця зміна. Таким чином, незважаючи на універсальність формули (2.1.1), механізми виникнення ЕРС індукції виявляються неоднаковими. В досліді з рухомою реєструючою котушкою ЕРС виникає внаслідок впливу магнітних сил на рухомі електрони. Очевидно, що цей варіант досліду, як і розглянуті вище, не є проявом нового фізичного закону, оскільки закон повинен установлювати *нові зв'язки* між фізичними величинами, тобто такі, що не випливають з існуючої теорії.

Виникнення ЕРС індукції в досліді з нерухомою реєструючою котушкою свідчить, що вона створюється не за рахунок дії магнітних сил. Зауважимо, що системи координат, пов'язані з котушками, інерціальні, тобто події, які відбуваються в цих системах відліку, повинні підпорядковуватися принципу відносності. Згідно з цим фундаментальним принципом, закони фізики інваріантні відносно інерціальних систем відліку, тобто математична формула, яка описує фізичний закон, повинна мати однаковий вигляд в обох системах (див. також § 4.12). Схеми, зображені на рис. 2.1.4. *а* та *б*, різняться лише вибором системи відліку: в першому випадку вона зв'язується з котушкою, яка є джерелом магнітного поля, тоді як у другому - із вимірювальною котушкою. Згідно із принципом відносності, ЕРС індукції має виникати в обох випадках і описуватися при цьому однаковим способом.

Принцип відносності не в змозі пояснити природу сили, що індукує струм у нерухомій котушці. Можна лише стверджувати, що ця сила повинна мати електромагнітну природу. Оскільки сила не може бути магнітною, то залишається припустити, що вона має електричне походження. В результаті ми приходимо до висновку, який свого часу зробив Максвелл: *у кожній точці простору, де існує змінне в часі магнітне поле, існує також електричне поле.* Опираючись на цю гіпотезу, можна стверджувати, що для виникнення явища електромагнітної індукції наявність контуру із провідника необов'язкова. Провідний контур лише відіграє роль датчика, який виявляє існування індукваного електричного поля. Це поле проявляється не лише у виникненні електричного струму в

провідному контури, воно може викликати й інші електричні явища, наприклад, поляризацію діелектрика.

Встановивши електричну природу сторонніх сил, які діють на електрони в нерухомому провіднику, можна тепер записати ЕРС індукції як

$$\varepsilon = \frac{\oint F_{\text{емор}} dl}{q} = \oint E_i dl.$$

Тут $E_i = F_{\text{емор}}/q$ - напруженість індукованого електричного поля. В результаті закон електромагнітної індукції набуває вигляду:

$$\oint E_i dl = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B dS \quad (\text{СГС}) \quad (2.1.4)$$

$$\oint E_i dl = -\frac{d}{dt} \int B dS. \quad (\text{СІ}) \quad (2.1.4')$$

Використавши математичну теорему Стокса, отримуємо локальну форму закону електромагнітної індукції:

$$\oint E_i dl = \int [\nabla \times E_i] dS = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B dS,$$

тобто

$$\oint \left[(\nabla \times E) + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \right] dS = 0.$$

Оскільки форма поверхні довільна, при єдиній умові, що вона обмежується вибраним контуром, то рівність нулю інтеграла означає рівність нулю підінтегральної функції, тобто

$$\nabla \times E_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.1.5)$$

$$\nabla \times E_i = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (\text{СІ}) \quad (2.1.5')$$

Формула (2.1.5) описує локальну або диференціальну форму закону електромагнітної індукції.

З (2.1.4), (2.1.5) випливає, що індуковане електричне поле має вихрову природу, оскільки циркуляція напруженості його відмінна від нуля. У свою чергу, це значить, що лінії індукованого поля замкнені, тоді як поле E_n утворене нерухомими електричними зарядами, - потенціальне, тобто лінії його розімкнені. Незважаючи на таку суттєву відмінність, E_n та E_i описують *єдине електричне*

поле, адже ці компоненти визначаються однаковим способом: $E_i, E_n = F(q)$ Такий підхід відповідає принципу Оккама, який коротко можна сформулювати так: "не утворюй лишніх сутностей". Тобто фізичні поняття та величини необхідно визначати так, щоб вони охоплювали якомога ширше коло явищ. Отже, існує єдине електричне поле, напруженість якого визначається формулою $E=F(q)$, яке у загальному випадку є суперпозицією потенціальної та вихрового електричного поля:

$$E=E_n+E_i. \quad (2.1.6)$$

Зроблене узагальнення не вносить змін в основні рівняння електромагнітної теорії. Дійсно, підставивши (2.1.6) у (2.1.5), одержимо попередній результат, оскільки $\nabla \times E_n = 0$. Дивергенція $-E_n + E_i$ як і раніше, дорівнює $4\pi k\rho$, оскільки $\nabla E_i = 0 \wedge E = 0$.

2.2. Явище самоіндукції

Самоіндукція є окремим проявом явища електромагнітної індукції. Суть цього явища полягає в появі ЕРС індукції у тому ж

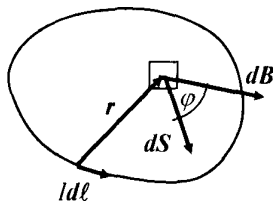


Рис. 2.2.1. До підрахунку магнітного потоку крізь контур із струмом

контурі, в якому існує змінний струм. Змінне У магнітне поле, індукване змінним струмом, породжує магнітний потік, швидкість зміни якого визначає ЕРС індукції, згідно з формулою (2.1.1).

Коефіцієнт самоіндукції

Обчислимо магнітний потік крізь контур із змінним струмом, зображений на рис. 2.2.1. Інтеграл береться по поверхні, обмеженій провідним контуром довжиною l . B визначається за формулами (1.2.3) та (1.2.3'), тобто маємо:

$$\Phi = \frac{1}{c} \int_S dS \oint_l \frac{dl \times r}{r^3}; \quad (\text{СГС}). \quad (2.2.1)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{dl \times r}{r^3}. \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.1')$$

Тепер вираз для потоку можна записати так:

$$\Phi = L \frac{I}{c}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.2)$$

$$\Phi = LI, \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.2')$$

де L означає:

$$L = \int_S dS \oint_l \frac{dl \times r}{r^3}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.3)$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_L \frac{dl \times r}{r^3}. \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.3')$$

L називається коефіцієнтом самоіндукції або просто індуктивністю контура. Як видно з (2.2.3), коефіцієнт самоіндукції, подібно до електроємності провідника, є внутрішньою характеристикою контуру, оскільки залежить лише від його розмірів та форми.

З використанням поняття індуктивності ЕРС самоіндукції можна подати у такому вигляді:

$$\varepsilon_c = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(LI); \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.4)$$

$$\varepsilon_c = -\frac{d}{dt}(LI). \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.4')$$

Якщо форма контуру не змінюється з часом, то $L = \text{const}$, і

$$\varepsilon_c = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.5)$$

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.5')$$

З формули (2.2.3) видно, що коефіцієнт самоіндукції в СГС має мірність довжини: $\{L\} = \text{см}$. Назва цієї одиниці співпадає з її мірністю. Одиниця індуктивності в СІ називається *генрі* (Гн). Як видно з (2.2.2'), один генрі - це індуктивність такого контуру, в якому струм силою 1 А створює магнітний потік 1 Вб. На практиці вживаються і дрібніші одиниці: $1\text{мГн}=10^{-3}\text{Гн}$, а $1\text{мкГн}=10^{-6}\text{Гн}$. Співвідношення між одиницями індуктивності в СІ та СГС знайдемо, використавши наведені вище числові значення для магнітного потоку та сили струму:

$$1Гн = \frac{1Вб}{1А} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ см} / \text{с} \cdot 10^8 \text{ Мкс}}{3 \cdot 10^8 \text{ од.стругуСГС}} = 10^9 \text{ см}.$$

Індуктивність лінійного соленоїда

Обчислимо індуктивність лінійного соленоїда довжиною l площею перерізу S та числом витків N . Вважатимемо, що довжина соленоїда набагато перевищує його діаметр. Ця умова дозволяє використати просту формулу, яка визначає магнітне поле нескінченно довгого соленоїда: $B = \mu_0 n I$, де $n = N/l$ - лінійна густина витків.

ЕРС самоіндукції, яка виникає в одному витку соленоїда, дорівнює:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n S \frac{dI}{dt},$$

а в N витках

$$\varepsilon = \varepsilon_1 N = \mu_0 n^2 S l \frac{dI}{dt}.$$

Отже, індуктивність довгого соленоїда

$$L = \mu_0 n^2 S l = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.6)$$

$$L = 4\pi n^2 V = 4\pi \frac{N^2 S}{l}, \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.6')$$

де $V = S l$ - об'єм соленоїда.

Як буде показано далі, при наявності однорідного магнетика, що заповнює простір, в якому існує магнітне поле, індукція поля збільшується у μ раз, де μ - магнітна проникливість магнетика. В результаті магнітний потік, а отже, й індуктивність котушки теж збільшаться у μ раз:

$$L = \mu \mu_0 n^2 V. \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.7)$$

Індуктивність соленоїда можна також визначити з формули для магнітного потоку:

$$\Phi = LI = NBS. \quad (2.2.8)$$

Тут BS визначає магнітний

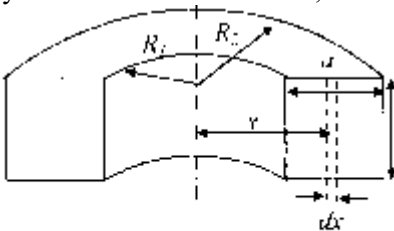


Рис. 2.2.2. Магнітне поле тороїдальної котушки

потік через площину одного витка, а множник N враховує, що силові лінії поля пронизують площини всіх витків соленоїда.

Формула (2.2.7) справедлива для нескінченно довгого соленоїда. Як відомо (див. § 1.3), магнітне поле соленоїда скінченної довжини можна вважати однорідним лише в його центральній області. Воно спадає при наближенні до краю і на самому краю складає лише половину від його максимального значення. У конденсаторах проблеми з неоднорідністю електричного поля не виникає, оскільки діелектричні прокладки між його обкладками дуже тонкі (соті), а в електролітичних конденсаторах навіть тисячні частки мм) порівняно з розмірами обкладок (~ 1 см). За таких відношень розмірів ($\sim 10^3 - 10^4$) можна знехтувати викривленням ліній електричного поля на краю обкладок, тобто можна вважати поле скрізь однорідним. Котушка індуктивності з відповідним відношенням між її довжиною та діаметром матиме, по суті, голкоподібну форму. Виготовлення подібних котушок є непростою технічною проблемою. Крім того, обмотка з надтонкого проводу матиме значний електричний опір, що в більшості випадків є взагалі неприпустимим. Тому навіть в еталонних або *нормальних* соленоїдах, у яких поле в центрі досить точно описується формулою, характерною для нескінченно довгого соленоїда, тобто $L = \mu\mu_0 nI$, відношення його довжини до діаметра не перевищує декількох десятків. У багатьох випадках застосовуються короткі котушки, в яких діаметр навіть перевищує довжину. Індуктивність таких котушок обчислюється введенням у формулу (2.2.7) коригуючого коефіцієнта, який є функцією довжини та площі соленоїда.

Індуктивність тороїдальної котушки

На рис. 2.2.2 зображено прямокутний у перерізі тор, на який рівномірно намотано N витків провідника. Індукція магнітного поля A всередині тороїдальної котушки визначена раніше:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (CI) \quad (1.5.3')$$

Поле тороїдальної котушки неоднорідне, тому для визначення магнітного потоку необхідно обчислити інтеграл $\Phi = N \int B dS$.

Елемент площі беремо у вигляді $dS = bdx$, оскільки в цих межах поле практично не змінюється. Після інтегрування отримуємо

$$I = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{CI}) \quad (2.2.9)$$

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

Розглянемо особливості проходження струму в електричному колі, що містить індуктивність, рис. 2.2.3. Послідовно з котушкою індуктивністю L приєднано опір R , який включає зовнішній

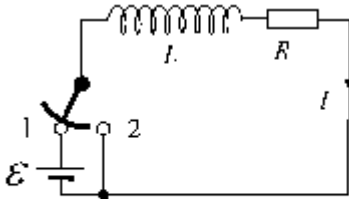


Рис. 2.2.3. Дослідження перехідних процесів у RC-колі

резистор, опір обмотки котушки та підвідних проводів. Повзунок перемикача має спеціальну форму для того, щоб не розривалося коло при перемиканні між положеннями 1 та 2. В момент часу $t = 0$ схема замикається на джерело постійного струму E . Сила струму в колі визначається з рівняння

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = RI, \quad (\text{CI}) \quad (2.2.10)$$

тобто

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{\varepsilon L}{R} \right).$$

Розв'язок його при початкових умовах: $t = 0, I = 0$

$$I = I_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right) \right), \quad (\text{CI}) \quad (2.2.11)$$

$$I = I_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{c^2 Rt}{L} \right) \right) \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.11')$$

описує струм, який експоненціально зростає з часом, досягаючи рівноважного значення $I_0 = E/R$ при $t \rightarrow \infty$. Коефіцієнт

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (\text{CI}) \quad (2.2.12)$$

$$\tau = \frac{L}{c^2 R} \quad (\text{СГС}) \quad (2.2.12')$$

має мірність часу і є характеристичним параметром цього перехідного процесу.

При переведенні перемикача в положення 2 зовнішня ЕРС вимикається з кола, тому процес описується рівнянням

$$-L \frac{dI}{dt} = RI \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.13)$$

розв'язок якого при початкових умовах $t = 0, I = I_0$ є

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \quad (\text{СІ}) \quad (2.2.14)$$

описує затухання струму.

2.3. Взаємодукація

Явище взаємодукації

Приєднаємо до контура довжиною l_1 , площею S_1 і джерело змінного струму ε . рис. 2.3.1. Змінний магнітний потік пронизує розміщений поблизу інший контур довжиною l_2 та площею S_2

$$\Phi_{12} = \int_{l_2} B_1 dS_2 \quad (2.3.1)$$

і створює у ньому електрорушійну силу

$$\varepsilon_{\text{вз.2}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{12}}{dt}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.2)$$

$$\varepsilon_{\text{вз.2}} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.2')$$

Якщо другий контур замкнений, то індукований у ньому змінний струм I_2 створить магнітне поле, і перший контур буде пронизувати магнітний потік

$$\Phi_{12} = \int_{l_1} B_2 dS_1, \quad (2.3.3)$$

який наведе у ньому ЕРС

$$E_{\text{вз.1}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.4)$$

Такий взаємний електромагнітний зв'язок контурів із струмами називається взаємоіндукцією. Отже, взаємоіндукція є окремим проявом явища електромагнітної індукції, коли обидва контури розглядаються як єдина система.

Коефіцієнт взаємоіндукції

Цей параметр, подібно до коефіцієнта самоіндукції, визначається за формулою:

$$\Phi_{12} = L_{12} \frac{I_1}{c}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.5)$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.5')$$

де L_{12} - коефіцієнт взаємоіндукції, який описується інтегралом

$$L_{12} = \int_{S_2} dS_2 \oint_{l_1} \frac{dl_1 \times r}{r^3} \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.6)$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} dS_2 \oint_{l_1} \frac{dl_1 \times r}{r^3} \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.6')$$

Тобто ЕРС взаємоіндукції, що виникає у другому контурі, можна записати так:

$$\varepsilon_{\text{вз.2}} = -\frac{L_{12}}{c^2} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.7)$$

$$\varepsilon_{\text{вз.2}} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.7')$$

Магнітний потік, утворений струмом другого контуру, що пронизує перший контур, пропорційний до сили струму I_2 , тобто

$$\Phi_{21} = L_{21} \frac{I_2}{c}; \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.8)$$

$$\Phi_{21} = L_{21} I_2. \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.8')$$

Відповідно, ЕРС взаємоіндукції, що наводиться у першому контурі, має вигляд:

$$\varepsilon_{\text{вз.1}} = -\frac{L_{21}}{c^2} \frac{dI_2}{dt}. \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.9)$$

$$\varepsilon_{\text{вз.1}} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}. \quad (\text{СІ}) \quad (2.3.9')$$

Тут L_{21} - коефіцієнт взаємодукції, який визначає величину ЕРС, що виникає у першому контурі при наявності змінного магнітного потоку, створеного струмом другого контуру. Вираз для нього отримуємо з (2.3.6), переставивши індекси.

Як видно з (2.3.6), значення L_{12} та L_{21} залежать од форми, розмірів контурів та їхнього взаємного розміщення. Оскільки ці коефіцієнти виражають *взаємну* властивість обох контурів, то можна гадати, що вони повинні бути рівними:

$$L_{21}=L_{12} \quad (2.3.10)$$

Цю властивість можна довести строго, використавши поняття векторного потенціалу. Для цього виразимо магнітний потік, наприклад, Φ_{12} через векторний потенціал. Оскільки

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1, \text{ то}$$

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} [\nabla \times \mathbf{A}_1] dS_2 \quad (2.3.11)$$

Застосувавши теорему

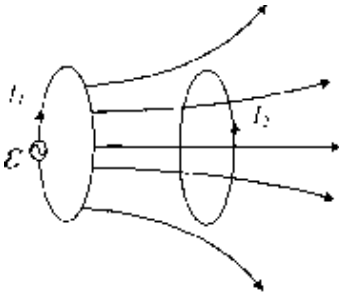


Рис. 2.3.1. Явище взаємодукції

Стокса, отримуємо

$$\Phi_{12} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 dl_2 \quad (2.3.12)$$

Векторний потенціал лінійного струму визначається формулою (1.7.8), тобто в даному випадку

$$\mathbf{A}_1 = \frac{I_1}{c} \oint_{l_1} \frac{dl_1}{r}. \quad (\text{СГС})$$

Тут r — відстань від елемента довжини першого контуру dl_1 до елемента площі dS_2 контуру l_2 . Підставивши цей вираз у (2.3.12), отримаємо:

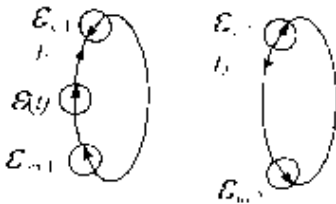


Рис. 2.3.2. Схема магнітнзв'язаних контурів

$$L_{12} \frac{c\Phi_{12}}{I_1} = c \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} \quad (\text{СГС}) \quad (2.3.13)$$

де Gr визначає відстань між елементами dl_1 , та dl_2 . Вираз для L_{21} отримаємо, переставивши індекси в (2.3.13). Оскільки значення інтегралів при цьому не змінюється, то це означає, що $L_{12} = L_{21}$.

Рівняння Кірхгофа для зв'язаних контурів

У контурах, що на рис. 2.3.1, крім ЕРС взаємоіндукції, виникають також ЕРС самоіндукції. Еквівалентну схему для цих контурів зображено на рис. 2.3.2. Тут реальна дія магнітного поля замінена еквівалентними джерелами ЕРС $\varepsilon_{c.1}, \varepsilon_{\text{вз.1}}, \varepsilon_{c.2}$ та $\varepsilon_{\text{вз.2}}$. Напрямки стрілок указують на полярність джерел ЕРС у деякий момент часу. Контури тепер можна вважати магнітно незв'язаними, оскільки всі електромагнітні явища вже враховано. Рівняння Кірхгофа для контурів мають вигляд:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_{c.1} + \varepsilon_{\text{вз.1}} = I_1 R_1$$

$$\varepsilon_{c.2} + \varepsilon_{\text{вз.1}} = I_2 R_2$$

де R_1, R_2 - електричні опори контурів. Тобто

$$\begin{aligned} \varepsilon - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} &= R_1 I_1, \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{21} \frac{dI_1}{dt} &= R_2 I_2. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Коефіцієнт взаємоіндукції двох довгих соленоїдів

На рис. 2.3.3. зображено два коаксіальні соленоїди. До зовнішнього соленоїда довжиною l_1 , площею витків S_1 та числом N_1

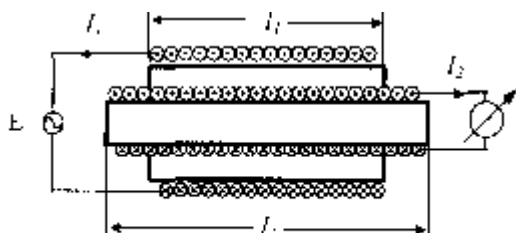


Рис. 2.3.3.

приєднано джерело змінної ЕРС ε . Внутрішній соленоїд має довжину l_2 , площу витків S_2 , число витків N_2 . Знайдемо коефіцієнт взаємоіндукції L_{12} такої системи. Маємо

$$\Phi_{12} = N_2 B_1 S_2 = \mu_0 N_2 n_1 S_2 I_1,$$

тобто

$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1}, \quad (\text{CI}) \quad (2.3.15)$$

або через лінійну густину витків:

$$L_{12} = \mu_0 n_1 n_2 S_2 l_1. \quad (\text{CI}) \quad (2.3.16)$$

В останній формулі добуток $S_2 l_1$ виражає об'єм, спільний для обох соленоїдів. Якщо вільний простір усередині соленоїдів заповнити однорідним магнетиком із магнітною проникливістю μ то

$$L_{12} = \mu \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1} \quad (\text{CI}) \quad (2.3.17)$$

Якщо тепер приєднати джерело змінного струму до внутрішнього соленоїда, то можна переконатися, що коефіцієнт L_{21} теж описується формулою (2.3.17).

2.4. Енергія магнітного поля

Магнітна енергія струму в котушці індуктивності

Розглянемо докладніше електромагнітні процеси, які відбуваються у RL — колі, зображеному на рис. 2.2.3. При закорочуванні котушки з резистором струм не одразу спадає до нуля, оскільки вихрове електричне поле, що виникає при зменшенні магнітного поля ($B \sim I$) "старається" підтримати струм у попередньому напрямку. Проте з-за наявності опору в колі енергія електричного поля поступово переходить у теплову енергію. Отже, у колі відбуваються такі перетворення: енергія магнітного поля переходить в енергію електричного поля, яка, збуджуючи електричний струм, переходить у тепло Джоуля. Підраховавши тепло, яке виділилося при затуханні струму до нуля, ми визначимо енергію магнітного поля до початку процесу релаксації. Тобто

$$W = Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt \quad (2.4.1)$$

Підставивши значення струму з (2.2.14), отримуємо:

$$Q = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (CI)$$

Отже, сила струму в момент часу релаксації I визначає енергію магнітного поля:

$$W(t) = \frac{LI(t)^2}{2}. \quad (CI) \quad (2.4.2)$$

Густина енергії магнітного поля

Формула (2.4.2) має обмежене застосування, оскільки вона описує енергію лише однорідного магнітного поля соленоїда зі струмом. Універсальний вираз для енергії ми отримаємо, виразивши цю енергію як функцію індукції магнітного поля. Для цього підставимо в останнє співвідношення вираз для струму

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0 n} \quad (CI)$$

та для коефіцієнта самоіндукції (2.2.6). Це дає

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V, \quad (CI) \quad (2.4.3)$$

де $V = lS$ - об'єм усередині соленоїда.

Формулу (2.4.3) можна застосовувати лише для однорідного поля. У випадку неоднорідного магнітного поля вона справедлива для нескінченно малого об'єму, в межах якого можна знехтувати зміною поля.

Таким чином, магнітна енергія, подібно до енергії електричного поля, локалізована у просторі, де існує магнітне поле. Локальною характеристикою енергії магнітного поля є її густина: w

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (CI) \quad (2.4.4)$$

Виконавши аналогічні процедури в СГС, отримаємо:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \quad (СГС) \quad (2.4.4')$$

Використавши співвідношення між магнітними векторами \mathbf{B} та \mathbf{H} , отримаємо ще два вирази для густини енергії:

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} \quad (\text{CI}) \quad (2.4.5)$$

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} \quad (\text{CI}) \quad (2.4.5')$$

В макроскопічному об'ємі V магнітна енергія визначається інтегралом

$$W = \int_V w dV \quad (2.4.6)$$

Енергія системи магнітно зв'язаних індуктивностей

Обчислимо енергію магнітного поля двох котушок, зображених на рис. 2.3.3. Вважаючи, що котушки знаходяться досить близько одна від одної, ми повинні врахувати, крім самоіндукції, ще й взаємоіндукцію. Розв'язок задачі можна формалізувати, використавши для цього узагальнену формулу для енергії (2.4.7). Магнітне поле отримуємо як суперпозицію полів, утворених котушками:

$$B = B_1 + B_2.$$

Маємо:

$$W = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int (B_1 + B_2)^2 dV = B_1^2 S_1 l_1 + B_2^2 S_2 l_2 + 2B_1 B_2 S_2 l_1.$$

В останньому члені добуток $S_2 l_1$ визначає об'єм, де B_1 та B_2 відмінні від нуля, тобто об'єм, спільний для обох котушок. Цей вираз зводиться до такого вигляду:

$$W = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1). \quad (\text{CI}) \quad (2.4.7)$$

Подвійні індекси у позначеннях коефіцієнтів самоіндукції вжито з метою узагальнення формули:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n L_{ij} I_i I_j \quad (\text{CI}) \quad (2.4.8)$$

2.5. Вихрові струми

Природа вихрових струмів

Вихровими струмами або струмами Фуко називаються замкнені струми, які індукуються вихровим електричним полем у масивних провідниках. Струми Фуко є одним із проявів

електромагнітної індукції. Густина вихрового струму в кожній точці провідника $j = E(\rho$ тому внаслідок замкненості силових ліній вихрового електричного поля лінії струму також замикаються всередині провідника.

Одним із проявів вихрових струмів є нагрівання провідника. Опір масивного провідника малий, тому вихрові струми тут можуть досягати значної величини. Це явище використовується в індукційних металургійних печах для плавлення металів та виготовлення сплавів, коли ці процеси потребують високої хімічної чистоти. Відомі також побутові прилади - надвисокочастотні пічки, де також використовується теплова дія вихрових струмів.

В інших випадках вихрові струми є небажаним явищем, оскільки вони викликають перегрівання електротехнічних пристроїв та витрати електричної енергії. Вихрові струми можна суттєво зменшити, набираючи магнітопроводи пристроїв (трансформаторів, електромагнітів змінного струму, електродвигунів, електромашинних генераторів та ін.) з тонких пластин магнітного матеріалу, покритих лаком з метою електроізоляції.

Згідно із правилом Ленца, вихрові струми у провіднику мають такі напрямки, щоби власним магнітним полем компенсувати зміну зовнішнього магнітного потоку. Ця властивість використовується в асинхронних електродвигунах із короткозамкнутим ротором. Ротор такого двигуна знаходиться в обертовому магнітному полі. Наведений у ньому вихровий струм взаємодіє з цим полем, внаслідок чого виникає механічний момент, під дією якого ротор обертається в напрямку обертання магнітного поля.

Згідно з принципом відносності, вихрові струми виникають і в тому випадку, коли суцільний провідник рухається, перетинаючи при цьому силові лінії *постійного, але неоднорідного магнітного поля*. Тут явище пояснюється дією сили Лоренца на вільні заряди провідника. У свою чергу, на вихрові струми діє магнітна сила, яка, відповідно до правила Ленца, зменшує швидкість руху провідника. Ця гальмівна сила, подібно до механічних сил тертя, пропорційна до швидкості руху провідника.

Переконливим прикладом гальмівної здатності вихрових струмів є демонстрація затухання коливань металевого маятника в магнітному полі, рис. 2.5.1.

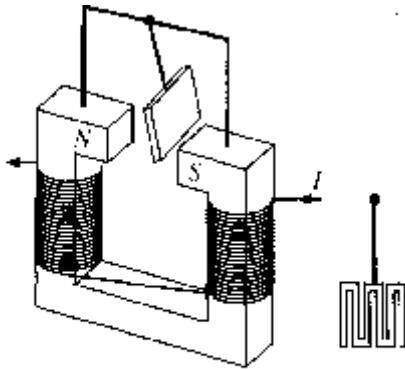


Рис. 2.5.1. Затухання маятника в магнітному полі

Маятник виготовлено з товстого листа металу з високою електропровідністю (алюміній, мідь). Коливання суцільної пластинки затухають дуже швидко, на протязі одного - двох півколивань, тоді як маятник із того ж матеріалу у вигляді гребінки (див. на рисунку справа) коливається значно довше. В останньому випадку величина вихрових струмів виявляється значно

меншою і, відповідно, меншою є їхня гальмівна ефективність. Гальмівна властивість вихрових струмів застосовується в демпферах (заспокоювачах) рухомих частин електричних вимірювальних приладів.

Скін-ефект

Постійний електричний струм рівномірно розподіляється по перерізу однорідного провідника. Змінний струм завдяки явищу самоіндукції створює вихрове електричне поле, в результаті чого відбувається перерозподіл струму в перерізі провідника. Розглянемо це явище на прикладі суцільного циліндричного провідника, вздовж якого протікає змінний струм, рис. 2.5.2. Магнітна силова лінія розміщується в горизонтальній площині. Лінії вихрового електричного поля розміщуються у вертикальних площинах. На рисунку відображено ситуацію, коли струм, тобто й магнітний потік зростає з часом. Видно, що біля поверхні провідника напрямки вихрового електричного поля та поля, зумовленого джерелом ЕРС, що створює струм, збігаються, тоді як у його центральній області вони протилежні. Згідно із законом Ома $j = \lambda E$ струм у провіднику розподіляється теж нерівномірно, - його густина в центральній області провідника менша, а біля поверхні більша від значення, характерного для сталого струму: $j = I / (\pi R^2)$. Така концентрація змінного струму біля поверхні провідника називається скін-

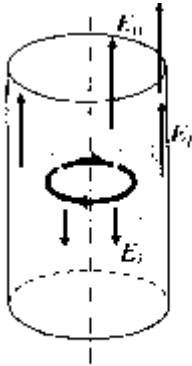


Рис. 2.5.2. Ілюстрація виникнення скін-ефекту

ефектом. Термін походить від англійського слова *skin*, що в буквальному перекладі означає "шкіра", а в широкому розумінні - поверхня. Розрахунки вказують, що напруженість електричного та магнітного поля, а також густина струму спадають углиб провідника за експоненціальною закономірністю: $j \sim \exp(-x/a)$. Тут a - параметр затухання струму:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}} \quad (2.5.1)$$

відповідає відстані від поверхні провідника до точки, в якій густина струму зменшується від поверхні в $e=2.718$ раз. Хоча цей висновок було отримано для моделі напівнескінченного провідника, він якісно застосовний і для провідника циліндричної форми.

Швидкість зміни магнітного поля, тобто й амплітуда індукційного електричного поля пропорційні частоті, тому явища, зумовлені скін-ефектом, теж посилюються зі збільшенням частоти струму. Оцінимо товщину скін-шару a для струму частотою 50 Гц, який тече по мідному провіднику. Маємо $\sigma = 2 \times 10^8 \text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, при 300 К. Інші значення: $\omega = 2\pi\nu = 314\text{с}^{-1}$, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{Ф(м)}$. Врахувавши ці значення в (2.5.1), отримуємо $a = 0.5\text{см}$. У більшості випадків діаметр провідника виявляється меншим за товщину скін-шару, тобто для промислової частоти це явище можна не враховувати. Однак, товщина скін-шару залежить обернено пропорційно од кореня з частоти, тому для доволі високих частот вона може стати дуже незначною. Наприклад, для частоти $\nu = 10^6$ Гц $a \sim 4$ мкм, тобто струм концентрується в тонкому (~ 0.04 мм) приповерхневому шарі провідника. Безпосереднім результатом такою згущення струму є збільшення електричного опору провідника. Крім того, із частотою зменшується індуктивність провідника, як це впливає із формули

$$LI = \int B dS.$$

З підвищенням частоти струм, тобто й магнітне поле витісняється з об'єму провідника, що призводить до зменшення магнітного потоку через його переріз. Таким чином, при незмінній

силі струму через провідник його індуктивність спадає з частотою як $L \sim 1/\sqrt{\omega}$.

Для зменшення скін-ефекту в колах, призначених для високочастотних струмів, застосовуються провідники трубчастої форми. При цьому велике значення має стан поверхні провідників. Наявність поверхневих пошкоджень (подряпини, корозія) суттєво впливають на електричний опір провідника. З метою уникнення корозії поверхню провідників захищають шаром срібла. Крім того, срібло має дещо менший питомий опір, ніж у міді, що теж призводить до зменшення загального опору провідника в умовах існування скін-ефекту.

Розділ 3. Основи теорії лінійних електричних кіл змінного струму

3.1. Найпростіший генератор змінного струму

Уявимо собі, що прямокутна рамка, яка має N витків, обертається у магнітному полі з індукцією \vec{B} . Припустимо, що вісь

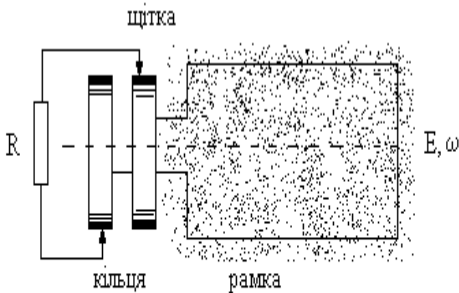


Рис. 3.1.1. Найпростіший електричний генератор

обертання перпендикулярна магнітного поля. Кінці обмотки рамки приєднані до двох кілець, концентричних з віссю рамки і які обертаються разом з нею (рис. 3.1.1). Кільця ізольовані один від одного. Кожне з них з'єднане з навантаженням R за допомогою нерухомих щіток, які здійснюють неперервний контакт з рухомими кільцями.

У кожний момент часу рамка орієнтована під деяким кутом Θ до напрямку B магнітного поля (рис. 3.1.2). Площа проекції рамки, яка перпендикулярна лініям магнітної індукції може бути визначена за умовою

$$S = S_p \cos \beta = S_p \sin \Theta, \quad (3.1.1)$$

де S_p – повна площа рамки.

Нехай рамка обертається проти годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю ω . При цьому площа проекції рамки, перпендикулярна напрямку поля, змінюється з часом. Швидкість зміни цієї площі буде:

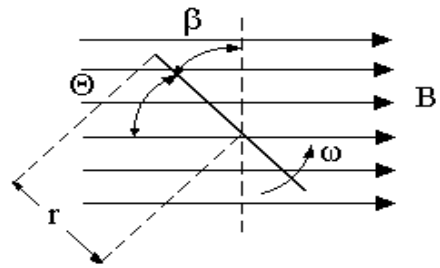


Рис. 3.1.2. Орієнтація рамки у магнітному полі

$$\frac{dS}{dt} = S_p \cos\Theta \frac{d\Theta}{dt}. \quad (3.1.2)$$

Так як

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt}; \Theta = \omega t, \quad (3.1.3)$$

то

$$\frac{dS}{dt} = \omega S_p \cos\Theta = \omega S_p \cos\omega t. \quad (3.1.4)$$

Величина потоку, який перетинає кожен виток рамки, дорівнює похідній магнітної індукції на площу, яка перпендикулярна потоку. Швидкість зміни магнітного потоку:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \omega S_p B \cos\omega t \quad (3.1.5)$$

Відповідно, ЕРС яка індукується в рамці, рівна помноженій на N швидкості зміни магнітного потоку. Тобто, ЕРС генератора можна записати:

$$E_{PC} = -\omega N S_p B \cos\omega t \quad (3.1.6)$$

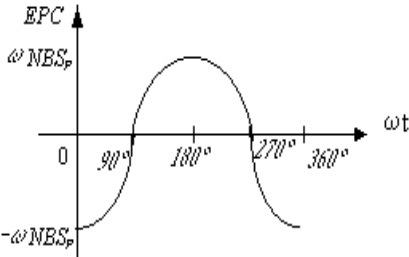


Рис. 3.1.3. Електрорушійна сила генератора змінного струму

Аналіз отриманої формули показує, що ЕРС генератора змінюється за законом косинуса (рис.3.1.3). Напруга на генераторі змінна по величині, вона то додатна, то від'ємна. У цьому випадку прийнято говорити про змінну напругу.

Якщо така змінна напруга прикладена до деякого навантаження R

(рис. 3.1.1), то в колі виникає змінний електричний струм.

Таким чином, рамка яка обертається в магнітному полі, являє собою найпростіший тип генератора змінного струму.

3.2. Характеристики змінних ЕРС, напруг і струмів

Під змінними ЕРС, напругами і струмами будемо розуміти такі ЕРС, напруги і струми які з часом змінюються як по величині,

так і по напрямку. Відповідно, постійний струм може розглядатися, як частковий випадок змінного струму.

Змінні ЕРС, напруга і струм можна розділити на періодичні і неперіодичні. Якщо змінна величина описується деякою функцією $f(t)$, а T – період цієї функції, то періодичною величиною будемо називати таку величину для якої виконується рівність:

$$f(t) = f(t + T). \quad (3.2.1)$$

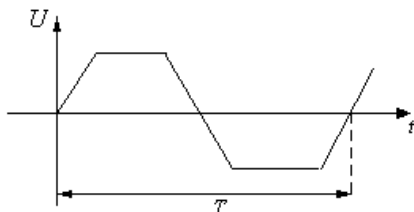


Рис. 3.2.1. Графік зміни періодичної величини з часом

Якщо зміни величини ЕРС, напруги і струму, які не підлягають цьому закону, вони називаються неперіодичними.

Як видно з рис. 3.2.1 через період T функція $f(t)$ періодичної величини повторює своє значення. У свою чергу періодичні

величини поділяються на синусоїдальні і несинусоїдальні.

Під синусоїдальними змінами ЕРС, напругами і струмами розуміють такі ЕРС напруги і струми, закон зміни яких записується функціями синуса чи косинуса.

У практичній більшості випадків використовуються синусоїдально змінні ЕРС, напруга і струм.

У загальному випадку їх закон зміни може бути записаний наступним чином:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \quad (3.2.2)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (3.2.3)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (3.2.4)$$

Величини e , u , i називаються миттєвими значеннями ЕРС, напруги і струму. Під миттєвими значеннями розуміють величину ЕРС, напруги і струму в даний момент часу. E_m , U_m , I_m являють собою найбільше чи амплітудне значення змінної ЕРС, напруги і струму.

ψ_e , ψ_u , ψ_i називають початковою фазою ЕРС, напруги і струму.

Якщо змінна величина має період T , то для її характеристики вводиться так звана частота. Частота змінної величини – це

величина, обернена періоду

$$f = \frac{1}{T} (\Gamma\text{ц}). \quad (3.2.5)$$

Величина ω називається циклічною частотою. Причому, кругова частота ω і частота f зв'язані між собою залежністю

$$\omega = 2\pi f \left(\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right). \quad (3.2.6)$$

Розглянемо далі графік синусоїдальної напруги (рис. 3.2.2). З графіку слідує, що початкова фаза змінної величини може бути більша чи менша нуля.

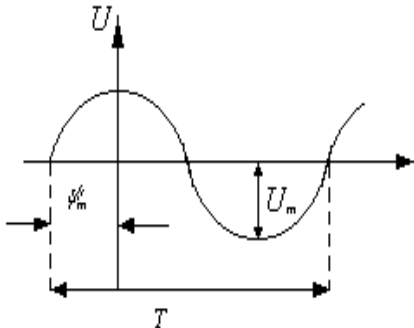


Рис. 3.2.2. Графік зміни синусоїдального значення напруги

Для випадку, який представлено на рис. 3.2.2 $\psi_u > 0$, так як в момент $t=0$ напруга U більше нуля.

В електротехніці дуже часто розглядають величину $\psi_u - \psi_i = \varphi$. Причому, під кутом φ розуміють кут зсуву фаз між струмом і напругою в даному колі.

3.3. Амплітудне, діюче і середнє значення змінних ЕРС, напруги і струму

Для того, щоб якимось чином охарактеризувати ступінь взаємодії на електричне коло змінних ЕРС, напруги і струму, вводять поняття діючого значення ЕРС, напруги і струму.

Причому під діючим значенням струму розуміють такий постійний струм, який на деякому активному опорі R за певний час виділяє таку саму кількість тепла як і змінний струм.

Відомо, що кількість тепла, яка виділяється в опорі R згідно закону Ленца-Джоуля визначається як

$$Q = I^2 R t \quad (3.3.1)$$

Припустимо, що змінний струм величиною i в опорі R за час dt

виділяє кількість тепла $dQ = i^2 R dt$. За період T цей змінний струм

$$\text{виділяє кількість тепла } Q = \int_0^T i^2 R dt.$$

Деякий постійний струм I за цей же час, тобто за період T , повинен виділити таку ж кількість теплоти $Q = I^2 RT$.

Порівнюючи ці два вирази, отримаємо

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt \quad (3.3.2)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.3.3)$$

Вираз (3.3.3) виражає залежність між діючим і миттєвим значенням змінного струму. Нехай струм у колі змінюється по синусоїдальному закону, тобто

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.3.4)$$

Тоді можна знайти зв'язок між діючим і амплітудним значенням змінного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos^2 \omega t}{2} dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3.3.5)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3.3.6)$$

Таким чином, діюче значення змінного струму рівне його амплітудному значенню, поділеному на корінь квадратний з двох.

Аналогічно для діючого значення напруги і ЕРС можна записати:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (3.3.7)$$

Під середнім значенням змінної величини розуміють вираз

$$F_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Так як змінні e , u , i які ми розглядаємо, є періодичними, то середнє значення їх за період дорівнює нулю. Тому для характеристики періодичних ЕРС, напруги і струму вводять поняття середнього значення за півперіод.

Якщо змінний струм змінюється по закону

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (3.3.8)$$

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt. \quad (3.3.9)$$

Поняття середнього значення змінного струму вводиться через те, що прилади магніто - електричної системи з діодом саме реагують на середнє значення.

Встановимо зв'язок між середнім і амплітудним значенням змінного струму.

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = -\frac{2I_m}{T} \cdot \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (3.3.10)$$

Аналогічно

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m; \quad E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m. \quad (3.3.11)$$

3.4. Представлення синусоїдальних функцій у вигляді векторів, що обертаються. Векторні діаграми

При розрахунку складних електричних кіл змінного струму потрібно виконувати різного роду математичні операції над синусоїдально змінними величинами. Додавання, віднімання таких величин в аналітичній формі досить громіздке. Ці операції значно спрощуються, якщо синусоїдально змінююча величина представлена у вигляді обертового вектора.

В електрорадіотехніці за позитивний напрямок обертання векторів взятий напрямок проти руху стрілки годинника.

Розглянемо вектор, наприклад, U_m , який обертається у додатному напрямку з кутовою швидкістю ω (рис. 3.4.1).

У цьому випадку проекція вектора на вертикальну вісь буде рівна

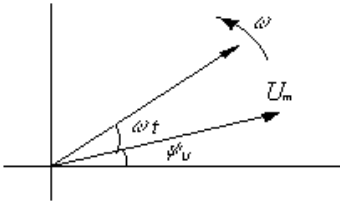


Рис. 3.4.2. Обертювий вектор синусоїдальної напруги з врахуванням початкової фази

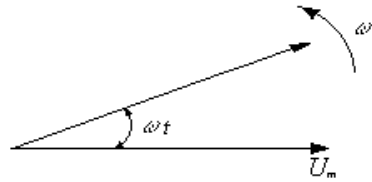


Рис. 3.4.1. Обертювий вектор синусоїдальної напруги

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (3.4.1)$$

тобто є миттєве значення синусоїдальної величини.

Якщо підрахунок часу взяти з якогось певного моменту, коли проекція вектора на вертикальну вісь не рівна нулю, то числове значення для визначення проекції на вертикальну вісь може бути знайдене як (рис. 3.4.2)

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.4.2)$$

У даному виразі враховується, так звана, початкова фаза ψ_u .

З аналітичної геометрії відомою, що алгебраїчна сума проекцій на вісь векторів рівна проекції суми цих векторів на цю вісь. Звідси випливає можливість додавання синусоїдальних величин у векторній формі. Причому, векторне додавання можна виконувати лише у випадку, якщо $\omega = const$. У подальшому при побудові векторів ми будемо розглядати їх не як обертальні, а як зафіксовані вектори. Крім того, оскільки на практиці цікавляться частіше всього діючим значенням змінної величини, то й при побудові векторів, що відображають ці величини, ми будемо брати не амплітудне, а діюче значення для вибору масштабу вектора.

Сукупність векторів, які відтворюють значення ЕРС, напруги і струми, що діють у даному електричному колі, і розміщених під відповідними кутами один відносно одного, називається векторною діаграмою.

Розрізняють променеві і топографічні векторні діаграми. Якщо вектори, які утворюють векторну діаграму виходять з однієї точки, то така діаграма називається променевою. Якщо вектори на діаграмі розміщені, так само як і елементи електричного кола, які вони описують, то така діаграма називається топографічною. Основною

перевагою топографічної векторної діаграми є те, що з її допомогою можна відтворити електричне коло, яке ми досліджуємо.

3.5. Закони Кірхгофа для кола змінного струму

Закони Кірхгофа є одними з основних законів теорії електричних кіл. Специфіка кіл змінного струму накладає свої вимоги на формулювання цих законів.

І закон Кірхгофа. Алгебраїчна сума миттєвих значень струмів чи векторна сума струмів, які входять у вузол електричного кола рівна алгебраїчній сумі миттєвих значень чи векторній сумі струмів, що витікають із вузла електричного кола.

ІІ закон Кірхгофа. Алгебраїчна сума миттєвих значень ЕРС чи векторна сума ЕРС, діючих у замкнутому контурі електричного кола рівна алгебраїчній сумі миттєвих значень чи векторній сумі значень спаду напруг у цьому контурі.

3.6. Активний опір у колі змінного струму

Елемент електричного кола, де проходить необоротний процес перетворення електричної енергії в інші види, називається електричним опором.

Розглянемо електричне коло, яке містить тільки активний опір, тобто таке коло, в якому здійснюється споживання електричної енергії. (рис. 3.6.1)

Прикладені до кола напруга U зрівноважується спадом напруги на активному опорі u_R . Відповідно $u = u_R$.

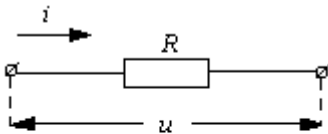


Рис. 3.6.1. Активний опір у колі змінного струму

Миттєве значення струму в колі, згідно закону Ома, може бути визначено як

$$i = \frac{u_R}{R} \quad (3.6.1)$$

Уявимо, що прикладена до кола напруга змінюється за законом

$$u = U_m \sin \omega t \quad (3.6.2)$$

Тоді струм у колі визначається за виразом

$$i = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t \quad (3.6.3)$$

Величину $\frac{U_m}{R}$ позначимо через I_m . Тому закон зміни струму в

колі буде

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.6.4)$$

Порівнюючи вираз для напруги і струму в колі, бачимо, що вони змінюються по однаковому закону. У цьому випадку говорять, що струм і напруга співпадають по фазі. А це в свою чергу означає, що початкова фаза струму і напруги у колі змінного струму однакова.

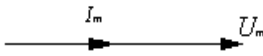


Рис. 3.6.2. Векторна діаграма напруг і струмів для кола змінного струму з активним опором

Векторна діаграма для цього випадку показана на рис. 3.6.2.

З раніше отриманого,

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (3.6.5)$$

Перейдемо до діючих значень напруги і струму в колі. Для цього обидві частини рівності (3.6.5) поділимо на $\sqrt{2}$. Тоді отримаємо що

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.6.6)$$

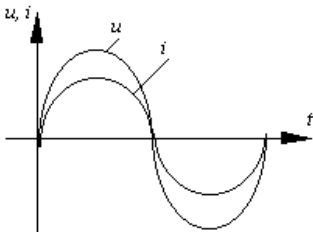


Рис. 3.6.3. Графік зміни в часі прикладеної до кола напруги і струму в колі

Отже, ми отримаємо вираз закону Ома для кола змінного струму з активним опором.

На хвильовій діаграмі (рис. 3.6.3) представлений графік зміни прикладеної напруги і струму в електричному колі з активним опором.

3.7. Індуктивність у колі змінного струму

Припустимо, що в коло змінного струму з напругою U включена індуктивність L . Струм у колі позначимо через i (рис. 3.7.1). У цьому випадку прикладені до електричного кола напруга U

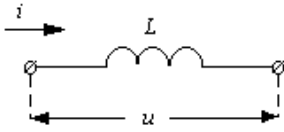


Рис. 3.7.1. Індуктивність у колі змінного струму

зрівнюється ЕРС самоіндукції e_L . Припустимо, що струм, який протікає у електричному колі змінюється за законом

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (3.7.1)$$

Тоді, закон зміни напруги може бути знайденим, як

$$U = U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{dI_m \sin \omega t}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.7.2)$$

Величину $\omega L I_m$ позначають через U_m . Тому вираз переписється як

$$U = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.7.3)$$

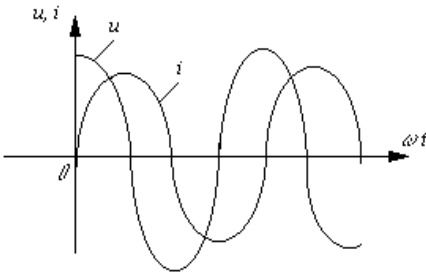


Рис. 3.7.2. Хвильова діаграма струму і напруги для випадку включення індуктивності в колі змінного струму

Порівнюючи закони зміни струму і напруги у колі змінного струму з індуктивністю, можна зробити висновок, що напруга випереджує струм на кут $\frac{\pi}{2}$.

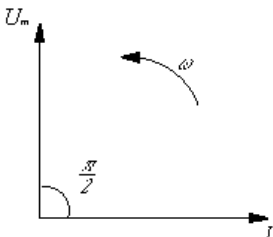


Рис. 3.7.3. Векторна діаграма струмів і напруг для кола змінного струму з індуктивністю

На хвильовій діаграмі це буде мати такий вигляд, як показано на рис. 3.7.2. На векторній діаграмі струмів і напруг для випадку, який аналізуємо, потрібно вектор напруги відкласти в бік випередження на кут $\frac{\pi}{2}$ до вектора струму (рис. 3.7.3).

Як було відзначено раніше:

$$\omega L I_m = U_m. \quad (3.7.4)$$

Звідси можна записати, що

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (3.7.5)$$

Переходячи до діючих значень, отримаємо:

$$I = \frac{U}{\omega L}. \quad (3.7.6)$$

Вираз (3.7.6) є записом закону Ома для кола змінного струму з індуктивністю.

Величину ωL в радіоелектроніці позначають як X_L і називають індуктивним опором електричного кола змінного струму.

3.8. Аналіз електричного кола змінного струму з послідовним з'єднанням R , L , C - елементів при встановленому режимі роботи

На рис. 3.8.1 зображено електричне коло, в якому елементи

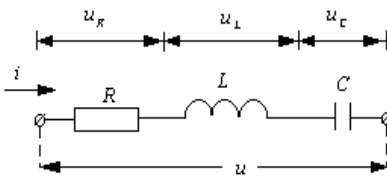


Рис. 3.8.1. Електричне коло з послідовним з'єднанням R , L , C - елементів

R , L і C включені послідовно. Загальна прикладена до кола напруга позначили через U . Спад напруги на активному опорі R , індуктивності L і ємності C позначимо через u_R , u_L , u_C . Струм, який протікає

в такому електричному колі позначимо через i .

На основі другого закону Кірхгофа для електричного кола змінного струму можна записати, що

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (3.8.1)$$

Але, як нам уже відомо, що

$$u_R = i \cdot R \quad (3.8.2)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (3.8.3)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (3.8.4)$$

Отже, вираз другого закону Кірхгофа для електричного кола, яке аналізуємо, матиме вигляд

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3.8.5)$$

Розв'язок отриманого інтегрально-диференціального рівняння може бути знайдено як сума часткового розв'язку даного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння. Причому, частковий розв'язок визначає встановлений режим в електричному колі, а загальний розв'язок однорідного рівняння характеризує перехідний процес.

Припустимо, у загальному випадку, що прикладена до електричного кола, яке аналізуємо, напруга змінюється за синусоїдальним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.8.6)$$

Припустимо також, що режим роботи кола встановлений. У цьому випадку розв'язок отриманого для кола інтегрально-диференціального рівняння буде складатись лише з часткового розв'язку цього рівняння.

Так як прикладена до кола напруга змінюється по синусоїдальному закону, то і струм, який протікає в колі також змінюється за синусоїдальному закону, бо ми аналізуємо лінійне електричне коло змінного струму.

Тоді частковий розв'язок інтегрально-диференціального рівняння буде

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (3.8.7)$$

Тому запишемо, що:

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t - I_m \frac{1}{\omega C} \cos \omega t. \quad (3.8.8)$$

При складанні рівняння (3.8.8), на режим роботи кола ніяких обмежень не накладаємо. Відповідно, це рівняння описує процес для будь-якого моменту часу.

Розглянемо наступні два крайні випадки стану електричних кіл:

1. $\omega t = 0.$ (3.8.9)

Тоді

$$U_m \sin \varphi = I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = I_m (X_L - X_C). \quad (3.8.10)$$

2. $\omega t = \frac{\pi}{2}.$

У цьому випадку

$$U_m \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = I_m R \quad (3.8.11)$$

або

$$U_m \cos \varphi = I_m R. \quad (3.8.12)$$

Тобто ми отримуємо два рівняння

$$\begin{cases} U_m \sin \varphi = I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ U_m \cos \varphi = I_m R \end{cases} \quad (3.8.13)$$

Кожне з отриманих рівнянь піднесемо до квадрату та додамо

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} U_m^2 \sin^2 \varphi = I_m^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \\ U_m^2 \cos^2 \varphi = I_m^2 R^2 \end{cases} \\ U_m^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= I_m^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

$$U_m^2 = I_m^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]. \quad (3.8.15)$$

З рівняння (58) видно, що

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (3.8.16)$$

Перейдемо до діючих значень напруги і струму. Тоді вираз (3.8.16) набуде вигляду

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}}. \quad (3.8.17)$$

Вираз (3.8.17) є записом закону Ома у випадку послідовного з'єднання R, L, C – елементів у колі змінного струму. Величина $\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$ позначається в радіоелектроніці через Z і називається повним опором електричного кола

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} \quad (3.8.18)$$

Величина $(X_L + X_C)$ позначається через X і називається реактивним опором електричного кола

$$X = (X_L + X_C) = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (3.8.19)$$

Якщо для кола постійного струму розглядати лише активний опір, то для кола змінного струму, як було показано вище, вводиться поняття індуктивного і ємнісного опору. Слід відмітити, що індуктивний і ємнісний опір в колі змінного струму не є споживачем електричної енергії, на відміну від активного опору. Вони проявляють вплив на електричне коло у вигляді перешкоди для проходження електричного струму.

Так як вони не є споживачами електричної енергії, то їх і назвали реактивними опорами, на відміну від активного опору.

Продовжимо далі дослідження даного електричного кола.

Для цього знову скористаємось рівнянням (3.8.13)

$$\begin{cases} U_m \sin \varphi = I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ U_m \cos \varphi = I_m R \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, отримаємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R} \quad (3.8.20)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}. \quad (3.8.21)$$

Величина φ в радіоелектроніці носить назву кута зсуву фаз між струмом і напругою.

Слід відмітити, що

$$\varphi = \psi_U - \psi_i, \quad (3.8.22)$$

але ні в якому випадку не навпаки.

Знак кута φ може бути визначений по векторній діаграмі. $\varphi > 0$, якщо вектор напруги при обертанні у додатному напрямку іде попереду вектора струму (рис.3.8.2, а) при цьому $\psi_u > \psi_i$. Відповідно, якщо вектор струму йде попереду вектора напруги, то кут $\varphi < 0$ і $\psi_u < \psi_i$, і $\varphi = 0$, якщо вектор струму і напруги співпадають, причому $\psi_u = \psi_i$.

Відомо, що функція тангенса визначена в інтервалі від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

На цьому базується контроль правильності побудови векторних діаграм, особливо при їх побудові по

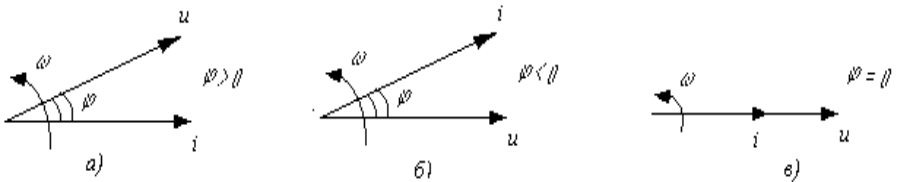


Рис. 3.8.2. Векторні діаграми для різних випадків зсуву по фазі між струмом і напругою в електричному колі

практичним даним. Кут φ між струмом у колі і прикладеною напругою ніколи не може бути більше ніж $\frac{\pi}{2}$.

У цьому випадку, якщо $\varphi > 0$, а $R \neq 0$, то $L > \frac{1}{\omega C}$. Тоді кажуть,

що електричне коло має активно-індуктивний характер. Це в свою чергу означає, що реакція індуктивності в колі більша реакції ємності, тобто в магнітному полі індуктивності накопичується більше електричної енергії, ніж в електричному полі ємності.

У випадку, коли $\varphi < 0$, а $R \neq 0$ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$. Тоді кажуть, що

електричне коло має активно-ємнісний характер. У такому колі реакція ємності переважає над реакцією індуктивності. Якщо $\varphi > 0$, то коло має активний характер.

Для практичного визначення характеру електричного кола з послідовним з'єднанням R, L, C – елементів достатньо виміряти напругу на індуктивності U_L і ємності U_C .

Якщо $U_L > U_C$, то коло має активно-індуктивний характер.

Якщо $U_L < U_C$, коло носить активно-ємнісний характер.

А якщо $U_L = U_C$, коло має чисто активний характер. Для визначення величини кут φ по відомим параметрам кола R ,

$$X_L = \omega L, X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{і} \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C, \quad \text{запишемо}$$

отримане вище рівняння (3.8.13) у діючих значеннях напруги і струму

$$\begin{cases} U \sin \varphi = I(X_L - X_C) = I_X \\ U \cos \varphi = IR \end{cases}$$

Після чергового перетворення матимемо:

$$\frac{U}{I} \sin \varphi = X \quad (3.8.23)$$

$$\frac{U}{I} \cos \varphi = R \quad (3.8.24)$$

Але нам відомо, що:

$$\frac{U}{I} = Z \quad (3.8.25)$$

Тоді

$$X = Z \cdot \sin \varphi \quad (3.8.26)$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi \quad (3.8.27)$$

Побудуємо променеву векторну діаграму струмів і напруг для електричного кола, яке аналізуємо. В електричному колі при послідовному з'єднанні елементів побудова векторної діаграми струмів і напруг зручно розпочинати з вектора струму, так як струм є

загальним для всіх елементів кола. Тому у довільному напрямку, наприклад, горизонтально, відкладемо вектор струму (рис. 3.8.3).

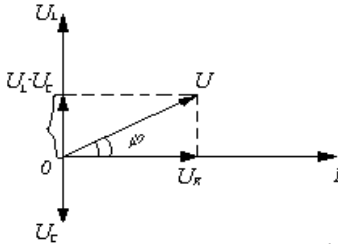


Рис. 3.8.3. Променева векторна діаграма струмів і напруг для електричного кола змінного струму з послідовними з'єднаннями R, L, C - елементів при умові, що $U_C > U_L$

з початку вектора струму O у напрямку вектора струму відкладемо вектор спаду напруги на активному опорі, так як струм у колі і спад напруги на активному опорі співпадають за фазою. Оскільки спад напруги на індуктивності випереджає, а на ємності відстає від струму на кут $\frac{\pi}{2}$, то відповідні вектори відкладаємо з початку

вектора струму вгору і вниз під кутом $\frac{\pi}{2}$ до останнього. Другий

закон Кірхгофа для кола змінного струму говорить, що

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C \quad (3.8.28)$$

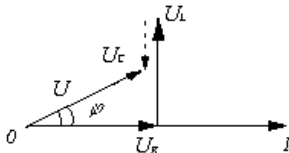


Рис. 3.8.4. Топографічна векторна діаграма струмів і напруг в електричному колі змінного струму з послідовним з'єднанням R, L, C - елементів

Тому вектор прикладеної напруги знайдемо як векторну суму векторів $\bar{U}_R, \bar{U}_L, \bar{U}_C$,

використовуючи відоме правило паралелограма. Кут φ кола визначається як кут між струмом у колі і прикладеною до

кола напругою.

Побудова топографічної векторної діаграми також зручно розпочати з вектора струму (рис.3.8.4). З початку вектора струму відкладемо вектор спаду напруги на активному опорі \bar{U}_R , так як останній співпадає по фазі з струмом.

З кінця вектора \bar{U}_R вверх під кутом $\frac{\pi}{2}$ відкладемо вектор \bar{U}_L , (розгляд кола проведемо зліва направо), так як цей вектор випереджає струм на кут $\frac{\pi}{2}$. З кінця вектора \bar{U}_L , відкладемо вектор напруги \bar{U}_C , вниз під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора струму, так як \bar{U}_C відстає від струму на кут $\frac{\pi}{2}$. З'єднавши початок вектора \bar{U}_R з кінцем вектора \bar{U}_C отримаємо вектор прикладеної до кола напруги \bar{U} . Кут φ кола визначається як кут між струмом у колі I та прикладеною до кола напругою.

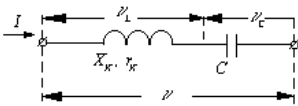


Рис. 3.8.5. Схема електричного кола з послідовним включенням котушки індуктивності та конденсатора

У практичних випадках при послідовному з'єднанні конденсатора C і котушки індуктивністю L остання володіє крім індуктивного ще й активним опором.

Тому у цьому випадку побудова векторної діаграми з метою визначення електричних параметрів кола виконують методом засічок.

Наприклад, для кола зображеного на рис.3.8.5 визначають за допомогою амперметра і вольтметра струм і напругу у колі.

Побудову векторної діаграми розпочинають, відкладаючи вектор прикладеної до кола напруги у вибраному масштабі в довільному напрямку (рис 3.8.5). З початку вектора \bar{U} радіусом рівним величині спаду напруги на котушці індуктивності \bar{U}_K робимо засічку. Потім з кінця вектора \bar{U} робимо другу засічку радіусом у вибраному масштабі рівним спаду напруги на конденсаторі \bar{U}_C . Отримаємо на діаграмі точку K, яку з'єднуємо з початком і кінцем вектора \bar{U} . Вибираємо напрям вектора \bar{U}_K , наприклад, так як це показано на рис.3.8.6. Тоді вектор \bar{U}_C повинен

замикати отриманий трикутник, бо згідно другого закону Кірхгофа для кола змінного струму зберігається рівність

$$\bar{U} = \bar{U}_K + \bar{U}_C \quad (3.8.29)$$

Оскільки активні втрати в конденсаторі невеликі, то у практичних розрахунках ними нехтують. Це дає можливість побудувати на діаграмі вектори струму в колі \bar{I} , відклавши його у масштабі в бік випередження на кут $\frac{\pi}{2}$ вектор напруги \bar{U}_C .

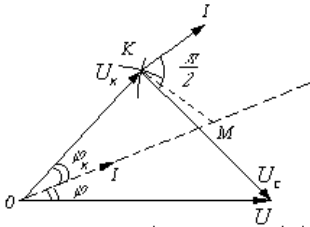


Рис. 3.8.6. Векторна діаграма струмів і напруг

Перенесемо на початок діаграми вектор струму \bar{I} та перевіримо правильність вибраних напрямків векторів \bar{U}_K і \bar{U} . Між вектором струму \bar{I} і вектором \bar{U}_K

утворюється кут ϕ_K , який у даному випадку менший, ніж $\frac{\pi}{2}$, що цілком реально.

Між вектором струму \bar{I} і вектором прикладеної до кола напруги \bar{U} утворюється кут ϕ кола, яке складається з котушки індуктивності і конденсатора. Цей кут також менший ніж $\frac{\pi}{2}$.

Відповідно, напрям векторів вибрано правильно. У випадку, коли вказані умови не виконуються, необхідно змінити напрям всіх векторів на протилежний.

Визначення електричних параметрів кола виконують наступним чином.

1. Визначають повний опір кола за формулою

$$Z = \frac{U}{I} \quad (3.8.30)$$

2. Визначають ємнісний опір

$$X_C = \frac{U_C}{I} \quad (3.8.31)$$

3. Визначають величину ємності

$$C = \frac{1}{X_C \omega} \quad (3.8.32)$$

4. Проектують вектор \bar{U}_K на напрям вектора струму \bar{I} та визначають активний спад напруги у котушці, вимірявши величину відрізка OM .

5. Визначають величину активного опору котушки

$$r_K = \frac{OM}{I} \quad (3.8.33)$$

6. Визначають величину індуктивного спаду напруги в котушці, вимірявши відрізок KM .

7. Визначають величину індуктивного опору котушки

$$X_K = \frac{KM}{I} \quad (3.8.34)$$

8. Знаходять індуктивність котушки

$$L = \frac{X_K}{\omega} \quad (3.8.35)$$

9. Перевірку правильності розрахунків можна виконати за формулою

$$Z = \sqrt{r_K^2 + (X_K - X_C)^2} \quad (3.8.36)$$

3.9. Аналіз електричного кола змінного струму з паралельним з'єднанням R , L , C - елементів при встановленому режимі роботи

Аналіз електричного кола при паралельному з'єднанні R , L , C - елементів базується на першому законі Кірхгофа, який можна записати

$$i = i_R + i_L + i_C \quad (3.9.1)$$

Але

$$i_R = \frac{u}{R} \quad (3.9.2)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt \quad (3.9.3)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \quad (3.9.4)$$

Тоді можна записати, що струм у нерозгалуженій частині кола

$$i = \frac{u}{C} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} \quad (3.9.5)$$

Припустимо, що струм, який протікає у нерозгалуженій частині кола змінюється за законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.9.6)$$

Тоді отримаємо наступне інтегро-диференціальне рівняння

$$I_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} \quad (3.9.7)$$

Так як ми розглядаємо встановлений режим роботи кола і в отриманому інтегро-диференціальному рівнянні невідоме “ u ”, то повний розв’язок цього рівняння буде визначатись частковим його розв’язком.

Оскільки збурення є синусоїдальна функція $I_m \sin(\omega t + \varphi)$ і коло лінійне, то і частковий розв’язок є також синусоїдальною функцією і може бути прийнятий як:

$$u = U_m \sin \omega t \quad (3.9.8)$$

Тоді ми отримуємо

$$I_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_m}{R} \sin \omega t - \frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t + C \omega U_m \cos \omega t \quad (3.9.9)$$

Розглянемо далі наступні два випадки в колі

$$1. \quad \omega t = 0 \quad (3.9.10)$$

$$2. \quad \omega t = \frac{\pi}{2} \quad (3.9.11)$$

Для першого випадку отримуємо рівняння

$$-I_m \sin \varphi = -\frac{U_m}{\omega L} + U_m \omega C \quad (3.9.12)$$

Для другого випадку рівняння прийме вигляд

$$I_m \sin \varphi = \frac{U_m}{R} \quad (3.9.13)$$

Отримані рівняння перепишемо наступним чином

$$\begin{cases} I_m \sin \varphi = U_m \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \\ I_m \cos \varphi = U_m \frac{1}{R} \end{cases} \quad (3.9.14)$$

Величина $\frac{1}{R}$ називається активною провідністю електричного кола і позначається буквою g .

$$g = \frac{1}{R} \quad (3.9.15)$$

Піднесемо обидві частини рівняння (3.9.14) до квадрату і додамо

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} I_m^2 \sin^2 \varphi = U_m^2 \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \\ I_m^2 \cos^2 \varphi = U_m^2 g^2 \end{cases} \\ I_m^2 &= U_m^2 \left[g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9.16)$$

Добувши корінь і перейшовши до діючих значень напруги і струму, отримаємо:

$$I = U \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \quad (3.9.17)$$

Отримана рівність є виразом закону Ома для електричного кола з паралельним з'єднанням R, L, C – елементів.

Величина

$$\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} = Y \quad (3.9.18)$$

і називається повною провідністю електричного кола.

Таким чином, для кола з паралельним з'єднанням R, L, C – елементів вираз закону Ома можна записати у виді:

$$I = UY \quad (3.9.19)$$

Величину $\frac{1}{\omega L} - \omega C$ позначимо через b і назвемо реактивною провідністю електричного кола.

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C \quad (3.9.20)$$

Величини

$$b_L = \frac{1}{\omega L} \quad (3.9.21)$$

$$b_C = \omega C \quad (3.9.22)$$

називаються відповідно індуктивною і ємнісною провідностями електричного кола.

Далі поділимо рівність (3.9.14) одну на одну

$$\frac{I_m \sin \varphi = U_m (b_L - b_C)}{I_m \cos \varphi = U_m g} \quad (3.9.23)$$

і отримаємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_L - b_C}{g} = \frac{b}{g} \quad (3.9.24)$$

або

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{g} \quad (3.9.25)$$

Дуже важливо запам'ятати, що кут φ тут також визначається тільки параметрами електричного кола і не залежать від величини прикладеної напруги.

Розглянемо два крайні випадки в електричному колі

1. $\omega t = 0$

2. $\omega t = \frac{\pi}{2}$

Для першого випадку, маємо рівняння

$$-I_m \sin \varphi = -\frac{U_m}{\omega L} + U_m \omega C$$

Для другого випадку рівняння набуде виду

$$I_m \cos \varphi = U_m \frac{1}{R}$$

Величину $\frac{1}{R}$ позначимо через g і назвемо активною провідністю електричного кола.

Перепишемо отримане рівняння наступним чином

$$\begin{cases} I_m \sin \varphi = U_m \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \\ I_m \cos \varphi = U_m g \end{cases}$$

Кожне з отриманих рівнянь піднесемо до квадрату і додамо ці рівняння. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} I_m^2 \sin^2 \varphi = U_m^2 \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \\ I_m^2 \cos^2 \varphi = U_m^2 g^2 \end{cases} \\ I_m^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) &= U_m^2 \left[g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Після відповідних перетворень маємо

$$I_m^2 = U_m^2 \left[g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right]$$

Добувши з обох частин рівняння квадратний корінь і перейшовши до діючих значень струму і напруги, отримаємо

$$I = U \cdot \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}$$

Останній вираз є записом закону Ома для електричного кола з паралельним з'єднанням R , L , C – елементів.

Величина $\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} = y$ називається повною провідністю кола.

Величина $\frac{1}{\omega L} - \omega C = b$ має назву реактивної провідності кола.

Величини $\frac{1}{\omega L} = b_L$ і $\omega C = b_C$ відповідно називаються індуктивною і ємнісною провідністю. Тобто, закон Ома, з урахуванням прийнятих в радіоелектроніці позначеннями може бути записаний у виді

$$I = U \cdot \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = U \cdot \sqrt{g^2 + b^2}$$

Вернемося до початкових рівнянь, у яких перейдемо до діючих значень струму і напруги.

$$\begin{cases} I_m \sin \varphi = U_m \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = U(b_L - b_C) = U \cdot b \\ I_m \cos \varphi = U g \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на друге. При цьому отримаємо, що:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g} = \frac{b_L - b_C}{g} = \frac{b}{g},$$

а кут

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g} = \frac{b_L - b_C}{g} = \frac{b}{g}$$

Таким чином, кут зсуву фаз між напругою і струмом у колі змінного струму визначається тільки параметрами кола і не залежить від величини прикладеної до кола напруги і струму в колі.

Якщо $b_L > b_C$, то $\varphi > 0$ і коло має індуктивний характер.

Якщо $b_L < b_C$, то $\varphi < 0$ і коло має ємнісний характер.

Побудуємо векторну діаграму струму і напруги для електричного кола, яке аналізуємо.

При побудові векторної діаграми краще спочатку відкласти вектор прикладеної до кола напруги, бо вона є загальною для всіх елементів електричного кола

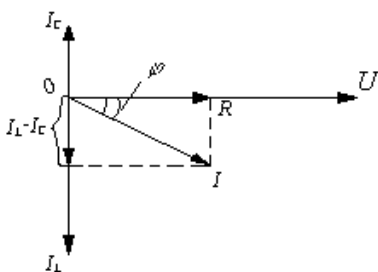


Рис. 3.9.2. Променева векторна діаграма струмів і напруг

(рис.3.9.2). Струм, який протікає через активний опір I_R співпадає по фазі з прикладеною до кола напругою \bar{U} . Тому вектор струму I_R відкладемо у напрямку вектора напруги \bar{U} . Струм індуктивності I_L відстає, а струм ємності I_C випереджає прикладену напругу на кут $\frac{\pi}{2}$. Тому вектор I_C відкладаємо вгору, а вектор I_L – вниз під кутом $\frac{\pi}{2}$ до прикладеної напруги.

Струм у нерозгалуженій ділянці кола \bar{I} визначається як векторна сума струмів \bar{I}_L , \bar{I}_C , \bar{I}_R згідно першого закону Кірхгофа.

При побудові топографічної векторної діаграми струмів і напруг, спочатку у довільному напрямку відкладемо вектор прикладеної до кола напруги \bar{U} . Обхід кола будемо проводити зліва на право. Тут першим включений активний опір R , тому вектор струму \bar{I}_R відкладемо з початку

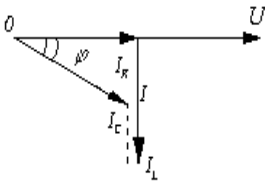


Рис. 3.9.3. Векторна діаграма струмів і напруг для кола з паралельним з'єднанням R, L, C - у випадку, коли $b_c > b_L$

вектора \bar{U} (рис.3.9.3) у тому ж напрямку. Потім у коло включимо індуктивність. Оскільки струм індуктивності \bar{I}_L відстає від напруги \bar{U} на кут $\frac{\pi}{2}$, то вектор струму \bar{I}_L повинен бути відкладеним вниз під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора напруги \bar{U} з кінця вектора \bar{I}_R .

Наприкінці у коло включають ємність.

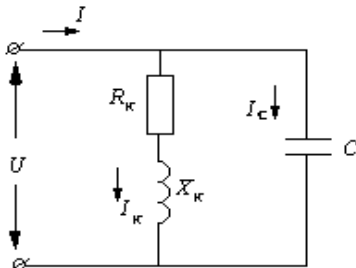


Рис 3.9.4. Схема електричного кола з паралельним включенням котушки індуктивності і конденсатора

Струм ємності \bar{I}_C випереджає напругу \bar{U} на кут $\frac{\pi}{2}$. Тому, з кінця вектора \bar{I}_L під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора \bar{U} відкладаємо вектор \bar{I}_C . З'єднавши початок вектора \bar{I}_R з кінцем вектора \bar{I}_C , отримаємо вектор струму у нерозгалуженій частині кола \bar{I} . Кут ϕ кола є кутом утвореним векторами \bar{I} та \bar{U} .

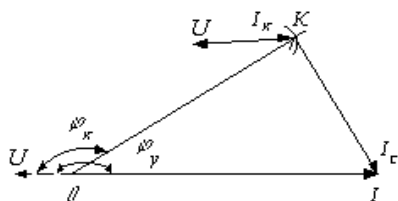


Рис. 3.9.5. Векторна діаграма струмів і напруг для випадку паралельного включення котушки індуктивності і конденсатора

У практичних випадках при паралельному включенні ємності і котушки індуктивності вектор струму у останньому не буде перпендикулярним до вектора напруги, бо котушка індуктивності володіє крім індуктивності, ще й активним опором. Отже, в цьому випадку побудова векторної діаграми, з метою визначення електричних параметрів кола, виконується методом засічок.

Розглянемо електричне коло (рис.3.9.4), яке складається з паралельно включеної котушки індуктивності і ємності. На схемі такого кола котушка індуктивності представлена у виді послідовно включених активного R і індуктивного X_L опорів.

Після виміру напруги U і векторів I , I_K , I_C відкладаємо у масштабі в довільному напрямку вектор струму \bar{I} (рис.3.9.5). Потім з початку вектора \bar{I} радіусом, рівним у вибраному масштабі струму котушки I_K , робимо засічку. З кінця вектора \bar{I} радіусом, рівним вибраному масштабу струму ємності I_C робимо другу засічку і отримуємо точку K . Останню з'єднуємо з початком і кінцем вектора \bar{I} .

Напрямок вектора \bar{I}_K виберемо, як це показано на рис. Тоді вектор струму \bar{I}_C повинен бути напрямлений з кінця вектора \bar{I}_K до кінця вектора \bar{I} . Це пояснюється тим, що за першим законом

Кірхгофа вектор струму $\bar{I}_C = \bar{I} - \bar{I}_K$.

Оскільки втрати в конденсаторі незначні, то вектор прикладеної напруги перпендикулярний до вектора \bar{I}_C і направлений в бік відставання.

Тепер перевіримо правильність вибраних напрямів. Перенесемо вектор \bar{U} в початок векторної діаграми в точку 0. Видно, що кут φ котушки, тобто кут зсуву по фазі між струмом котушки і напругою на ній, а також кут φ кола, тобто кут зсуву по фазі між струмом у нерозгалуженій частині кола і прикладеною до кола напругою, більший, ніж $\frac{\pi}{2}$, чого, звичайно не повинно бути.

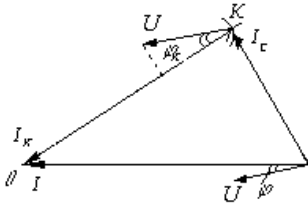


Рис. 3.9.6. Векторна діаграма струмів і напруг для випадку паралельного включення котушки індуктивності і конденсатора

Тобто, напрям векторів вибраний невірно.

Змінимо напрям векторів на протилежний (рис.3.9.6). Тепер кут φ котушки і кут φ кола менший, ніж $\frac{\pi}{2}$, що цілком узгоджується з теорією.

Тобто, у даному випадку коло має активно-індуктивний характер тому, що вектор прикладеної до кола напруги при обертанні векторів у додатному напрямку йде попереду вектора струму.

Визначення параметрів електричного кола проводять наступним чином:

1. Визначають повний опір кола

$$Z_k = \frac{U}{I}$$

2. Визначають ємнісний опір

$$X_C = \frac{U}{I_C}$$

3. Визначають величину ємності

$$C = \frac{1}{\omega X_C}$$

4. Знаходимо проекцію вектора напруги на струм котушки KC

5. Визначаємо активний опір котушки

$$R_K = \frac{KC}{I_K}$$

6. Знаходимо величину $ДС$.

7. Визначаємо індуктивний опір котушки

$$X_K = \frac{ДС}{I_K}$$

8. Визначаємо індуктивність котушки

$$L_K = \frac{X_K}{\omega}$$

9. Визначаємо повний опір котушки

$$Z_K = \frac{U_K}{I_K}$$

10. Виконуємо перевірку правильності розрахунків

$$Z_K = \sqrt{R_K^2 + X_K^2}$$

3.10. Трикутники напруг і опорів, струмів і провідностей. Зв'язок між опором і провідностями у колі змінного струму.

При послідовному з'єднанні елементів у колі змінного струму (рис.3.10.1) згідно другого закону Кірхгофа маємо, що

$$U = U_R + U_K. \quad (3.10.1)$$

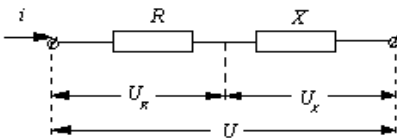


Рис. 3.10.1. Схема послідовного кола з активними і реактивними елементами

У загальному випадку для такого кола $\varphi \neq 0$. Для визначеності покладемо, що $\varphi < 0$. Тоді векторна діаграма струмів і напруг може бути представлена як на рис.3.10.2. Спроектуємо вектор прикладеної до кола

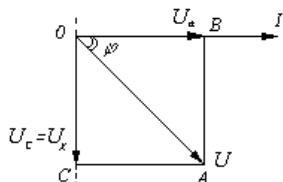


Рис. 3.10.2. Векторна діаграма струмів і напруг для послідовного кола, коли $\varphi < 0$

напруги на вектор струму і на вертикальну вісь, тобто розглянемо вектор \bar{U} на дві складові.

Проекція вектора \bar{U} на струм і співпадаюча по фазі зі струмом називається активною складовою прикладеної напруги.

Проекція вектора \bar{U} , перпендикулярна вектору

струму \bar{I} називається реактивною (у даному випадку ємнісною) складовою прикладеної напруги.

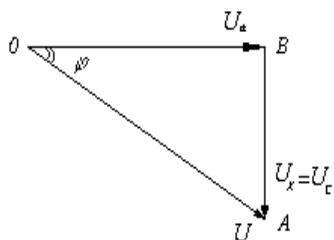


Рис. 3.10.3. Трикутник напруг

Перемалюємо векторну діаграму таким чином, як це виконано на рис.3.10.3

У результаті ми отримуємо, так званий, трикутник напруг.

З цього трикутника слідує, що

$$U_a = U \cdot \cos \varphi,$$

$$U_x = U \cdot \sin \varphi, \quad (3.10.2)$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_x^2},$$

При послідовному з'єднанні струм в усіх елементах кола однаковий. Тому, якщо сторони трикутника напруг розділені на одну

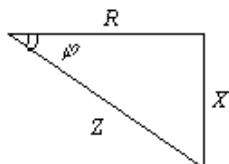


Рис. 3.10.4. Трикутник опорів

і ту ж величину – величину струму у колі, який є загальним для всіх елементів, то отримуємо трикутник подібний даному, однак сторонами цього трикутника будуть не величини напруг, а величини опорів (рис. 3.10.4).

З трикутника опорів

слідuje, що

$$R = Z \cdot \cos \varphi,$$

$$X = Z \cdot \sin \varphi, \quad (3.10.3)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Розглянемо далі паралельне коло, що володіє активною і реактивною провідністю (рис. 3.10.5).

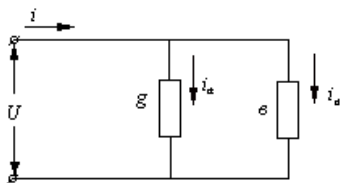


Рис. 3.10.5. Коло змінного струму з активною і реактивною провідністю

Для такого кола згідно першого закону Кірхгофа для кола змінного струму можна записати, що

$$i = i_a + i_e$$

У загальному випадку кут φ кола не дорівнює 0. Для визначення, як i в розглянутому раніше випадку прийемо, що $\varphi < 0$.

Завжди існує таке паралельне коло, для якого кут зсуву фаз φ як по знаку, так і по величині буде таким же, як і для деякого послідовного кола. Це означає, значення кута φ таких кіл еквівалентні. Це обумовлено тим, що величина кута φ визначається тільки параметрами кола.

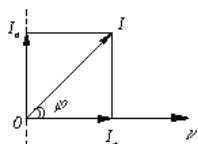


Рис. 3.10.6. Векторна діаграма струмів і напруг для кола з активною і реактивною (ємнісною) провідністю

Векторна діаграма для розглянутого кола представлена на рис. 3.10.6. Розкладемо вектор струму \bar{I} , як і у попередньому випадку, на дві складові \bar{I}_a і \bar{I}_e , спроектувавши \bar{I} на відповідні вісі.

Проекція струму \bar{I} на вектор напруги \bar{U} називається активною складовою струму \bar{I}_a . Проекція струму \bar{I} на перпендикулярні напрямки називається реактивною складовою струму \bar{I}_p (у даному випадку ємнісною складовою, бо вона випереджає напругу на кут $\frac{\pi}{2}$).

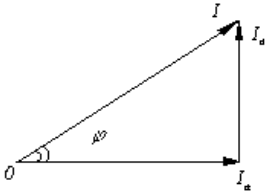


Рис. 3.10.7. Трикутник струмів

Розглянемо трикутник, утворений векторами \vec{I} , \vec{I}_a , \vec{I}_e (рис. 3.10.7).

Цей трикутник називається трикутником струмів. З трикутника струмів можемо записати наступний вираз:

$$\begin{aligned} I_a &= I \cos \varphi, \\ I_e &= I \cdot \sin \varphi, \\ I &= \sqrt{I_a^2 + I_e^2}, \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

Прикладена до затискачів кола напруга однакова для всіх елементів кола, тому

$$\begin{aligned} I_a &= U \cdot g \\ I_e &= U \cdot \sigma \\ I &= U \cdot y \end{aligned}$$

Відповідно, поділивши сторони трикутника струмів на одну і ту ж величину – величину прикладеної напруги, отримаємо трикутник, подібний даному, однак сторони його будуть не струми, а провідності відповідних гілок. Цей трикутник називається трикутником провідностей (рис. 3.10.8).

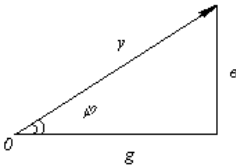


Рис. 3.10.8. Трикутник провідностей

З трикутника провідності слідує, що

$$\begin{aligned} g &= y \cos \varphi, \\ g &= y \sin \varphi, \\ y &= \sqrt{g^2 + \sigma^2}, \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

Якщо послідовне і паралельне кола еквівалентні в розумінні кута φ , то трикутники опорів і провідностей подібні, бо в них виявляються рівними два кути. З подібності трикутників слідує, що

$$\frac{X}{\sigma} = \frac{R}{g} = \frac{Z}{y}. \quad (3.10.6)$$

Звідси

$$R = g \cdot \frac{Z}{y}, \quad (3.10.7)$$

$$X = \epsilon \cdot \frac{Z}{y}, \quad (3.10.8)$$

або

$$g = R \cdot \frac{y}{Z}$$

$$\epsilon = X \cdot \frac{y}{Z}$$

Для кола змінного струму, як це слідує з трикутників опорів і провідностей, опори і провідності є величинами векторними, у то же час Z і Y – величини скалярні.

В електротехніці та радіоелектроніці тільки дві величини взаємооберені, тобто

$$\frac{1}{Z} = Y \text{ і } Z = \frac{1}{Y}. \quad (3.10.9)$$

Враховуючи це, можна записати наступне рівняння

$$R = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + \epsilon^2}, \quad (3.10.10)$$

$$g = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad (3.10.11)$$

$$X = \frac{\epsilon}{g^2 + \epsilon^2}, \quad (3.10.12)$$

$$\epsilon = \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (3.10.13)$$

На основі взаємозв'язку між Y і Z розроблений аналітичний метод розрахунку кіл змінного струму, відомий в електрорадіотехніці під назвою методу провідностей.

3.11. Метод провідностей

Основним недоліком методу є громіздкість і велика кількість обчислень. Розглянемо наступне електричне коло змінного струму (рис.3.11.1).

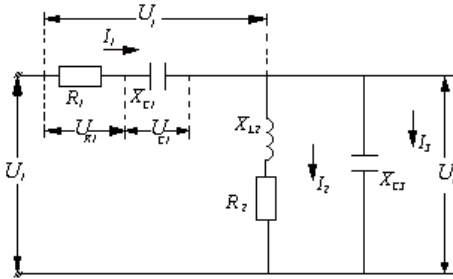


Рис. 3.11.1. Схема розгалуженого електричного кола змінного струму

Припустимо, що нам відома прикладена до кола напруга і всі опори. Необхідно визначити струми в колі і спад напруги на окремих ділянках. Використовуючи формули переходу від g до R і від Z до Y та навпаки, зробимо наступним чином.

1. Визначимо

активні провідності паралельної ділянки кола

$$g = \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} \text{ і } g_3 = 0. \quad (3.11.1)$$

Сумуючи активні провідності паралельної ділянки

$$g_n = g_2 + g_3 = g_2. \quad (3.11.2)$$

2. Визначимо реактивні провідності паралельної ділянки

$$b_2 = \frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2}, \quad (3.11.3)$$

$$b_3 = \frac{X_{C3}}{R_3^2 + X_{C3}^2} = \frac{1}{X_{C3}}, \text{ так як } R_3 = 0. \quad (3.11.4)$$

Сумарна реактивна провідність паралельної ділянки

$$b_n = b_2 - b_3. \quad (3.11.5)$$

Це пояснюється тим, що реактивні провідності додаються алгебраїчно.

3. Визначаємо повну провідність паралельної ділянки

$$Y = \sqrt{g_n^2 + b_n^2}. \quad (3.11.6)$$

4. Знайдемо еквівалентні активні і реактивні опори паралельної ділянки

$$R_n = \frac{g_n}{y_n^2}, \quad (3.11.7)$$

$$X_n = \frac{b_n}{Y_n^2}. \quad (3.11.8)$$

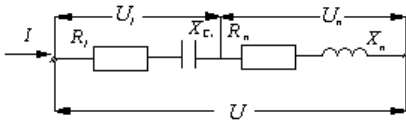


Рис. 3.11.2. Схема складного електричного кола після перетворень

Обумовимо, що X_n - індуктивний опір. При розрахунках знак перед X_n вказує на характер опору.

Після проведених перетворень досліджуване коло може

бути представлене, як це зроблено на рис. 3.11.2.

5. Визначаємо повний опір кола

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_n)^2 + (X_n + X_{C_1})^2}. \quad (3.11.9)$$

6. Визначаємо струм у нерозгалуженій ділянці кола

$$I = I_1 = \frac{U}{Z}. \quad (3.11.10)$$

7. Визначаємо спад напруги на послідовній ділянці

$$U_1 = I_1 Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{C_1}^2}. \quad (3.11.11)$$

8. Визначаємо спад напруги на паралельній ділянці

$$U_n = I \cdot Z_n = I \cdot \sqrt{R_n^2 + X_n^2}. \quad (3.11.12)$$

9. Визначаємо струми в паралельних гілках струмів і напруг

$$I_2 = \frac{U_n}{Z_2} = \frac{U_n}{\sqrt{R_2^2 + X_{L_2}^2}}. \quad (3.11.13)$$

$$I_3 = \frac{U_n}{Z_3} = \frac{U_n}{X_{C_2}^2}. \quad (3.11.14)$$

Для побудови векторної діаграми струмів і напруг необхідно визначити відповідні кути зсуву по фазі. Струм I_3 зсунутий по фазі відносно напруги на кут $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$, тобто цей струм, як і струм ємності, випереджає прикладену напругу.

Струм I_2 зсунутий по фазі в бік відставання від напруги на кут

$$\varphi_2 = \arccos \frac{R_2}{Z_2} = \arccos \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2}}. \quad (3.11.15)$$

Це впливає з трикутника опорів для першої паралельної гілки. Струм I , зсунутий відносно прикладеної до кола напруги на кут

$$\varphi = \arccos \frac{R_1 + R_n}{\sqrt{(R_2 + X_n)^2 + (X_n + X_{C1})^2}}. \quad (3.11.16)$$

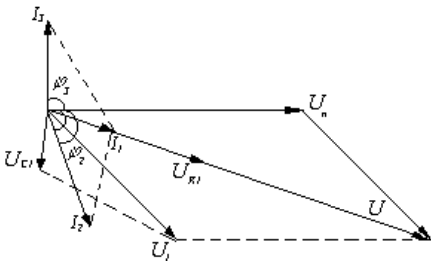


Рис. 3.11.3. Векторна діаграма струмів і напруг для розгалуженого електричного кола

Побудову векторної діаграми для розгалуженого кола змінного струму слід розпочинати з вектора спаду напруги на паралельній ділянці \bar{U}_n , відклавши його у довільному напрямку, наприклад, горизонтально (рис. 3.11.3).

Струм I_3 , як струм ємності, випереджає цю напругу на кут $\frac{\pi}{2}$, тому вектор струму \bar{I}_3 на рисунку відкладений вгору під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора \bar{U}_n .

Під кутом φ_2 до вектора \bar{U}_n відкладемо, в бік відставання, вектор струму \bar{I}_2 , так як перша гілка паралельної ділянки є активно-індуктивним опором.

Вектор струму \vec{I} , визначається як геометрична сума векторів \vec{I}_2 і \vec{I}_3 за правилом паралелограма. Спад напруги \vec{U}_R , співпадає по фазі зі струмом \vec{I}_1 , а спад напруги \vec{U}_{C_1} відстає від струму \vec{I} , на кут $\frac{\pi}{2}$. Загальний спад напруги \vec{U}_1 на послідовній ділянці є векторна сума векторів \vec{U}_{R_1} і \vec{U}_{C_1} .

Прикладена до затискачів кола напруга \vec{U} є векторною сумою \vec{U}_n і \vec{U}_1 , яка визначається за правилом паралелограма.

3.12. Потужність у колі змінного струму

При аналізі кіл постійного струму ми встановили, що електрична потужність:

$$P = UI. \quad (3.12.1)$$

При цьому електричне і магнітне поле не змінне в часі і має місце лише процес перетворення електричної енергії в теплову, хімічну чи світлову енергію.

Інша справа, коли маємо коло змінного струму. Через те, що U та i періодично змінюються в часі, тому електричне та магнітне поле не залишається постійними.

За рахунок цього може мати місце процес обміну енергіями між полями та джерелом. Правда, існує і перетворення енергії в інші види.

Отже, має місце два процеси:

один з них пов'язаний з поглинанням енергії;

другий – з обміном енергії між колом і джерелом.

Тому загальна потужність в колі змінного струму визначається двома різними поняттями і величинами: активною потужністю – для випадку поглинання енергії і реактивною потужністю – для випадку обміну енергією.

Активна потужність

Розглянемо поняття активної потужності, що пов'язане з процесом перетворення енергії в інші види на прикладі кола змінного струму з чисто активним опором.

Миттєве значення потужності в колі може бути представлено як:

$$P = iU = U_a i. \quad (3.12.2)$$

У колі з активним опором напруга співпадає по фазі із струмом, таким чином

$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$I P = U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t = \sqrt{2}U \sqrt{2}I \sin^2 \omega t = 2IU \sin^2 \omega t. \quad (3.12.3)$$

Тобто, активна потужність у колі з активним опором змінюється по закону квадрата синуса і має максимальне значення $2UI$, залишаючись весь час додатною. Додатний знак вказує на те, що весь час відбувається односторонній процес поглинання енергії.

Запишемо значення активної потужності в іншому вигляді:

$$P = 2UI \sin^2 \omega t = 2UI \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = UI - UI \cos 2\omega t. \quad (3.12.4)$$

Таким чином, значення активної потужності коливається з подвійною частотою біля деякого середнього значення UI . Практично оцінюють потужність, що поглинається в колі, по середньому її значенню за період

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T 2UI \sin^2 \omega t dt. \quad (3.12.5)$$

Графічно це можна представити, як

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T 2UI \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = UI. \quad (3.12.6)$$

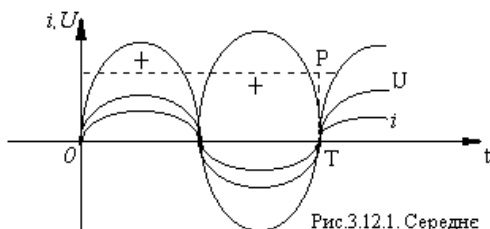


Рис.3.12.1. Середнє значення потужності за період

Отже, середнє значення потужності за період у колі змінного струму з активним опором чисельно дорівнює потужності в колі постійного струму. Активна потужність у колі

змінного струму вимірюється в тих же одиницях, що і потужність у колі постійного струму (Вт).

Реактивна потужність

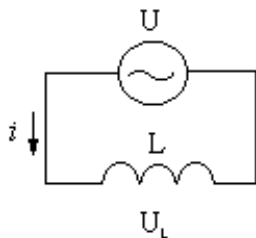


Рис.3.12.2. Коло змінного струму з L.

Для вияснення реактивної потужності розглянемо коло змінного струму з котушкою індуктивності без активного опору. Так як струм у колі змінний $i = I_m \sin \omega t$, то в котушці відбувається змінний процес зміни величини енергії магнітного поля в котушці. У момент зростання поля енергія споживається від джерела, в момент зменшення – віддається

назад. Кількісно це виражається так $P = IU$, але на відміну від кола з активним опором напруга випереджує струм на $\frac{\pi}{2}$. Тобто

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$P = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) I_m \sin \omega t = 2IU \cos \omega t \sin \omega t = IU \sin 2\omega t. \quad (3.12.7)$$

Із формули видно, що миттєве значення потужності в колі змінюється по закону синуса, але з подвійною частотою ($2\omega t$). Оцінювати значення цієї потужності за період не можна, бо

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0. \quad (3.12.8)$$

Це показує, що в даному колі не існує необоротного процесу

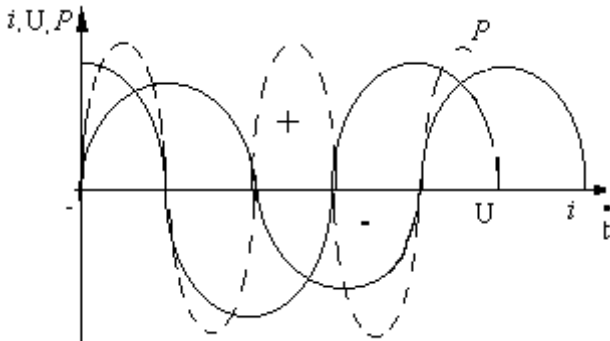


Рис. 3.12.3. Хвильова діаграма L, U, P при $R=0$

обміну енергій. Потужність $P = IU \sin 2\omega t$ можна оцінювати по її максимальному значенню, яке називається реактивною потужністю і позначається Q . Тоді $Q = UI = IX_L I = I^2 \omega L n p r i \sin 2\omega t = 1$. Реактивна потужність вимірюється у вольт-амперах (вар).

Розглянемо графічно цей процес. У додатній півперіод потужності коло одержує енергію від генератора, яка йде на зростання магнітного поля котушки, у від'ємний півперіод потужності під дією ЕРС самоіндукції котушки енергія повертається з кола до джерела. Аналогічний процес можна одержати і з колам, що містять ємність.

Якщо коло містить всі три параметри R, L і C то тут відбувається одночасно як процес обміну, так і процес перетворення енергії. Ці процеси, накладаючись між собою, дають єдиний складний процес.

Розглянемо тепер кількісну сторону питання

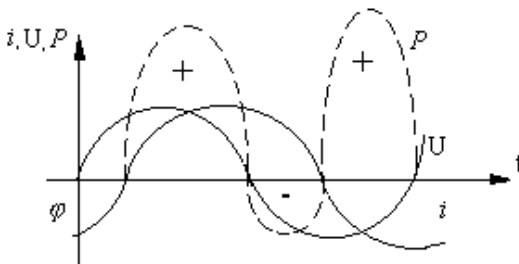


Рис. 3.12.4. Хвильова діаграма i, U, P при $R \neq 0$

$$P = Ui$$

де

$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

тоді

$$P = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t + \varphi) = 2IU \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= 2UI [\sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)] =$$

$$= 2UI (\sin^2 \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t) =$$

$$= 2UI \cos \varphi \sin^2 \omega t + UI \sin \varphi \sin 2\omega t = P_a + P_p. \quad (3.12.9)$$

Отже, загальна потужність у колі містить дві складові – активну (змінюється по закону $\sin^2 \omega t$) і реактивну ($\sin 2\omega t$).

Визначимо середнє значення потужності в даному колі:

$$P = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T (2UI \sin^2 \omega t \cos \varphi - IU \sin 2\omega t \sin \varphi) dt =$$

$$= UI \cos \varphi \quad (3.12.10)$$

Це ніщо інше як активна потужність за період, бо реактивна складова, як видно, за період дорівнює нулю. Коефіцієнт $\cos \varphi$ у формулі $P_{cp} = IU \cos \varphi$ називається *коефіцієнтом потужності*.

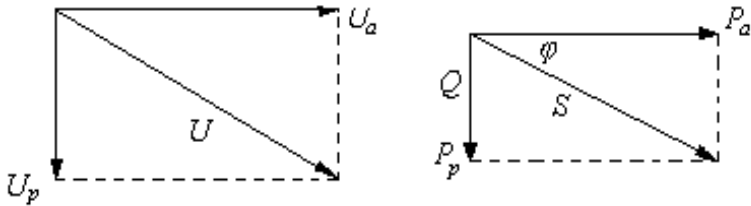


Рис. 3.12.5. Трикутник U та P

Добуток $S = p = IU$, що має розмірність потужності, називається *уявна* або *повна потужність*. Якщо побудувати трикутник напруг і помножити кожен бік трикутника на I , то одержимо трикутник потужностей

$$\begin{aligned}
 S &= UI, \\
 P_a &= UI \cos \varphi, \\
 Q &= IU \sin \varphi, \\
 S &= \sqrt{P_a^2 + Q^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.12.11}$$

Повна потужність вимірюється у вольт амперах (VA). Повна або уявна потужність показує, яку потужність могла б дати система при $\cos \varphi = 1$. Від величини $\cos \varphi$ залежить коефіцієнт корисної дії

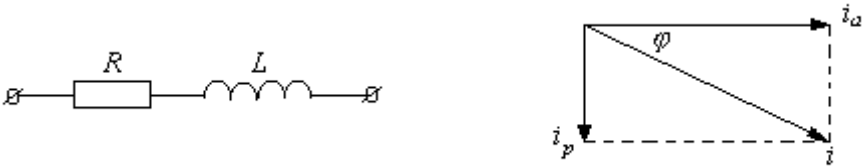


Рис. 3.12.6. Коло з R та L , векторна діаграма I

установки, так як повна потужність тоді повністю не використовується при $\cos \varphi < 1$.

Чим менший $\cos \varphi$, тим більший струм споживає споживач так як:

$$\begin{aligned}
 P &= IU \cos \varphi, \\
 I &= \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{I_a}{\cos \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.12.12}$$

Якщо коло складено із R та L , то загальний струм можна представити, як складові активну і реактивну $i = i_a + i_p$. Для компенсування реактивної складової струму на індуктивності можна

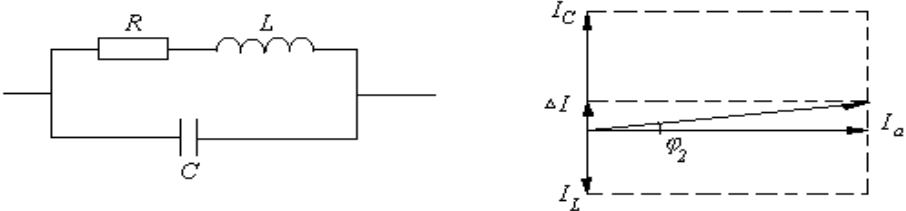


Рис.3.12.7. Коло з (R, L) та C . Векторна діаграма

паралельно до RL приєднати ємність C . Струм i_c випереджує по фазі U на $\frac{\pi}{2}$, тому векторна діаграма матиме вид:

тобто $\cos\varphi_1 < \cos\varphi_2$.

Міняючи величину C можна досягти, що $\cos\varphi = 1$.

Можна також збільшити величину $\cos\varphi$ за рахунок зростання активної складової струму.

3.13. Резонансні явища в електричних колах змінного струму. Вільні (власні) електричні коливання

Як коливання в механічних системах пов'язані з переходом кінетичної енергії в потенціальну і навпаки (фізичний чи математичний маятник), так і в електричних коливальних системах має місце взаємний перехід двох видів енергії: енергії магнітного поля, пов'язаної із наявністю струму у провіднику (кінетична) і енергії електричного поля, пов'язаної з нагромадженням зарядів (потенціальна енергія) на обкладках конденсатора.

Умовою появи вільних електричних коливань є наявність в електричному колі L та C . Прикладом такого кола може бути замкнутий коливний контур, що складається з L та C .

Таким чином, основні параметри замкнутого контуру, L та C – зосереджені в відокремлених одна від одної деталях C та L .

Розглянемо процес вільних електричних коливань в замкнутому контурі. Зарядимо C від батареї і приєднаємо його до котушки індуктивності. При цьому конденсатор почне розряджатися на котушку, таким чином у колі виникне і почне наростати розрядний струм. Якщо б не було індуктивності, то розрядний струм відразу досяг би максимуму і розряд відбувся б практично миттєво. Але в Коливному контурі процес відбувається інакше. Протікаючи по L , наростаючий струм створює відповідно зростаюче магнітне поле. Але відомо, що всяка зміна магнітного поля повинна індукувати в L , ЕРС. За правилом Ленца напрям її такий, що утворений нею струм протидіє причині, яка викликає зміну (збільшення) магнітного поля. Отже, індукована ЕРС створює струм, що йде на зустріч зростаючому розрядному струму конденсатора. Це

призводить до сповільнення зростання струму: чим менше збільшується струм, тим менша і протидіюча йому ЕРС індукції.

Схематично процес розряду можна зобразити на рисунках:

а) на обкладках C є значні електричні заряди;

б) з початком розряду в колі з'являється невеликий струм.

Заряди зменшуються і в котушці з'являється магнітне поле.

Струм поступово зростає, а разом з ним зростає і магнітне поле котушки. При цьому заряд на пластинках C зменшиться і в кінці спадає до нуля. При відсутності L струм при стіканні зарядів повинен був би відразу впасти до „0”, а разом з ним зникло б і магнітне поле.

Однак при зникненні магнітного поля в котушці буде індукуватись ЕРС, яка за правилом Ленца повинна на цей раз створити струм того ж напрямку, що і протікаючий до цього моменту, протидіючи тим зменшенню поля. Отже, після розряду C струм у колі не зникне миттєво і магнітне поле не зникне. І струм і магнітне поле будуть зменшуватись поступово. При цьому струм буде заряджувати конденсатор і зростаюча напруга на ньому буде протидіяти ЕРС, приводячи до зменшення струму.

Коли струм зменшиться до нуля, на пластинках конденсатора буде нагромаджуватися певний електричний заряд. У наступний момент часу цей заряд почне стікати через котушку L і розглянутий процес поновиться в попередній послідовності, але напрям розрядного струму буде протилежний.

Таким чином, електричний заряд в коливному контурі буде здійснювати коливання через L від однієї пластини C до другої аналогічно коливанням маятника.

Подібно до того, як коливання маятника затухають у результаті механічних втрат, у коливному контурі наявність активного опору приводить до зменшення енергії в контурі. Таким чином в процесі електричних коливань частина енергії перетворюється в тепло і тому вільні електричні коливання в котушці будуть затухаючими. Розглянемо тепер вільні коливання в замкнутому контурі з кількісної сторони і знайдемо математичні вирази законів, що керують коливним розрядом конденсатора.

Застосуємо до контуру другий закон Кірхгофа

$$U + \left(-L \frac{di}{dt} \right) = iR, \quad (3.13.1)$$

де U – напруга на конденсаторі, $-L \frac{di}{dt}$ – ЕРС самоіндукції.

Так як $g = CU$ то струм в контурі

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt},$$

(знак “-” - бо зменшення заряду на обкладках C)

$$\text{Звідки } dU = -\frac{1}{C} idt; U = -\frac{1}{C} \int idt.$$

Підставивши значення U у рівняння (3.13.1) і переносячи всі члени в праву частину, маємо:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int Idt = 0.$$

Про диференціювавши цей вираз по часі t поділивши почленно на L , маємо:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} i + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Позначимо для скорочень: $\frac{R}{L} = 2\delta; \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ тоді

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} i + \omega_0^2 i = 0. \quad (3.13.2)$$

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння напруги конденсатора і рівняння для заряду мають аналогічний вигляд. Для того щоб переконатись досить підставити

$i = -\frac{dq}{dt}$ і $i = -C \frac{dU}{dt}$. Дане рівняння розв’язується підстановкою

$$i = Ae^{mt} \left. \begin{matrix} m \\ A \end{matrix} \right\} \text{const підставляючи маємо } Ae^{mt} (m^2 + 2\delta m + \omega_0^2) = 0.$$

Одержали характеристичне рівняння, розв’язавши яке маємо:

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm x \text{ де } x = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}.$$

Таким чином, інтеграл рівняння (3.13.1) має вигляд:

$$i = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}, \quad (3.13.3)$$

де $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{довільні} \\ \text{const} \end{array} \right.$, що визначаються з початкових умов.

Запишемо початкові умови, тобто, умови, що відповідають моменту $t=0$, (наприклад, момент включення перемикача). Струм при $t=0$, очевидно, дорівнює нулю

$$i_{t=0} = 0. \quad (3.13.4)$$

У момент замикання напруга на конденсаторі U зрівноважується тільки ЕРС самоіндукції, тобто $U - L \frac{di}{dt} = 0 \Big|_{t=0}$ звідси

$$\frac{di}{dt} = \frac{U}{L} \Big|_{t=0}. \quad (3.13.5)$$

Наклавши умову (3.13.4) на рівняння (3.13.3) маємо:

$$0 = A + B, \text{ а умова (3.13.5)}$$

$$\begin{aligned} A &= -B \frac{U}{L} = m_1 A + m_2 B = (-\delta + x)A + (-\delta - x)B = \\ &= -(-\delta + x)B + (-\delta - x)B = +\delta B - xB - \delta B - xB = -2xB \end{aligned},$$

$$\text{то } B = -\frac{U}{L2x} \quad A = \frac{U}{L2x};$$

$$\text{Отже, рівняння (3) можна записати, як: } i = \frac{U}{2Lx} (e^{m_1 t} - e^{m_2 t})$$

враховуючи, що $\begin{matrix} m_1 = -\delta + x \\ m_2 = -\delta - x \end{matrix}$ маємо

$$i = \frac{U}{2Lx} e^{-\delta t} (e^{xt} - e^{-xt}). \quad (3.13.6)$$

Одержаний результат необхідно дослідити для деяких характерних випадків. Як видно з розв'язку характеристичного рівняння, можливі три випадки: $\delta > \omega_0$; $\delta = \omega_0$; $\delta < \omega_0$

Найбільшу цікавість становить випадок $\delta > \omega_0$. При цьому корені характеристичного рівняння комплексні і спряжені.

Позначивши $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega$ маємо $x=j\omega$. Підставивши це значення в загальний розв'язок (3.13.6), маємо:

$$i = \frac{U}{2i\omega L} e^{-\delta t} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{U}{\omega L} e^{-\delta t} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Використавши співвідношення Ейлера, маємо $i = \frac{U}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$; Розряд конденсатора, що описується цим

рівнянням називається затухаючим коливанням. Величина ω називається кутовою частотою, δ - коефіцієнт затухання коливань.

Як видно, розрядний струм, заряд, напруга, які описуються даним рівнянням являються періодичною функцією часу, тобто має колильний характер.

Однак, амплітуда коливань $\frac{U}{\omega L} e^{-\delta t}$ зменшується з часом, у зв'язку з чим ці коливання будуть затухаючими.

$\beta = \frac{R}{2L}$ (коефіцієнт затухання) тим більший, чим більший активний опір має контур. Звичайно, що контур буде тим кращий, чим повільніше в ньому коливання затухають. За час $\tau = \frac{1}{\beta}$ амплітуда коливань зменшиться в $e=2,718$ раз.

Якщо $\delta > \omega_0$, тобто $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$, то розряд конденсатора буде аперіодичним, таким чином при такому розряді електричні коливання в контурі виникати не будуть

$\left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0; R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$. Це значить, що опір контуру

настільки великий, що вся енергія, зосереджена спочатку в конденсаторі, за короткий час витрачаються на нагрівання провідників. У цьому випадку C тільки буде розряджуватись (перезарядки не буде) і струм розряду, досягнути максимуму поступово зменшується до нуля. Значення ємності при якій

відбувається аперіодичний розряд можна визначити з умови

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0.$$

Аперіодичний розряд конденсатора не представляє для практики значного інтересу.

Власна частота

Розглянемо кутову частоту коливань контуру:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3.13.7)$$

Оскільки $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, де f – частота, то період коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (3.13.8)$$

У контурах, які застосовуються в радіотехніці, активний опір незначний, $\frac{1}{LC} \gg \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ і тому другим членом можна нехтувати.

Тоді

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.13.9)$$

Це і є відома формула Томсона.

Логарифмічний декремент затухання, хвильовий опір, добротність

Крім коефіцієнта затухання $\beta = \frac{R}{2L}$ для характеристики затухання коливань у коливному контурі, вводять так званий логарифмічний декремент затухання.

Логарифмічний декремент затухання являє собою натуральний логарифм відношення двох амплітуд коливань заряду, напруги або сили струму, розділених проміжком часу рівним одному періоду.

Позначимо амплітудне значення струму, взяті через проміжок часу один період T , відповідно i_1, i_2 . Логарифмічний декремент затухання:

$$\delta = \ln \frac{i_1}{i_2} = \ln \frac{\frac{U}{\omega L} e^{-\beta t} \sin \omega t}{\frac{U}{\omega L} e^{-\beta(t+T)} \sin \omega(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (3.13.10)$$

Таким чином, логарифмічний декремент затухання: $\delta = \beta T$, де β - коефіцієнт затухання; T - період власних коливань коливного контуру. Підставивши значення β і T в (3.13.10) одержимо:

$$\delta = \beta T = \frac{R}{2L} 2\pi \sqrt{LC} = \frac{\pi R}{L} \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{\rho},$$

де $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ має розмірність опору і називається хвильовим опором контуру. Він є важливою характеристикою.

Дійсно, якщо активний опір контуру малий, можна записати закон збереження і перетворення енергії: $\frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}$; звідки

$$U = I \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \rho = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ - хвильовий опір.}$$

Величина в π раз менша від логарифмічного декремента затухання називається затуханням і позначається буквою d

$$d = \frac{\delta}{\pi} = \frac{\beta T}{\pi} = \frac{\pi R}{\pi \rho} = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_0 \pi} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (3.13.11)$$

$\delta < 0,01$ - добрий контур,

$0,01 < \delta < 0,05$ - середній контур,

$\delta > 0,05$ - поганий контур.

У радіотехніці якість контуру оцінюється величиною оберненою до затухання $Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_0 L}{R}$, яка називається добротністю

контур. Вона є одним з основних параметрів, які характеризують якість коливного контуру.

Загальне визначення Q , яке використовується для всіх резонаторів, можна подати у вигляді: $Q = \omega_0$.

Нагромаджена енергія. Середня затрачена потужність

Для звичайного коливного контуру ці значення. Нагромаджена енергія рівна $\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU^2 = LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$, так як середнє значення потенціальної енергії дорівнює середньому значенню кінетичної енергії.

$$\text{Затрачена потужність } P = RI^2 = \frac{1}{2}RI_0^2$$

$$Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{2}LI_0^2}{\frac{1}{2}RI_0^2} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (3.13.12)$$

Контур тим кращий, чим менший його активний опір при даних L і ω . Контур добротний, якщо Q порядку декілька сот (200÷300).

3.14. Метод комплексних амплітуд. Комплексне представлення змінних величин.

Сила струму в колі, що складається з декількох послідовно з'єднаних споживачів має одне і те ж значення, тому його можна прийняти як вихідну величину. Запишемо i в комплексній формі $I = I_0 e^{i\omega t}$, так як комплексне число може бути представлене точкою або радіусом – вектором на комплексній площині $z = a + bi$ але $a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$ та використавши підстановку Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

маємо
$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Маючи $i = i_0 e^{i\omega t}$ бачимо, що струм в комплексній формі зображається радіус-вектором, що обертається з кутовою швидкістю ω .

Нехай струм змінюється по закону $I = I_0 \sin \omega t$ чи $I = I_0 \cos \omega t$, а напруга в загальному виді $U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Розглянемо випадки:

а) чисто активний опір кола, то I та U знаходяться в одній фазі, тому можна записати $V = IR = I_0 R$ тобто $R = Z$ являється дійсною величиною;

б) для кола з індуктивністю:

$$U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} I_0 e^{i\omega t} = i\omega L i_0 e^{i\omega t} = i\omega L I \quad \text{тобто} \quad Z = i\omega L;$$

в) для кола з ємністю:

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int i_0 e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega C} i_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{j\omega C} I, \quad \text{таким} \quad \text{чином}$$

$$Z = \frac{F}{i\omega C}.$$

У загальному випадку $Z = R + iX = Ze^{i\varphi}$,

де R – активний опір, X – реактивний опір.

3.15. Вимушені коливання

Для отримання в реальному коливному контурі незатухаючих коливань необхідно безперервно поповнювати витрати енергії в контурі для чого в схему включають джерело електричної енергії. Незатухаючі коливання вже не можна назвати вільні, більш правильно назвати їх вимушеними коливаннями.

Вимушені коливання відбуваються не самостійно, а під дією зовнішньої періодичної сили. Приклад, вимушені коливання в антени відбуваються під дією випромінюваних радіохвиль.

Властивості вимушених коливань:

- 1) вони незатухаючі;
- 2) мають будь-яку форму в залежності від характеру ЕРС;

3) частота їх зовсім не залежить від L і C контуру, а визначається частотою підключеної ЕРС

4) амплітуда їх залежить не тільки від величини прикладеної ЕРС, але і від співвідношення між частотою цієї ЕРС та частотою контура, як джерело, що поповнює витрати в коливному контурі будемо брати змінну ЕРС. Джерело змінної ЕРС може підключатись до коливного контура двома способами:

I) джерело ЕРС включається послідовно в коло самого контуру;

II) паралельно, тобто джерело підключається ззовні до контуру.

Вимушені коливання в послідовному контурі (резонанс напруг)

Нехай маємо контур, який складається з L , C , R і нехай у цей контур включена послідовно ЕРС. Тоді за II законом Кірхгофа можна записати:

$$e = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Якщо припустити, що ЕРС змінюється за синусоїдальним законом і якщо обмежитись стаціонарним режимом, то написане рівняння можна переписати так:

$$\vec{E} = \vec{IR} + L \frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{1}{C} \int \vec{I} dt \quad (3.15.1)$$

Зображаючи вектор струму в комплексній формі,

$$\vec{I} = I e^{i\omega t}$$

беремо до уваги, що

$\frac{d\vec{I}}{dt} = j\omega\vec{I}$ та $\int \vec{I} dt = \frac{\vec{I}}{j\omega}$. Підставивши ці значення в формулу

(3.15.1) отримаємо:

$$\vec{E} = \vec{IR} + \vec{I}j\omega L - \vec{I}j \frac{1}{\omega C} = \vec{I} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.15.2)$$

Частка від ділення \vec{E} на \vec{I} дає величину комплексного опору Z

$$Z = \frac{\vec{E}}{\vec{I}} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX. \quad (3.15.3)$$

Звідси модуль опору (повний опір): $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, а фазовий кут (між ЕРС та струмом): $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

При деякій частоті уявна частина комплексного опору перетворюється в нуль, іншими словами, опір контуру визначається лише дійсною частиною – активним опором. Це частота називається резонансною частотою і визначається з умови $X=0$. Умова резонансу $X=0$ може бути досягнута двома шляхами:

- 1) зміною частоти генератора, що живить контур;
- 2) зміною параметрів контуру.

Розглянемо перший випадок.

З рівняння (3.15.2) можна записати закон Ома:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (3.15.4)$$

Будемо змінювати частоту генератора ω .

Із збільшенням частоти ємнісний опір падає, а індуктивний – зростає. Отже, їх різниця наближається до нуля і сила струму зростає. Свого максимального значення сила струму досягає при рівності ємнісного та індуктивного опорів. Цей випадок називається послідовним резонансом. Частота при якій струм досягає свого максимального значення називається резонансною частотою.

Явище резонансу має місце тоді, коли частота генератора ω дорівнює резонансній частоті ω_0 контуру. В точці резонансу напруги на ємності і індуктивності протилежні за напрямом і рівні по амплітуді. З умови $X=0$, маємо: $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$, а тому ЕРС джерела

перемагає лише активний опір і форма закону Ома має той самий вид, що і для кола постійного струму:

$$I_{рез} = \frac{E}{R}. \quad (3.15.5)$$

Напруга генератора $U=IR$, напруга на індуктивності $U_L = I\omega L$. Оскільки U_L і U_C майже точно слідують за зміною

струму, то в момент резонансу: $\frac{U_L}{U} = \frac{IX_L}{IR} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} = Q$ або

$U_L = QU$, таким чином, в момент резонансу напруга на котушці і ємності в Q раз більша від напруги генератора.

При включенні в контур ЕРС амплітуда коливань зростає доти, доки енергія генератора не стане рівною втратам енергії на активному опорі. Після чого в котушці будуть відбуватися досить потужні коливання з великим значенням сили струму і напруги на U_L та U_C .

При подальшому зростанні коливання являє собою обмін енергією між C та L , а джерело тільки поповнює втрати, що мають місце при цьому, забезпечуючи постійність загальної кількості енергії в коливному процесі.

При подальшому зростанні частоти індуктивний опір починає переважати над ємнісним і сила струму знову зменшується. Крива, яка виражає залежність сили струму від частоти називається резонансною кривою.

При даній ЕРС крива резонансу буде тим гострішою, чим менший опір R , тобто чим більша добротність контуру.

Знайдемо взаємозв'язок кривої резонансу з добротністю контуру Q . Для цього знайдемо відношення $\frac{I}{I_{рез}}$

$$\frac{I}{I_{рез}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} : \frac{E}{R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (3.15.6)$$

Зробимо деякі перетворення резонансного опору:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_0} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right);$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega}. \quad (3.15.7)$$

Позначимо $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ і назовемо розстройкою, яка характеризує величину відходу частоти генератора від резонансної

частоти контура. Вважаючи, щоб біля резонансу сума $\omega + \omega_0 \cong 2\omega$, можемо записати

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \cong \omega_0 L \frac{2\omega\Delta\omega}{\omega_0\omega} = \omega_0 L \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \omega_0 L \frac{2\Delta f}{f_0}. \quad (3.15.8)$$

Підставляючи це значення в формулу (3.15.3) і поділивши одночасно чисельник і знаменник на R , отримаємо:

$$\frac{I}{I_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q \frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2}}. \quad (3.15.9)$$

Чим більше відношення $\frac{Q}{f_0}$, тим в більше число раз падає величина струму при даній розстройці.

Отже, вибірність (селективність) контуру прямопропорційна відношенню $\frac{Q}{f_0}$. Сімейство резонансних кривих, що відповідають рівнянню (3.15.9) подано на рис. Про селективність коливного контуру зручно судити по ширині резонансної кривої ΔF на певній висоті.

Смуга пропускання контуру – смуга частот по обидві сторони від резонансної частоти в межах якої резонансна крива має

$$\frac{I}{I_{рез}} \geq 0,707 \left(\text{або} \frac{U}{U_{рез}} \right), \quad \Delta F = \frac{f_0}{Q} = f_0 d. \quad (3.15.10)$$

Необхідно щоб контур мав смугу пропускання відповідно до тієї смуги частот, яка характерна для даного виду радіопередачі (радіомовні 9 кГц, радіотелефонний $2 \div 2,5$ кГц, радіотелеграф на багато менше, телебачення порядку 6,5 МГц).

Якщо смуга пропускання буде вузька – спотворення за рахунок поганого пропускання деяких коливань; якщо широка – будуть перешкоди від сусідніх станцій.

Величину ΔF називають шириною смуги пропускання контуру, вважаючи умовно, що частоти, які виходять за межі цієї смуги “не пропускаються”.

Таким чином, чим менша ширина резонансної кривої на рівні 0,707, тим вища селективність контуру. Для підвищення селективності треба застосовувати контури з великим Q , бо $\frac{I}{I_{рез}} = 0,707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а тому $Q \frac{2\Delta f}{f_0} - 1 \frac{2\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$; $Q = \frac{f_0}{2\Delta f}$. Як видно, селективність визначається і резонансною частотою. При високих частотах селективність незначна. Наприклад, для $Q=100$:

f_0 , кГц	100	1000	10000	10^5
ΔF , кГц	1,73	17,3	173	1730

в) Розглянемо другий випадок.

Резонанс в контурі можна досягти налагодивши частоту контуру в резонанс з джерелом ЕРС. Це здійснюється або зміною ємності конденсатора C або зміною індуктивності L , при чому зміна цих параметрів повинна задовольняти умові:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (3.15.11)$$

В цьому випадку крива резонансу буде показувати залежність сили струму від величини ємності C (або L). Зміна C або L (варіометр) дає можливість міняти f від f_{max} до f_{min} . Відношення граничних частот називається коефіцієнтом перекриття діапазону.

$$K_g = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}} \quad 1,5 \leq K_g \leq 3.$$

Для перекриття більш широкого діапазону частот повний діапазон ділять на ряд більш вузьких піддіапазонів.

Для того, щоб настроювати декілька контурів на одну і ту ж частоту необхідно, щоб параметри L і C були у них ідентичні. Ідентичність ємностей досягається переш за все застосуванням блоку однакових конденсаторів змінної ємності і підстроювальних конденсаторів, які вирівнюють неоднакову ємність з'єднаних провідників, самих котушок і т.д.

Для точного підстроювання L застосовують рухомі осердя з феритів. Наведемо ще один приклад застосування резонансу напруг. Для цього розглянемо поширену схему вхідного кола приймача.

Сигнал, діючи на ненастроєну приймальну антену створює в ній струм, який утворює в котушці L_1 , змінне магнітне поле. В котушці L , розміщеній поряд з котушкою L_1 , це магнітне поле наводить змінну ЕРС частоти сигналу. Контур LCR за допомогою змінного конденсатора C настроюється на частоту сигналу, тобто в контурі встановлюється резонанс.

Паралельний резонанс (резонанс струмів)

Поряд із щойно розглянутим резонансом напруг, який має місце при послідовному включенні L і C , спостерігається ще й резонанс струмів (паралельний резонанс, антирезонанс), якщо генератор змінного струму живить коло, коли L і C з'єднані паралельно.

У цьому випадку складаються повні провідності обох віток:

$$Y = Y_1 + Y_2 = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}. \quad (3.15.12)$$

Практичну цікавість становить випадок контуру з незначним затуханням; тоді можна R^2 знехтувати порівнюючи з $\omega^2 L^2$:

$$\begin{aligned} Y &= i\omega C + \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cong i\omega C + \frac{R - i\omega L}{\omega^2 L^2} = \\ &= \frac{R}{\omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = A + iX, \\ |Y| &= \sqrt{\left(\frac{R}{\omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.15.13)$$

Зсув фаз φ струму відносно напруги визначається:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 L^2}{R} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad \text{Видно, що при } \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0;$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ має місце рівність } \varphi = 0, \text{ а повний опір } Z = \frac{1}{Y} \text{ і}$$

досягає максимального значення $Z_{\max} \cong \frac{\omega^2 L^2}{R}$, що відповідає мінімальному струму. Тобто резонанс має місце при тій же умові

($\omega=\omega_0$), що і резонанс напруг. Враховуючи, що $Q = \frac{\omega L}{R}$ маємо

$Z_{\max} \cong Q^2 R$ струм у загальній частині має значення $I_0 = \frac{U}{Q^2 R}$, а у

вітках відповідно $I_{1,2} = \frac{U}{\omega_0 L} = \frac{U}{QR} \cong U\omega C$, де $\omega=\omega_0$. Такий

паралельний контур характеризується відношенням

$$\frac{I_{1,2}}{I_0} = \frac{\frac{U}{QR}}{\frac{U}{Q^2 R}} = Q. \text{ Той факт, що при резонансі значення } I_0$$

мінімальне, а $I_1=I_2$ фізично пояснює, що між ними при $R \neq 0$ зсув фаз π і тому при резонансі вони взаємокомпенсуються. У контурі має місце обмін енергій.

3.16. Зв'язані резонансні контури

Під зв'язаними контурами розуміють емпіричну систему, що складається із двох чи більше контурів, в яких зміна електричного стану одного контуру, приводить до відповідної зміни електричного стану в інших контурах. Для цього необхідно щоб один із елементів контуру був загальним для них обох. Цей елемент називається елементом зв'язку, наприклад, магнітний потік.

Якщо два контури зв'язані між собою індуктивністю (M – коефіцієнт взаємодукції) і мають нескінченно малий омичний опір, то для них згідно закону Кірхгофа має місце рівність:

$$\begin{cases} -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \end{cases} \quad (3.16.1)$$

Після диференціювання їх по часу, вони мають вид:

$$\begin{cases} L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{I_1}{C_1} = 0 \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C_2} = 0 \end{cases} \quad (3.16.2)$$

Будемо шукати нормальні (прості) коливання системи виду $I_1 = Ae^{i\omega t}$ і $I_2 = Be^{i\omega t}$. Підставляючи ці значення в обидва рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= A\omega te^{i\omega t}, & \frac{di_2}{dt} &= Bi\omega te^{i\omega t}, \\ \frac{d^2 i_1}{dt^2} &= -A\omega^2 e^{i\omega t}, & \frac{d^2 i_2}{dt^2} &= -B\omega^2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.16.3)$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 L_1 + \frac{1}{C_1} \right) - MB\omega^2 = 0 \\ -\omega^2 AM + \left(-\omega^2 L_2 + \frac{1}{C_2} \right) B = 0 \end{cases}.$$

Колівання існують $A, B \neq 0$, якщо детермінант системи дорівнює нулю, тобто якщо

$$\left(-\omega^2 L_1 + \frac{1}{C_1} \right) \left(-\omega^2 L_2 + \frac{1}{C_2} \right) - M^2 \omega^4 = 0. \text{ Якщо врахувати, що}$$

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ і ввести величину } K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \text{ - коефіцієнт}$$

зв'язку, то:

$$\omega^4 L_1 L_2 - \frac{\omega^2 L_2}{C_1} - \frac{\omega^2 L_1}{C_2} + \frac{1}{C_1 C_2} - M^2 \omega^4 = 0, \quad (3.16.4)$$

$$\omega^4 L_1 L_2 C_1 C_2 - \omega^2 L_2 C_2 - \omega^2 L_1 C_1 + 1 - M^2 \omega^4 C_1 C_2 = 0,$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 - M^2 \omega^4 C_1 C_2 = 0,$$

$$\omega^4 - 2\omega^2 \omega_0^2 + \omega_0^4 - M^2 \omega^4 \omega_0^4 C_1 C_2 = 0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = K^2 L_1 L_2 C_1 C_1 \omega^4 \omega_0^4 = K^2 \omega^4,$$

$$\text{тобто } \omega_0^2 - \omega^2 = \pm K \omega^2; \quad \omega_0^2 = \pm K \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 (1 \pm K).$$

$$\text{Звідки маємо: } \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}; \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}. \text{ В отриманих}$$

значеннях “мінус” перед коренем не використовується, бо таке значення частоти не має фізичного змісту. Наявність двох резонансних частот показує, що при зв’язаних контурах існує два максимальних значення струмів у колі. Це являється суттєвою різницею зв’язаних контурів від одиночних. Тільки при значному зменшенні зв’язку ($M \rightarrow 0$) резонансні частоти зменшуються до співпадання і тоді $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, що еквівалентно вмиканню джерела ЕРС в один лише контур, другий з яких практично не зв’язаний.

В дійсності $R \neq 0$ і тому значення частоти ω_0 дещо відрізняється від ω_1 та ω_2 .

Отже, амплітудно-частотна характеристика зв’язаних контурів являє собою двогорбу криву. Видно, дана крива має кращу смугу пропускання (ближче до прямокутної), тому послаблення небажаних станцій значно більше, через це такі зв’язані контури досить широко використовуються.

Крім розглянутого індуктивного зв’язку існують і інші типи зв’язних контурів, зокрема:

1. Ємнісний зв’язок здійснюється за допомогою конденсатора зв’язку $C_{зв}$ і, отже, енергія переходить з першого коливного контуру в другий через електричне поле. Ємнісний зв’язок використовується рідше індуктивного, але дуже часто виникає сам по собі між різними деталями схеми і порушує нормальну роботу, тому він називається паразитний.
2. Автотрансформаторний зв’язок.

При цьому зв’язку коливні контури мають спільну котушку. Енергія з одного коливного контуру в другий переходить частково через магнітне поле, а частково безпосередньо через наявність ємнісного з’єднання між контурами.

Чим більша частина котушки зв’язку $L_{зв}$ входить у обидва контури, тим сильніший зв’язок між коливними контурами.

Вплив зв’язку на передачу енергії з одного контуру в інший

Розглянемо випадок індуктивного зв’язку між коливними контурами. Нехай обидва контури налагоджені на частоту ω , яка є

частотою джерела, тобто маємо в обох коливних контурах випадок резонансу напруг. Позначимо через I_1 величину струмі, що створюється ЕРС джерела у першому коливному контурі. Змінне магнітне поле цього струму індукує у котушці L_2 ЕРС:

$$|E_2| = I_1 \omega M. \quad (3.16.5)$$

Під дією E_2 у вторинному КК протікає струм I_2

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{I_1 \omega M}{R_2}. \quad (3.16.6)$$

Індуктивний та ємнісний опори другого коливного контуру не враховуємо, бо має місце резонанс. ЕРС індукції E_2 відстає від магнітного поля струму I_1 на $\frac{\pi}{2}$ (бо $M \frac{di}{dt}$), а значить і від I_1 , бо при резонансі магнітного поля і I_1 співпадають по фазі. Завдяки резонансу I_2 співпадає з E_2 . Отже, I_2 відстає на чверть періоду від I_1 . Будуємо векторну діаграму: з першого коливного контуру в другий переходить потужність: $P_2 = I_2^2 R_2$.

Це передача енергії з першого коливного контуру у другий відбивається на роботі першого коливного контура. Дійсно, струм I_2 з свого боку створює магнітне поле, внаслідок чого у першій котушці виникає додаткова ЕРС

$$|\varepsilon_1'| = M \omega I_2. \text{ Підставляючи значення } I_2 \quad |\varepsilon_1'| = \frac{M^2 \omega^2 I_1}{R_2}. \text{ Оскільки}$$

ε_1' відстає від I_2 на $\frac{\pi}{2}$, то вона зміщена від ε_1 на π .

ЕРС ε_1' спрямована проти ЕРС джерела, тому вона буде діяти проти ЕРС. Таким чином, сила струму в першому КК визначається законом Ома, враховуючи обидві ЕРС $I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{R_1}$.

Підставивши значення E_1 , маємо: $I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - \frac{M^2 \omega^2 I_1}{R_1 R_2}$ звідки

$$\frac{\varepsilon_1}{R_1} = I_1 + \frac{M^2 \omega^2 I_1}{R_1 R_2}. \text{ Тобто}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1 \left(1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 R_2} \right)} = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2}}.$$

З формули закону Ома можна зробити висновок, що вплив другого контуру на перший зводиться до внесення у перший коливний контур деякого додаткового опору

$$\Delta R_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_2}. \quad (3.16.7)$$

Отже, при взаємному наближенні двох котушок L_1 і L_2 при умові резонансу сила первинного струму зменшується, бо вноситься в контур додатковий опір ΔR_1 . На цьому опорі ΔR_1 витрачається потужність $P = I_1^2 \Delta R_1$. Ця потужність буде тією, що передається у вторинний контур:

$$P = I_1^2 \Delta R_1 = \frac{\omega^2 M^2 I_1^2}{R_2} \frac{R_2}{R_2} = I_2^2 R_2 = P_2. \quad (3.16.8)$$

ККД зв'язаних контурів

Повна потужність, що витрачається у первинному контурі:

$$P_0 = I_1^2 (R_1 + \Delta R_1) = P_1 + P_2, \quad (3.16.9)$$

ККД:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{I_2^2 R_2}{I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2} = \frac{I_1^2 \Delta R_1}{I_1^2 (R_1 + \Delta R_1)} = \frac{\Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1}. \quad (3.16.10)$$

Із збільшенням зв'язку між контурами ККД буде зростати, але збільшення зв'язку приводить до зменшення сили струму в першому коливному контурі, тобто повна потужність в першому коливному контурі буде зменшуватись.

Важливим є випадок критичного зв'язку двох контурів, який має місце коли $\Delta R_1 = R_1$. У цьому випадку P_0 буде максимальне і $\eta=50\%$.

Ступені зв'язку

Для оцінки міри переходу енергії із першого коливного контура у другий вводять поняття ступенів зв'язку, який виражається у відношенні ΔR_1 до R_1 .

- 1) Якщо $\Delta R_1 \ll R_1$ - зв'язок дуже слабкий. Лише мінімальна частина енергії передається із першого коливного контура у другий;
- 2) $\Delta R_1 < R_1$ - слабкий. Передає перший коливний контур $< 50\%$ енергії другому;
- 3) $\Delta R_1 = R_1$ - критичний зв'язок $\eta = 50\%$;
- 4) $\Delta R_1 > R_1$ - сильний зв'язок.

Але $\Delta R_1 = \frac{\omega^2 M_2}{R_2}$ показує, що ΔR_1 залежить не лише від

величини коефіцієнта зв'язку, але і від ємності контуру.

Розділ 4. Розрахунково - графічні завдання

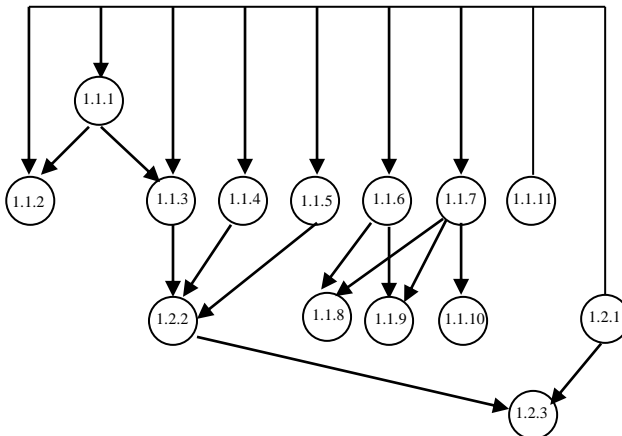
Мета виконання розрахунково - графічних завдань (РГЗ) буде досягнута, якщо студенти:

- 1) вивчать класичні (аналітичні) методи аналізу електричних і їх застосування до різних режимів роботи обладнання;
- 2) навчатися вибирати найбільш раціональні, для розв'язку конкретної задачі, методи (реалізація етапів оптимізації);
- 3) засвоять межі застосування методів, їх недоліки та переваги;
- 4) засвоять шляхи можливої модифікації методів для їх використання на ЕОМ;
- 5) як виконавці, навчатися працювати із створеним програмним забезпеченням;
- 6) навчатися досліджувати, за допомогою ЕОМ, додаткові властивості електричних кіл;
- 7) навчатися порівнювати та аналізувати результати, правильність проведених на ЕОМ розрахунків і вихідних даних процесу моделювання (макетування);
- 8) внесуть свій внесок в модернізацію окремих модулів складних програм.

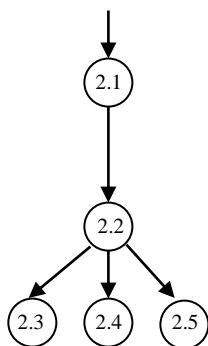
Нижче представлені 10 розділів завдань, набір пунктів, які викладач може компонувати або за принципом "наскрізного проектування" (рис. 4.1), або в РГЗ.

Пункти завдань визначає викладач з врахуванням індивідуальних здібностей студента.

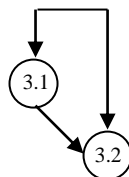
Розділ 1



Розділ 2



Розділ 3



Розділ 4 - 10

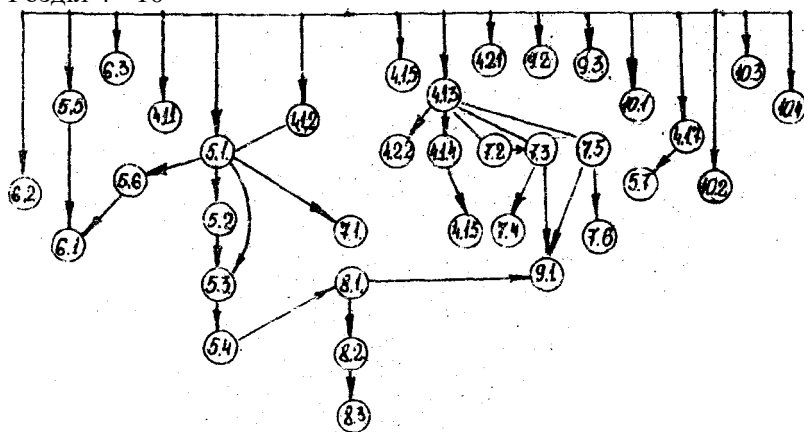


Рис. 1

Схеми і вихідні дані складаються (упорядковуються) у вигляді роздаткового матеріалу з врахуванням специфіки спеціальності.

Наприклад, можуть бути запропоновані схеми з пасивними елементами і незалежними джерелами, схеми з індивідуально-зв'язаними елементами, блоками з відомими схемними функціями, параметри несинусоїдних сигналів і т.д. При відсутності

роздаткового матеріалу запропоновані завдання можна виконати використовуючи схеми додатку 1-5.

Перші чотири розділи призначені для вивчення методів розрахунку встановлених режимів і перехідних процесів кіл постійного та змінного струмів. Всі розрахунки можна виконувати "вручну". ЕОМ, в даному, випадку використовують для:

самоперевірки результатів ручного розрахунку;

розв'язку систем рівнянь, складених "вручну";

накопичення навиків розрахунку електричних і електронних схем на ЕОМ за допомогою сучасних програм, які дозволяють повністю автоматизувати процеси складання і розв'язку рівнянь.

У наступних чотирьох розділах за допомогою ЕОМ розраховуються спектральні характеристики, досліджуються спотворення форм сигналів при розподілу їх по колу, здійснюється синтез електричних схем, перевіряються результати моделювання рівнянь змінних станів активними схемами, проводиться контроль якості проектування електронних фільтрів з елементами їх оптимізації.

Виконання завдань розд. 4-8 доцільно об'єднувати з проектуванням, виготовленням або пошуком реальних електричних схем в лабораторних умовах (розд. 9). Останній розділ являє собою завдання по програмуванню та розробці алгоритмів аналізу електричних схем, залученню студентів до науково-дослідної роботи.

Таблица 1.1.

вариант	R ₁ , Ом	R ₂ , Ом	R ₃ , Ом	R ₄ , Ом	R ₅ , Ом	R ₆ , Ом	R ₇ , Ом	R ₈ , Ом	R ₉ , Ом	R ₁₀ , Ом	E ₁ =E ₆ , В	E ₂ =E ₇ , В	E ₃ =E ₈ , В	E ₄ =E ₉ , В	E ₅ =E ₁₀ , В	I, А
1	8	2	20	11	19	14	5	12	16	1	10	40	60	20	30	2
2	6	4	18	13	18	15	6	13	17	12	30	80	20	40	40	1
3	5	6	16	15	20	18	7	14	18	2	50	70	90	60	80	3
4	4	8	14	16	1	17	8	16	19	14	40	30	40	50	20	4
5	3	10	12	17	2	18	9	16	7	6	50	40	30	20	10	5
6	2	12	10	19	3	19	1	17	8	13	90	50	60	70	80	7
7	1	14	8	18	4	20	2	6	9	5	60	10	20	30	40	6
8	9	16	6	1	5	13	3	4	10	15	20	30	40	60	10	8
9	12	18	4	3	6	12	4	3	20	3	70	20	40	10	30	9
10	10	20	2	5	7	11	10	2	14	18	10	20	30	40	50	5
11	16	1	19	7	8	10	13	1	11	4	60	70	80	90	50	6
12	16	3	17	9	9	9	11	6	12	16	15	35	25	45	55	8
13	7	5	15	2	10	8	12	7	13	7	10	15	20	25	30	1
14	18	7	13	4	12	7	14	18	15	20	35	40	45	50	55	3
15	20	9	11	6	12	6	15	19	1	9	60	65	70	75	80	9
16	14	11	9	8	13	5	16	20	2	19	85	90	10	20	60	2
17	13	13	7	10	14	4	17	8	3	8	10	55	70	60	30	6
18	11	15	5	12	15	3	18	9	4	11	30	10	15	25	40	4
19	17	19	3	14	16	2	19	10	5	17	25	40	35	10	50	1
20	10	17	1	16	17	1	20	11	6	10	20	40	60	30	10	7

1. Дослідження кіл постійного струму.

1.1. Аналіз схем без використаній ЕОМ.

1.1.1. Зобразити графічні схеми з замкненим ключем (схеми 1-25 дод.1), виділивши сітки “дерева” та “вітки” зв’язку (хорди). Скласти матрицю з’єднань та контрольну матрицю. Виділити в цих структурних матрицях одиничну підматрицю рахунок пріоритетної нумерації “віток” дерева та хорд або шляхом комбінації рядків та стовпців.

1.1.2. Скласти на основі законів Кірхгофа систему рівнянь для розрахунку струмів в усіх вітках схеми з урахуванням джерел струму.

1.1.3. Записати рівняння для аналізу кіл методом контурних струмів.

1.1.4. Записати рівняння для розрахунку струмів у всіх вітках схеми методом вузлових потенціалів.

1.1.5. Скласти для вихідної схеми дві системи розширених вузлових рівнянь: першу систему рівнянь сформувавши розглядаючи всі резистори як Y -витки, в другій системі два будь-яких резистора врахувати як Z -витки, останні резистори представити γ -витками.

1.1.6. Покладаючи, що елемент R являється навантаженням, а остання частина схеми з розімкнутим ключем - активним - двохполюсником, розрахували напругу ($R \rightarrow \infty$) холостого ходу U_{xx} , та струм короткого замикання ($R=0$), використовуючи метод контурних струмів (числові дані параметрів схем приведені в таб.1.1.).

1.1.7. Виконати попередній пункт, 1.1.6., використовуючи метод вузлових потенціалів, та отримані результати для цих струмів занести в таблицю.

1.1.8. Скласти баланс потужностей для схеми режиму холостого ходу з урахуванням джерел струму.

1.1.9. Визначити струм в елементі R_1 методом еквівалентноно генератора, підрахувавши R_{1k} по результатах п. 1.1.6. або 1.1.7.

1.1.10. Розрахувати струм I_1 в режимі узгодженого навантаження.

1.1.11. Розрахувати струм I_1 методом накладання. При наявності в схемі η_E джерел EPC замість розрахунку η_E підсхем використати принцип взаємності ($g_{ki}=g_{ik}$), тобто розрахувати η_E струмів в одній підсхемі з джерелом E_1 . Як зміниться струм I_1 , якщо

ЕРС джерела E_1 збільшиться в 4 рази, а останній ЕРС зменшиться в 2 рази?

1.2. Дослідження схем за допомогою ЕРС.

1.2.1. Провести аналіз заданого ланцюга з замкнутим джерелом на ЕОМ, використовуючи в якості вихідних даних опис на вхідній мові із наступних програм;

АНЛИН, мікроАНЛИН, АНАЛИЗ, АДАС.

1.2.2. Розв'язати за допомогою програми ГДУСС одну із вказаних викладачем систему рівнянь, складених в п.п. 1.1.2.-1.1.5.

1.2.3. Користуючись результатами отриманими в п.1.2.1. або 1.2.2., виконайте наступне:

розрахуйте струми у всіх вітках схеми, визначіть покази приладів.

1.2.4. Виконайте на ЕОМ аналіз кола з розімкнутим ключем і порівняйте отримане значення струму I_1 із значенням струму в п.1.1.9

2. Розрахунок ланцюга кіл змінного струму.

2.1. Замініть у вихідному колі (схеми 26-50 дод.1) індуктивно сполучені елементи І схемами заміщення з керуючими струмами (числові дані - в табл.2.1.)

2.2. За допомогою ЕОМ (ключ в схемах замкнений) або "вручну" (ключ розімкнутий) розрахуйте струми в вітках схеми і потенціали її вузлів.

2.3. Побудуйте топографічну діаграму для вихідного кола, з'єднану з векторною діаграмою струмів. При цьому напругу на індуктивно-зв'язаних елементах розкладіть на складові.

2.4. Складіть баланс активних і реактивних потужностей для кола, який містить індуктивно-зв'язані елементи.

2.5. Визначте покази приладів.

3. Дослідження кола з операційними підсилювачами.

3.1. Сформувати для схеми з операційними підсилювачами (дод.2) систему редуційних вузлових рівнянь і отримати, користуючись методом алгебраїчних додатків, відношення напруг

$$H(j\omega) = \dot{U}_{вих} / \dot{U}_{вх}$$

методом символічного зображення.

3.2. Отримати численні значення величини $H(j\omega)$ для трьох вільних значень частоти ω двома способами:

- користуючись отриманим в п. 3.1. виразом;
- за допомогою розрахунку вихідного кола на ЕОМ.

Таблиця 2.1

Параметр	варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R₁, Ом	2	4	1	3	10	5	17	13	6	14
R₂, Ом	8	3	5	12	1	11	2	10	14	17
R₃, Ом	10	1	4	11	15	2	12	16	19	3
R₄, Ом	5	7	8	1	18	17	2	16	20	10
R₅, Ом	4	2	9	12	8	11	7	10	9	17
R₆, Ом	6	3	3	6	8	10	2	4	12	1
E₁, В	10	40	20	60	10	40	20	50	60	20
E₂, В	50	10	40	20	40	10	50	20	40	50
I, А	1	4	2	1	2	8	2	1	4	8
L₁, Гн	0,1	0,05	0,01	0,1	0,05	0,02	0,1	0,04	0,05	0,01
L₂, Гн	0,1	0,04	0,06	0,04	0,08	0,1	0,05	0,05	0,1	0,06
L₃, Гн	0,05	0,06	0,1	0,02	0,05	0,08	0,1	0,05	0,6	0,1
C₁, мкФ	200	150	300	250	100	150	100	300	250	200
C₂, мкФ	300	150	250	200	150	300	250	200	150	250
K*₁₂	0,5	0,2	0	0	0	0	0,4	0	0	0
K*₂₃	0	0	0	0	0,5	0,2	0	0,8	0	0,5
K*₁₃	0	0	0,5	0	0,2	0	0	0	0,4	0
α**, рад	π(2)	π(6)	π(3)	π(4)	π(6)	π(3)	π(2)	π(6)	π(3)	π(4)
ω, с	100	300	200	400	300	200	300	400	300	100
	* k_{ij} – коефіцієнт індуктивного зв'язку котушок у вітках i, j .									
	** α – кут, на котрий E_i опереждає по фазі E_k ($I < k$)									

Продовження табл. 2.1

Параметр	варіант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R₁, Ом	12	7	19	15	8	20	16	9	11	18
R₂, Ом	4	13	6	16	19	18	7	20	15	9
R₃, Ом	17	9	13	5	18	8	20	6	14	7
R₄, Ом	19	14	9	13	15	6	12	4	11	3
R₅, Ом	10	18	15	16	3	20	5	13	6	14
R₆, Ом	20	5	6	18	15	10	8	4	2	2
E₁, В	10	50	40	20	60	10	40	20	50	10
E₂, В	40	10	20	50	10	50	20	50	40	10
I, А	2	1	8	2	8	1	4	2	1	4
L₁, Гн	0,2	0,1	0,05	0,02	0,1	0,02	0,05	0,1	0,2	0,1
L₂, Гн	0,06	0,2	0,1	0,02	0,04	0,1	0,1	0,04	0,1	0,05
L₃, Гн	0,04	0,05	0,08	0,1	0,06	0,05	0,02	0,1	0,05	0,08
C₁, мкФ	150	250	200	300	150	200	300	200	250	150
C₂, мкФ	300	150	300	200	250	300	150	200	250	300
K₁₂[*]	0,4	0	0	0	0,4	0	0,8	0	0	0
K₂₃[*]	0	0	0,4	0	0	0	0	0,8	0	0,8
K₁₃[*]	0	0,2	0	0,6	0	0,4	0	0	0,4	0
α^{**}, рад	π(6)	π(2)	π(6)	π(3)	π(4)	π(6)	π(2)	π(3)	π(4)	π(2)
ω, с	200	400	100	400	300	200	400	100	200	100
	* k_{ij} – коефіцієнт індуктивного зв'язку котушок у вітках i, j .									
	** α – кут, на котрий E_i опереджає по фазі E_k ($I < k$)									

4. Дослідження електричних кіл в часовій області.

4.1. *Розрахувати перехідний процес операторним методом.*

4.2. Розрахувати перехідний процес класичним методом, накреслити графік вихідної величини (схеми дод. 3, параметри в таб.4.1.)

4.1.3. Сформувані "вручну" будь-яким способом рівняння змінних станів і вихідне рівняння для розрахунку шуканої величини. .

4.1.4. Розрахувати власні значення матриці параметрів кола (рі-А) і порівняти їх з коренями характеристичного рівняння, отриманими в п.4.1.1. або 4.1.2.

4.1.5. Використовуючи один із числених методів інтегрування по рівнянням станів (п. 4.1.3), розрахувати вихідну змінну. Крок інтегрування h . Вибрати, аналізуючи значення коренів характеристичного рівняння, схеми. Метод інтегрування вказує викладач (явний метод Ейлера, неявний метод Ейлера, метод трапецій). Результати розрахунку порівняти з розв'язками п.4.1.1. або 4.1.2.

4.1.6. Вивести резистивну схему заміщення вихідної кола замінивши динамічні елементи дискретними моделями, що відповідають методу інтегрування, вказаному викладачем.

Визначити по схемі заміщення вихідну змінну, а крок Інтегрування h вибрати як вказано в п.4.1.5.

4.1.7. Розрахувати перехідну функцію кола (метод розрахунку, вхідну і вихідну величини вказує викладач). Отримати відповідну імпульсну характеристику.

4.2. *Розрахунок з використанням ЕОМ.*

4.2.1. Виконати аналіз схеми на ЕОМ, використовуючи в якості вихідних даних опис кола на вихідній мові програми АНЛІН або мікроАНЛІН. Початковий крок інтегрування вибрати як в п.4.1.5.

4.2.2. Розрахувати за допомогою програми ЕЙЛЕР вихідну змінну, використовуючи отримані в п.4.1.3. рівняння змінних станів за допомогою: неявного методу інтегрування, явного методу інтегрування.

4.2.3. Проаналізувати отримані результати і зробити висновок.

Таблиця 4.1.

Варіант	Рисунок (доп. 3)	E, В	L, мГн	C, мкФ	R ₁ , Ом	R ₂ , Ом	R ₃ , Ом	R ₄ , Ом	Визначити
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	100	1	10	20	15	5	2	i
2	2	150	2	2	5	8	10	2	i_1
3	19	100	1	10	2	2	-	-	i_1
4	10	120	1	10	3	1	0	1	i_1
5	3	100	5	50	2	8	6	-	i_1
6	1	50	1	1500	20	13	1	4	i_1
7	11	120	10	10	10	90	1000	1000	i_1
8	18	200	1	20	4	4	2	-	i_3
9	4	100	1	10	50	25	25	-	U_C
10	17	300	5	4	10	20	10	20	U_C
11	20	100	1	10	20	4	16	2	U_{RZ}
12	15	150	4	5	6	10	5	4	U_C
13	6	30	1	2,5	10	10	10	-	U_C
14	7	200	10	10	100	0	50	100	i_1
15	12	100	1	10	10	10	4	-	i_1
16	16	50	2	1670	1	2	1	5	i_1
17	8	120	10	10	10	90	1000	1000	i_1
18	13	120	1	10	8	8	8	4	i_1
19	9	200	1	10	10	20	50	20	i_1
20	14	50	1	100	2	8	10	10	i_1
21	5	100	1	10	20	20	0	2	U_L
22	2	150	2	5	5	10	5	5	i_2
23	19	100	1	10	1	3	-	-	i_3
24	10	120	1	10	1	2	1	1	i_2
25	3	100	5	50	3	8	5	-	U_C

Продовження табл. 4.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	1	50	1	1500	2	13	2	3	i
27	11	120	10	10	20	80	1000	1000	i_3
28	18	200	1	20	6	3	2	-	i_1
29	4	100	1	10	50	20	30	-	U_L
30	17	300	5	4	15	20	5	20	i_2
31	20	100	1	10	20	17	3	2	i_1
32	15	150	4	5	9	10	5	1	U_L
33	6	30	1	2,5	5	10	15	-	i_3
34	7	200	10	10	50	50	50	100	U_{R3}
35	12	100	1	10	5	15	4	-	U_L
36	16	50	2	1670	1	2	2	4	i_2
37	8	120	10	10	20	80	1000	1000	i_3
38	13	120	1	10	12	6	8	4	i_2
39	9	200	1	10	10	10	50	30	i_2
40	14	50	1	100	3	7	10	10	i_2
41	5	100	1	10	20	2	18	2	U_C
42	2	150	2	5	4	10	5	6	i_3
43	19	100	1	10	1,5	2,5	2	-	i_2
44	10	120	1	10	2	1	1	1	U_{R3}
45	3	100	5	50	6	8	2	-	i_3
46	1	50	1	1500	2	13	3	2	U_L
47	11	120	10	10	30	70	1000	1000	i_2
48	18	200	1	20	12	2,4	2	-	i_2
49	4	100	1	10	50	10	40	-	i_3
50	17	300	5	4	3	20	17	20	i_1

Продовження табл. 4.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	20	100	1	10	20	8	12	2	U_L
52	15	150	4	5	0	10	5	10	i_1
53	6	30	1	2,5	15	10	5	-	i_4
54	7	200	10	10	25	75	50	100	U_C
55	12	100	1	10	15	5	4	-	i_3
56	16	50	2	1670	1	2	3	3	U_L
57	8	120	10	10	30	70	1000	1000	i_3
58	13	120	1	10	24	4,8	8	4	i_2
59	9	200	1	10	10	25	50	15	i_3
60	14	50	1	100	4	6	10	10	i_3
61	5	100	1	10	20	10	10	2	U_{de}
62	2	150	2	5	7	10	5	3	U_L
63	19	100	1	10	3	1	-	-	U_L
64	10	120	1	10	1,5	1,5	1	1	U_L
65	3	100	5	50	1	8	7	-	i_2
66	1	50	1	1500	2	13	4	1	U_C
67	11	120	100	10	40	60	1000	1000	U_L
68	18	200	1	20	3	6	2	-	U_L
69	4	100	1	10	50	30	20	-	U_L
70	17	300	5	4	6	20	14	20	U_L
71	20	100	1	10	20	11	9	2	U_C
72	15	150	4	5	3	10	5	7	i_2
73	6	30	1	2,5	12	10	8	-	i_2
74	7	200	10	10	0	100	50	100	U_L
75	12	100	1	10	7	13	4	-	i_2

Продовження табл. 4.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
76	16	50	2	1670	1	2	4	2	U_C
77	8	120	10	10	40	60	1000	1000	U_L
78	13	120	1	10	6	12	8	4	U_C
79	9	200	1	10	10	30	50	10	U_L
80	14	50	1	100	5	5	10	10	U_L
81	5	100	1	10	20	16	4	2	U_{as}
82	2	150	2	5	10	10	5	0	U_C
83	19	100	1	10	4	0	-	-	U_C
84	10	120	1	10	0	3	1	1	U_C
85	3	100	5	50	4	8	4	-	U_L
86	1	20	1	1500	2	13	5	0	U_{RI}
87	11	120	10	10	50	50	1000	1000	U_C
88	18	200	1	20	4	4	2	-	U_C
89	4	100	1	10	50	35	15	-	i_2
90	17	300	5	4	4	20	16	20	U_{RI}
91	20	100	1	10	20	13	7	2	i_2
92	15	150	4	5	2	10	5	8	U_{C1}
93	6	30	1	2,5	8	10	12	-	U_2
94	7	200	10	10	75	25	50	100	U_1
95	12	100	1	10	13	7	4	-	U_{RI}
96	16	50	2	1670	1	2	5	1	U_{RI}
97	8	120	10	10	50	50	1000	1000	U_C
98	13	120	1	10	8	8	8	4	U_L
99	9	200	1	10	10	18	50	22	U_C
100	14	50	1	100	6	4	10	10	U_C

5. Розрахунок схемних функцій та частотних характеристик.

5.1. Отримати вираз схемної функції по операторній схемі замінення кола дод. 2 або дод. 3 (схему, вхідних і вихідних змінних вказує викладач.)

5.2. Визначити частоту і добротність полюсів отриманої схемної функції. Вивести полюси функції на комплексній площині.

5.3. Подати отриману схемну функцію у наступному вигляді:

$$H(p) = H_0 \left(p^2 + \frac{Q^\infty}{\omega_\infty} p + \omega_\infty^2 \right) / \left(p^2 + \frac{Q^2}{\omega_0} p + \omega_0^2 \right).$$

5.4. Визначити тип фільтру з отриманою схемною функцією, розрахувати характерні частоти і значення функції при цих частотах. Вивести якісно АХЧ фільтру, виділивши полосу пропускання.

5.5. Розрахувати на ЕОМ АХЧ та ФХЧ фільтру, використовуючи в якості даних опис вихідної схеми на вхідній мові програм АНЛІН, мікроАНЛІН, АДАС, АНАЛІЗ. Орієнтовний частотний діапазон визначає викладач (або самі студенти), виходячи із типу фільтру.

5.6. Розрахувати АХЧ та ФХЧ фільтру за допомогою програми АФЧХ по коефіцієнтах чисельника і знаменника схемної функції, отриманої в п.5.1. частотний діапазон вибрати як в п.5.5.

5.7. Отримати АЧХ та ФЧХ фільтру за допомогою програми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), використовуючи як вихідні дані розрахунки в п.4.1.7.

6. Дослідження схем при несинусоїдних впливах.

6.1. Користуючись отриманими в п.5.5. або п.5.6. частотними характеристиками і замінюючи задані джерела джерелами несинусоїдних сигналів (дод.4), розрахувати часовий графік вихідної змінної (див, розподіл варіантів по табл. 6.1.) Криві вхідного і вихідного сигналів позначити на одному графіку. Пояснити спотворення форми сигналу.

6.2. Завдання п.6.1. виконати операторним методом або розрахувати реакцію кола (дод.2) на вплив одиничного імпульсу. Форму і тривалість імпульсу вибрати у відповідності з варіантом (табл.6.2.)

6.3. Виконати завдання п.6.1. за допомогою інтеграла ДЮАМЕЛЯ.

6.4. Порівняти отримані в п.п.6.1-6.3. результати.

6.5. Розрахувати $U_{вих}$ при дії періодичної послідовності імпульсу (таб.6.2.).

Таблиця 6.1.

Варіант	Схема (дод. 3)	Графік (дод. 4)	Визначник	Варіант	Схема (дод. 3)	Графік (дод. 4)	Визначник
1	23	1	i_4	32	22	9	i_3
2	22	1	U_R	33	25	4	i_3
3	24	1	U_R	34	22	4	U_C
4	23	3	i_1	35	25	3	U_L
5	21	1	i_1	36	24	3	i_2
6	22	2	i_2	37	23	4	U_C
7	24	5	i_1	38	25	10	U_2
8	25	1	i_1	39	23	8	i_2
9	25	4	i_2	40	23	2	i_3
10	21	2	U_L	41	23	5	i_4
11	24	1	i_3	42	22	9	U_R
12	22	1	i_3	43	24	5	U_2
13	25	1	i_3	44	23	9	i_1
14	22	1	U_C	45	21	5	i_1
15	25	2	U_L	46	22	9	i_2
16	24	2	i_2	47	24	9	i_1
17	23	8	U_C	48	25	9	i_1
18	26	5	U_2	49	25	10	i_2
19	23	1	i_2	50	21	4	U_2
20	23	1	i_3	51	24	7	i_3
21	23	2	i_4	52	22	10	i_3
22	22	4	U_R	53	25	7	i_3
23	24	4	U_2	54	22	9	U_C
24	23	4	i_1	55	25	4	U_L
25	21	2	i_1	56	24	4	i_2
26	22	3	i_2	57	23	5	U_C
27	24	6	i_1	58	26	7	U_2
28	25	5	i_1	59	23	5	i_2
29	25	6	i_2	60	23	4	i_3
30	21	3	U_2	61	23	6	i_4
31	24	4	i_3	62	22	10	U_R

Продовження табл. 6.1

63	24	6	U_2	82	22	8	U_R
64	23	10	i_1	83	24	9	U_2
65	21	4	i_1	84	23	7	i_1
66	22	10	i_2	85	21	10	i_1
67	24	10	i_1	86	22	7	i_2
68	25	10	i_1	87	24	7	i_1
69	25	7	i_2	88	25	7	i_1
70	21	7	U_2	89	25	8	i_2
71	24	8	i_3	90	21	9	U_L
72	22	7	i_3	91	24	5	i_3
73	25	9	i_3	92	22	8	i_3
74	22	5	U_C	93	25	10	i_3
75	25	5	U_L	94	22	7	U_C
76	24	5	i_2	95	25	6	U_L
77	23	9	U_C	96	24	6	i_2
78	26	8	U_2	97	23	1	U_C
79	23	6	i_2	98	26	1	U_2
80	23	7	i_3	99	23	10	i_2
81	23	8	i_4	100	23	8	i_3

Таблиця 6.2.

Варіант	Схема (дод.2)	Частота F Ø, кГц	Доброт- ність	Імпульс	
				Мал. дод. 5	τ_u, c
1	1	1	0,707	3	0,002
2	2	1	0,707	3	0,001
3	3	1	2	1	0,001
4	4	2	5	2	$0,5 \cdot 10^{-3}$
5	5	1	5	2	0,001
6	6	5	10	1	$0,2 \cdot 10^{-3}$
7	7	2	5	5	$0,5 \cdot 10^{-3}$
8	8	2	5	4	$0,5 \cdot 10^{-3}$
9	9	5	10	6	$0,2 \cdot 10^{-3}$
10	10	1	2	2	0,001
11	11	5	10	1	$0,2 \cdot 10^{-3}$
12	12	2	1	3	0,001
13	12	1	10	1	0,001
14	13	1	0,707	6	0,001
15	1	3	0,707	3	$0,33 \cdot 10^{-3}$
16	2	2	0,707	2	$0,33 \cdot 10^{-3}$
17	3	2	2,5	1	$0,5 \cdot 10^{-3}$
18	4	1	2	6	0,001
19	5	1	2	2	0,001
20	6	1	5	6	0,001
21	7	5	10	5	$0,2 \cdot 10^{-3}$
22	8	5	10	5	$0,2 \cdot 10^{-3}$
23	9	5	10	1	$0,2 \cdot 10^{-3}$
24	10	1	5	6	0,001
25	12	1	5	5	0,001
26	12	1	5	3	
27	12	1	10	2	0,001
28	11	2	2	4	0,001
29	13	2	5	1	$0,5 \cdot 10^{-3}$
30	14	2	10	6	$0,5 \cdot 10^{-3}$

7. Моделювання рівняння стану.

7.1. Отримати рівняння змінних стану із схемної функції кола (п.5.1.)

7.2. Відобразити рівняння змінних стану і рівняння вихідної змінної сигнальним графіком або структурною схемою.

7.3. За рівнянням стану, структурній схемі або сигнальному графу скласти ARC - коло і підібрати його параметри.

7.4. Розрахувати на ЕОМ частотні характеристики отриманого активного кола (порівняти результати розрахунку активної і вихідної складової пасивного кола (див. п. 5.5. або п.5.6.)

7.5. По рівнянням стану скласти активне коло з переключаючими конденсаторами, вибрати циклічну частоту і параметри конденсаторів.

7.6. Розрахувати на ЕОМ за допомогою АДАС або ДИСПАС частотні характеристики ЦПК. Порівняти їх з характеристиками пасивного кола.

8. Моделювання частотних характеристик.

8.1. Спроекувати ARC-фільтр або фільтр з переключаючими конденсаторами за допомогою програми ДИСПАС, як вихідні дані використати функцію $H(p)$, отриману в п.5.1. або опис АЧХ фільтру (див.п. 5.4.)

8.2. Розрахувати на ЕОМ АЧХ і ФЧХ або перехідну характеристику синтезованого фільтру з характеристиками пасивного кола.

8.3. Розрахувати на ЕОМ чутливість частотних характеристик фільтру до варіацій паразитних або основних параметрів його елементів (елемента вказує викладач).

8.4. За допомогою програми СИНТЕЗ розрахувати номінали елементів схеми для значень добротності Q центральної частоти ω_0 , вказаних в табл.6.2.

8.5. У відповідності з варіантом (див.табл.6.2.) скласти редуційну матрицю кутових провідностей і методом алгебраїчних доповнень отримати передаточну функцію $H(j\omega)$.

8.6. Розрахувати АЧХ $|H(\omega)|$ і ФЧХ $\varphi(\omega)$ знайденої передаточної функції $H(j\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$.

9. Практична реалізація та дослідження схем в лабораторних умовах.

9.1. Виготовити в лабораторних умовах ARC - схему аналог схем дод.2 або аналог схеми, спроектованої в розд.7 чи 8. Отримати осцилограму перехідної характеристики і дослідити частотні характеристики виготовленої схеми. Порівняти результати експериментів з розрахунками на ЕОМ.

9.2. Виготовити пасивний RC-фільтр з двома конденсаторами. Виконати для цієї схеми розрахунки по вказівці викладача тобто будь-який набір пунктів із розділу 4-8. Порівняти результати розрахунків і експериментів.

9.3. Виготовити RC-ланцюг (один резистор і один конденсатор). Виготовити еквівалентну ЦПК, замінивши резистор переключаючим конденсатором. Розрахувати будь-яким методом перехідні характеристики у вихідній RC-кола I отриманої ЦПК. Порівняти розрахункові та експериментальні дані.

10. Елементи програмування.

10.1. Відтворити програму формування матриці кутових провідностей пасивної частини кола постійного струму (кількість і тип елементів схеми по вказівці викладача).

10.2 Скласти і відтворити програму формування розширення кутових рівнянь (тип елементів задачі – викладач).

10.3. На вивченій алгоритмічній мові відтворити програму формування рівнянь для розвитку перехідних процесів з використанням дискретних моделей динамічних елементів (тип і метод інтегрування погодити з викладачем).

10.4. Відтворити програму розрахунку АЧХ і ФЧХ схем по заданій схемній функції або схемної функції, заданої із рівнянь стану.

10.5. Скласти і відтворити програму аналізу електричного кола в часовій та частотній областях по методу змінних характеристик стану.

Проведені РГЗ сформовані по принципу відтворення результатів їх виконання. Вони можуть розглядатись як окремі самостійні, так і як підсистеми загального наскрізного універсального РГЗ. Це дає можливість зберегти елементи творчості при виборі і компоновці окремих наборів з врахуванням ступеня підготовленості і індивідуальності студентів.

Індивідуальні завдання можуть мати і такий зміст:

Дано: розгалужене коло з одним ПЕ, параметри і аналітичний вираз ВАХ.

Необхідно:

1. Графічно знайти робочу точку (методом двох вузлів еквівалентного генератора, безпосереднім складанням характеристик).
2. Методом еквівалентного генератора отримати відповідну одноконтурну схему;
3. Розрахувати струм в ПЕ методом дзеркальних відображень; методом ітерацій (з нерухою точкою(, отримати розв'язок для струму і напругу (методом Ньютона-Рофсона(; порівняти швидкість збіжності двома останніми методами) по числу ітерацій(; для отриманої робочої точки ВАХ зобразити еквівалентну схему заміщення із лінійних елементів (з диференціальним опором і методом дискретних лінійних моделей з використанням поняття диференціальної провідності).

Позначення схеми необхідно представляти як в завд.6, порядок виконання РГЗ може бути наступим:

1. Ввести в мікроЕОМ вихідні дані;
2. Розрахувати на ЕОМ вузлові напруги, а вручну – всі напруги;
3. Розрахувати активні і реактивні потужності джерел і кожного навантаження;
4. Виявити режим роботи джерел в якості генераторів або в якості споживачів;
5. Скласти баланс потужностей і визначити ККД передачі енергії;
6. Визначити кут зсуву фаз, при якому джерела генерують приблизно однакові активні енергії і(або активну енергію від E_1 , а реактивну – від E_2 , шляхом порівняння значень ККД, провести вибір найбільш ефективного способу регулювання потужностей паралельно працюючих генераторів.

11. Приклади виконання завдань.

4.1.1. Розрахувати перехідний процес класичним методом, намалювати вихідний графік вихідної величини.

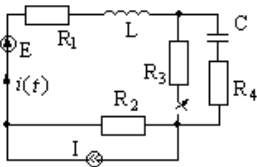


Рис.10.1

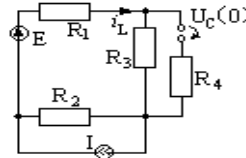


Рис.10.2

Документаційна схема приведена на рис.10.2, при цьому $U_c(O_\infty) = U_{R3}$, $I_{R4} = 0$

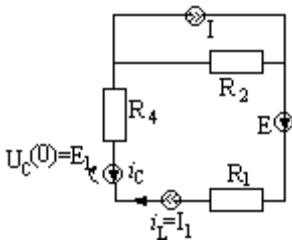


Рис.10.3

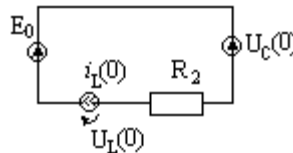


Рис.10.4

Знайдемо методом двох вузлів або накладанням:

$$i(0_-) = i_{LE} + i_{LI} \quad i_L(0_-) = \frac{E}{R_3} + \frac{1}{2}I = \frac{20}{20} + 1 = 2A$$

$$U_C(0_-) = U_{R3} = i_L(0_-)R_3 = 2 \cdot 5 = 10B$$

Післякомутаційна схема ($t=0$) представлена на рис. 10.3

По закону комутацій маємо:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = I_1, U_C(0_-) = U_C(0_+) = E_1.$$

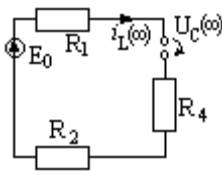


Рис. 10.5

Тоді $i_C(0_+) = i_L(0) = i(0) = 2A$.

Якщо перетворити джерела струму в джерела ЕРС, отримаємо схему рис.10.4.

Тоді для встановленого режиму ($t \rightarrow \infty$) отримаємо $U_C(\infty) = E_3 = 40B$,

$$i_L(\infty) = i_{Lnn} = i_{np} = 0.$$

В кінцевому результаті маємо $i = i_{np} + i_{cv} = i_{cv}$.

Характеристичне рівняння даної схеми має вигляд

$$R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} = 0$$

Звідси

$$P_{1,2} = -100c^{-1} \Rightarrow i_{CB} = (A_1 + A_2t)e^{pt};$$

$$A_1 = i_L(0_+) = di_L/dt|_{t=0_+} = \frac{U_L(0_+)}{L};$$

$$i'_L(0_+) = A_2 + pA_1; \quad i'_L(0_+) = -100A/c;$$

$$A_2 = i'_L(0_+) - pA_1 = -100 + 100 \cdot 2 = 100$$

Таким чином, $i(t) = (2 + 100t)e^{-100t}$, графік струму представлений на рис.10.7

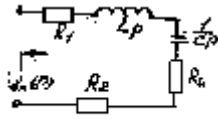


Рис. 10.6

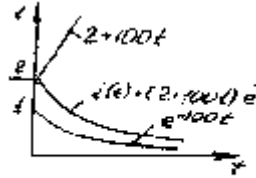


Рис. 10.7

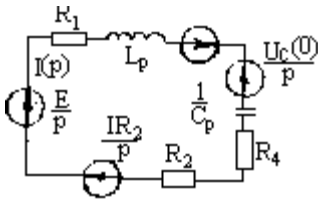


Рис.10.8

4.1.2. Розрахувати перехідний процес операторним методом. Початкові умови ті ж: $U_C(0) = 10B$, $i_L(0) = 2A$

По еквівалентній операторній схемі (мал.10.8) маємо

$$I(p) = \frac{\left(\frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} + \frac{IR_2}{p} + Li_L(0) \right)}{\left(R_1 + R_2 + R_4 + L_p + \frac{1}{Cp} \right)}$$

Звідси

$$I(p) = \frac{\frac{30}{p} + 0,2}{20 + 0,1p + \frac{10^3}{p}} = \frac{300 + 2p}{p^2 + 200p + 10^4} = \frac{300 + 2p}{(p + 100)^2} = \frac{300}{(p + 100)^2} + \frac{2p}{(p + 100)^2}$$

$$\div i(t) = 300te^{-100t} + (2te^{-100t})' = 300te^{-100t} + 2e^{-100t} + 2t(-100)e^{-100t} = (2 + 100t)e^{-100t}$$

4.1.3. Сформуємо вручну рівняння змінних станів і вихідне рівняння для розрахунку шуканої величини $i(t) = i_C(t) = C \frac{dU_C}{dt}$. Згідно рис.

10.9 маємо

$$i_C = K_{11}U_C + K_{12}i_L + K_{13}E + K_{14}I,$$

$$U_L = K_{21}U_C + K_{22}i_L + K_{23}E + K_{24}I,$$

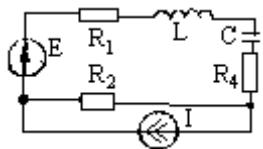


Рис. 10.9

тобто невідомі коефіцієнти можливо розрахувати по принципу накладання (рис. 10.10).

Кінцевий результат маємо:

$$i_C = i_L;$$

$$U_t = -U_C - R_e i_e + E + R_2 I.$$

Звідси рівняння стану

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C}; \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} = \frac{-U_C}{L} = \frac{-R_e}{L} i_L + \frac{E}{L} + \frac{R_2}{L} I$$

або в загальному вигляді: $\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$, де

$$\vec{x} = [U_C \quad i_L]^T,$$

$$\vec{u} = [E \quad I]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_e}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{R_2}{L} \end{bmatrix}.$$

4.1.4. Розрахуємо власні значення матриці параметрів кола і порівняємо їх з коренями характеристичного рівняння, отриманого в п. 4.1.1. Для цього обрахуємо $\det[\alpha\Delta - A]$, де Δ - одинична матриця; α - власні значення матриці.

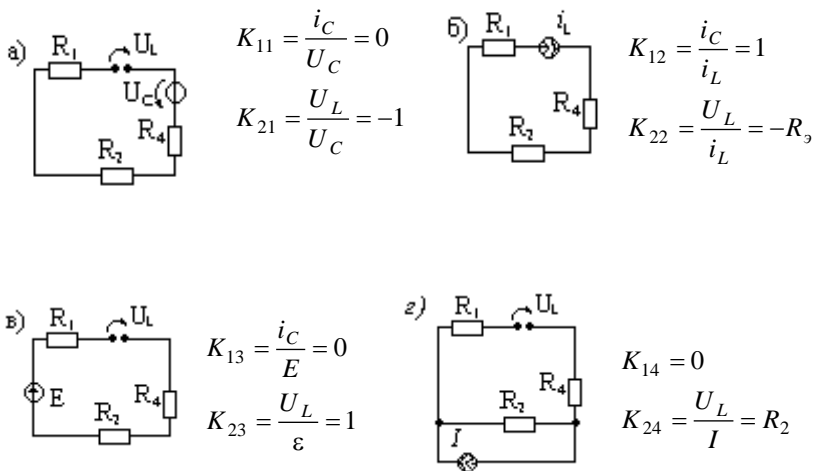


Рис.10.10

Таким чином:

$$\det[\alpha\Delta - A] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_e}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{c} \\ \frac{1}{L} & \left(\alpha + \frac{R_e}{L}\right) \end{bmatrix} = 0.$$

Звідси

$$\alpha(\alpha + R_e/L) + 1/CL = 0, \quad L\alpha^2 + R_e\alpha + 1/C = 0,$$

$$\alpha_{1,2} = -100c^{-1} \Rightarrow \alpha = p.$$

4.1.5. Використовуючи один із методів інтегрування, по рівняннях станів (п.4.1.3.) розрахуємо вихідну змінну. Крок інтегрування вибираємо із аналізу значення коренів характеристичного рівняння для схем. Результати, розрахунку порівняємо з рівнянням п.п. 4.1.1. та 4.1.2.

Так як $R_e = R_1 + R_2 + R_4$, $E_2 = E + R_2I$, тоді рівняння стану мають вигляд

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_L}{C}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{E_e - R_e i_L - U_e}{L}.$$

По методу трапецій ці рівняння запишемо як

$$U_{K+1} = U_K + \frac{h}{2} \left(\frac{i_K + i_{K+1}}{C} \right),$$

$$i_{K+1} = i_K + \frac{h}{2} \left(\frac{-U_C - Ri_K + E_e}{L} + \frac{-U_{K+1} - Ri_{K+1} + E_e}{L} \right),$$

$$i_{K+1} = i_K + \frac{h}{2} \left(\frac{-U_K - Ri_K + E_e}{L} + \frac{-U_K - \frac{h i_K}{2c} - \frac{h i_{K+1}}{2} - Ri_{K+1} + E_e}{L} \right) =$$

$$= i_K + \frac{hE_e}{L} - \frac{hU_K}{L} - \left(\frac{hR}{2L} + \frac{h^2}{4CL} \right) i_K - \left(\frac{h^2}{4CL} + \frac{hR}{2L} \right) i_{K+1}$$

Звідси

$$i_{\alpha+1} \left(1 + \frac{h^2}{4CL} + \frac{hP}{2L} \right) = i_K \left(1 - \frac{hP}{2L} + \frac{h^2}{4CL} \right) - \frac{h}{L} U_K + \frac{hE_e}{L}.$$

Якщо $h = \tau$, $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{100}$, $h = 0,01c$, тоді

$$i_{K+1} = -0,1 i_K - 0,044U_K + 1,77,$$

$$U_{K+1} = U_K + \frac{0,01}{2} \left(\frac{i_K + i_{K+1}}{10_{-3}} \right).$$

Відповідно розрахункові формули приймуть вигляд

$$i_{K+1} = -0,1 i_K - 0,044U_K + 1,77,$$

$$U_{K+1} = U_K + 5(i_K + i_{K+1})$$

а результати приведені на рис.10.11

i_k	U_k
2	
1,111	35,556
0,519	33,698
0,223	37,403
0,091	38,969
0,036	39,602
0,014	39,849
$i_k \approx 0$	$U_k \approx 40$

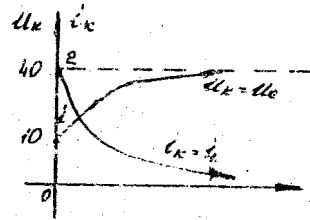


Рис. 10.11

Згідно методу Ейлера,

$$i_{K+1} = i_K - h \left(\frac{-U_K - R_e i_K + E_e}{L} \right),$$

$$U_{K+1} = U_K + h \left(\frac{i_K}{C} \right).$$

Якщо $h = \frac{\tau}{2} = 0,005c$, тоді

$$i_{K+1} = i_K + 0,005 \left(\frac{-U_K - 20i_K + 40}{0,1} \right),$$

$$U_{K+1} = U_K + 0,005 \frac{i_K}{0,01}.$$

Результати зображено на рис.10.12, якщо $h \approx 0,005c$, тоді наявний метод Ейлера дає

$$i_{K+1} = i_K + h \left(\frac{-U_{K+1} - R_e i_{K+1} + E_e}{L} \right), \quad U_{K+1} = U_K + h \left(\frac{i_{K+1}}{C} \right),$$

або $i_{K+1} = \frac{i_K}{2,25} - 0,02U_K + 0,89$, $U_{K+1} = U_K + 5i_{K+1}$, що ілюструє рис. 10.13

Таблиця до рис.10.12

i_K	U_K
2	10
1,5	20
1	27,51
0,625	32,52
0,281	35,73
0,375	34,38
0,211	36,84
0,156	37,68
0,119	38,20
0,089	38,66
0,061	39,32
$i_K \approx 0$	$U_K \approx 40$

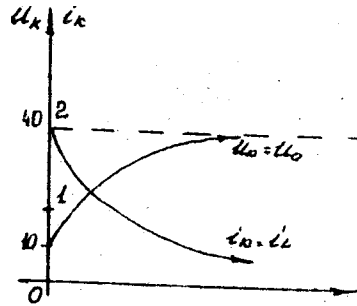


Рис. 10.12

4.1.6. Зобразити резистивну схему заміщення вихідного кола, замінивши динамічні елементи дискретними моделями, відповідними методу інтегрування. Визначити по схемі заміщення вихідну змінну.

Еквівалентна схема заміщення по наявному методу Ейлера представлена на рис. 10.14.

Якщо $h = 5\tau$, $\tau = \frac{1}{|p|} = 0,01$, $h = 0,05$, тоді

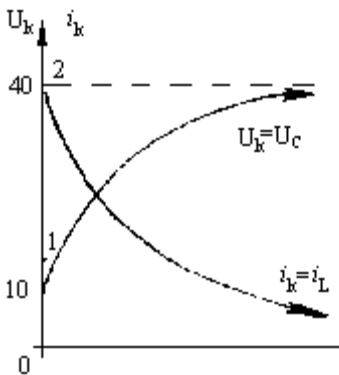


Рис.10.13

$$i_{K+1} = \frac{E_e + \frac{L}{h} i_{LK} - U_{CK}}{R_e + \frac{h}{C} + \frac{C}{h}},$$

$$U_{CK+1} = \frac{h}{C} i_{K+1} - U_{CK}$$

Таблиця до рис.10.13

i_K	U_K
2	10
1,56	17,78
1,19	23,71
0,89	28,12
0,66	31,44
0,48	33,85
0,46	35,61
0,35	36,88
0,25	37,79
0,15	35,44
0,13	38,79
0,09	39,23
0,07	39,23
0,05	39,46
0,03	39,62
0,02	39,74
0,015	39,82
0,01	39,87
0,07	39,91
$i_K \approx 0$	$U_K \approx 40$

або

$$i_{K+1} = 0,55 + 0,028i_K - 0,014U_K, \quad U_{K+1} = 50i_{K+1} - U_K.$$

Звітні дані зведені в табл.. 10.1, де $i_K = i_L = 0$, $U_K = U_C \approx 40B$.

Табл. 10.1.

	2	0,466	0,098	0,022
	10	33,3	37,95	39,05

По методу трапецій (рис. 10.15.) маємо:

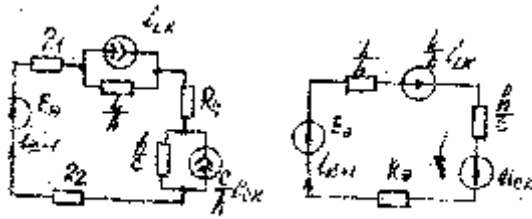


Рис. 10.14

$$i_{K+1} = \frac{E' - U_{LK} + \frac{2L}{h}i_{LK} - U_{CK} - \frac{h}{2C}i_{CK}}{R' + \frac{2L}{h} + \frac{h}{2C}},$$

$$U_{LK+1} = \frac{2L}{h}i_{K+1} + U_{LK} - \frac{2L}{h}i_K,$$

$$U_{CK+1} = \frac{h}{2C}i_{K+1} + U_{CK} + \frac{h}{2C}i_K.$$

Якщо $h = \tau - 0,01c$, тоді

$$i_{K+1} = 0,9 - 0,02(U_{LK} - U_{CK}) + 0,3i_K,$$

$$U_{LK+1} = 20(i_{K+1} - i_K) - U_{LK},$$

$$U_{CK+1} = 5(i_{K+1} + i_K) + U_{CK}.$$

Тоді при $i_K = i_L \approx 0$, $U_{CK} = U_C \approx 40B$, що видно із табл. 10.2.

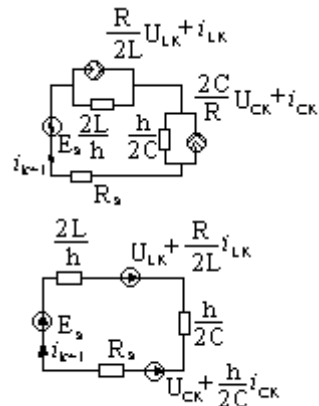


Рис. 10.15

Таблиця 10.2.

2	1,1	0,52	0,35	0,2
-10	-10	-1,6	-2,4	-0,6
10	25,5	33,6	37,95	39,95

4.2.1. Виконати аналіз схеми на ЕОМ за допомогою програми мікро АНЛІН.

5.1. По операторній схемі заміщення при струмі джерела, рівного нулю (рис. 10.16), отримати вираз схемної функції, відповідної шуканої змінної.

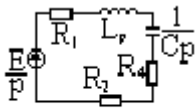


Рис.10.16

$$H(p) = \frac{I_{вих}}{U_{ex}}; \quad U_{ex} = \frac{E}{p}$$

$$I_{вих} = \frac{E}{p(R_1 + R_2 + R_4 + Lp + \frac{1}{Cp})} = 20p + 0,1p^2 + 10^3,$$

$$H(p) = \frac{I_{вих}}{U_{ex}} = \frac{20p}{0,1p^2 + 20p + 10^3} = \frac{200p}{p^2 + 200p + 10^4}.$$

5.2. Визначити частоту, добротність полюсів і нулів отриманої схемної функції. Зобразити полюси і нулі на комплексній площині (рис.10.17).

$$H(p) = \frac{200p}{p^2 + 200p + 10^4},$$

$$H(p) = \frac{\alpha_1 p^2 + \alpha p + \alpha_0}{\beta_1 p^2 + \beta p + \beta_0},$$

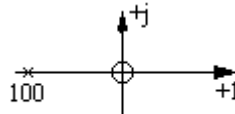


Рис. 10.17

$$Wp = \sqrt{\beta_0} = \sqrt{10^4} = 10^2 \text{ - частота полюса,}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ - добротність полюса.}$$

5.4. Визначити тип фільтру отриманої схемної функції, розрахувати граничні частоти, смугу пропускання, зобразити якісно АЧХ фільтру. При цьому

$$H(j\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega)^2 + 200j\omega + 10^4} = H(\omega) \exp \varphi(\omega),$$

$$H(\omega) = \left| \frac{200j\omega}{(j\omega)^2 + 200j\omega + 10^4} \right| = \left| \frac{200j\omega}{-\omega^2 + 200j\omega + 10^4} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{(200\omega)^2}{(10^4 - \omega^2)^2 + (200\omega)^2}} = 0,5,$$

або

$$\frac{(200\omega)^2}{(10^4 - \omega^2)^2 + (200\omega)^2} = 0,707,$$

або

$$\frac{4 \cdot 10^4 \omega^2 - 0,5 \cdot 10^8 - 10^4 \cdot \omega^2 - 0,5 \omega^4}{10^8 + 2 \cdot 10^4 \omega^2 + \omega^4} = 0.$$

Тоді

$$3 \cdot 10^4 \omega^2 - 0,5 \omega^4 - 0,5 \cdot 10^8 = Q,$$

$$0,5 t^2 - 3 \cdot 10^4 t + 0,5 \cdot 10^8 = 0,$$

$$t_1 = 58300, \quad t_2 = 1700, \quad \omega^2 = t,$$

$$\omega_1 = \sqrt{t_1} \approx 242, \quad \omega_2 = \sqrt{t_2} \approx 41.$$

АЧХ представлена на рис.10.18.

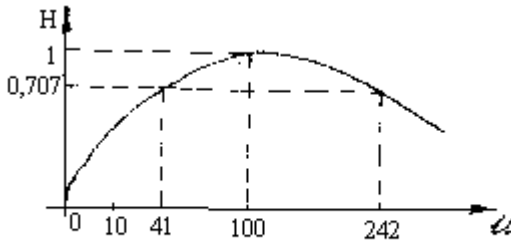


Рис. 10.18

5.5. Розрахувати на ЕОМ АЧХ та ФЧХ фільтра по програмі мікроАНЛІН (1 – якщо вихід взятий з резистора, 2 – якщо вихід є конденсатор).

7.3. По рівнянням стану:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{R_e}{L} i_L - \frac{1}{L} U_C + \frac{1}{L} E_e, \quad \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$$

скласти схему на операційних підсилювачах. Для чого їх проінтегруємо:

$$i_L \int \left(-\frac{R_0}{L} i_L - \frac{1}{L} U_C + \frac{1}{L} E_e \right) dt, \quad U_C = \frac{1}{C} \int i_L dt.$$

Так як в моделях є можливість виміряти напругу, тоді введемо:

$$\tilde{U}_C = U_C, \quad \tilde{U} = R_m i_L,$$

$$\text{тоді } \tilde{U} = \int \left(-\frac{R_e}{L} \tilde{U} - \frac{R_m}{L} U_C + \frac{R_m}{L} E_e \right) dt, \quad U_C = \frac{1}{CR_m} \int \tilde{U} dt.$$

Перше рівняння моделює схема рис.10.19, друге рівняння – рис. 10.20, а вся модель прийме вигляд рис.10.21.

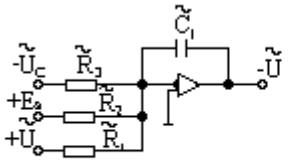


Рис. 10.19

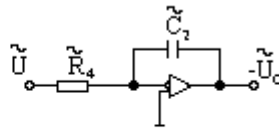


Рис. 10.20

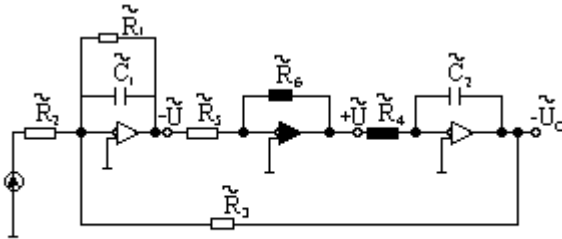


Рис. 10.21

Для останньої схеми:

$$-\tilde{U} = \int \left(-\frac{1}{\tilde{R}_1 \tilde{C}_1} \tilde{U} - \frac{1}{\tilde{R}_3 \tilde{C}_1} \tilde{U}_C + \frac{1}{\tilde{R}_2 \tilde{C}_1} E_e \right) dt; \quad \tilde{U}_C = \frac{1}{\tilde{R}_4 \tilde{C}_2} \int \tilde{U} dt,$$

$$\text{тоді } \frac{1}{\tilde{R}_1 \tilde{C}_1} = \frac{R}{L}; \quad \frac{1}{\tilde{R}_3 \tilde{C}_1} = \frac{R_m}{L}; \quad \frac{1}{\tilde{R}_2 \tilde{C}_1} = \frac{R_m}{4}; \quad \frac{1}{\tilde{R}_4 \tilde{C}_2} = \frac{1}{CR_m}; \quad r_5 = R_6.$$

Нехай $R_m = 1000 \text{ Ом}$; $R_5 = R_6 = 1000 \text{ Ом}$;

$$\tilde{C}_1 = 0,000001 \text{ Ф}; \tilde{C}_2 = 0,00001 \text{ Ф};$$

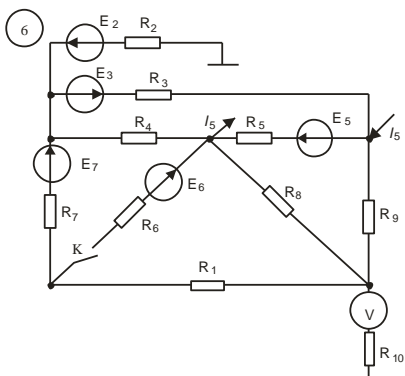
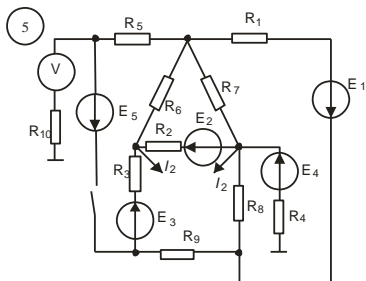
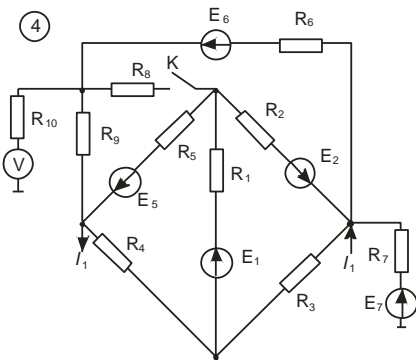
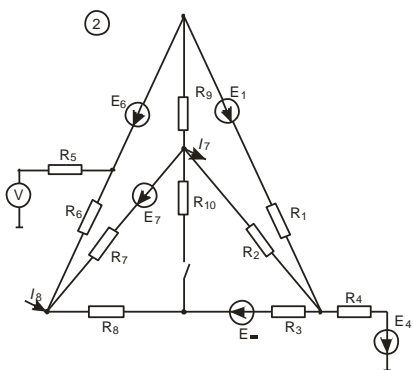
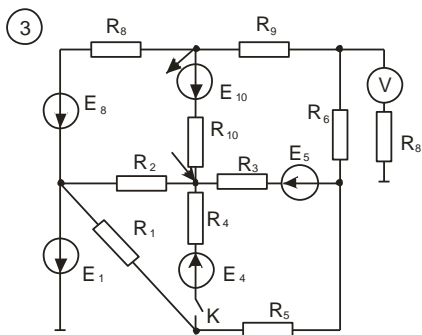
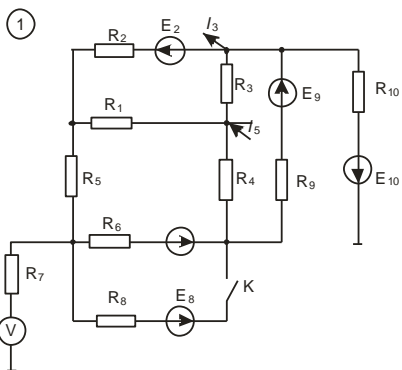
тоді $\tilde{R}_1 = 5000 \text{ Ом}$; $\tilde{R}_2 = \tilde{R}_3 = 100 \text{ Ом}$; $\tilde{R}_4 = 100000 \text{ Ом}$.

$$\text{Якщо } \frac{1}{\tilde{R}_1 \tilde{C}_1} = 20, \frac{1}{\tilde{R}_3 \tilde{C}_1} = \frac{1}{\tilde{R}_2 \tilde{C}_1} = 10 R_m, \quad \frac{1}{\tilde{R}_4 C_2} = 1000 \frac{1}{R_m},$$

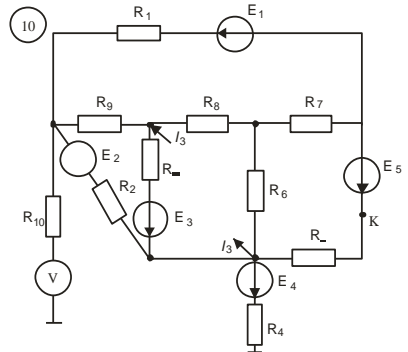
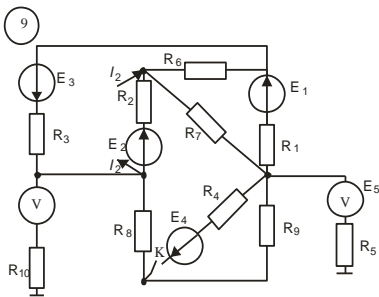
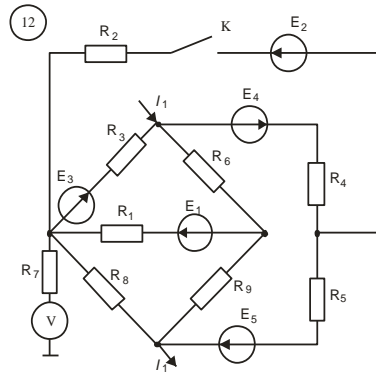
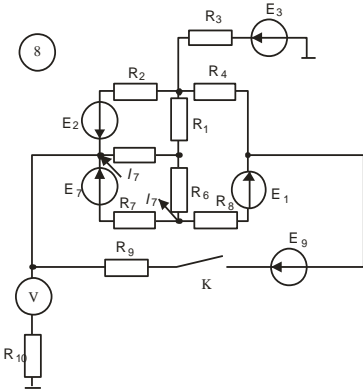
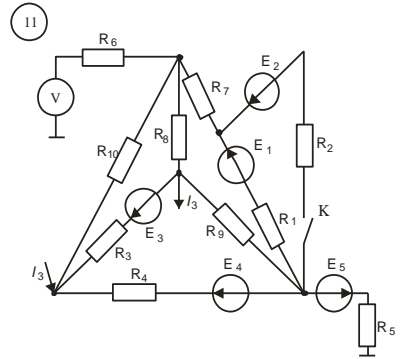
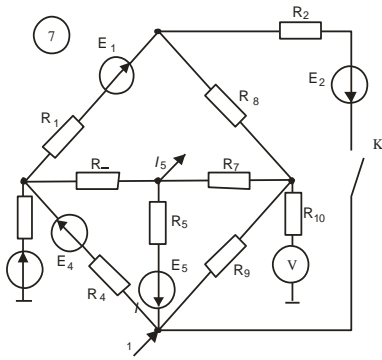
$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{200 \tilde{C}_1}, \quad \tilde{R}_3 = \tilde{R}_2 = \frac{1}{10 \tilde{R}_m \tilde{C}_1}, \quad \tilde{R}_4 = \frac{R_m}{1000 \tilde{C}_2}.$$

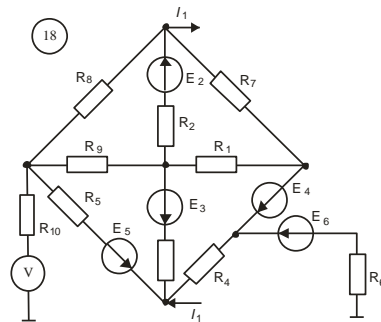
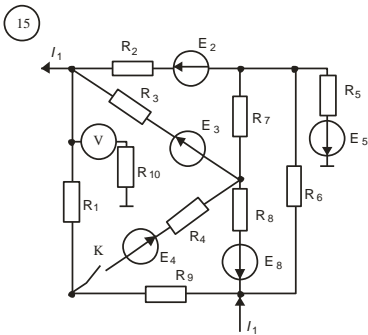
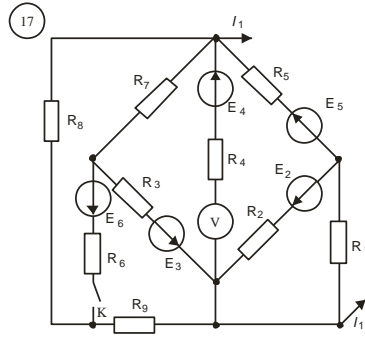
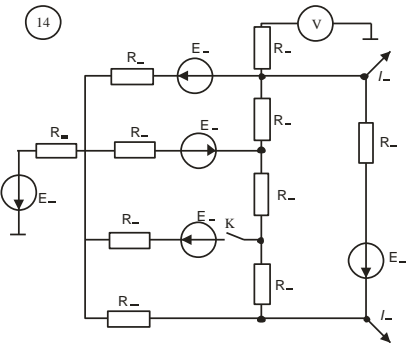
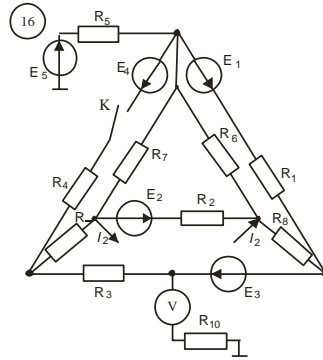
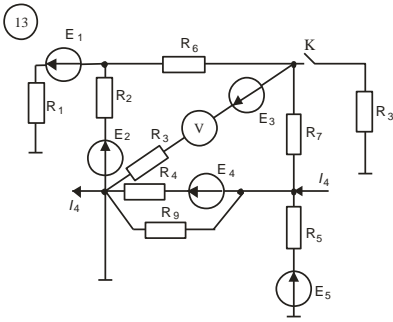
Додатки

Додаток 1

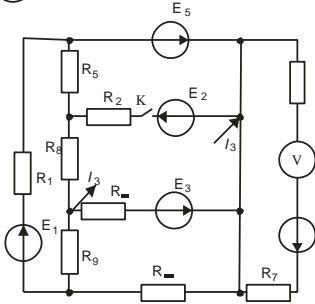


Продовження додатку 1

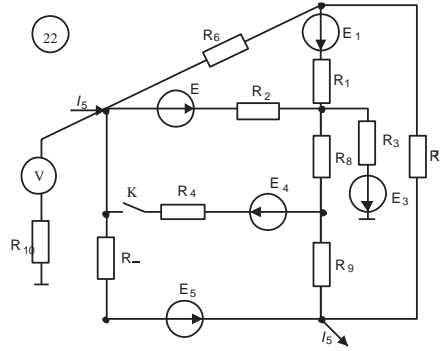




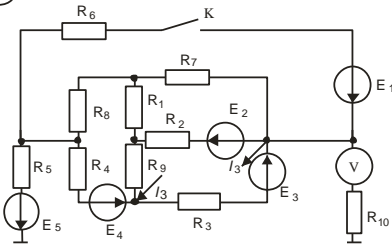
19



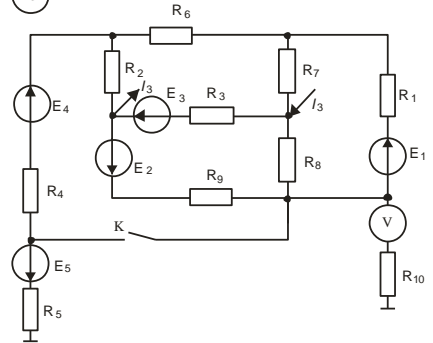
22



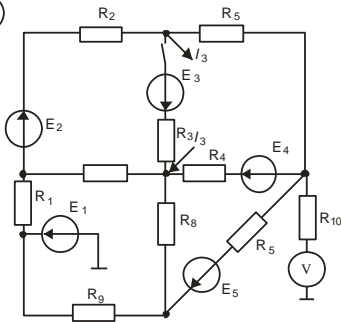
20



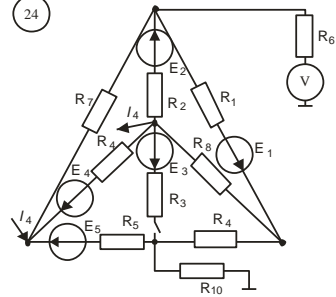
23



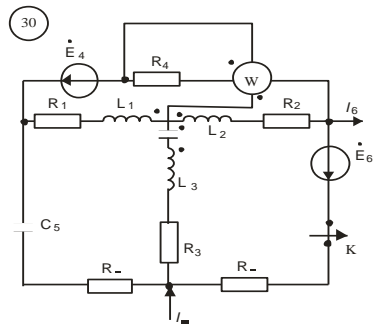
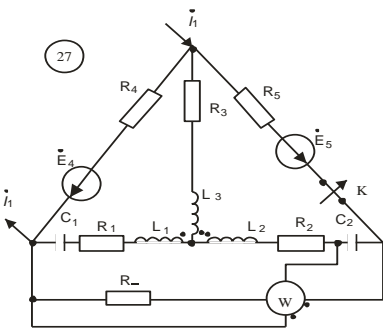
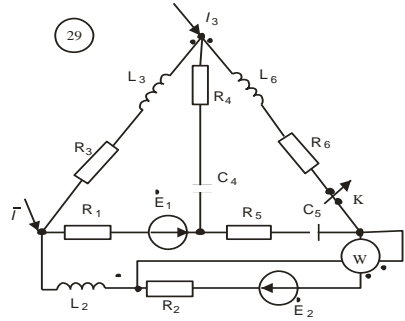
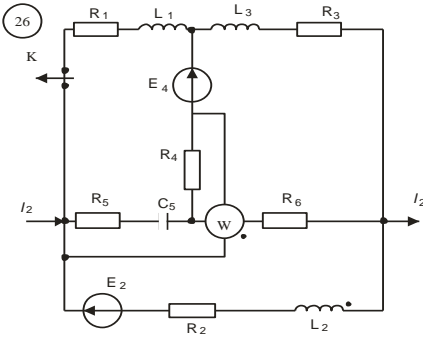
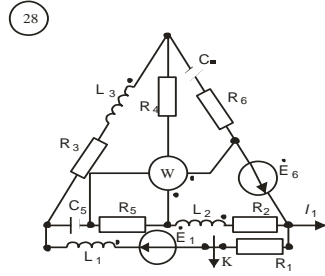
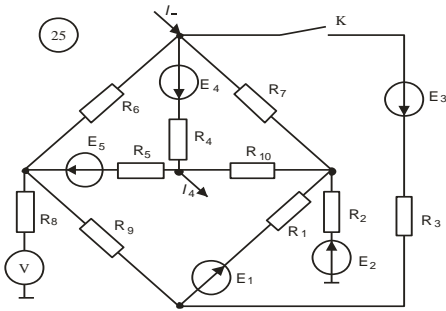
21

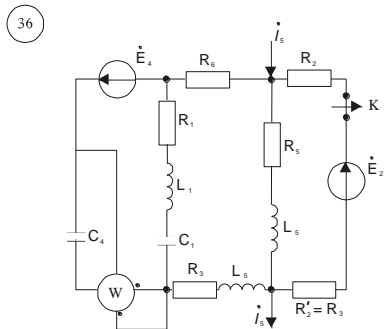
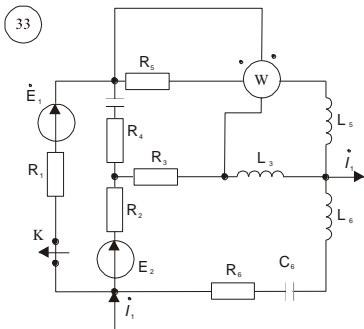
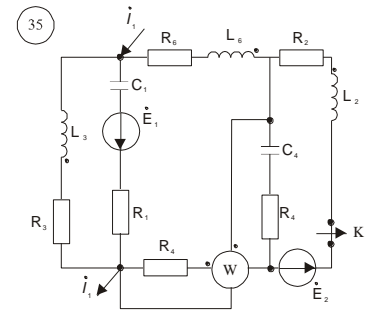
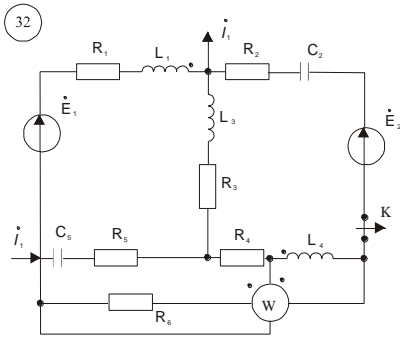
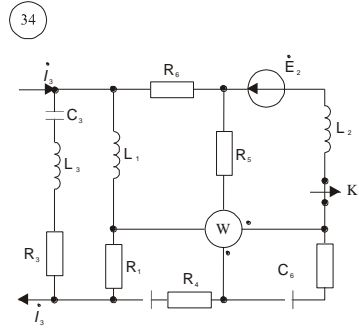
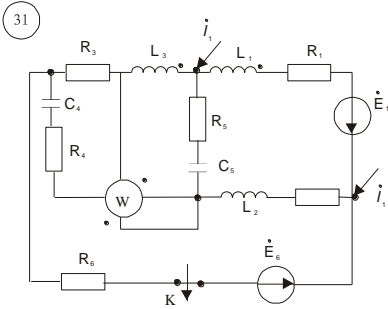


24

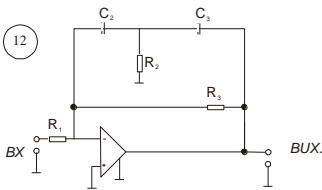
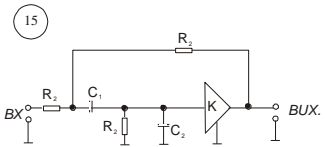
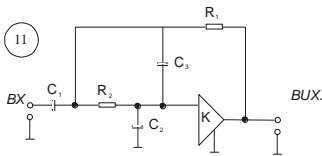
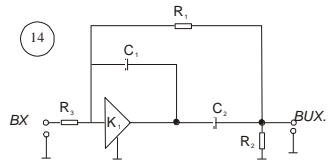
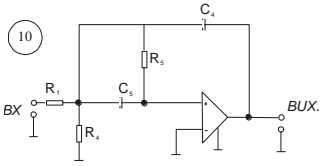
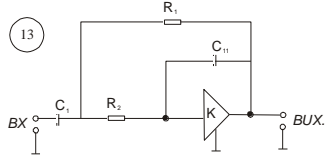
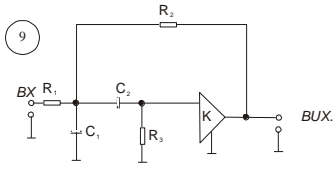


Продовження додатку 1

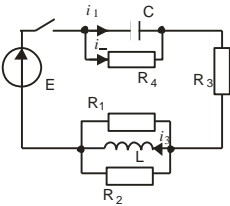




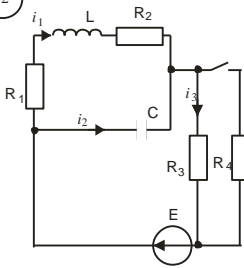
Продовження додатку 2



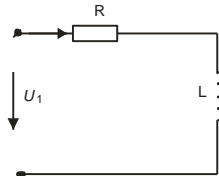
1



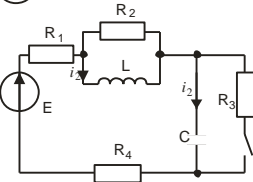
2



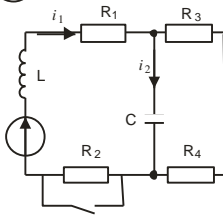
3



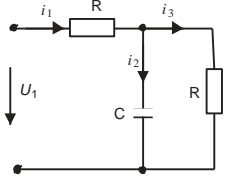
4



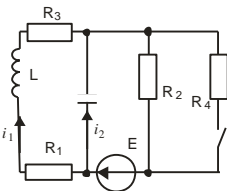
5



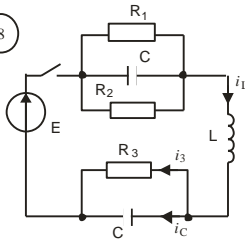
6



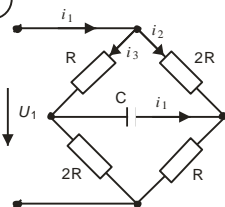
7



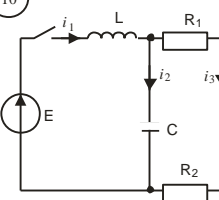
8



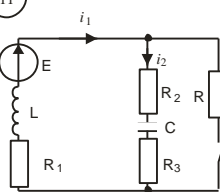
9



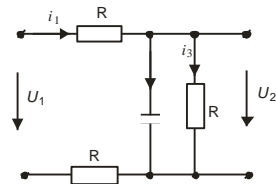
10

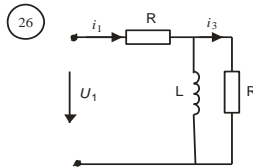
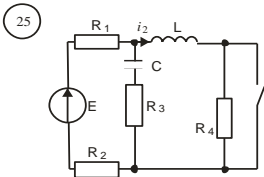
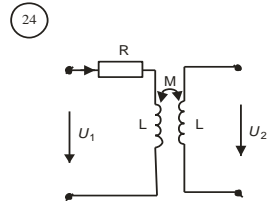
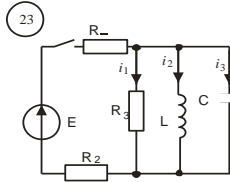
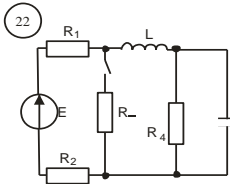
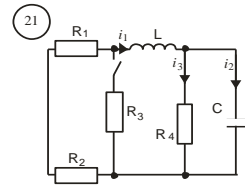
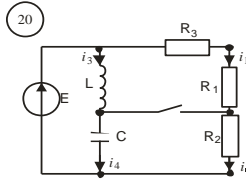
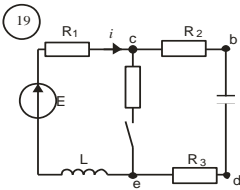
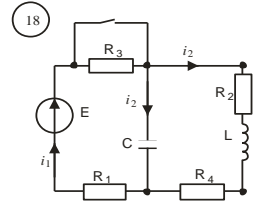
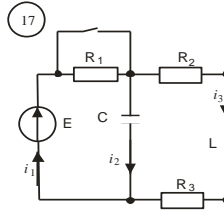
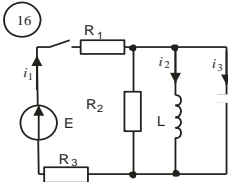
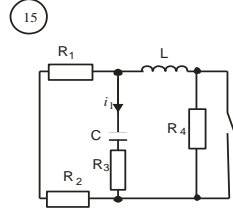
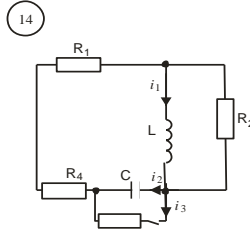
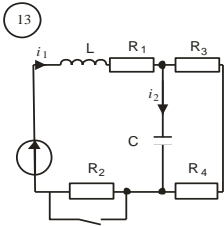


11

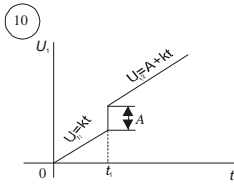
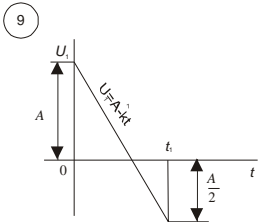
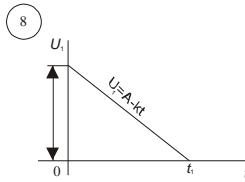
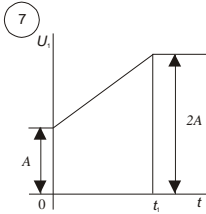
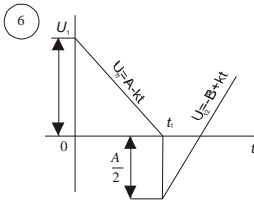
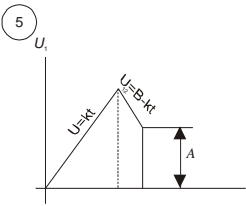
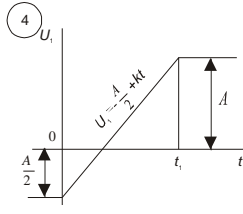
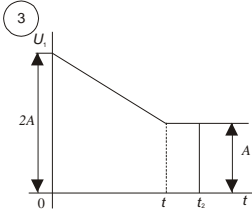
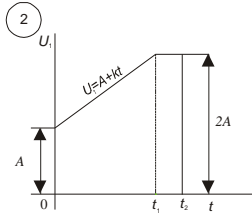
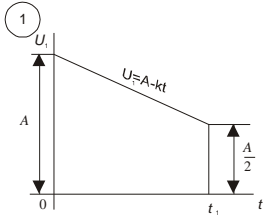


12

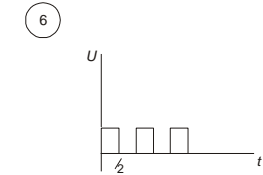
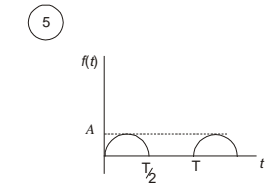
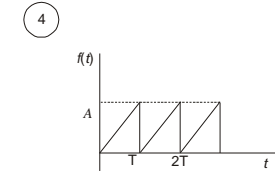
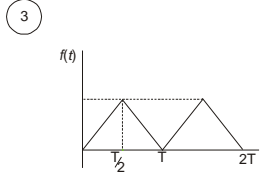
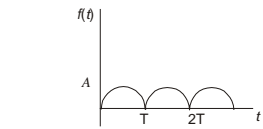
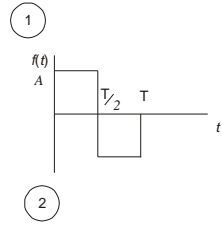




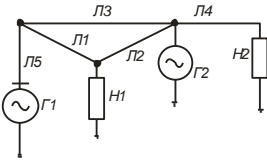
Додаток 4



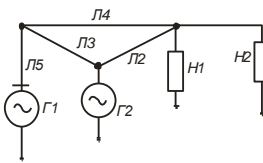
Додаток 5



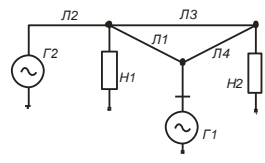
1



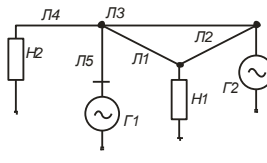
2



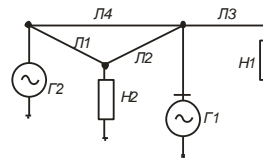
3



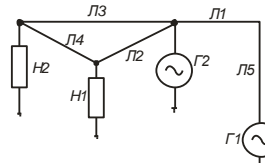
4



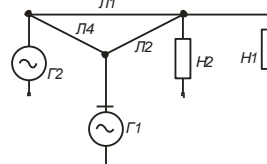
5



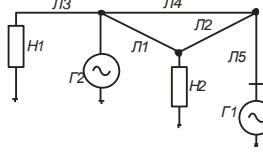
6



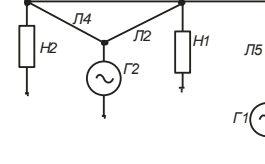
7



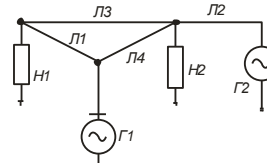
8



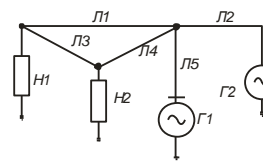
9



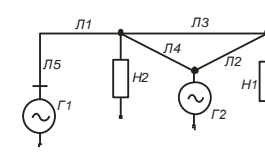
10



11



12



Література

Рекомендована

1. Борисов Ю.М., Липатов Д.Н. Общая электротехника. – М.: Высшая школа, 1974.
2. Веников В.А., Шнейберг Я.А. Мировоззренческий и воспитательный аспекты преподавания технических дисциплин (на примере электротехники и электроэнергетики). – М.: Высшая школа, 1979.
3. Веселовский О.Н., Шнейберг Я.А. Энергетическая техника и ее развитие. – М.: Высшая школа, 1976.
4. Лабораторные работы по электротехнике / Под ред. В.С. Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1977.
5. Основы промышленной электроники / Под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1978.
6. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Под ред. В.С. Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1979.
7. Электротехника / Под ред. В.С. Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1976.
8. Электротехника: Программированное учебное пособие / Под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1983.

Використана

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Брускин Д.Э., Зорохович А.Е., Хвостов В.С. Электрические машины, ч.1 и 2. – М.: Высшая школа, 1979.
3. В.Г. Герасимов В.Г. и др. Неразрушающий контроль качества изделий электромагнитными методами. – М.: Энергия, 1978.
4. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники, т. I, II. – М.: Высшая школа, 1980.
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, т. II. – М.: Высшая школа, 1977.
6. Зевеке Г.В. и др. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1975.

7. Коген-Далин В.В., Комаров Е.В. Расчет и испытание систем с постоянными магнитами. – М.: Энергия, 1977.
8. Мардин В.В., Кривонос А.И. Справочник по электронным измерительным приборам. – М.: Связь, 1978.
9. Куликов А.А. Основы электропривода. – Киев: Вища школа, 1977.
10. Постоянные магниты: Справочник.) Под ред. Ю.М. Пятина. – М.: Энергия, 1980.
11. Преображенский В.П. Теплотехнические измерения и приборы. – М.: Энергия, 1978.
12. Савельев И.В. Курс общей физики, т. 2. – М.: Наука, 1982.
13. Шкабардня М.С., Мартыненко Н.В. Быстродействующие самопишущие приборы. – М.: Энергия, 1974.
14. Шляндин В.М. Цифровые измерительные приборы. – М.: Высшая школа, 1981.
15. Юферов Ф.М. Электрические машины автоматических устройств. – М.: Высшая школа, 1976.
16. Электрические измерения) Под ред. В.Н. Малиновского. – М.: Высшая школа, 1982.
17. Электрические измерения) Под ред. А.В. Фремке и Е.Н. Душина. Л.: Энергия, 1980.
18. Электротехнический справочник, т. I. – М.: Энергия, 1980.
19. Иванов А.А. Справочник по электротехнике. – К.: Вища школа, 1979.
20. Родзевич В.Е. загальна електротехніка: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1993.
21. Євдокимов Ф.Е. Теоретичні основи електротехніки. К.: Вища школа, 1983.
22. Евсюков А.А. Электротехника. – М.: Просвещение, 1979.

Зміст

Передмова.....	3
Розділ 1. Електричний струм.....	4
1.1. Основні поняття та означення	4
1.2. Диференціальна форма закону Ома та Джоуля-Ленца. Густина струму.....	8
1.3. Електрорушійна сила. Закон Ома для повного кола	12
1.4. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа.....	16
1.5. Нестационарні струми. Рівняння неперервності.....	18
1.6. Перехідні процеси у колі з конденсатором	21
1.7. Дифузійні та теплові струми.....	23
Розділ 2. Електромагнітна індукція	26
2.1. Закон електромагнітної індукції Фарадея	26
2.2. Явище самоіндукції	33
2.3. Взаємоіндукція.....	38
2.4. Енергія магнітного поля.....	42
2.5. Вихрові струми.....	44
Розділ 3. Основи теорії лінійних електричних кіл змінного струму.....	49
3.1. Найпростіший генератор змінного струму.....	49
3.2. Характеристики змінних ЕРС, напруг і струмів	50
3.3. Амплітудне, діюче і середнє значення змінних ЕРС, напруги і струму.....	52
3.4. Представлення синусоїдальних функцій у вигляді векторів, що обертаються. Векторна діаграма	54
3.5. Закони Кірхгофа для кола змінного струму	56
3.6. Активний опір у колі змінного струму	56
3.7. Індуктивність у колі змінного струму.....	57
3.8. Аналіз електричного кола змінного струму з послідовним з'єднанням R, L, C – елементів при встановленому режимі роботи	59
3.9. Аналіз електричного кола змінного струму з паралельним з'єднанням R, L, C – елементів при встановленому режимі роботи.....	68
3.10. Трикутники напруг і опорів, струмів і провідностей ...	77
3.11. Метод провідностей.....	82
3.12. Потужність у колі змінного струму	

3.13. Резонансні явища в електричних колах змінного струму. Вільні (власні) електричні коливання	91
3.14. Метод комплексних амплітуд. Комплексне представлення змінних величин	98
3.15. Вимушені коливання	99
3.16. Зв'язані резонансні контури	106
Розділ 4. Розрахунково-графічні завдання	112
Додатки	148
Література	160
Зміст	162

Наукове видання

Б.С.Колупаєв

ФІЗИКА ОСНОВ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Монографія

Комп'ютерна верстка та макет

Третяк О.Ю.

Підписано до друку 17.05.2007 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Умовн.друк.арк. 9,5. Наклад 1000 примірників.
Замовлення № 27/1.

ББК 22.33

К 61

УДК 537:621.3

**Колупаєв Б.С. Фізика основ електротехніки: Монографія:
В 2 т. – Рівне: РДГУ, 2007. – 163 с.**

Монографія є першою частиною запланованого двотомного видання фізики основ електротехніки та радіоелектроніки, в якій дається поглиблене викладання вибраних розділів курсу фізики, знання яких необхідне для розуміння фізичних явищ та процесів, покладених в основу функціонування електрорадіотехніки. Розгляд питань фізики електричних явищ, усвідомлення принципу роботи електротехнічних пристроїв, запропонований математичний апарат дозволяє провести розрахунки конкретних електротехнічних схем, які широко використовуються в науці та техніці.

Для викладачів, інженерів, студентів фізичних спеціальностей, осіб, які вивчають основи електротехніки.

Віддруковано засобами оперативної поліграфії
редакційно-видавничого відділу
Рівненського державного гуманітарного університету